МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус

Практикум за курсом

«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»
ЧАСТИНА І. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

УДК 519.8
К 70

Рекомендовано вченою радою як навчальний посібник для студентів спеціальностей 121 Програмна інженерія, 122 Компютерні науки, 124 Системний аналіз, 275 Транспортні технології (протокол № 9 від 23.09.2020).

Рецензенти:
М.О. Алєксєєв – д-р техн. наук, проф.;
Л.І. Лозовська – канд. фіз.-мат. наук, доц.

Коряшкіна Л.С.
К 70 Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина І. Дослідження операцій: навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2020. – 182 с.

ISBN 978-966-350-732-3

Міститься матеріал щодо проведення практичних занять з курсу «Методи оптимізації та дослідження операцій». Для кожного заняття наведено тему, мету, план, опорні поняття, рекомендовану літературу (базову та допоміжну), інформаційні ресурси, варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи студентів, поточні контрольні запитання/завдання.

Стане в пригоді студентам НТУ «Дніпровська політехніка», які навчаються за спеціальнісями 275 Транспортні технології, 124 Системний аналіз, 122 Компьютерні технології, 121 Програмна інженерія.

УДК 519.8

ISBN 978-966-350-732-3

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Часто під дослідженням операцій мається на увазі комплекс наукових методів для вирішення проблем ефективного управління організаційними системами.

Природа систем, що фігурують в наведеному визначенні як «організаційні», може бути самою різноманітною, проте їх математичні моделі знаходять використання не тільки при розв'язанні виробничих й економічних задач, але і в біології, соціологічних дослідженнях та інших практичних сферах. До того ж, історично сама назва дисципліни пов'язана із застосуванням математичних методів для керування військовими операціями.

Незважаючи на багатоваріантність задач організаційного управління, при їх розв'язанні можна виділити певну загальну послідовність етапів, які проходить кожне операційне дослідження. Як правило, це:

1. Постановка задачі.

2. Постановка змістової (вербальної) моделі розглянутого об'єкта (процесу). На даному етапі відбувається формалізація цілей управління об'єктом, виділення (виокремлення) можливих керуючих параметрів, що впливають на досягнення поставленої мети, опис системи обмежень на керуючі впливи або параметри стану об’єкта чи процесу.

3. Побудова математичної моделі, тобто запис сконструйованої вербальної моделі в такій формі, в якій для її вивчення може бути використаний математичний апарат.

4. Розв'язання задач, сформульованих на базі побудованої математичної моделі.

5. Перевірка отриманих результатів на їх адекватність природі досліджуваної системи, і можливе коригування початкової моделі.

6. Реалізація отриманого рішення на практиці.

Центральне місце у посібнику відведено питанням, що належать до четвертого пункту наведеної вище схеми. Він є найважливішим, складним і цікавим. Оскільки решта пунктів суттєво залежить від конкретної природи досліджуваної системи, для дій, які повинні проводитися в їх рамках, не можуть бути сформульовані універсальні і змістовні рекомендації. З цього приводу Х. Таха [1] зауважив, що дослідження операцій одночасно є як наукою, так і мистецтвом.

Практичне заняття – це форма навчального процесу, коли викладач організовує детальний розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни, розвиває їх вміння та навички застосування теорії на практиці шляхом виконання групою або індивідуально спеціально розроблених завдань. Практичне заняття включає проведення попереднього контролю знань, загальну постановку задачі дослідження операцій, обговорення ідей методів або алгоритмів її розв'язання, виконання контрольних завдань, їх перевірку, оцінювання.

На практичних заняттях у студентів мають сформуватися вміння й навички побудови математичних моделей практичних оптимізаційних задач, їх класифікації, вибору та застосування відповідних методів щодо розв'язування, якісного аналізу отриманих результатів. Кожне заняття має бути спрямоване на виховання здатності творчого пошуку будь-яких обґрунтованих оптимальних рішень: план виробництва продукції, організація транспортних перевезень, складання раціонального розкладу, управління запасами, календарне планування, системи масового обслуговування тощо. Під час проведення заняття студенти самостійно або у групах вирішують запропоновані задачі різного рівня складності, розглядають виробничі процеси, конфліктні ситуації або ділові ігри. Із метою виявлення рівня засвоєння матеріалу викладачем проводиться перевірка й обговорення робіт, а також підбиття підсумків із одержанням відповідних оцінок залежно від результатів.

Вивчення дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» передбачає засвоєння навчального матеріалу у вільний від аудиторних занять час за допомогою самостійної та індивідуальної навчально-дослідної роботи, призначеної формувати практичні навички роботи студентів із спеціальною літературою, орієнтувати їх на інтенсивну діяльність, критичне осмислення здобутих знань і глибоке вивчення теоретичних і практичних проблем прийняття оптимальних рішень.

