УДК 539.3 https://doi.org/10.33271/crpnmu/61.209

© В.В. Чигиринський[1] , О.Г. Науменко[2], О.В. Овчинников[3]
[1] Рудненський індустріальний інститут, Рудний, Казахстан
[2] Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна
[3] Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна

НОВІ ПІДХОДИ ДО РІШЕННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ З ВИКОРСТАННЯМ МЕТОДУ АРГУМЕНТ ФУНКЦІЙ

© V. Chigirinsky[1], O. Naumenko[2], A. Ovchynnykov[3]
[1] Rudny Industrial Institute, Rudny, Republic of Kazakhstan
[2] Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine
[3] Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine

NEW APPROACHES TO SOLVING PLANE PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS IN POLAR COORDINATES USING THE ARGUMENT FUNCTIONS METHOD

Мета. Розробити алгоритм спрощення знаходження рішень диференціальних рівнянь плоскої задачі механіки суцільного середовища в полярних координатах в рамках методу аргумент функцій комплексного змінного.

Методика дослідження. На основі методів аргумент функцій та комплексного змінного розроблені нові підходи до визначення компонентів тензору напружень в полярних координатах. При рішенні плоскої задачі використано системи рівнянь рівноваги. Запропоновано фундаментальне підставлення. Показано використання тригонометричного підставлення, яке пов’язує інтегральні характеристики напруженого стану з компонентами тензору напружень. Введено до розгляду аргумент функції базових змінних. При підставленні до диференційних рівнянь сформовано оператори, які характеризуються цими аргумент функціями, виконуючі роль своєрідного регулятору пошуку.

Результати дослідження. Встановлено закономірності існування рішень у вигляді інваріантних співвідношень Коші-Римана та рівнянь Лапласа. В рішенні використовують узагальнюючі співвідношення в диференційній формі для конкретних функцій – функцій гармонійного типу. Тригонометрична форма епюри дотичних напружень фактично підтверджена теоретичними та експериментальними даними.

Наукова новизна полягає в отриманні рішень, які визначають не самі функції, а умови їх існування з використанням диференційних співвідношень Коші-Римана. Рішення є більш загальним випадком з тією особливістю, що представлено не у вигляді добутку функцій, кожна з яких визначається однією координатою, а добутком різних функцій, одночасно залежних від двох координат.

Практичне значення. Отримані залежності зручно застосовувати для спрощення, що дозволяє лінеаризувати граничні умови. Зіставлення отриманих результатів з рішеннями інших авторів показує, що представлене рішення після нескладних перетворень можливо спростити та розглядати отримане рішення як більш узагальнене.

Ключові слова: *механіка суцільного середовища, метод аргумент функцій, граничні умови, співвідношення Коші-Римана, інтенсивність дотичних напружень, полярні координати.*

Вступ. Використання різних підходів рішення задач механіки суцільного середовища дозволяє розширити коло розв’язуваних прикладних проблем в машинобудуванні. Одним з таких нових напрямів є випробування в теорії і практиці методу аргумент функцій [1-5]. Він знаходить своє застосування в теорії пластичності, пружності. В роботах [5-6] отримано рішення плоскої задачі теорії пружності з використанням аргумент функції комплексного змінного. В роботі [6] підкреслено той факт, що в процесах обробки металів тиском присутні як зони пластичної течії так і зони пружної деформації. В роботі [7] розглянута прикладна задача, пов’язана з простим процесом вальцювання, яка вирішена в полярних координатах. Відомо, що різні координати дозволяють спростити рішення диференціальних рівнянь, але необхідно сформулювати підходи їх використання.

Розробка загальних підходів до рішення плоскої задачі механіки суцільного середовища – ***актуальна науково-технічна задача***, розв’язання якої дозволить узагальнити результати рішення цілого комплексу практичних задач та дозволить розширити можливості рішення з точки зору граничних та початкових умов.

Стан питання та постановка задачі дослідження. Видається доцільним отримати певні узагальнення при вирішенні плоских задач теорії пружності таким чином, щоб виявити умови існування рішень у вигляді диференційних співвідношень, накладених на різний кінцевий результат.

Основний зміст роботи. При рішенні плоскої задачі теорії пружності використовується система рівнянь рівноваги та задоволення нормальних напружень рівнянню Лапласа в полярних координатах.

