

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»**

**Інститут електроенергетики
Факультет інформаційних технологій
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій**

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
кваліфікаційної роботи ступеню бакалавра**

студента Антіпова В'ячеслава Олександровича

академічної групи 172–17зск–2

спеціальності 172 «Телекомунікації і радіотехніка»

за освітньо-професійною програмою Телекомунікації і радіотехніка

на тему Порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського шуму

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи	Гусєв О.Ю.	90	відмінно	
розділів:				
спеціальний	Горєв В.М.	90	відмінно	
економічний	Романюк Н.М.			
Рецензент	Шедловський І.А.	90	відмінно	
Нормоконтролер	Гусєв О.Ю.			

**Дніпро
2020**

ЗАТВЕРДЖЕНО:
завідувач кафедри
безпеки інформації та телекомунікацій
д.т.н., професор _____ Корнієнко В.І.
«___» _____ 2020 року

ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу ступеня бакалавра

студенту Антіпову В.О. академічної групи 172–17зск–2

спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка

за освітньо-професійною програмою 172 «Телекомунікації і радіотехніка»

на тему: Порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського шуму

затверджену наказом ректора НТУ «Дніпровська політехніка» від _____ № _____

Розділ	Зміст	Термін виконання
Стан питання. Постановка задачі	Огляд літератури за темою, обґрунтування поставленої задачі	11.02.2020 – 11.03.2020
Спеціальна частина	Наближний пошук вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для фрактального гаусівського шуму на основі тригонометричного ряду Фур'є. Порівняння поліноміальних і тригонометричних розв'язків	11.03.2020 – 01.05.2020
Економічний розділ	Розрахунок трудомісткості та витрат на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера	01.05.2019 – 01.06.2019

Завдання видано

О.Ю. Гусєв

Дата видачі 11.02.2020

Дата подання до екзаменаційної комісії 05.06.2020

Прийнято до виконання

В.О. Антіпов

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 57с., 18 рис., 2 табл., 5 додатків, 11 джерел.

Об'єкт дослідження: фільтр Колмогорова-Вінера для прогнозування неперервного фрактального гаусівського шуму.

Предмет дослідження: вагова функція відповідного фільтру.

Мета роботи: отримати наближені розв'язки для вагової функції на основі тригонометричного ряду Фур'є та порівняти їх з поліноміальними.

У першому розділі зроблено огляд робіт попередників та обґрунтовано актуальність задачі.

У спеціальній частині знайдено наближені розв'язки інтегрального рівняння для вагової функції фільтра. Вагова функція шукалась у вигляді обірваного розвинення у тригонометричний ряд Фур'є. Досліджено поведінку тригонометричних розв'язків до наближення п'ятнадцяти гармонік включно, проілюстровано збіжність методу. Отримані тригонометричні розв'язки задачі порівняно з поліноміальними. Показано, що поліноміальні наближені розв'язки задачі є кращими за тригонометричні, бо вони забезпечують кращу збіжність лівої та правої частин відповідного інтегрального рівняння на кінцях досліджуваного відрізка, та потребують менше машинного часу на обчислення.

В економічному розділі виконані розрахунки трудомісткості та витрат на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова-Вінера.

Результати роботи можуть бути враховані при дослідженні прогнозування телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ВІНЕРА-ХОПРФА, ВАГОВА ФУНКЦІЯ ФІЛЬТРУ КОЛМОГорова-ВІНЕРА, ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ, ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РЯД ФУР'Є, ФРАКТАЛЬНИЙ ГАУСІВСЬКИЙ ШУМ, ПОЛІНОМІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ.

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка: 57с., 18 рис., 2 табл., 5 приложений, 11 источников.

Объект исследования: фильтр Колмогорова-Винера для прогнозирования непрерывного фрактального гауссова шума.

Предмет исследования: весовая функция соответствующего фильтра.

Цель работы: получить приближенные решения для весовой функции на основе тригонометрического ряда Фурье и сравнить их с полиномиальными.

В первом разделе сделан обзор работ предшественников и обоснована актуальность задачи.

В специальной части найдены приближенные решения интегрального уравнения для весовой функции фильтра. Весовая функция искалась в виде оборванного разложения в тригонометрический ряд Фурье. Исследовано поведение тригонометрических решений до приближения пятнадцати гармоник включительно, проиллюстрирована сходимость метода. Полученные тригонометрические решения задачи сравнены с полиномиальными. Показано, что полиномиальные приближенные решения лучше тригонометрических, потому что они обеспечивают лучшую сходимость левой и правой частей соответствующего интегрального уравнения на концах исследуемого отрезка, и требуют меньше машинного времени на вычисления.

В экономическом разделе выполнены расчеты трудоемкости и затрат на сравнение полиномиальных и тригонометрических приближенных решений для весовой функции фильтра Колмогорова-Винера.

Результаты работы могут быть учтены при исследовании прогнозирования телекоммуникационного трафика в системах с пакетной передачей данных.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА, ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ ФИЛЬТРА КОЛМОГОРОВА-ВИНЕРА, СХОДИМОСТЬ МЕТОДА, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ, ФРАКТАЛЬНЫЙ ГАУССОВ ШУМ, ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ.

ABSTRACT

Explanatory note: 57 pages, 18 pic., 2 tab., 5 appendices, 11 references.

Object of research: Kolmogorov–Wiener filter for forecasting of continuous fractional Gaussian noise.

Subject of research: the weight function of the corresponding filter.

The aim of the work: to obtain approximate solutions for the weight function on the basis of a trigonometric Fourier series and to compare them with the polynomial ones.

In the first section the literature review is made and the actuality of the problem is substantiated.

In the special part approximate solutions of the integral equation for the weight function are found. The weight function was sought as a truncated trigonometric Fourier series. The behavior of the trigonometric solution is investigated up to the fifteen-harmonic approximation, the convergence of the method is illustrated. The obtained trigonometric solutions of the problem are compared with the polynomial ones. It is shown that the polynomial solutions are better than the trigonometric ones, because they provide better coincidence of the left-hand and the right-hand sides of the corresponding integral equation at the ends of the interval under consideration. Moreover, they require less computation time.

In the economic section the labour-intensity and the costs are calculated for the comparison of polynomial and trigonometric solutions for the Kolmogorov–Wiener filter weight function.

The results of the work may be taken into account in the investigation of the telecommunication traffic forecasting for systems with data burst transfer.

WIENER–HOPF INTEGRAL EQUATION, KOLMOGOROV–WIENER FILTER WEIGHT FUNCTION, METHOD CONVERGENCE, TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES, FRACTIONAL GAUSSIAN NOISE, POLYNOMIAL SOLUTIONS.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1 СТАН ПИТАННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	9
1.1 Стан питання.....	9
1.1.1 Трафік як фрактальний гаусів шум та фільтр Колмогорова–Вінера для його прогнозування.....	9
1.1.2 Метод Галеркіна та огляд робіт попередників	11
1.2 Постановка задачі.....	13
1.3 Висновки.....	14
2 СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА.....	15
2.1 Пошук вагової функції у вигляді розвинення у тригонометричний ряд Фур'є.....	15
2.2 Властивості інтегральних дужок.....	19
2.3 Поведінка розв'язків.....	24
2.4 Порівняння тригонометричних та поліноміальних розв'язків.....	35
2.5 Висновки.....	37
3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ.....	39
3.1 Визначення трудомісткості порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера.....	39
3.2 Розрахунок витрат на створення продукту.....	42
3.3 Висновки.....	45
ВИСНОВКИ.....	47
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	49
ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи.....	51
ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії.....	52
ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica.....	53
ДОДАТОК Г. Відгук керівника економічного розділу.....	56
ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи.....	57

ВСТУП

Однією з важливих задач для телекомунікацій на сьогоднішній день є задача прогнозування телекомунікаційного трафіку. Відомим є факт, що трафік у системах з пакетною передачею даних має фрактальні властивості (див., наприклад, [1]).

Як відомо, однією найпростіших моделей, які описують фрактальний телекомунікаційний трафік, є модель, у якій трафік вважається фрактальним гаусівським шумом (див., наприклад, [2]). Як відомо [3], фрактальний Гаусівський шум є стаціонарним випадковим процесом. Для прогнозування стаціонарного процесу можна використовувати фільтр Колмогорова–Вінера. У роботі [4] вказано, що у випадку великої кількості даних слід розглядати трафік як неперервний випадковий процес. Тобто для прогнозування телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних актуальною задачею є пошук вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування неперервного фрактального гаусівського шуму. Для простоти у даній роботі розглянуто лише випадок, коли показник Херста є більшим за 0,5.

Як відомо [5], вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера у випадку неперервного стаціонарного випадкового процесу є розв'язком інтегрального рівняння Вінера–Хопфа, яке, фактично, є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. У роботі [6] зазначено, що метод Галеркіна [7] має бути збіжним для пошуку вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для фрактального гаусівського шуму. У роботі [6] показана збіжність цього методу на основі поліноміальних розв'язків, проте зазначається, що мала кількість поліномів не дає гарного співпадіння лівої та правої частин інтегрального рівняння, та треба брати досить велику кількість поліномів для того, щоб отримати хороше співпадіння. Невідомо, чи є поліноміальні розв'язки оптимальними, чи якісь інші розв'язки дадуть більш швидку збіжність.

Тому цікавою задачею є пошук розв'язків для відповідної вагової на основі інших (не поліноміальних) ортогональних систем функцій та порівняння відповідних розв'язків з поліноміальними. У даній роботі в якості такої

ортогональної системи функцій обрана ортогональна система косинусів і синусів, тобто, невідома вагова функція шукається у вигляді розвинення у тригонометричний ряд Фур'є.

В економічному розділі виконані розрахунки трудомісткості та витрат на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера.

1 СТАН ПИТАННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1 Стан питання

1.1.1 Трафік як фрактальний гаусівський шум та фільтр Колмогорова–Вінера для його прогнозування

Як відомо (див., наприклад, [1]), у системах з пакетною передачею даних телекомунікаційний трафік вважається фрактальним випадковим процесом. Існує багато моделей трафіку, однією з найпростіших є модель, де трафік описано як фрактальний гаусівський шум (див., наприклад, [2]). Відомим фактом [3] є факт, що фрактальний гаусівський шум є стаціонарним випадковим процесом. Тобто така модель трафіку є простою, бо, звісно, працювати зі стаціонарним процесом набагато простіше, ніж з нестаціонарним. Як відомо [3], кореляційна функція неперервного фрактального Гаусівського шуму має вигляд

$$R(\tau) = 2H(2H - 1)\sigma^2 |\tau|^{2H-2}, \quad (1.1)$$

де σ^2 – дисперсія процесу та H – показник Херста. Те, що ця кореляційна функція є додатно визначеною, обумовлює збіжність методу для даної задачі, див. [6].

Зокрема, одним з найпростіших фільтрів, які можуть бути використані для прогнозування стаціонарного випадкового процесу, є фільтр Колмогорова–Вінера [8]. Це – лінійний стаціонарний фільтр, в рамках якого у випадку нескінченно тривалих у часі неперервних процесів вхід $x(t)$ і вихід $y(t)$ фільтру пов'язані співвідношенням

$$y(t) = \int_0^{\infty} d\tau h(\tau)x(t - \tau), \quad (1.2)$$

де $h(\tau)$ – вагова функція фільтра.

Тобто, як бачимо з (1.2), необхідно знати вагову функцію фільтра для того, щоб отримати значення виходу фільтра. Тобто, пошук вагової функції фільтра є дуже важливою задачею для прогнозування телекомунікаційного трафіку як фрактального гаусівського шуму.

Як відомо [8], відповідна вагова функція для випадку нескінченно тривалих у часі сигналів є розв'язком відповідного інтегрального рівняння:

$$R_{sx}(t+z) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.3)$$

де R_{sx} – взаємна кореляційна функція вхідного сигналу та шуму, R_x – автокореляційна функція вхідного сигналу та z – часовий інтервал, на який фільтр робить прогноз. Рівняння (1.3) є відомим рівнянням Вінера–Хопфа, яке, фактично, є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду.

В загальному випадку, фільтр може розв'язувати дві задачі – «викидання» шуму з суміші вхідного сигналу та шуму і задачу прогнозування. У даній роботі вхідний трафік вважається незашумленим, тобто R_{sx} співпадає з R_x , та ставиться лише задача прогнозування. Більш того, процеси в даній роботі не вважаються нескінченно тривалими. Вважається, що вхідні дані задано для деякого часового інтервалу $t \in [0, T]$, T – тривалість інтервалу часу, на якому задано вхідні дані. У такому разі, як відомо [5], вирази (1.2) та (1.3) узагальнюються наступним чином:

$$y(t) = \int_0^T d\tau h(\tau) x(t-\tau), \quad (1.4)$$

та

$$R_x(t+z) = \int_0^T d\tau h(\tau) R_x(t-\tau). \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) є інтегральним рівнянням для шуканої вагової функції фільтра $h(\tau)$. Підставивши кореляційну функцію відповідного стаціонарного процесу (1.1) у (1.5), маємо

$$2H(2H-1)\sigma^2(t+z)^{2H-2} = \int_0^T d\tau h(\tau) 2H(2H-1)\sigma^2|t-\tau|^{2H-2}, \quad (1.6)$$

та скоротивши однакові доданки в обох частинах виразу (1.6), остаточно приходимо до рівняння

$$\int_0^T d\tau h(\tau)|t-\tau|^{2H-2} = (t+z)^{2H-2}. \quad (1.7)$$

Вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера шукається на основі рівняння (1.7).

1.1.2 Метод Галеркіна та огляд робіт попередників

Знаходження точного інтегрального розв'язку для рівняння (1.7) є дуже складною задачею, тому у роботах попередників відповідне інтегральне рівняння розв'язувалось на основі наближених методів. У роботі [6] запропоновано метод Галеркіна [7] для розв'язання інтегрального рівняння (1.7) та обґрунтовано, що цей метод є збіжним для даного рівняння.