Мета практичних занять – розширення, поглиблення і деталізація наукових знань, здобутих на лекціях та в процесі самостійної роботи; підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, розвиток умінь і навичок прийняття обґрунтованих оптимальних рішень на практиці. Заняття збагачують і закріплюють теоретичні знання студентів, розвиваючи їхню творчу активність.

Перелік і зміст тем, наведених у посібнику, визначені навчальною робочою програмою дисципліни «Методи оптимізації і дослідження операцій», розробленої в межах освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів із спеціальності 124 Системний аналіз, а також може використовуватися при підготовці бакалаврів із спеціальностей 121 Програмна інженерія, 122 Комп’ютерні науки, 275 Транспортні технології, які опановують дисципліну «Дослідження операцій».

Вивчення дисципліни забезпечує наступні компетентності:

– здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, яка заснована на прикладних математичних методах та новітніх інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу, оптимізації та синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних складних систем;

– здатність формулювати постановку задачі оптимізації при проєктуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації та оптимального керування;

– здатність використовувати сучасні інформаційні технології для комп'ютерної реалізації математичних моделей та прогнозування поведінки конкретних систем, а саме: об'єктно-орієнтований підхід при проєктуванні складних систем різної природи, прикладні математичні пакети, проєктувати бази даних і знань.

Практичне заняття № 1. Побудова математичних моделей оптимізаційних задач

Мета: набуття і закріплення навичок побудови лінійних економіко-математичних моделей

План

1. Загальна постановка задачі дослідження операцій. Викладення основних етапів побудови математичних моделей практичних оптимізаційних задач
2. Побудова математичних моделей конкретних задач
   - 2.1. Оптимізація плану виробництва продукції
   - 2.2. Оптимальне змішування
   - 2.3. Задачі оптимального розкрою
   - 2.4. Оптимальне планування фінансів
   - 2.5. Пошук оптимального плану транспортування продукції

Опорні поняття

Математичні моделі будують на основі відомої змістової постановки задачі. Їх складання починають з коректного вибору змінних. Слід розуміти, що у більшості випадків від цього залежить простота моделі, а, отже, її розв'язок. Після вибору змінних, виходячи із змістового формулювання, послідовно складають обмеження, які вони повинні задовольняти. При цьому потрібно слідкувати, щоб у модель були введені всі обмежувальні умови, і в той самий час не було жодної зайвої або записаної у більш жорсткій, ніж потрібно за умов задачі, формі. Наступним кроком є складання цільової функції, яка в математичній формі відображає заданий в межах задачі критерій оптимізації. Зауважимо, що в деяких моделях зручніше її будувати відразу після вибору змінних задачі, тобто порядок побудови моделі не є жорстким і може змінюватись. Після цього модель, якщо це можливо, спрощують.

Математичне моделювання в дослідженні операцій є з одного боку дуже важливим і складним, а з іншого − процесом, що практично не піддається науковій формалізації. Спроби виділити загальні принципи створення моделей робилися неодноразово, але всі вони приводили або до декларування рекомендацій загального характеру, які найчастіше складно використати для вирішення конкретних проблем, або, навпаки, до появи рецептів, які можна застосувати в дійсності тільки до вузького кола завдань. Тому більш корисним є знайомство з технікою математичного моделювання на конкретних прикладах.

Наведемо кілька класичних економіко-математичних моделей і задач, які можуть бути сформульовані на їх основі.

1. **Оптимізація плану виробництва продукції**

Змістова постановка задачі: при заданих запасах ресурсів, відомих нормах витрат кожного з них окремо на виробництво одиниці усякого виду продукції, відомій ціні виробів на ринку максимізувати загальну вартість виробленого.

Математична постановка задачі: нехай підприємство виробляє n видів продукції, при цьому використовується k видів ресурсів. Позначимо через: $b_i,\ i=\overline{1,k}$ – запас i -го виду ресурсу; $a_{ij},\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,n}$ – норми витрат i -го виду ресурсу на виробництво одиниці j -го виду продукції; $c_j,\ j=\overline{1,n}$ – ціну j -го виду продукції на ринку (див. табл. 1).

Таблиця 1. Систематизація даних про виробництво продукції

Тип ресурса	Норми витрат ресурсу на одиницю продукції				Наявність ресурсу
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
k	a_{k1}	a_{k2}	…	a_{kn}	b_k
Ціна одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_n	

Введемо змінні $\boldsymbol{x_j,\ j=\overline{1,n}}$ – невідому кількість виробництва $\boldsymbol{j}$ -го виду продукції. Тоді вартість плану виробництва $\boldsymbol{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n}. \tag{1}$$

Витрати $\boldsymbol{i}$ -го виду ресурсу на виробництво всіх видів продукції дорівнюють

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n}$$

і мають не перевищувати запасу $\boldsymbol{b_i,\ i=\overline{1,k}}$, тобто

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i,\ i=\overline{1,k}}. \tag{2}$$

За змістом задачі компоненти плану виробництва невід'ємні:

$$\boldsymbol{x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}}. \tag{3}$$

Отже, задача про оптимальний план виробництва полягає у пошуку таких значень невідомих $\boldsymbol{x_j,\ j=\overline{1,n}}$, які максимізують лінійну функцію (1) і задовольняють умови (2), (3).