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+2\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\rho}=0,$$

$$\nabla^2\left(\sigma_\rho+\sigma_\varphi\right)=0, \tag{1}$$

граничні умови

$$\tau_n=\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{2}\sin 2\varphi-\tau_{\rho\varphi}\cos 2\varphi. \tag{2}$$

Вираз (2) зручно застосовувати для спрощень, що дозволяє лінеарізувати граничні умови [8]. Інтенсивність дотичних напружень для плоскої задачі

$$T_i=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_\rho-\sigma_\varphi\right)^2+4\tau_{\rho\varphi}^2},$$

звідки

$$\sigma_\rho-\sigma_\varphi=2\sqrt{T_i^2-\tau_{\rho\varphi}^2}. \tag{3}$$

Якщо різницю (3) підставити в (2), отримаємо

$$T_n=-\frac{2T_i^2\sqrt{1-\left(\frac{\tau_{\rho\varphi}}{T_i}\right)^2}}{2}\sin 2\varphi-\tau_{\rho\varphi}\cos 2\varphi, \tag{4}$$

де τ_n - дотичне напруження на контакті; σ_ρ, σ_φ - нормальні напруження в полярних координатах; $\tau_{\rho\varphi}$ - дотичне напруження; φ - кут нахилу граничної площини.

Після перетворень у виразі (4) з'являється нелінійність, що ускладнює рішення задачі. Скористаємося підходами [8], тобто маємо

$$\tau_{\rho\varphi} = T_i \sin \text{А}\Phi, \tag{5}$$

тоді

$$\tau_n = -T_i \sin(\text{А}\Phi - 2\varphi), \tag{6}$$

АФ – визначальна функція координат ρ і φ, або перша аргумент функція.

Тригонометрична форма епюри дотичних напружень фактично підтверджена теоретичними [9] та експериментальними [10] даними. Інтенсивність дотичних напружень T_i може бути представлена фундаментальною підстановкою у вигляді

$$T_i = C_\sigma \exp Q, \tag{7}$$

де Q - визначальна функція координат ρ и φ, або друга аргумент функція. Тоді, з урахуванням (7)

$$\tau_{\rho\varphi} = C_\sigma \exp Q \sin \text{А}\Phi,$$

$$\tau_n = C_\sigma \exp Q \sin(\text{А}\Phi - 2\varphi). \tag{8}$$

У виразах (8) представлені дві аргумент-функції АФ і Q. Як показав подальший аналіз, вони здатні замкнути рішення поставленої задачі.

У відповідності до функції комплексного змінного [11], маємо

$$\tau_{\rho\varphi} = C_\sigma \frac{\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \exp(Q - i\text{А}\Phi)}{2i}. \tag{9}$$

Похідні рівнянь (1)

$$\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{C_\sigma}{2i}\left[\left(Q_\varphi + i\text{А}\Phi_\varphi\right)\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \left(Q_\varphi - i\text{А}\Phi_\varphi\right)\exp(Q - i\text{А}\Phi)\right],$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} = \frac{C_\sigma}{2i}\left[\left(Q_\rho + i\text{А}\Phi_\rho\right)\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \left(Q_\rho - i\text{А}\Phi_\rho\right)\exp(Q - i\text{А}\Phi)\right],$$

де Q_φ, $\text{А}\Phi_\rho$ і т.д. – частинні похідні від аргумент функцій по куту φ та ρ.

З урахуванням (3), (5), (7), отримаємо

$$\sigma_\rho - \sigma_\varphi = 2C_\sigma \exp Q \cos \text{А}\Phi = 2\frac{C_\sigma}{2}\left[\exp(Q + i\text{А}\Phi) + \exp(Q - i\text{А}\Phi)\right]. \tag{10}$$

Підставляємо (10) та похідні до рівняння рівноваги (1), інтегруємо з урахуванням девіаторної складової для нормальних напружень, будемо мати

$$\sigma_\rho = -\Big\{\int \frac{C_\sigma}{2i}\frac{1}{\rho}\left[\left(Q_\varphi + i\text{А}\Phi_\varphi\right)\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \left(Q_\varphi - i\text{А}\Phi_\varphi\right)\exp(Q - i\text{А}\Phi)\right]d\rho +$$
$$+ 2\int \frac{C_\sigma}{2}\frac{1}{\rho}\left[\exp(Q + i\text{А}\Phi) + \exp(Q - i\text{А}\Phi)\right]d\rho\Big\} + \sigma_0, \tag{11}$$

$$\sigma_\varphi = -\Big\{\int \frac{C_\sigma}{2i}\rho\left[\left(Q_\rho + i\text{А}\Phi_\rho\right)\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \left(Q_\rho - i\text{А}\Phi_\rho\right)\exp(Q - i\text{А}\Phi)\right]d\varphi +$$
$$+ 2\int \frac{C_\sigma}{2i}\left[\exp(Q + i\text{А}\Phi) - \exp(Q - i\text{А}\Phi)\right]d\varphi\Big\} + \sigma_0. \tag{12}$$