Ідея методу є наступною. Нехай задано інтегральне рівняння Фредгольму першого роду

$$\int_0^T d\tau h(\tau) K(t, \tau) = f(t), \quad (1.8)$$

де $K(t, \tau)$ – ядро інтегрального рівняння, $f(t)$ – відома функція, $h(\tau)$ – невідома функція. В рамках методу Галеркіна [7] невідома функція розвивається у ряд за ортогональною системою функцій $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \dots$:

$$h(\tau) = \sum_{s=1}^n g_s \psi_s(\tau), \quad (1.9)$$

g_s – невідомі коефіцієнти при функціях $\psi_s(\tau)$. Вираз (1.8) підставляється у (1.9):

$$\sum_{s=1}^n g_s \int_0^T d\tau \psi_s(\tau) K(t, \tau) = f(t), \quad (1.10)$$

далі цей вираз множиться на $\psi_k(t)$ в обох частинах рівняння, $k = \overline{1, n}$:

$$\sum_{s=1}^n g_s \int_0^T d\tau \psi_k(t) \psi_s(\tau) K(t, \tau) = \psi_k(t) f(t), \quad (1.11)$$

та береться інтеграл за t від обох частин рівняння за:

$$\sum_{s=1}^n g_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau \psi_k(t) \psi_s(\tau) K(t, \tau) = \int_0^T dt \psi_k(t) f(t). \quad (1.12)$$

Позначивши інтеграли у (1.12) як

$$G_{ks} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \psi_k(t) \psi_s(\tau) K(t, \tau), \quad B_k = \int_0^T dt \psi_k(t) f(t), \quad (1.13)$$

Приходимо до висновку, що невідомі коефіцієнти g_s є розв'язками лінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=1}^n G_{ks} g_s = B_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.14)$$

У випадку, якщо метод збіжний, чим більша кількість n взятих функцій, тим точнішим є співпадіння лівої і правої частин інтегрального рівняння (1.8).

У роботі [6] досліджено поліноміальні розв'язки рівняння (1.7), тобто у якості відповідних функцій $\psi_s(\tau)$ взято поліноми Чебишева, які є ортогональними на відрізку $t \in [0, T]$. В цій роботі показана збіжність поліноміальних розв'язків, проте зазначено, що мала кількість поліномів не дає доброго співпадіння лівої та правої частин інтегрального рівняння (1.7). Для отримання відповідного доброго співпадіння треба взяти досить велику кількість поліномів.

Невідомо, чи є поліноміальні розв'язки оптимальними, тобто невідомо, чи не існує системи ортогональних функцій $\psi_s(\tau)$, яка в рамках методу Галеркіна дасть більш швидку збіжність. Тому цікавим є «методом спроб і помилок» досліджувати поведінку не поліноміальних розв'язків рівняння (1.7) та порівнювати їх з поліноміальними.

В даній роботі досліджуються пошук розв'язків інтегрального рівняння (1.7), в рамках якого невідома вагова функція розвивається у тригонометричний ряд Фур'є.

1.2 Постановка задачі

Постановка задачі до даної кваліфікаційної роботи є наступною: знайти вагову функцію фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування

телекомунікаційного трафіку як неперервного фрактального гаусівського шуму розвиненням у тригонометричний ряд Фур'є та порівняти результати з поліноміальними розв'язками.

1.3 Висновки

Висновком до першого розділу є те, що задача, поставлена перед даною кваліфікаційною роботою, є актуальною.

2 СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА

2.1 Пошук вагової функції у вигляді розвинення у тригонометричний ряд Фур'є

Як відомо, наступна система функцій є повною ортогональною системою на відрізку $t \in [0, T]$: $1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t), \dots$, де

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.1)$$

див., наприклад, [9]. Відповідно, невідома вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера, яка має бути розв'язком інтегрального рівняння (1.7), шукається у вигляді

$$h(\tau) = a_0 + \sum_{s=1}^n (a_s \cos(s\omega\tau) + b_s \sin(s\omega\tau)), \quad (2.2)$$

де a_0, a_s, b_s – невідомі коефіцієнти, які треба знайти. Вагову функцію у вигляді (2.2) назвемо розв'язком інтегрального рівняння (1.7) у наближенні n гармонік.

Підставимо вираз (2.2) у інтегральне рівняння (1.7):

$$\int_0^T d\tau \left(a_0 + \sum_{s=1}^n (a_s \cos(s\omega\tau) + b_s \sin(s\omega\tau)) \right) |t - \tau|^{2H-2} = (t+z)^{2H-2}. \quad (2.3)$$

Так як інтеграл від суми – це сума інтегралів, то вираз (2.3) ми можемо перетворити як

$$a_0 \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(s\omega\tau) + \quad (2.4)$$

$$+ \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \sin(s\omega\tau) = (t+z)^{2H-2}.$$

Просто взявши інтеграл від виразу (2.4) за змінною t , отримаємо

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(s\omega\tau) + \\ + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} \sin(s\omega\tau) = \int_0^T dt (t+z)^{2H-2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Помноживши вираз (2.4) на $\cos(k\omega t)$, $k = \overline{1, n}$, матимемо

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^T d\tau \cos(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) + \\ + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(k\omega t) \sin(s\omega\tau) = \cos(k\omega t) (t+z)^{2H-2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Взявши інтеграл від виразу (2.6) за змінною t , отримаємо

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) + \\ + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} \cos(k\omega t) \sin(s\omega\tau) = \int_0^T dt \cos(k\omega t) (t+z)^{2H-2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$k = \overline{1, n}$$

Помноживши вираз (2.4) на $\sin(k\omega t)$, $k = \overline{1, n}$, матимемо

$$a_0 \int_0^T d\tau \sin(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \sin(k\omega t) \cos(s\omega\tau) + \quad (2.8)$$

$$+ \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T d\tau |t - \tau|^{2H-2} \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) = \sin(k\omega t) (t+z)^{2H-2}.$$

Взявши інтеграл від виразу (2.8) за змінною t , отримаємо

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2} + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2} \sin(k\omega t) \cos(s\omega\tau) + \\ + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T \int_0^T d\tau dt |t - \tau|^{2H-2} \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) = \int_0^T dt \sin(k\omega t) (t+z)^{2H-2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Об'єднані в одну систему вирази (2.5), (2.7) і (2.9) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь на невідомі коефіцієнти a_0 , a_s , b_s у виразі (2.2). Перепишемо систему рівнянь (2.5), (2.7) та (2.9) у більш компактному матричному вигляді:

$$Gg = B, \quad (2.10)$$

де g – вектор-стовпець значень коефіцієнтів розмірності $(2n+1) \times 1$:

$$g = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad (2.11)$$

G – матриця інтегральних дужок розмірності $(2n+1) \times (2n+1)$:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1,n+1} & G_{1,n+2} & \cdots & G_{1,2n+1} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2,n+1} & G_{2,n+2} & \cdots & G_{2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n+1,1} & G_{n+1,2} & \cdots & G_{n+1,n+1} & G_{n+1,n+2} & \cdots & G_{n+1,2n+1} \\ G_{n+2,1} & G_{n+2,2} & \cdots & G_{n+2,n+1} & G_{n+2,n+2} & \cdots & G_{n+2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{2n+1,1} & G_{2n+1,2} & \cdots & G_{2n+1,n+1} & G_{2n+1,n+2} & \cdots & G_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

де

$$G_{11} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau |t - \tau|^{2H-2}, \quad k = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, n},$$

$$G_{1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2}, \quad G_{k+1,1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2},$$

$$G_{1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2}, \quad G_{k+n+1,1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) |t - \tau|^{2H-2},$$

$$G_{k+1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2}, \quad (2.13)$$

$$G_{k+n+1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2},$$

$$G_{k+1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \sin(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2},$$

$$G_{k+n+1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \cos(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2};$$

B – стовпець з вільних членів:

$$B = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n+1} \quad b_{n+2} \quad \cdots \quad b_{2n+1})^T, \quad (2.14)$$

верхній індекс « T » означає транспонування, та

$$b_1 = \int_0^T dt (t+z)^{2H-2}, \quad b_{k+1} = \int_0^T dt \cos(k\omega t) (t+z)^{2H-2},$$

$$b_{k+n+1} = \int_0^T dt \sin(k\omega t) (t+z)^{2H-2}, \quad k = \overline{1, n}.$$
(2.15)

На основі рівняння (2.10) приходимо до висновку, що шукані коефіцієнти можна знайти як

$$g = G^{-1}B, \quad (2.16)$$

тож для пошуку коефіцієнтів треба порахувати всі компоненти матриць G і B .

2.2 Властивості інтегральних дужок

Інтеграли (2.13), що є компонентами матриці G , є надто складними для аналітичних обчислень. Тому у роботі всі обчислення робились чисельно за допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica 11.0, який здатен обчислювати відповідні подвійні інтеграли. Переважну більшість машинного часу займає розрахунок саме інтегральних дужок (2.13). Проте ці дужки мають деякі властивості, що значно скорочують час обчислення компонент матриці G .

По-перше, покажемо, що інтегральні дужки є симетричними, тобто виконується рівність

$$G_{ij} = G_{ji}, \quad i, j = \overline{1, 2n+1}. \quad (2.17)$$

На основі (2.13) бачимо, що

$$\begin{aligned}
G_{1,s+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2} = \{t \leftrightarrow \tau\} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(s\omega t) |\tau - t|^{2H-2} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(s\omega t) |t - \tau|^{2H-2} = G_{s+1,1}, \quad s = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Аналогічно можна довести, що $G_{1,s+n+1} = G_{s+n+1,1}$, $s = \overline{1, n}$. Доведемо симетричність для виразів $G_{k+1,s+1}$:

$$\begin{aligned}
G_{k+1,s+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2} = \{t \leftrightarrow \tau\} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega\tau) \cos(s\omega t) |\tau - t|^{2H-2} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega\tau) \cos(s\omega t) |t - \tau|^{2H-2} = G_{s+1,k+1}, \quad s = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Доведемо симетричність для виразів $G_{k+n+1,s+n+1}$:

$$\begin{aligned}
G_{k+n+1,s+n+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) |t - \tau|^{2H-2} = \{t \leftrightarrow \tau\} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega\tau) \sin(s\omega t) |\tau - t|^{2H-2} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega\tau) \sin(s\omega t) |t - \tau|^{2H-2} = G_{s+n+1,k+n+1}, \quad s = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Доведемо те, що $G_{k+1,s+n+1} = G_{s+n+1,k+1}$:

$$\begin{aligned}
G_{k+1,s+n+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \sin(s\omega \tau) |t - \tau|^{2H-2} = \{t \leftrightarrow \tau\} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega \tau) \sin(s\omega t) |\tau - t|^{2H-2} = \\
&= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega \tau) \sin(s\omega t) |t - \tau|^{2H-2} = G_{s+n+1,k+n+1}, \quad s = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Тож серед компонент (2.13) перебрано всі можливі випадки, та симетричність (2.17) доведена.

Більш того, багато інтегральних дужок (2.13) є нульовими. Спершу доведемо, що $G_{1,s+n+1} = 0$, $s = \overline{1,n}$. Спочатку зробимо заміну змінних в інтегралі:

$$\begin{aligned}
G_{1,s+n+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(s\omega \tau) |t - \tau|^{2H-2} = \left\{ x = t - \frac{T}{2}, y = \tau - \frac{T}{2} \right\} = \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin\left(s\omega y + s\omega \frac{T}{2}\right) |x - y|^{2H-2}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Так як $\omega T = 2\pi$, див. (2.1), то (2.22) перетвориться на

$$G_{1,s+n+1} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin(s\omega y + s\pi) |x - y|^{2H-2}. \tag{2.23}$$

Так як

$$\sin(s\omega y + s\pi) = \begin{cases} -\sin(s\omega y), & s:2 \\ \sin(s\omega y), & s:2 \end{cases}, \tag{2.24}$$

то (2.23) переписеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 G_{1,s+n+1} &= (-1)^s \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin(s\omega y) |x - y|^{2H-2} = \left\{ \begin{array}{l} x' = -x' \\ y' = -y \end{array} \right\} = \\
 &= (-1)^{s+1} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx' dy' \sin(s\omega y') |y' - x'|^{2H-2} = -G_{1,s+n+1},
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

тут використано той факт, що синус є непарною функцією. Звідси очевидно, що

$$G_{1,s+n+1} = 0, \quad s = \overline{1, n}. \tag{2.26}$$

Тепер доведемо, що $G_{k+n+1,s+1} = 0$, $s = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$. Спочатку зробимо

заміну змінних: $G_{k+n+1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \cos(s\omega \tau) |t - \tau|^{2H-2}$

$$\begin{aligned}
 G_{k+n+1,s+1} &= \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \cos(s\omega \tau) |t - \tau|^{2H-2} = \left\{ x = t - \frac{T}{2}, y = \tau - \frac{T}{2} \right\} = \\
 &= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin\left(k\omega x + k\omega \frac{T}{2}\right) \cos\left(s\omega y + s\omega \frac{T}{2}\right) |x - y|^{2H-2} = \\
 &= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin(k\omega x + \pi k) \cos(s\omega y + \pi s) |x - y|^{2H-2}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Так як

$$\cos(s\omega y + s\pi) = \begin{cases} -\cos(s\omega y), & s \neq 2 \\ \cos(s\omega y), & s = 2 \end{cases}, \quad (2.28)$$

то з урахуванням (2.28) і (2.24) отримуємо на основі (2.27), що

$$\begin{aligned} G_{k+n+1,s+1} &= (-1)^{s+k} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx dy \sin(k\omega x) \cos(s\omega y) |x - y|^{2H-2} = \left. \begin{matrix} x = -x' \\ y = -y' \end{matrix} \right\} = \\ &= (-1)^{s+k+1} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx' dy' \sin(k\omega x') \cos(s\omega y') |y' - x'|^{2H-2} = -G_{k+n+1,s+1}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

тут також використано те, що косинус є парною функцією свого аргументу, а синус – непарною. На основі (2.29) очевидно, що

$$G_{k+n+1,s+1} = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.30)$$

Тобто доведено, що інтегральні дужки (2.13) мають властивості (2.17), (2.26) і (2.30), звідки матрицю інтегральних дужок можна представити у вигляді

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{12} & G_{22} & \cdots & G_{2,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{1,n+1} & G_{2,n+1} & \cdots & G_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_{n+2,n+2} & \cdots & G_{n+2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_{n+2,2n+1} & \cdots & G_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

тобто безпосереднє обчислення інтегралів є необхідним не для $(2n+1)^2$ дужок.