З виразів (11), (12) видно, що інтегрування в загальному вигляді неможливо, тому що під інтегралами фігурують декілька змінних. Скористаємося співвідношеннями Коші-Римана у вигляді, що надає математичний зв'язок поміж змінними наступним чином

$$\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\varphi, \ \rho \mathrm{A}\Phi_\rho = Q_\varphi. \tag{13}$$

Після підстановки (13) в (11) і (12) та інтегрування, отримаємо наступні вирази

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= C_\sigma \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2} - I_1 + \sigma_0, \\ \sigma_\varphi &= -C_\sigma \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2} - I_2 + \sigma_0, \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &= 2C_\sigma \int \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2\rho} d\rho, \\ I_2 &= 2C_\sigma \int \frac{\exp(Q - i\mathrm{A}\Phi) - \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2i} d\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

Можливо показати, що $I_1 = I_2 = I$. Для цього необхідно взяти похідні за різними аргументами і провести інтегрування виразів. Маємо рівності з точністю до постійної інтегрування. З отриманих виразів (14) випливає, що для вирішення задачі необхідно знати середнє нормальне напруження σ_0. Для цього скористаємося умовою нерозривності деформацій виду

$$\nabla^2 (\sigma_\rho + \sigma_\varphi) = 0,$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2}; \sigma_\rho + \sigma_\varphi = 2\sigma_0 ... n\sigma_0.$$

Підставимо σ_0 в рівняння Лапласу

$$\nabla^2 (n\sigma_0) = \frac{\partial^2 (n\sigma_0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (n\sigma_0)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (n\sigma_0)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Аналіз виразів (14), (15) показує, що ядром рішення є вираз

$$C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi = C_\sigma \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2}. \tag{16}$$

Підставимо (16) в рівняння нерозривності деформацій. Після скорочення та перегрупування отримаємо рівняння нерозривності деформацій в наступному вигляді

$$\begin{bmatrix} \left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi}\right) + i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi}\right) + \\ + \left(\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\varphi\right)\left(\rho Q_\rho - \mathrm{A}\Phi_\varphi\right) + \left(Q_\varphi + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho\right)\left(Q_\varphi - \rho \mathrm{A}\Phi_\rho\right) + \\ + 2i\left(\rho^2 Q_\rho \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\varphi \mathrm{A}\Phi_\varphi\right) \end{bmatrix} \exp\left(Q + i\mathrm{A}\Phi\right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi}\right) - i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi}\right) + \\ + \left(\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\varphi\right)\left(\rho Q_\rho - \mathrm{A}\Phi_\varphi\right) + \left(Q_\varphi + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho\right)\left(Q_\varphi - \rho \mathrm{A}\Phi_\rho\right) - \\ - 2i\left(\rho^2 Q_\rho \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\varphi \mathrm{A}\Phi_\varphi\right) \end{bmatrix} \exp\left(Q - i\mathrm{A}\Phi\right) = 0. \tag{17}$$

Після усунення нелінійності, прирівнюємо вирази в дужках (17) до нуля, тобто

$$\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\varphi = 0, \qquad Q_\varphi - \rho \mathrm{A}\Phi_\rho = 0,$$

або (18)

$$\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\varphi, \qquad Q_\varphi = \rho \mathrm{A}\Phi_\rho.$$

Отримали співвідношення Коші-Римана (13), яке використовували в рівняннях рівноваги при переході від одного змінного до іншого. З урахуванням (18), отримаємо

$$\rho Q_\rho \cdot \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\varphi \cdot \mathrm{A}\Phi_\varphi = -\rho \mathrm{A}\Phi_\varphi \cdot \mathrm{A}\Phi_\rho + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho \cdot \mathrm{A}\Phi_\varphi = 0.$$