Бачимо, що кількість інтегральних дужок, які потребують безпосереднього

обчислення інтегралів, дорівнює

$$N = ((n+1) + n + (n-1) + \dots + 1) + (n + (n-1) + \dots + 1), \quad (2.32)$$

$(n+1) + n + (n-1) + \dots + 1$ – кількість таких дужок у «верхньому лівому» блоку матриці G , і $n + (n-1) + \dots + 1$ – кількість таких дужок у «нижньому правому» блоку матриці G . Відповідні суми є сумами арифметичної прогресії, див., наприклад, [10]:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2}(n+2+n) = \\ &= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)(n+1) = (n+1)^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Тож, безпосереднього обчислення потребують лише $(n+1)^2$, а не $(2n+1)^2$ дужок. Цей факт значно скорочує час обчислень. Усі інші дужки або є нульовими, або можна отримати просто операцією присвоювання згідно властивостей симетрії.

2.3 Поведінка розв'язків

У даній роботі отримано чисельні розв'язки інтегрального рівняння (1.7) для параметрів

$$T = 100; H = 0,8; z = 3. \quad (2.34)$$

Ці параметри обрано так, бо поліноміальні розв'язки для цих же параметрів досліджено у роботі [6], тобто ми маємо змогу порівняти поліноміальні розв'язки та розв'язки, отримані на основі тригонометричного ряду Фур'є, для однакових чисельних значень параметрів.

Отримані значення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є (2.2) для параметрів (2.34) вказано у Таблиці 2.1. Дані в цій таблиці округлені до трьох значущих цифр.

Таблиця 2.1 – значення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є (2.2) для параметрів (2.34) для у наближеннях різної кількості гармонік

Кількість n гармонік у наближенні	Значення $a_0 \cdot 10^3; a_1 \cdot 10^3; \dots; a_n \cdot 10^3$
	Значення $b_1 \cdot 10^3; b_2 \cdot 10^3; \dots; b_n \cdot 10^3$
1	7,46; 7,80
	6,03
2	7,55; 8,13; 5,98
	5,48; 5,93
3	7,60; 8,32; 6,16; 4,94
	5,14; 5,57; 5,59
4	7,63; 8,44; 6,28; 5,05; 4,23
	4,91; 5,31; 5,34; 5,26
5	7,65; 8,52; 6,37; 5,13; 4,31; 3,71
	4,74; 5,12; 5,14; 5,06; 4,95
6	7,66; 8,58; 6,43; 5,20; 4,37; 3,76; 3,30
	4,61; 4,97; 4,99; 4,91; 4,80; 4,67
7	7,67; 8,62; 6,48; 5,25; 4,42; 3,81; 3,35; 2,98
	4,51; 4,86; 4,87; 4,78; 4,67; 4,55; 4,43
8	7,68; 8,66; 6,52; 5,29; 4,46; 3,85; 3,39; 3,02; 2,72
	4,43; 4,76; 4,77; 4,68; 4,57; 4,45; 4,33; 4,21
9	7,69; 8,68; 6,55; 5,32; 4,49; 3,88; 3,42; 3,05; 2,75; 2,5
	4,36; 4,68; 4,68; 4,59; 4,48; 4,36; 4,24; 4,12; 4,02
10	7,69; 8,71; 6,57; 5,34; 4,51; 3,91; 3,44; 3,08; 2,78; 2,53; 2,32
	4,30; 4,61; 4,61; 4,52; 4,40; 4,28; 4,16; 4,05; 3,94; 3,84

Продовження таблиці 2.1

11	7,69; 8,72; 6,60; 5,37; 4,54; 3,93; 3,47; 3,10; 2,80; 2,55; 2,34; 2,16
	4,25; 4,55; 4,55; 4,45; 4,34; 4,22; 4,10; 3,98; 3,87; 3,77; 3,68
12	7,70; 8,74; 6,61; 5,39; 4,56; 3,95; 3,49; 3,12; 2,82; 2,57; 2,36; 2,18; 2,02
	4,21; 4,50; 4,49; 4,40; 4,28; 4,16; 4,04; 3,92; 3,82; 3,72; 3,62; 3,53
13	7,70; 8,75; 6,63; 5,40; 4,57; 3,97; 3,50; 3,13; 2,83; 2,58; 2,37; 2,19; 2,04; 1,9
	4,17; 4,46; 4,44; 4,35; 4,23; 4,11; 3,99; 3,87; 3,76; 3,66; 3,57; 3,48; 3,40
14	7,70; 8,77; 6,64; 5,42; 4,59; 3,98; 3,52; 3,15; 2,85; 2,6; 2,39; 2,21; 2,05; 1,92; 1,80
	4,14; 4,42; 4,40; 4,30; 4,18; 4,06; 3,94; 3,83; 3,72; 3,62; 3,52; 3,44; 3,35; 3,28
15	7,71; 8,78; 6,66; 5,43; 4,60; 4,00; 3,53; 3,16; 2,86; 2,61; 2,40; 2,22; 2,06; 1,93; 1,81; 1,70
	4,11; 4,39; 4,36; 4,26; 4,14; 4,02; 3,9; 3,78; 3,68; 3,58; 3,48; 3,39; 3,31; 3,24; 3,17

На основі отриманих виразів для шуканої вагової функції $h(\tau)$ у Wolfram Mathematica побудовано графіки (див. Рис. 2.1 – Рис. 2.15), на яких чисельно порівняно ліву та праву частину інтегрального рівняння (1.7). На графіках використані наступні позначення лівої та правої частин інтегрального рівняння (1.7):

$$\text{Left}(t) = \int_0^T d\tau h(\tau) |t - \tau|^{2H-2} = \int_0^t d\tau h(\tau) (t - \tau)^{2H-2} + \int_t^T d\tau h(\tau) (\tau - t)^{2H-2}, \quad (2.35)$$

$$\text{Right}(t) = (t + z)^{2H-2}.$$

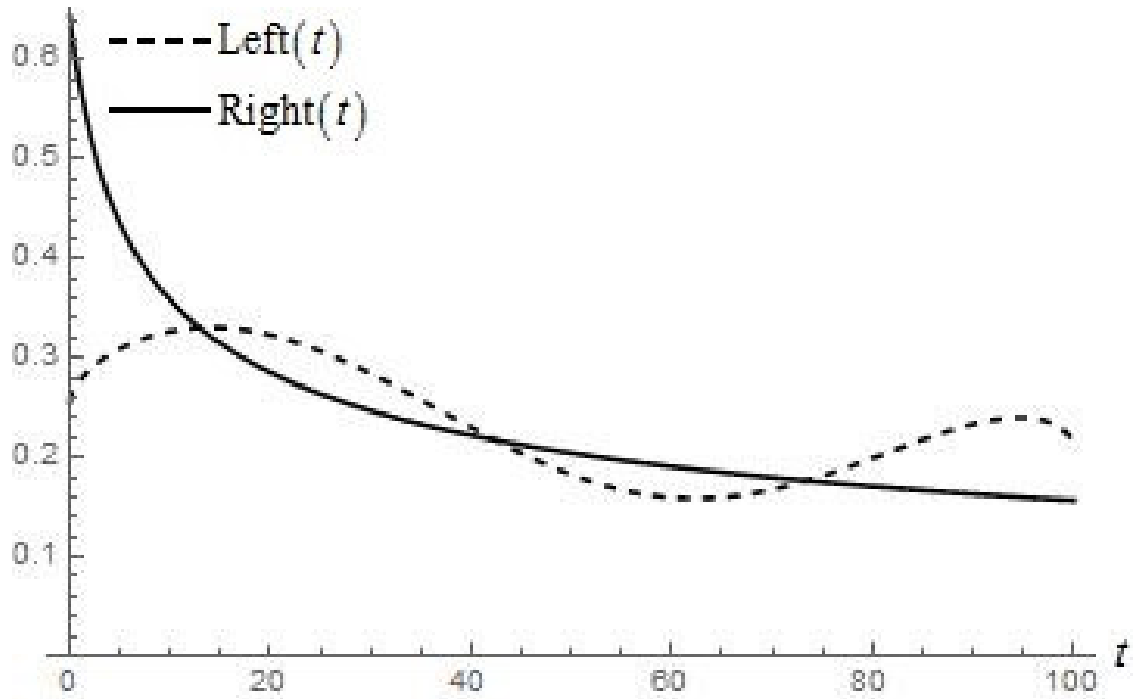


Рисунок 2.1 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні однієї гармоніки

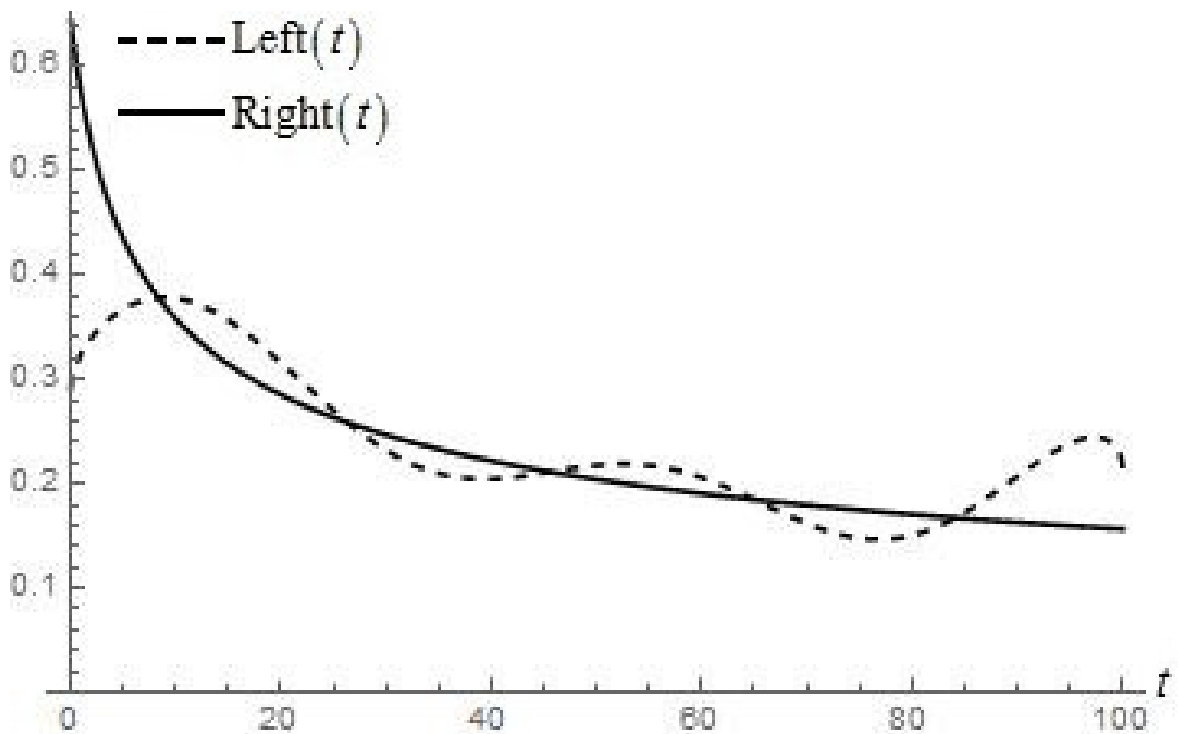


Рисунок 2.2 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні двох гармонік

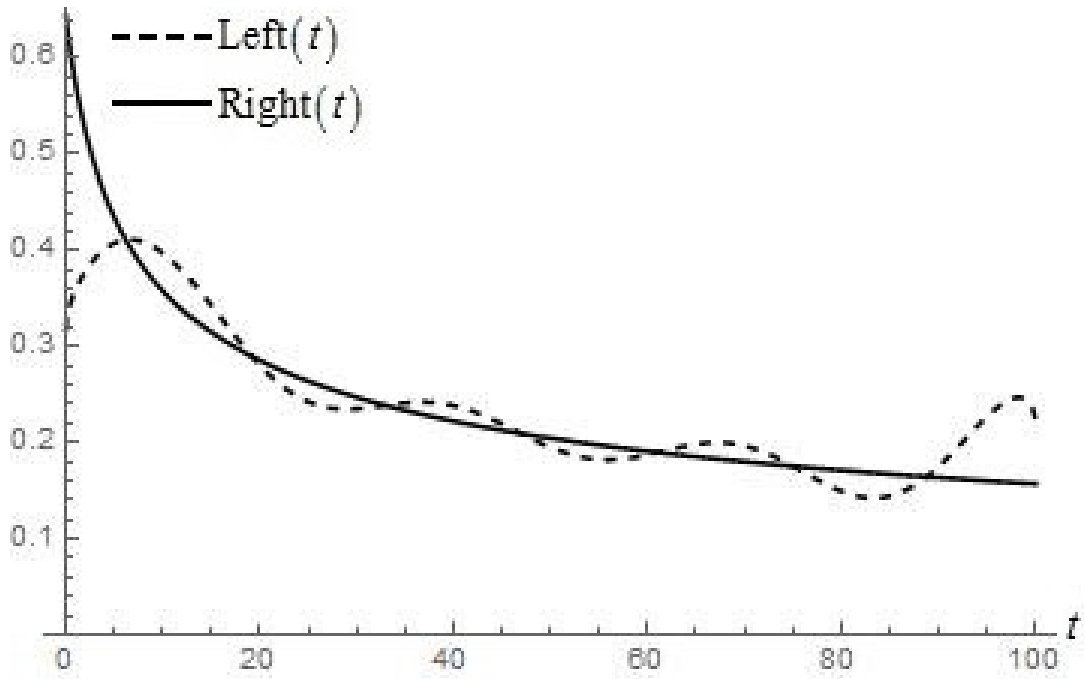


Рисунок 2.3 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні трьох гармонік