Останнє перетворення дозволяє представити рівняння нерозривності деформацій у наступному вигляді

$$\begin{gathered} \left[\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi}\right) + i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi}\right)\right] \exp\left(Q + i\mathrm{A}\Phi\right) + \\ + \left[\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi}\right) - i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi}\right)\right] \exp\left(Q - i\mathrm{A}\Phi\right) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

З урахуванням (18), другі похідні представлені наступним чином

$$\left(\rho Q_\varphi + \mathrm{A}\Phi_\varphi\right)_\rho = 0, \left(Q_\varphi - \rho \mathrm{A}\Phi_\rho\right)_\varphi = 0,$$

$$Q_\rho + \rho Q_{\rho\rho} + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\rho} = 0, Q_{\varphi\varphi} - \rho \mathrm{A}\Phi_{\rho\varphi} = 0,$$

або

$$\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi} = 0.$$

Провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi} = 0.$$

Підставляючи останні оператори в останнє рівняння (1), маємо тотожність. Таким чином, вираз

$$\sigma_0 = nC_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi \tag{20}$$

і є рішенням рівняння (1) за умови

$$\begin{gathered} \rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\varphi, Q_\varphi = \rho \mathrm{A}\Phi_\rho, \\ \rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi} = 0, \\ \rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi} = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Рішення плоскої задачі теорії пружності (1) в аналітичному вигляді запишеться наступним чином

$$\sigma_\rho = C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi + \sigma_0 - I,$$
$$\sigma_\varphi = -C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi + \sigma_0 - I,$$
$$\tau_{\rho\varphi} = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A}\Phi,$$
$$\sigma_0 = nC_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi, \qquad (22)$$

при

$$\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\varphi, Q_\varphi = \rho \mathrm{A}\Phi_\rho,$$
$$\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi} = 0,$$
$$\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\varphi\varphi} = 0.$$

Аналізуючи (22), видно, що основу рішення складають базові функції – фундаментальна, тобто експонента, і тригонометрична; невідомі аргумент функції АΦ і Q визначаються рівняннями Лапласа в полярних координатах, що вважаються як знайдені.

Становить інтерес порівняти рішення (22) з відомими рішеннями ряду авторів [12]. Показано, що рішенням плоскої задачі теорії пружності є функція напружень λ, яка задовольняє бігармонічне рівняння виду

$$\nabla^4 \lambda = 0,$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\varphi^2}\right) = 0. \qquad (23)$$

Покажемо, що рішення (22) задовольняє бігармонічному рівнянню (23). Припустимо, що

$$\lambda = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A}\Phi = C_\sigma \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) - \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2i}. \qquad (24)$$

Визначаючи похідні від *λ* (24) по радіусу *ρ* і куту *φ*, по аналогії з (23), підставляючи їх в рівняння Лапласа, після перетворення і перегрупування отримаємо

$$\frac{C_\sigma}{2i}\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&\left(Q_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}Q_\rho + \frac{1}{\rho^2}Q_{\varphi\varphi}\right) + i\left(\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{A}\Phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho}\right) + \\ &+ \left(Q_\rho + i\mathrm{A}\Phi_\rho\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(Q_\varphi + i\mathrm{A}\Phi_\varphi\right)^2\end{aligned}\right]\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) - \\ &- \left[\begin{aligned}&\left(Q_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}Q_\rho + \frac{1}{\rho^2}Q_{\varphi\varphi}\right) - i\left(\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{A}\Phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho}\right) + \\ &+ \left(Q_\rho - i\mathrm{A}\Phi_\rho\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(Q_\varphi - i\mathrm{A}\Phi_\varphi\right)^2\end{aligned}\right]\exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)\end{aligned}\right\} = 0. \qquad (25)$$

Розписуючи суми квадратів, здійснивши чергове перегрупування, отримаємо різниці квадратів, які зручно трансформуються у рішення за умови

$$\left.\begin{aligned} \rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\varphi = 0, \\ \rho \mathrm{A}\Phi_\rho - Q_\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{вар I}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho Q_\rho - \mathrm{A}\Phi_\varphi = 0, \\ \rho \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{вар II} \tag{26}$$

Приймаючи перший варіант (26) і підставляючи його в (25), отримаємо тотожність. Це було потрібно показати. Підставляючи нульовий варіант рішення рівняння Лапласу (23) до другої похідної за координатами, отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2(0)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(0)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(0)}{\partial\varphi^2}\right) = 0.$$

Маємо тотожність для бігармонічного рівняння.