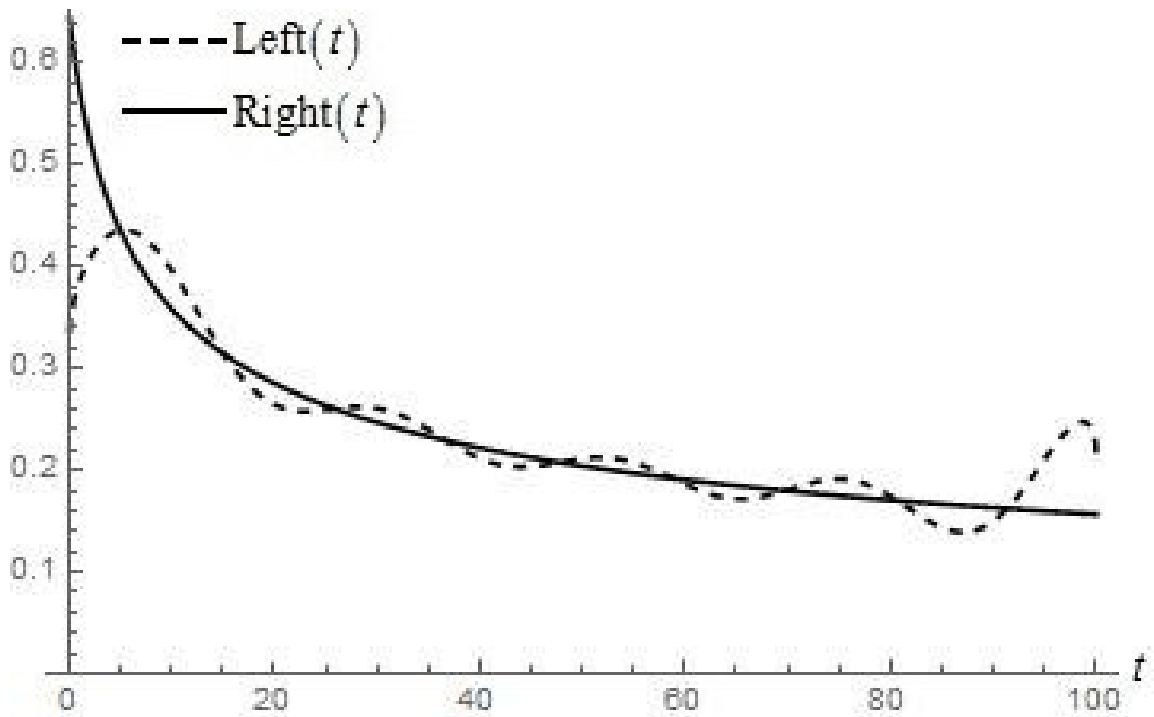


Рисунок 2.4 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні чотирьох гармонік

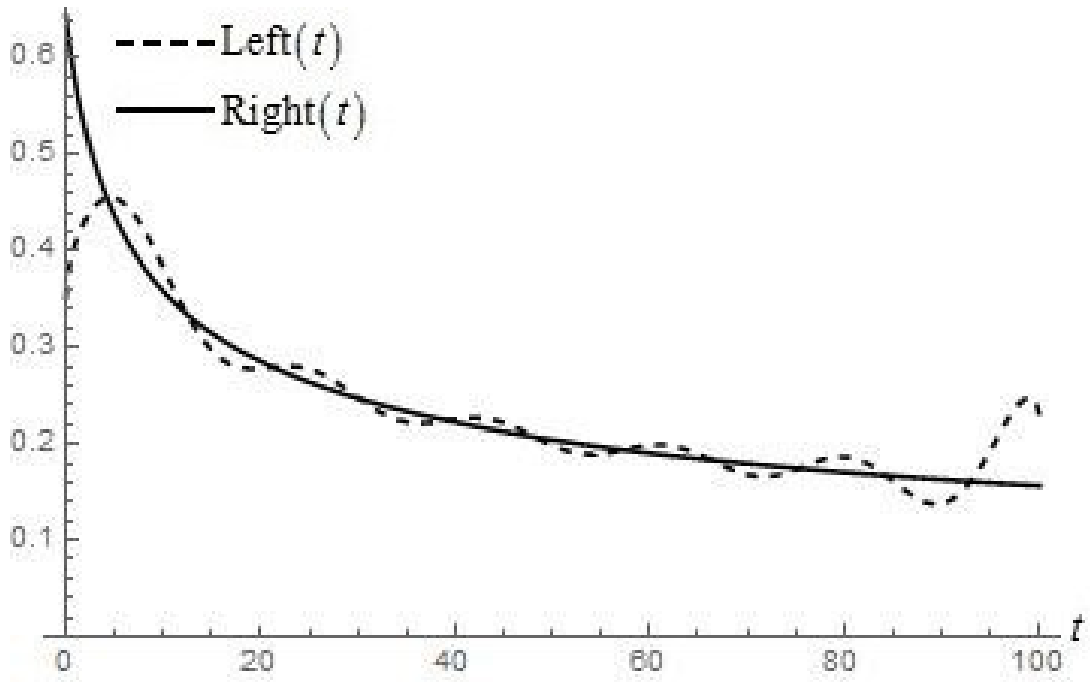


Рисунок 2.5 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні п'яти гармонік

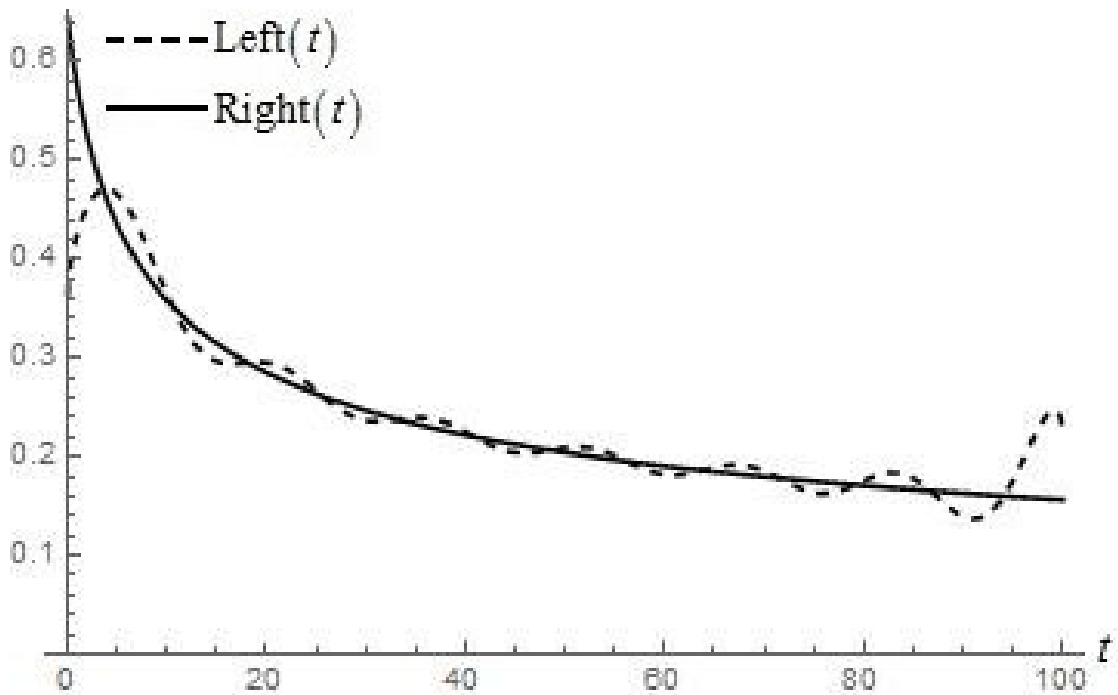


Рисунок 2.6 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні шести гармонік

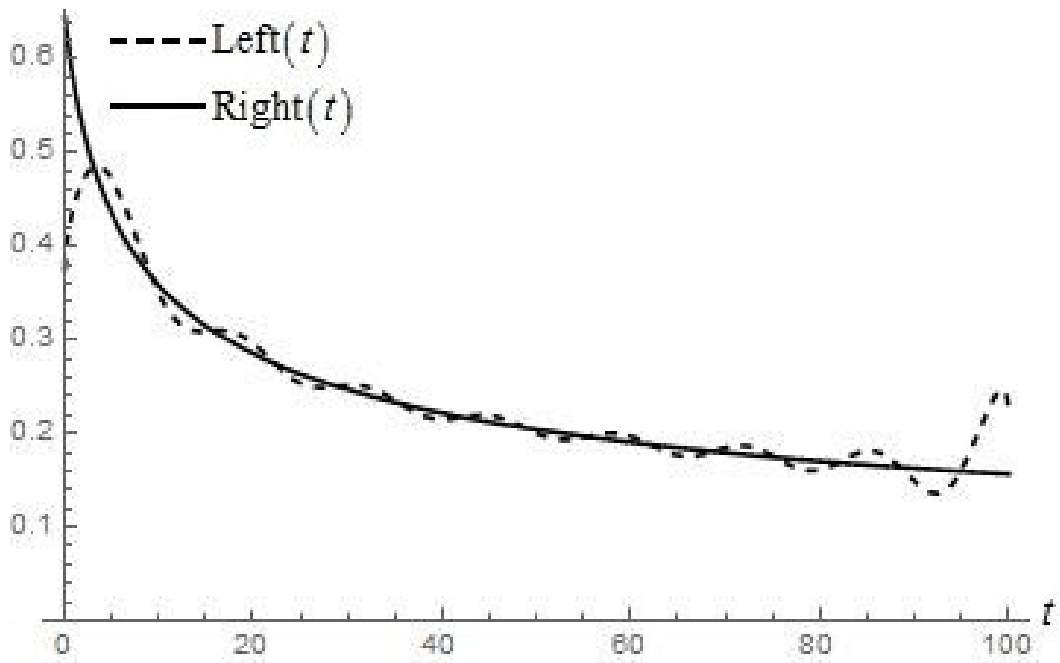


Рисунок 2.7 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні семи гармонік

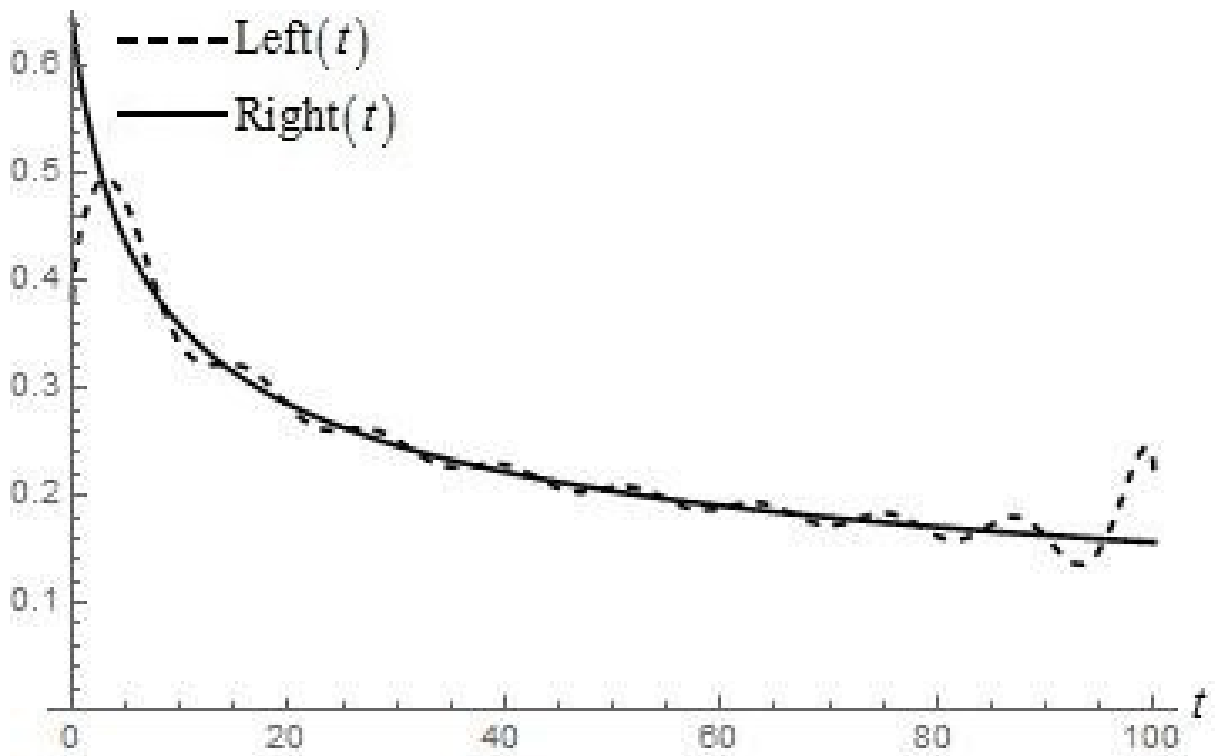


Рисунок 2.8 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні восьми гармонік