Отже, запропоноване рішення (24) тотожно задовольняє не тільки рівняння Лапласу, але й бігармонічне рівняння. Це дозволяє стверджувати, що пропонується новий метод рішення плоских задач теорії пружності.

Рішення (24) можливо посилити та записати у вигляді

$$\lambda = C_\sigma \exp Q \left(C_1 \sin \mathrm{A}\Phi + C_2 \cos \mathrm{A}\Phi\right), \tag{27}$$

$$\lambda = C_\sigma \left(\sinh Q + \cosh Q\right)\left(C_1 \sin \mathrm{A}\Phi + C_2 \cos \mathrm{A}\Phi\right), \tag{28}$$

де sinhQ, coshQ – гіперболічні синус та косинус.

Отриманий результат (27), (28) можливо зіставити з рішенням, яке наведено в роботі [12], де фігурують експоненціальні та тригонометричні функції.

Рішення Жемочкіна має вигляд

$$\lambda = f(\rho)\sin\varphi,$$

де $f(\rho)$ – функція однієї змінної ρ, φ – кут, визначаючий іншу змінну.

В кінцевому вигляді, згідно [12], функція трансформується у вираз

$$\lambda = \frac{D}{\rho}\sin\varphi. \tag{29}$$

Загальне рішення (27), (28) з використанням співвідношень Коші-Римана можливо адаптувати до виразу (29), як до частинного рішення запропонованих залежностей. Дійсно, приймаючи $C_2=0$, $\mathrm{A}\Phi=\varphi$, перетворимо вираз (27) на інший вигляд

$$\lambda = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A}\Phi, \tag{30}$$

при

$$\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\varphi, \rho \mathrm{A}\Phi_\rho = Q_\varphi.$$

З аналізу видно, що $\mathrm{A}\Phi_\varphi=1$, $\mathrm{A}\Phi_\rho=0$, $Q_\varphi=0$, $Q_\rho=f(\rho)$, тоді співвідношення Коші-Римана приймають вигляд

$$\rho Q_\rho = -1,$$

$$Q_\rho = -\frac{1}{\rho},$$

$$Q = -\ln \rho + C_1.$$

Визначаючи C_1, запишемо

$$Q = \ln \frac{D}{\rho}.$$

Підставимо в (30), маємо

$$\lambda = \exp\left(\ln \frac{D}{\rho}\right) \sin \varphi = \frac{D}{\rho} \sin \varphi, \text{ при} C_\sigma = 1 \qquad (31)$$

Після перетворення (30) в (31), отримаємо результат (29). З цього випливає, що (27), (28) є більш загальним випадком з тією особливістю, що рішення представлено не у вигляді добутку функцій, кожна з яких визначається однією координатою, а добутком різних функцій, одночасно залежних від двох координат. При цьому останні сполучаються співвідношенням Коші-Римана.

Основні висновки та рекомендації. Особливістю отриманого результату є замикальні співвідношення Коші-Римана, які визначають умови існування цього результату. Отримані в роботі аналітичні залежності зручно застосовувати для спрощення, що дозволяє лінеарізувати граничні умови. Результати досліджень можуть бути використані при рішенні задач теорії пружності в полярних координатах з використанням методу аргумент функцій та дозволяють отримати більш узагальнене рішення.

Перелік посилань

1. Chigurinski, V.V. (1999). The study of stressed and deformed metal state under conditions of nonuniform plastic medium flow. *Metalurgija (Zagreb, Croatia)*, *38*(1), 31-37.
2. Chygyryns'kyy, V.V, Mamuzic, I., & Bergeman, G.V. (2004). Analysis of the state of stress and strain of a medium under conditions of inhomogeneous plastic flow. *Metalurgija -Sisak Then Zagreb-*, *43*, 87–91.
3. Чигиринский, В.В. (2009). Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функцій, *Известия ВУЗов. Черная металургия*, (5), 11-16.
4. Chigirinsky, V., & Putnoki, A. (2017). Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument-functions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, *3*(7), 11–22. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.101282
5. Chigirinsky, V., & Naumenko, O. (2019). Studying the stressed state of elastic medium using the argument functions of a complex variable. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, *5*, 27–35. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.177514
6. Чигиринский, В.В., & Науменко, Е.Г. (2019). Некоторые особенности решения плоской задачи механики сплошной среды. *Обработка материалов давлением: Сборник научных трудов*, 1(48), 3-11.
7. Смирнов, В.С. (1967). *Теория прокатки*. Металлургия.
8. Чигиринский, В.В., Бренер, В.А., Науменко, Е.Г. (2019). Анализ граничных условий пространственной задачи механики сплошной среды. *Вісник Національного технічного univе-*