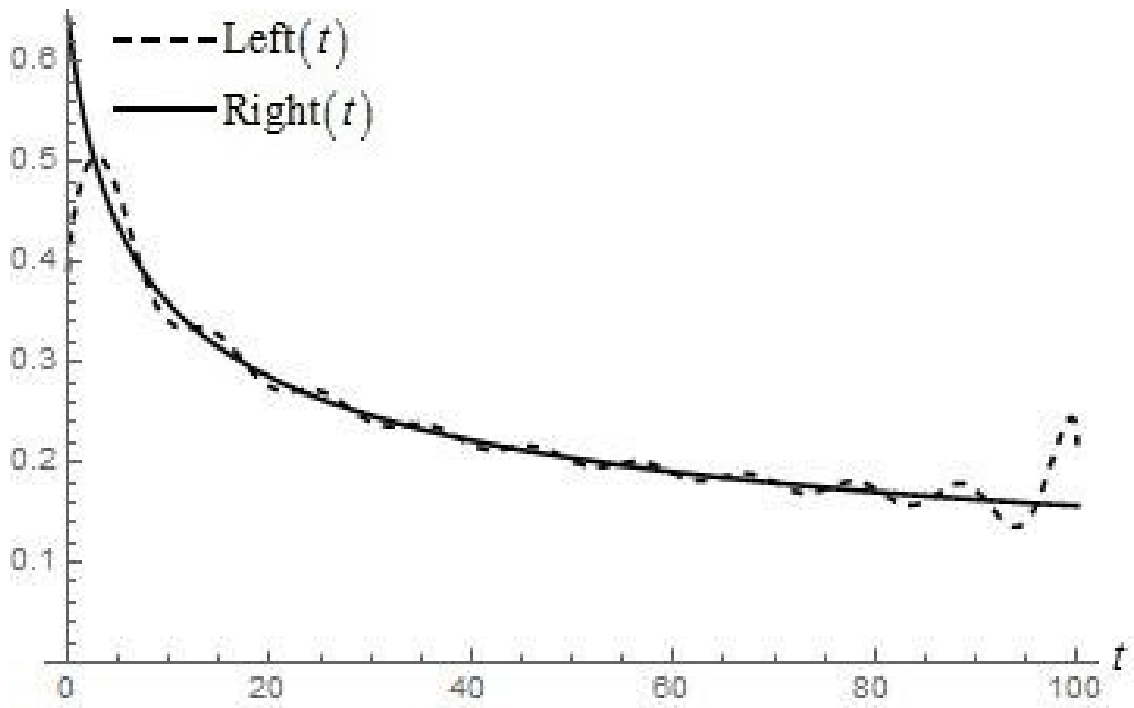


Рисунок 2.9 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні дев'яти гармонік

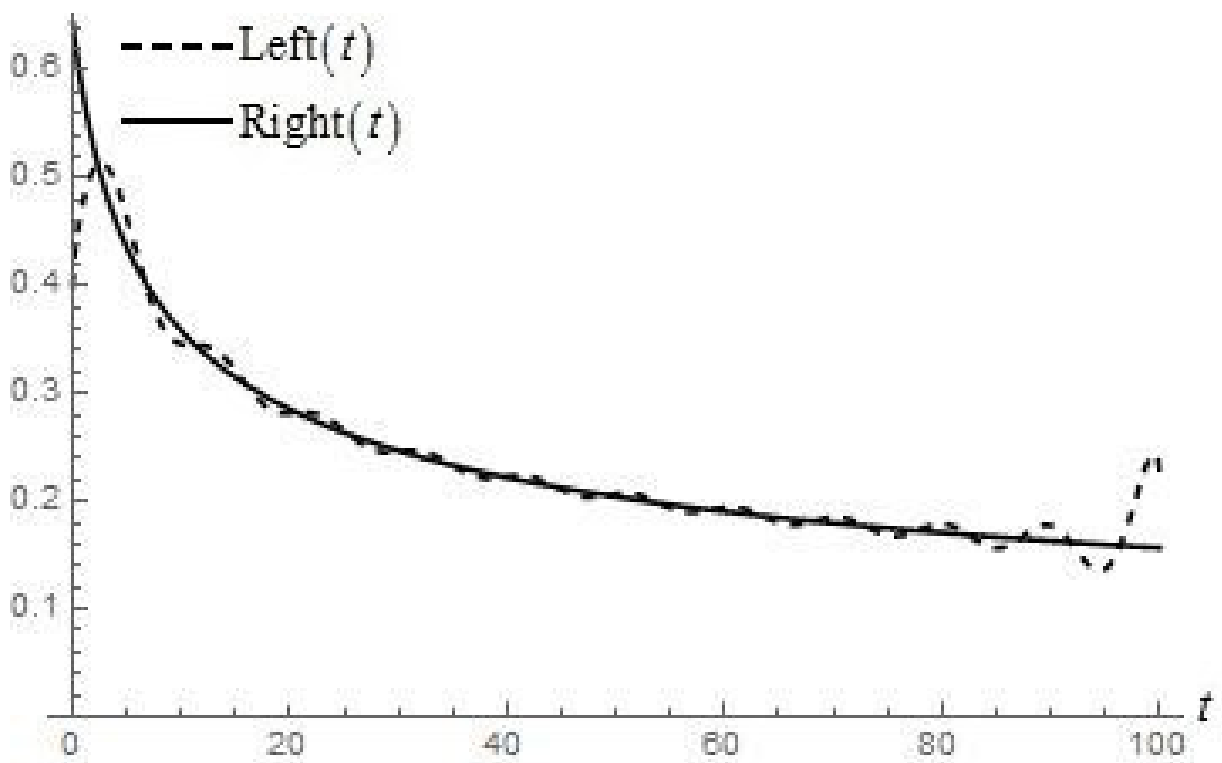


Рисунок 2.10 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні десяти гармонік

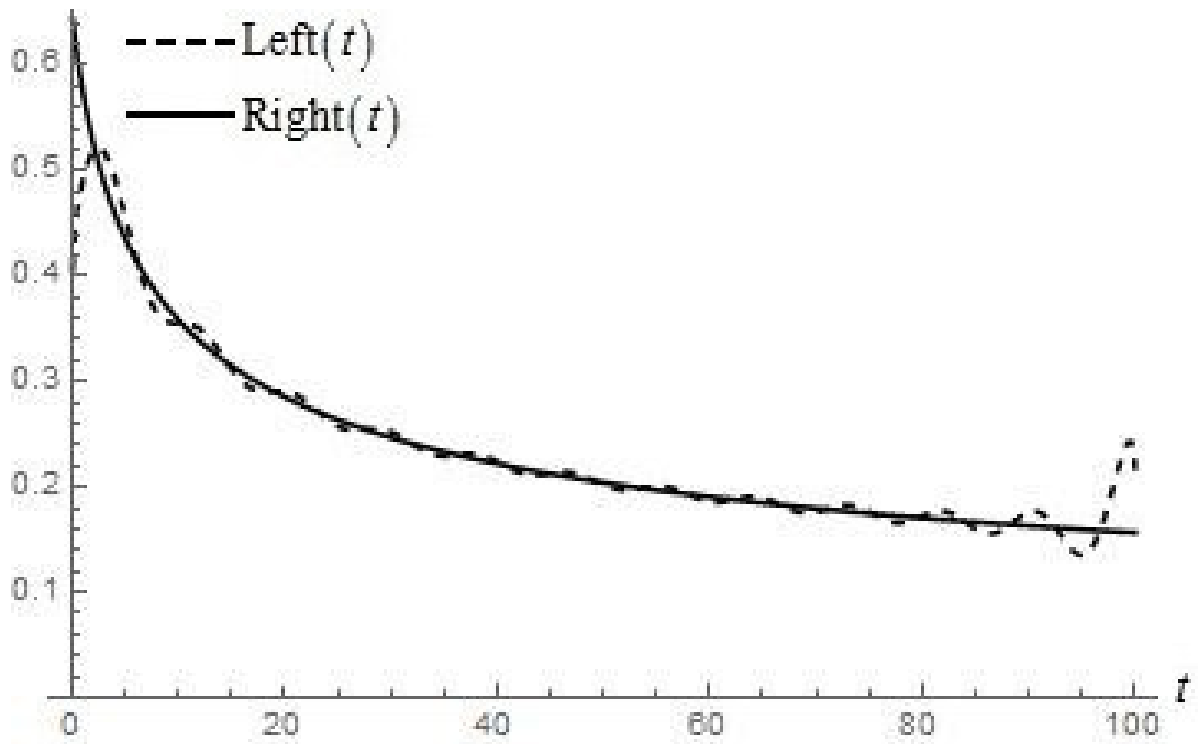


Рисунок 2.11 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні одинадцяти гармонік

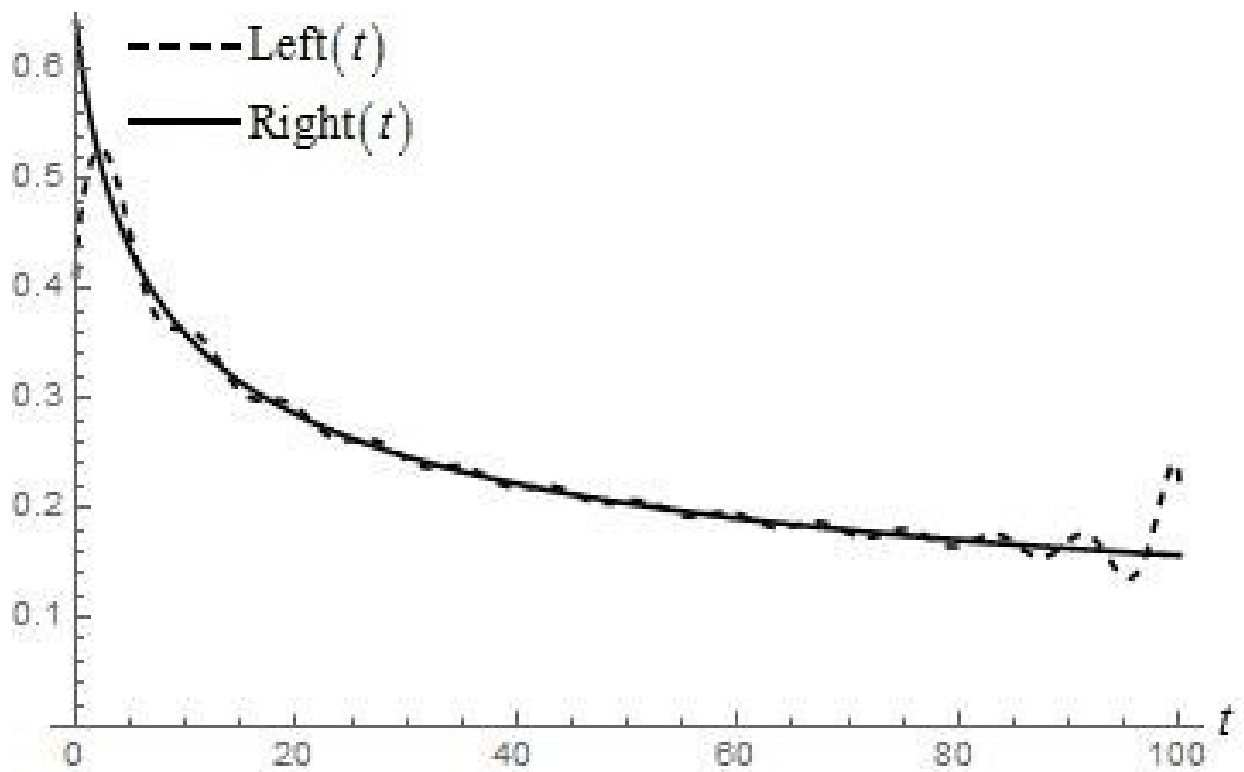


Рисунок 2.12 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні дванадцяти гармонік

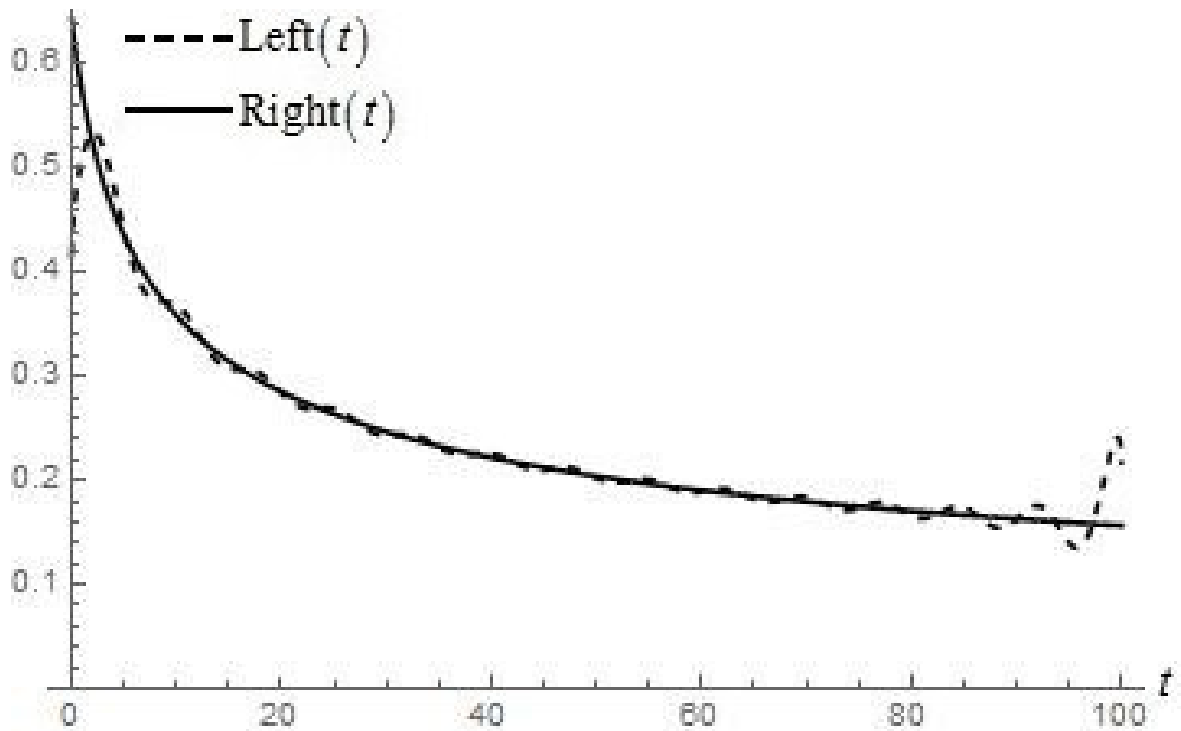


Рисунок 2.13 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні тринадцяти гармонік