рситету «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії, 11(1336), 87-93.
9. Безухов, Н.И. (1968). *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*. Высшая школа.
10. Клименко, П.Л. (2007). *Контактные напряжения при прокатке*. Пороги.
11. Мусхелишвили, Н.И. (1966). *Некоторые основные задачи математической теории упругости*.Наука.
12. Жемочкин, Б.Н. (1957). *Теория упругости*. Гостройиздат.

АННОТАЦИЯ

Цель. Разработать алгоритм упрощения нахождения решений дифференциальных уравнений плоской задачи механики сплошной среды в полярных координатах в рамках метода аргумент функций комплексного переменного.

Методика исследования. На основе методов аргумент функций и комплексного переменного разработаны новые подходы к определению компонентов тензора напряжений в полярных координатах. При решении плоской задачи использована система уравнений равновесия. Предложена фундаментальная подстановка. Показано использование тригонометрической подстановки, которая связывает интегральные характеристики напряженного состояния с компонентами тензора напряжений. Введены в рассмотрение аргумент функции базовых переменных. При подстановке в дифференциальные уравнения сформированы операторы, характеризующиеся этими аргумент функциями, выполняющие роль своеобразного регулятора поиска.

Результаты исследования. Установлены закономерности существования решений в виде инвариантных соотношений Коши-Римана и уравнений Лапласа. В решении использованы обобщенные соотношения в дифференциальной форме для конкретных функций – функций гармонического типа. Тригонометрическая форма эпюры касательных напряжений фактически подтверждена теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Научная новизна заключается в получении решений, которые определяют не сами функции, а условия их существования с использованием соотношений Коши-Римана. Решение является более обобщенным случаем с той особенностью, что представлено не в виде произведения функций, каждая из которых определяется одной координатой, а произведением разных функций, одновременно зависящих от двух координат.

Практическое значение. Полученный результат удобно использовать для упрощения, что позволяет линеаризовать граничные условия. Сопоставление полученных результатов с решениями других авторов показывает, что представленное решение после несложных преобразований можно упростить и рассматривать полученное решение как более обобщенное.

Ключевые слова: *механика сплошной среды, метод аргумент функций, граничные условия, соотношения Коши-Римана, интенсивность касательных напряжений, полярные координаты.*

ABSTRACT

Purpose. Development of an algorithm of simplification of solving of continuum mechanics plane problem in the polar coordinates using the argument functions of complex variable.

Methodology of research. Based on the argument function method and the method of a complex variable, new approaches to the determination of components of the stress tensor in polar coordinates have been developed. The equilibrium equation systems were used to solve the flat problem. A fundamental substitution is suggested. Use of a trigonometric substitution that connects integral characteristics of a stressed state with components of a stress tensor is demonstrated. Argument functions of basic variables are introduced. When substituting into differential equations, operators are formed, which are characterized by these argument functions and that perform a role of special search regulators.

Findings. Analytical dependencies of existence of solutions in a form of the invariant Cauchy-Riemann conditions and Laplace's equations are determined. The solution uses generalized relations in the differential form for specific functions - functions of harmonic type. The trigonometric shape of the shearing stress distribution diagram is actually confirmed by theoretical and experimental data.

Scientific novelty is in establishment of the solutions that determine not the functions themselves, but the conditions of their existence using Cauchy-Riemann differential conditions. The solution is a more general case with the feature that is represented not by the product of functions, each of which is determined by one coordinate, but by the product of different functions simultaneously dependent on two coordinates.

Practical significance. Obtained result is conveniently applied for simplification, allowing linearization of boundary conditions. Comparison of the obtained results with the solutions of other authors shows that the presented solution after simple transformations can be simplified and consider the obtained solution as more generalized.

Keywords*: continuum mechanics, argument functions method, boundary conditions, Cauchy-Riemann conditions, shearing stress intensity, polar coordinates.*