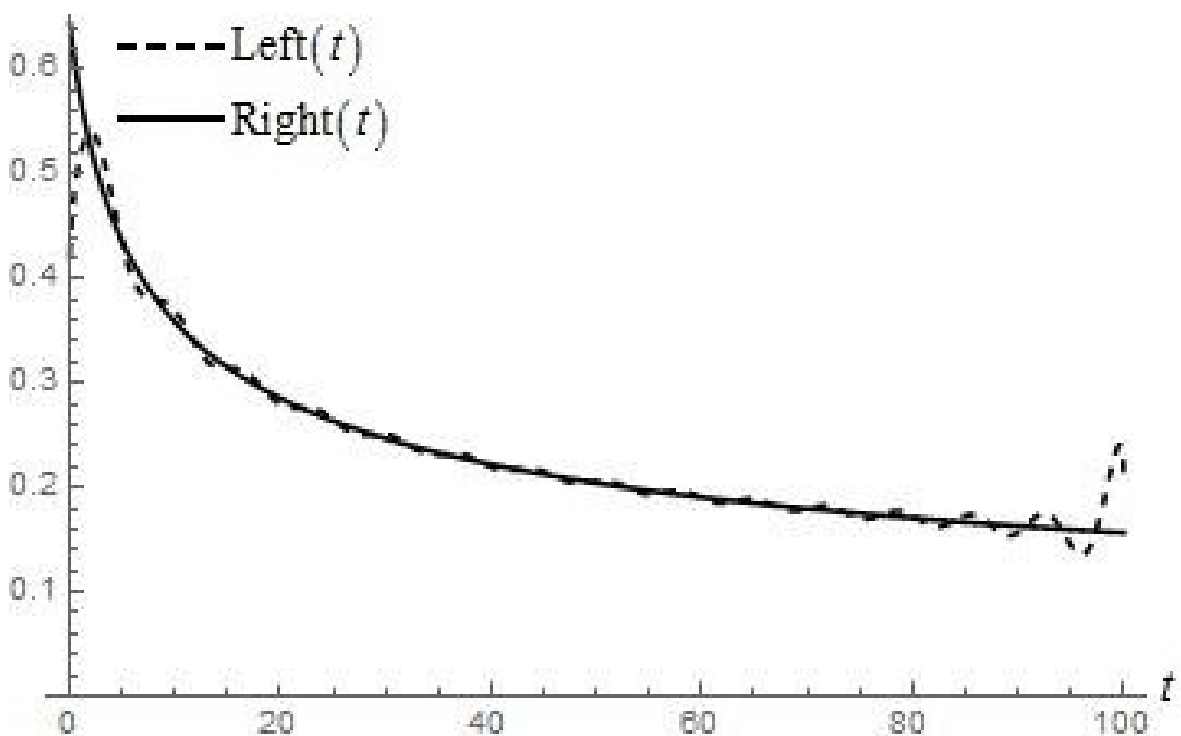


Рисунок 2.14 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні чотирнадцяти гармонік

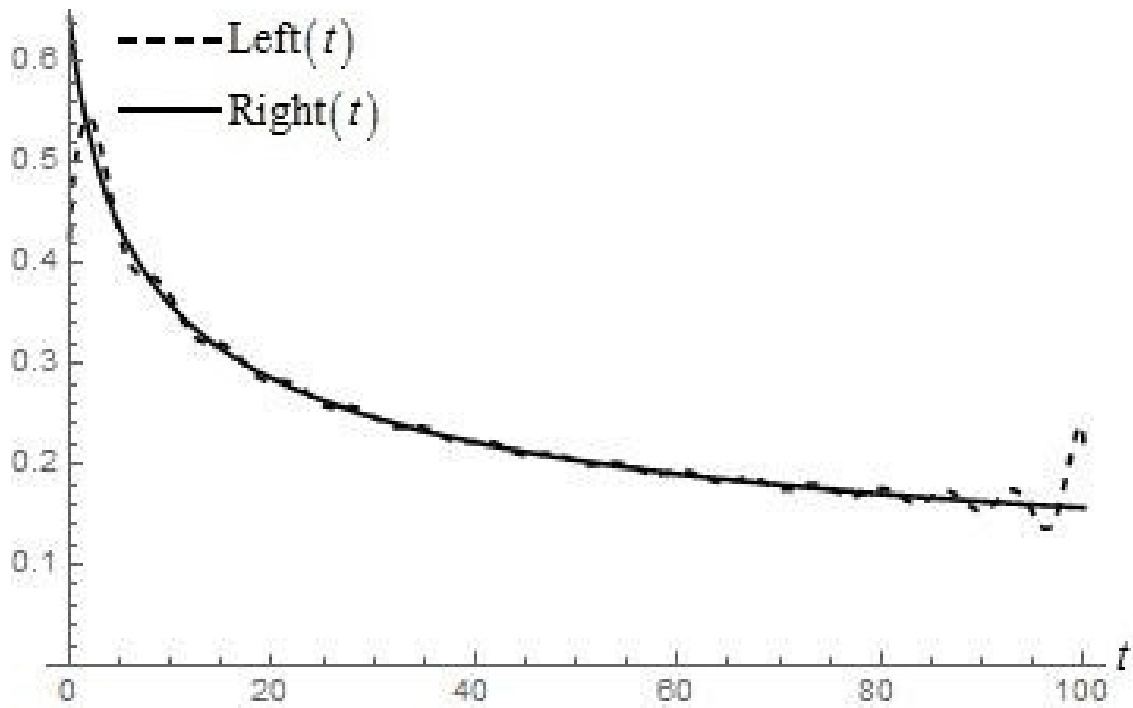


Рисунок 2.15 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні п’ятнадцяти гармонік

Наближення шістнадцяти і більшої кількості гармонік не досліджувалось, бо тенденцію поведінки розв’язків у різних наближеннях можна побачити і на основі побудованих графіків.

Як бачимо, поведінка розв’язків є збіжною – зі збільшенням кількості гармонік ліва та права частини інтегрального рівняння (1.7) стають все ближче і ближче одна до одної. Наближення малої кількості гармонік не є точними, проте значення лівої та правої частин інтегрального рівняння є досить близькими для випадку досить великої кількості гармонік майже на всьому відрізку $t \in [0, T]$, однак відрізняються близько до кінців даного відрізка. Можливо, при дуже великій кількості гармонік ліва та права частина інтегрального рівняння дійсно співпадуть. Можливо, можна сказати, це побачене неспівпадіння на графіках – в деякому сенсі прояв так званого ефекту Гібса [11]. Як бачимо, це неспівпадіння стає все менш суттєвим при збільшенні кількості гармонік, проте ситуація покращується все повільніше з подальшим збільшенням кількості. Дослідження причини цього неспівпадіння на кінцях

потребує значного збільшення числа гармонік, що дуже сильно збільшить час обчислень, тому навряд чи таке дослідження має сенс. Більш того, так на переважній більшості досліджуваного відрізка ліва та права частина інтегрального рівняння для, наприклад, наближення 15 гармонік співпадають гарно, то навряд чи це неспівпадіння на кінцях призведе до серйозного погіршення прогнозу.

2.4 Порівняння тригонометричних та поліноміальних розв'язків

Важливим є порівняти отримані розв'язки на основі розвинення у тригонометричний ряд Фур'є та поліноміальні розв'язки, отримані у роботі [6]. Таке порівняння дасть відповідь на питання, яку ортогональну систему краще обирати в рамках методу Галеркіна для пошуку вагової функції. Для цього наведемо деякі графіки порівняння лівої та правої частин інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) на основі поліноміальних розв'язків [6], див. рис. 2.16–2.18:

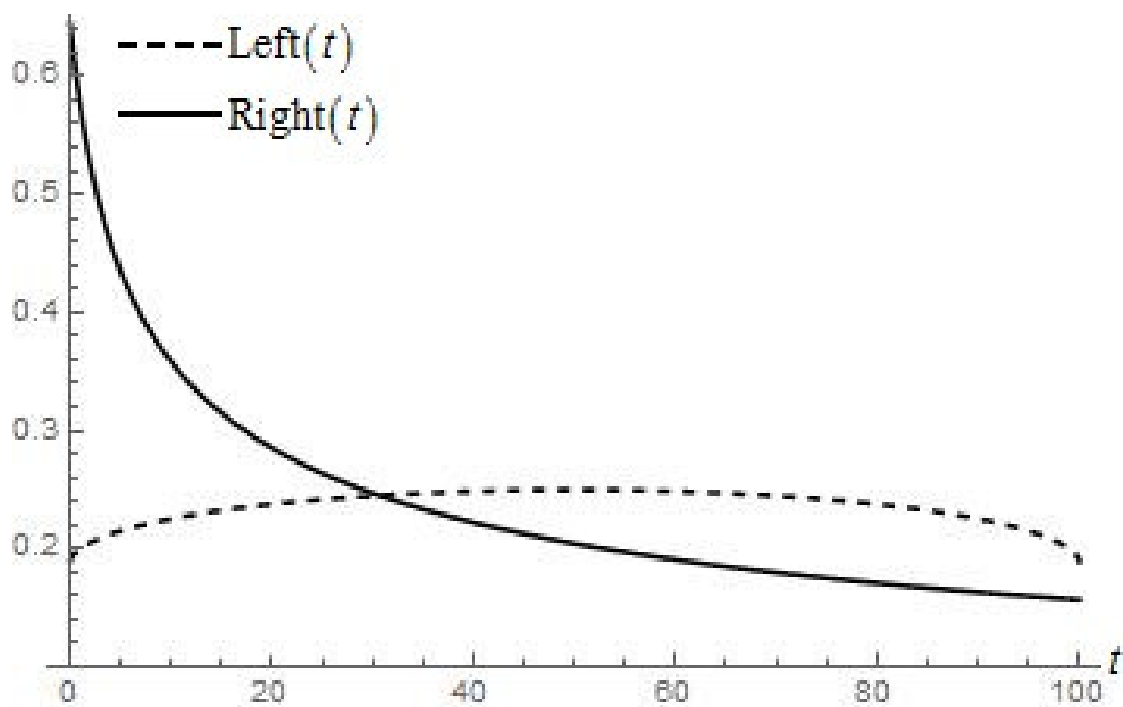


Рисунок 2.16 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні одного полінома [6]

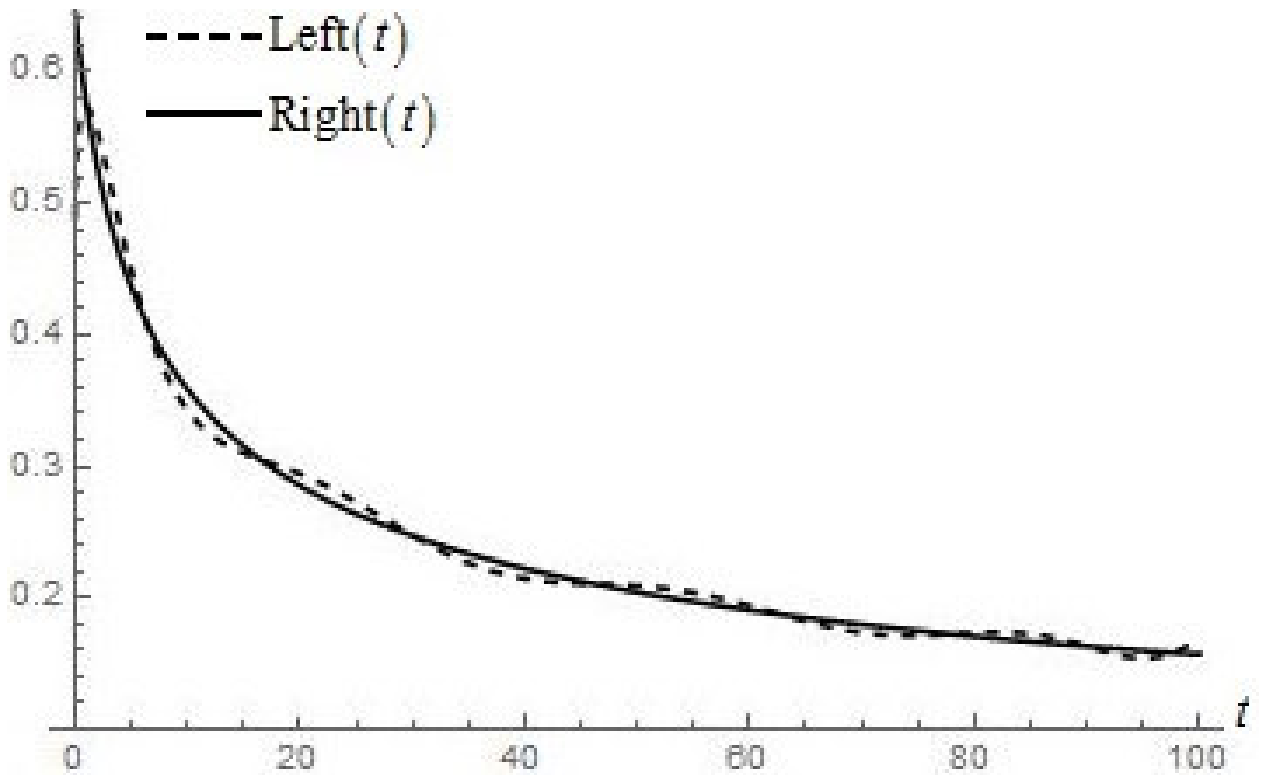


Рисунок 2.17 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні дев'яти поліномів [6]

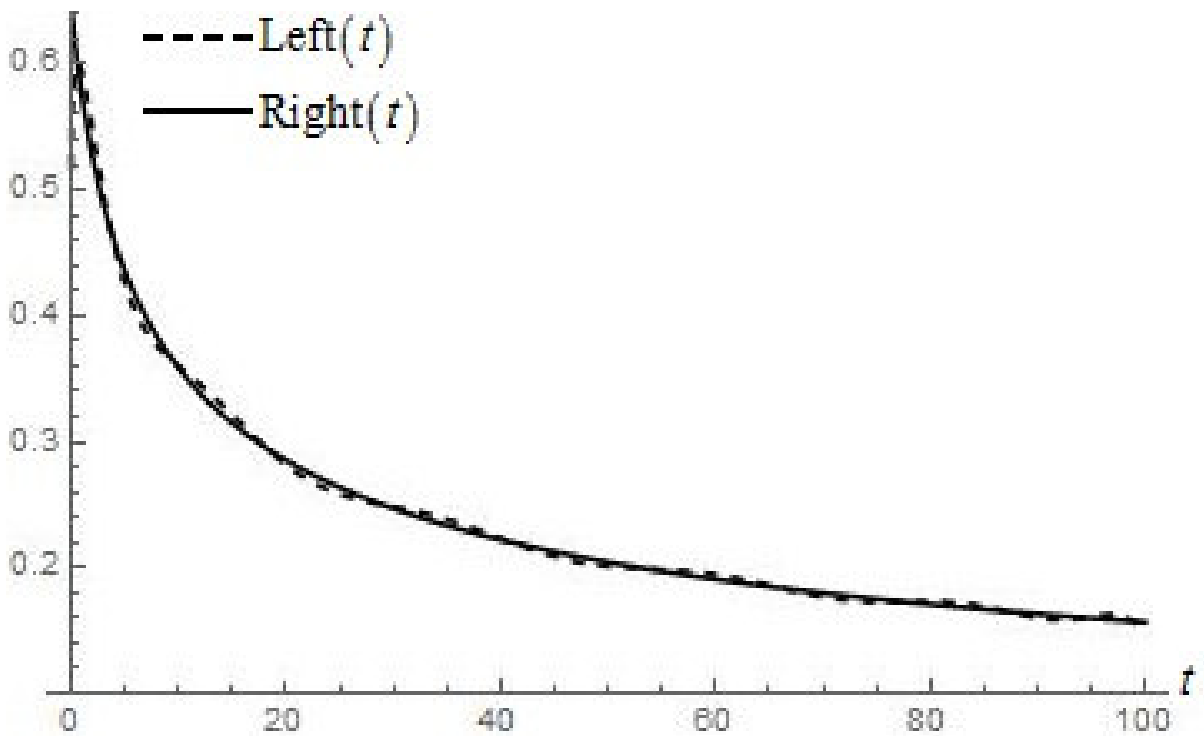


Рисунок 2.18 – Числове порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння (1.7) для параметрів (2.34) у наближенні дванадцяти поліномів [6]

Як бачимо, у випадку малої кількості обраних функцій (поліномів чи гармонік) обидва розв'язки (і поліноміальний, и тригонометричний) не є точними. В обох випадках точність співпадіння лівої і правої частин інтегрального рівняння збільшується зі зростом числа обраних функцій. У точках, далеких від кінців відрізка, швидкість збіжності приблизно однакова. Проте поведінка на кінцях відрізка для поліноміальних розв'язків є набагато кращою за поведінку тригонометричних. Більш того, поліноміальні розв'язки потребують меншого часу обчислень, бо розмірності відповідних матриць для поліноміальних розв'язків є меншими за відповідні розмірності для тригонометричних розв'язків.

Тому можна прийти до висновку, що поліноміальні розв'язки є кращими за тригонометричні.

2.5 Висновки

Досліджено наближені розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для фрактального гаусівського шуму, при цьому шукана функція досліджувалась у розвиненні в тригонометричний ряд Фур'є. Такий підхід цілком можливий в рамках методу Галеркіна, бо відповідна система синусів та косинусів є ортогональною на часовому відрізку, на якому задані вхідні дані фільтру.

Показано, що даний метод є збіжним у тому сенсі, що точність співпадіння лівої та правої частини відповідного інтегрального рівняння зростає з числом гармонік. Для досить великого числа гармонік частини інтегрального рівняння є близькими майже на всьому відрізку $t \in [0, T]$, за виключенням точок, близьких до кінців відрізка. Точність співпадіння на кінцях дуже повільно зростає зі збільшенням кількості поліномів.

Порівняно результати тригонометричних розв'язків даної задачі, отриманих в цій роботі, та поліноміальних розв'язків, отриманих в роботі [6]. Виявлено, що поліноміальні розв'язки є кращими за тригонометричні. Поліноміальні розв'язки дають краще співпадіння на кінцях відрізка, ніж

тригонометричні розв'язки, та потребують меншого машинного часу на їх обчислення.

Результати роботи можуть бути враховані при прогнозуванні телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ

3.1 Визначення трудомісткості порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера

В даному розділі проводяться економічні розрахунки витрат на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського шуму.

Трудомісткість продукції – показник, який характеризує витрати робочого часу на виробництво будь-якої споживчої вартості або на виконання конкретної технологічної операції.

Трудомісткість можливо розрахувати за формулою (3.1):

$$t = t_o + t_\mu + t_A + t_\Pi + t_{отл} + t_d, \text{ людино-годин,} \quad (3.1)$$

де t_o - витрати праці на підготовку і опис поставленого завдання;

t_μ - витрати праці на дослідження алгоритму рішення задачі;

t_A - витрати праці на розробку блок-схеми алгоритму;

t_Π - витрати праці на програмування за розробленою блок-схемою;

$t_{отл}$ - витрати праці на налагодження програми на ЕОМ;

t_d - витрати праці на підготовку документації по завданню.

Складові частини витрат праці визначаються на підставі умовної кількості операторів в програмі. Причому до цього числа входять ті оператори, які програмісту необхідно написати в процесі роботи над завданням з урахуванням можливих уточнень в постановці завдання і удосконалення алгоритму.

Умовна кількість операторів розраховується за формулою (3.2):

$$Q = q \cdot c \cdot (1 + p), \quad (3.2)$$

де q - передбачувана кількість операторів;

c - коефіцієнт складності програми;

ρ - коефіцієнт корекції програми в ході її розробки.

Коефіцієнт складності програми c визначає відносну складність програм завдання по відношенню до типового завдання, складність якого прийнята рівній одиниці. Діапазон його зміни 1,25...2,0.

Коефіцієнт корекції програми ρ визначає збільшення об'єму робіт за рахунок внесення змін до алгоритму або програми в результаті уточнення постановки завдання. Величина ρ знаходиться в межах 0,05...0,1, що відповідає внесенню 3...5 корекцій, що спричиняють за собою переробку 5-10 % готової програми.

Проведемо розрахунок умовної кількості операторів в програмному продукті, що розробляється:

$$Q = q \cdot c \cdot (1 + \rho) = 50 \cdot 1 \cdot (1 + 0,1) = 55 \text{ (опер.)} \quad (3.3)$$

Оцінку витрат праці на підготовку і опис завдання приймаємо як $t_0 = 110$ людино-годин, тому що дослідження пов'язані з обробкою сигналів в телекомунікаційних системах.

Витрати праці на вивчення опису завдання визначаються з урахуванням уточнення опису і кваліфікації програміста за формулою (3.4):

$$t_{\mu} = \frac{Q \cdot B}{(75...85) \cdot k}, \text{ людино - годин,} \quad (3.4)$$

де B - коефіцієнт збільшення витрат праці унаслідок недостатнього опису завдання, $B=1,2...1,5$;

k - коефіцієнт кваліфікації програміста, визначуваний залежно від стажу роботи по даній спеціальності.

Він складає при стажі роботи, років:

до 2 - 0,8;

від 2 до 3 - 1,0;

від 3 до 5 - 1,1...1,2;

від 5 до 7 - 1,3...1,4;

Проводимо розрахунок:

$$t_{\mu} = \frac{55 \cdot 1,5}{80 \cdot 1,0} = 1,03 \text{ людино-годин}$$

Витрати праці на розробку алгоритму рішення поставленої задачі:

$$t_A = \frac{Q}{(20...25) \cdot k}, \text{ людино-годин,} \quad (3.5)$$

$$t_A = \frac{55}{25 \cdot 1,0} = 2,2 \text{ людино-годин}$$

Витрати праці на складання програми по готовій блок-схемі:

$$t_{\Pi} = \frac{Q}{(20...25) \cdot k}, \text{ людино-годин,} \quad (3.6)$$

$$t_{\Pi} = \frac{55}{25 \cdot 1,0} = 2,2 \text{ людино-годин}$$

Витрати на наладку програми на ЕОМ t_{OTL} розраховуються по наступних формулах:

за умови автономної наладку одного завдання:

$$t_{OTL} = \frac{Q}{(4...5) \cdot k}, \text{ людино-годин,} \quad (3.7)$$

$$t_{OTL} = \frac{Q}{(4...5) \cdot k} = \frac{55}{5 \cdot 1,0} = 11 \text{ людино-годин}$$

за умови комплексному відкладанню завдання:

$$t_{OTL}^K = 1,5 \cdot t_{OTL}, \text{ людино-годин,} \quad (3.8)$$

$$t_{OTL}^K = 1,5 \cdot t_{OTL} = 1,5 \cdot 11 = 16,5 \text{ людино-годин}$$

Витрати праці на підготовку документації по завданню t_D визначаються за формулою:

$$t_D = t_{DP} + t_{DO}, \text{ людино-годин,} \quad (3.9)$$

де $t_{др}$ - трудомісткість підготовки матеріалів до рукопису:

$$t_{др} = \frac{Q}{(15...20) \cdot k} = \frac{55}{20 \cdot 1,0} = 2,75;$$

$t_{до}$ - трудомісткість редагування, друку і оформлення документації:

$$t_{до} = 0,75 \cdot t_{др} = 0,75 \cdot 2,75 = 2,06$$

Отже, трудомісткість створення програмного продукту складає:

$$t_{д} = t_{др} + t_{до} = 2,75 + 2,06 = 4,81 \text{ людино-годин}$$

Таким чином, визначивши трудомісткість окремих показників, розрахуємо сумарну трудомісткість розробки програмного продукту за формулою (3.1):

$$t = 55 + 1,03 + 2,2 + 2,2 + 16,5 + 4,81 = 81,74 \text{ людино-годин}$$

3.2 Розрахунок витрат на створення продукту

Витрати на створення програмного виробу включають витрати на заробітну плату програміста і вартість машинного часу, необхідного для налагодження програми на ЕОМ:

$$K_{из} = Z_{зп} + Z_{мч}, \text{ грн} \quad (3.10)$$

Заробітна плата виконавців визначається за формулою:

$$Z_{зп} = t \cdot C_{пр}, \text{ грн}, \quad (3.11)$$

де t - загальна трудомісткість розробки програмного продукту, визначувана по формулі (3.1), людино-годин;

$C_{пр}$ - середня годинна заробітна плата програміста (основна і додаткова) з урахуванням відрахувань на соціальні потреби, грн/год.

Спочатку визначаємо мінімальний щомісячний оклад програміста. Він складає 12300,00 грн. Отже, заробітна плата програміста з урахуванням премій (20%) і можливих надбавок (10%) складає 15990,00 грн.

Таким чином, річний фонд заробітної плати – 191880,00 грн. Єдиний соціальний внесок складає 37%, тобто 70995,6 грн.

Разом, річний фонд заробітної плати з урахуванням відрахувань на соціальні потреби склав 262875,6 грн.

Визначимо номінальний річний фонд робочого часу, при цьому прийнявши середню тривалість робочого дня рівної 8 годинам:

$$F_H = (T_K - T_{PP} - T_{ВИХ} - T_{ОТП}) \cdot 8, \text{ годин}, \quad (3.12)$$

де T_K - кількість календарних днів в році, $T_K = 365$ днів ;

T_{PP} - кількість святкових днів в році, $T_{PP} = 10$ днів ;

$T_{ВИХ}$ - кількість вихідних днів в році, $T_{ВИХ} = 104$ дні ;

$T_{ОТП}$ - календарна тривалість відпустки $T_{ОТП} = 24$ дні.

Отже, річний фонд часу дорівнює:

$$F_H = (365 - 10 - 104 - 24) \cdot 8 = 1816, \text{ годин}$$

Середня годинна заробітна плата програміста визначається співвідношенням:

$$C_{PP} = \frac{\PhiЗП_{CH}}{F_H}, \text{ грн / год}, \quad (3.13)$$

де $\PhiЗП_{CH}$ - річний фонд заробітної плати з урахуванням відрахувань на соціальні потреби;

F_H - річний фонд робочого часу.

$$C_{PP} = \frac{262875,6}{1816} = 144,75 \text{ грн / год}$$

Таким чином, витрати на оплату праці розробника складають:

$$З_{ЗП} = t \cdot C_{PP} = 144,75 \cdot 81,74 = 11831,87 \text{ грн}$$

Розрахунок вартість машинного часу, необхідного для наладки програми на ЕОМ здійснюється за формулою:

$$З_{МИ} = (t_{ОТЛ} + t_d) \cdot C_{МЧ}, \text{ грн}, \quad (3.14)$$

де $t_{ОТЛ}$ - трудомісткість наладки програми на ЕОМ, яка визначається за формулами (3.7) і (3.8), людино-годин;

t_d - витрати праці на підготовку документація відповідно завданню, яка визначається за формулою (3.9);

$C_{Mч}$ - вартість машино-часу ЕОМ, грн/год.

Для розрахунку вартості машино-часу необхідно знати вартість ЕОМ на момент її придбання і введення в експлуатацію, і вартість споживаної електроенергії. Відповідні дані представлені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 - Вартість необхідного програмного та апаратного забезпечення

Найменування ПО	Вартість, грн
Персональний комп'ютер	9506
Windows 7 Home Premium (RU)	1195
Matlab 6.5	3268
Разом:	13969

Разом, загальна вартість ЕОМ і потрібного ПО на момент придбання складає 13969 грн.

Сума річних амортизаційних відрахувань визначається за формулою (3.15):

$$C_{ам} = C_{пер} \cdot H_A, \text{ грн}, \quad (3.15)$$

де $C_{пер}$ - первинна вартість ЕОМ і необхідного програмного забезпечення; H_A - норма амортизації,

Для розрахунку амортизаційних відрахування доцільно застосувати метод подвійної амортизації ($H_A = 2/T$, де T – строк експлуатації фондів). $H_A = 2/5 = 0,5$ чи 50 %.

Таким чином, амортизаційні відрахування у 2019р. склали:

$$CAM_{2019} = 13969 \cdot 0,5 = 6984,5 \text{ грн}$$

Отже, залишкова вартість ЕОМ і необхідного програмного забезпечення на складі:

$$\Phi_{ост} = 13969 - 6984,5 = 6984,5 \text{ грн}$$

Розрахунок вартості машино-часу ЕОМ проведемо за формулою:

$$C_{м.ч} = \frac{\Phi_{ост}}{\Phi_{год.раб.ч.}} + W \cdot Ц_э, \text{ грн / год}, \quad (3.16)$$

де $\Phi_{год.раб.ч.}$ - річний фонд корисного часу роботи ЕОМ;

W - настановна потужність ЕОМ, $W = 0,4 \text{ кВт}$;

$Ц_э$ - вартість $1 \text{ кВт} \cdot \text{год}$ електроенергії.

Річний фонд корисного часу роботи ЕОМ дорівнює річному фонду робочого часу програміста і складає 1816 годин.

Таким чином, вартість машино-години ЕОМ складе:

$$C_{м.ч} = \frac{2787,6}{1816} + 0,4 \cdot 1,82 = 2,26 \text{ грн / год}$$

Проведемо розрахунок вартості машинного часу, необхідного для відладки програми на ЕОМ по формулі (3.14):

$$З_{ми} = (t_{отл} + t_d) \cdot C_{мч} = (16,5 + 4,81) \cdot 2,26 = 48,2 \text{ грн},$$

Отже, витрати на створення програмного продукту складають, виходячи з формули (3.10):

$$K_{из} = 11831,87 + 48,2 = 11880,07 \text{ грн}$$

Визначені таким чином витрати на створення програмного забезпечення є одноразовими капітальними витратами.

3.3 Висновки

Аналіз отриманих результатів показує, що витрати на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського

шуму складають 11880,07грн, трудомісткість виконання робіт – близько 82 людино-години.

ВИСНОВКИ

Як відомо [2], в одній із найпростіших моделей телекомуніаційний трафік вважається фрактальним гаусівським шумом, тому задача прогнозування фрактального гаусівського шуму є актуальною для телекомуніацій.

В даній роботі розглянуто задачу наближеного пошуку вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування неперервного фрактального гаусівського шуму шляхом її розвинення у тригонометричний ряд Фур'є. Результати роботи порівняно з результатами поліноміальних розв'язків даної задачі [6]. Для простоти розгляд обмежено випадком, коли коефіцієнт Херста є більшим за 0,5.

Дану задачу досліджено до наближення п'ятнадцяти гармонік включно. Показано, що метод Галеркіна для тригонометричних розв'язків даної задачі є збіжним – зі збільшенням кількості гармонік збільшується точність співпадіння лівої і правої частин інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для шуканої вагової функції. Отримано, що для певної кількості гармонік відповідні ліва та права частина є досить близькими на більшій частині часового відрізка, на якому задано вхідні дані для фільтра, проте близько до кінців відрізка має місце деяке неспівпадіння лівої та правої частин. Можливо, це неспівпадіння пов'язане з ефектом Гібса, можливо, воно зникне при дослідженні більшої кількості гармонік, проте дослідження більшої кількості гармонік займе дуже багато машинного часу та не є доцільним. Також, скоріш за все, це неспівпадіння не сильно вплине на прогнозування, бо на більшій частині досліджуваного відрізка досягнуто хороше співпадіння лівої і правої частин досліджуваного інтегрального рівняння. Слід зауважити, що у роботі чисельні результати надано лише для параметрів (2.34), проте так як причиною збіжності методу є позитивна визначеність кореляційної функції фрактального Гаусівського шуму [6], то метод буде збіжним і для інших параметрів. Скоріш за все, поведінка розв'язків для інших параметрів буде ідентичною.

Порівняння тригонометричних і поліноміальних розв'язків дає наступне. Швидкість збіжності всередині відрізка приблизно однакова і для

тригонометричних, і для поліноміальних розв'язків. Проте поліноміальні розв'язки по-перше, потребують менше машинного часу на обчислення, по-друге, дають набагато кращу збіжність на кінцях досліджуваного відрізка. Тому у роботі зроблено висновок, що поліноміальні розв'язки даної задачі є кращими за тригонометричні.

Результати роботи можуть бути враховані при дослідженні прогнозування телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних.

В економічному розділі розраховані витрати на порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського шуму, які складають 11880,07грн, трудомісткість виконання робіт – близько 82 людино-години.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- 1 O.I. Sheluhin and A.V. Pankrushin, "Detection of anomalies in network traffic using the methods of fractal analysis in real time", T-Comm, No. 8, 2014, p. 108–112
- 2 Ming Li, "Fractional Gaussian Noise and Network Traffic Modeling", Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science, 2009, p. 34–39
- 3 H. Quian, "Fractional Brownian Motion and Fractional Gaussian Noise", in book "Processes with Long-Range Correlations. Theory and Applications" edited by G. Rangarajan and M. Ding, Berlin, Springer, 2003, p. 22–33
- 4 В. Х. Багманов, А. М. Комиссаров, А. Х. Султанов, «Прогнозирование телетрафика на основе фрактальных фильтров», Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, т. 9, №6 (24), 2007, с. 217–222.
- 5 S. Miller and D. Childers, "Probability and Random Processes With Applications to Signal Processing and Communications. Second edition", Amsterdam, Elsevier/Academic Press, 2012, 598 p.
- 6 V. N. Gorev, A. Yu. Gusev and V. I. Korniienko, "Approximate solutions for the Kolmogorov–Wiener filter weight function for continuous fractional Gaussian noise", under review.
- 7 A. D. Polyinin, A. V. Manzhirov, "Handbook of integral equations. Second edition.", Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2008, 1143p.
- 8 O. Yu. Gusev, V. M. Gorev, V. I. Korniienko, "Theory of adaptive filtration", National Technical University "Dnipro Polytechnic", Dnipro, 2019, 156p.
- 9 Н. С. Пискунов. "Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Том. 2", – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985, 560 с.
- 10 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Yu. V. Geronimus, M. Yu. Tseytlin, J. Alan, "Table of Integrals, Series, and Products. Eighth edition.", Edited by D. Zwillinger and V. Moll, Amsterdam, Elsevier/Academic Press, 2014, 1184p.

11 Gibbs Phenomenon [Electronic resource]. Online:
<https://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html>

ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи

№	Формат	Найменування	Кількість листоків	Примітки
<i>Документація</i>				
1	A4	Реферат	3	
2	A4	Зміст	1	
3	A4	Вступ	2	
4	A4	Стан питання. Постановка задачі.	6	
5	A4	Спеціальна частина	24	
6	A4	Економічний розділ	8	
7	A4	Висновки	2	
8	A4	Перелік посилань	2	
9	A4	Додаток А	1	
10	A4	Додаток Б	1	
11	A4	Додаток В	3	
12	A4	Додаток Г	1	
13	A4	Додаток Д	1	

ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії

- 1 Електронна версія пояснювальної записки
(ПояснювальнаЗапискаАнтіпов.doc та ПояснювальнаЗапискаАнтіпов.pdf)
- 2 Електронна версія демонстраційного матеріалу (ПрезентаціяАнтіпов.pdf)

ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica

```

T = 100;
w = (2*Pi)/T;
z = 3;
H = 0.8;
R[x_] = Abs[x]^(2*H - 2);
eN = 15;
G = IdentityMatrix[2*eN + 1];
G[[1, 1]] = Re[Integrate[R[x - y], {y, 0, T}, {x, 0, T}]];
For[s = 1, s <= eN, s++,
  G[[1, s + 1]] =
  N[Re[Integrate[Cos[s*w*y]*R[x - y], {y, 0, T}, {x, 0, T}]]];
  G[[s + 1, 1]] = G[[1, s + 1]];
  G[[1, s + eN + 1]] = 0;
  G[[s + eN + 1, 1]] = 0;
];
For[k = 1, k <= eN, k++,
  For[s = 1, s <= k, s++,
    G[[k + 1, s + 1]] =
    N[Re[Integrate[
      Cos[k*w*x]*Cos[s*w*y]*R[x - y], {y, 0, T}, {x, 0, T}]]];
    G[[s + 1, k + 1]] = G[[k + 1, s + 1]];
    G[[k + 1, s + eN + 1]] = 0;
    G[[s + eN + 1, k + 1]] = 0;
    G[[k + eN + 1, s + eN + 1]] =
    N[Re[Integrate[
      Sin[k*w*x]*Sin[s*w*y]*R[x - y], {y, 0, T}, {x, 0, T}]]];
    G[[s + eN + 1, k + eN + 1]] = G[[k + eN + 1, s + eN + 1]];
  ];
];

```

```

B = Range[2*eN + 1]
B[[1]] = Re[Integrate[R[x + z], {x, 0, T}]];
For[k = 1, k <= eN, k++,
  B[[k + 1]] = Re[Integrate[Cos[k*w*x]*R[x + z], {x, 0, T}]];
  B[[k + eN + 1]] = Re[Integrate[Sin[k*w*x]*R[x + z], {x, 0, T}]];
];
For[eNN = 1, eNN <= 15, eNN++,
  Print[eNN];
  Ge = IdentityMatrix[2*eNN + 1];
  Ge[[1, 1]] = G[[1, 1]];
  For[i = 2, i <= eNN + 1, i++,
    Ge[[1, i]] = G[[1, i]];
    Ge[[i, 1]] = G[[i, 1]];
    Ge[[i + eNN, 1]] = G[[i + 15, 1]];
    Ge[[1, i + eNN]] = G[[1, i + 15]];
  ];
  For[i = 2, i <= eNN + 1, i++,
    For[j = 2, j <= eNN + 1, j++,
      Ge[[i, j]] = G[[i, j]];
      Ge[[i + eNN, j + eNN]] =
        G[[i + 15, j + 15]];
    ];
  ];
  Be = Range[2*eNN + 1]; Be[[1]] = B[[1]];
  For[i = 2, i <= eNN + 1, i++,
    Be[[i]] = B[[i]];
    Be[[i + eNN]] = B[[i + 15]];
  ];
ge = Range[2*eNN + 1]; ge = Inverse[Ge] . Be; Print[MatrixForm[ge]];
h[x_] =

```

```

ge[[1]] +
Sum[ge[[s + 1]]*Cos[s*w*x] + ge[[s + eNN + 1]]*Sin[s*w*x], {s, 1,
  eNN}];
TheLeft[x_] =
Integrate[h[y]*(x - y)^(2*H - 2), {y, 0, x}] +
Integrate[h[y]*(y - x)^(2*H - 2), {y, x, T}];
TheRight[x_] = R[x + z];
Print[
Plot[{TheLeft[t], TheRight[t]}, {t, 0, T},
PlotStyle -> {Directive[Black, Dashed], Black},
AxesLabel -> Automatic, PlotLegends -> "Expressions",
PlotRange -> {0, 0.65}]];
]

```

ДОДАТОК Г. Відгук керівника економічного розділу
ВІДГУК

Керівник розділу

Н. М. Романюк

(підпис)

ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи**Відгук на кваліфікаційну роботу****студента групи 172-17зск-1 Антіпова В. О.****на тему: «Порівняння поліноміальних і тригонометричних наближених розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування фрактального гаусівського шуму»**

Пояснювальна записка розташована на 57 сторінках і містить, у тому числі, вступ, три розділи та висновки. Метою роботи є знаходження наближеного розв'язку для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для фрактального гаусівського шуму у вигляді розвинення у тригонометричний ряд Фур'є та порівняння цих розв'язків з поліноміальними.

Рівень запозичень у кваліфікаційній роботі відповідає вимогам «Положення про систему виявлення та запобігання плагіату».

Серед позитивних сторін роботи слід відмітити, зокрема, те, що при виконанні роботи В. О. Антіпов продемонстрував добрий рівень знань на навичок. У роботі продемонстровано збіжність обраного методу для даної задачі. Показано, що поліноміальні розв'язки є кращими за тригонометричні, цей факт може бути врахований при дослідженні прогнозування телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних.

Серед недоліків роботи слід відмітити, зокрема, незначні стилістичні недоліки. Також, можливо, слід було зробити порівняння розв'язків не лише для параметрів (2.34), але і для інших параметрів.

Незважаючи на недоліки, в цілому робота задовольняє усім вимогам, що висуваються до кваліфікаційних робіт бакалаврів, заслуговує оцінки «відмінно», а її автор В. О. Антіпов – присвоєння кваліфікації бакалавр з телекомунікацій та радіотехніки.

Керівник роботи, к.ф-м.н., проф. каф. БІТ**О. Ю. Гусєв**