2. **Оптимальне змішування (оптимальний раціон)**

Задачі на суміші утворюють важливий клас прикладних оптимізаційних завдань. Вони виникають під час вибору найкращого способу змішування вихідних інгредієнтів для отримання конгломерату із заданими властивостями, які визначаються кількістю компонентів, що входять до складу вихідних матеріалів. Як правило, відомі вартісні характеристики інгредієнтів, і шукану суміш потрібно одержати з найменшими витратами. Для багатопродуктових задач, де необхідно отримати кілька сумішей, характерним є критерій максимізації прибутку.

Задачі оптимального змішування трапляються в багатьох галузях промисловості (металургія, парфумерія, виробництво харчів, фармакологія, сільське господарство). Їх прикладами є визначення кормового раціону худоби на тваринницьких фермах, складання рецептури шихти на металургійному заводі тощо. Розглянемо однопродуктову модель оптимального змішування.

Змістова постановка задачі: при заданому асортименті продуктів з відомим вмістом поживних речовин у кожному з них і відомій ціні скласти найбільш дешевий добовий раціон, що задовольняє потреби організму.

Математична постановка задачі: нехай є n різних продуктів, що містять k поживних речовин (білків, жирів, вуглеводів, вітамінів і т.і.). Позначимо через: $b_i,\ i=\overline{1,k}$ − найменшу добову потребу в i -й поживній речовині; $a_{ij},\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,n}$ − питомий вміст i -ї поживної речовини у ваговій чи об’ємній одиниці j -го продукту; $c_j,\ j=\overline{1,n}$ − ціну j -го продукту (тобто вартість вагової або об’ємної одиниці j -го продукту (інформацію можна звести у табл. 1).

Введемо змінні $\boldsymbol{x_j},\ \boldsymbol{j=\overline{1,n}}$ − невідому кількість одиниць $\boldsymbol{j}$ -го продукту, що використовується за добу. Тоді вартість добового раціону $\boldsymbol{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)}$ буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n}. \qquad (4)$$

Вміст $\boldsymbol{i}$ -ї поживної речовини в раціоні

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n}$$

не повинен бути меншим за мінімальну потребу $\boldsymbol{b_i}$ в ній організму, тобто

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n\ge b_i,\ i=\overline{1,k}}. \qquad (5)$$

За змістом задачі компоненти раціону невід'ємні:

$$\boldsymbol{x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}}. \qquad (6)$$

Отже, задача про оптимальний раціон полягає у пошуку таких значень змінних $\boldsymbol{x_j},\ \boldsymbol{j=\overline{1,n}}$, які мінімізують лінійну функцію (4) і задовольняють умови (5), (6).

3. Задачі оптимального розкрою

Більшість матеріалів, що використовуються в промисловості, надходить на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє їх застосування, як правило, не можливе, спочатку треба їх розрізати на заготівлі необхідних розмірів. Це можна зробити за допомогою різних способів розкрою матеріалу. Задача при цьому полягає у їх раціональному виборі, а також визначенні, яку кількість матеріалу слід розкроювати, застосовуючи кожен з обраних способів. Подібна необхідність зазвичай виникає в металургії і машинобудуванні, лісовій, лісопереробній, легкій промисловості.

Змістова постановка задачі. З огляду на відомий асортимент і запаси матеріалів, можливі способи розкрою та задану умову комплектності розкроїти всі матеріали так, щоб отримати максимальне число комплектів виробів.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m різних видів матеріалів, які можуть бути розкроєні n способами на k різних видів виробів. Ці вироби, взяті відповідно у кількостях $b_l,\ l=\overline{1,k}$, утворюють комплект. Позначимо через: $a_i,\ i=\overline{1,m}$ − запас i -го матеріалу; $a_{ij}^l,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ l=\overline{1,k}$ − кількість одиниць l -го виробу, отримана при розкрої одиниці i -го матеріалу j -м способом.

Нехай x − кількість комплектів, $x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ − кількість одиниць i -го матеріалу, розкроєного j -м способом.

Використання $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу не повинно бути більшим за його запас $\boldsymbol{a_i,\ i=\overline{1,m}}$, тобто

$$\boldsymbol{x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}\le a_i,\ i=\overline{1,m}}. \tag{7}$$

Оскільки з одиниці $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу $\boldsymbol{j}$ -м способом розкрою одержуємо $\boldsymbol{a_{ij}^l}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу, то при розкрої $\boldsymbol{x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу $\boldsymbol{j}$ -м способом одержуємо $\boldsymbol{a_{ij}^l x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. Використання всіх матеріалів і всіх способів розкрою дає $\boldsymbol{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^l x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. З іншого боку помічаємо, що в $\boldsymbol{x}$ комплектах міститься $\boldsymbol{xb_l}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. Тому умова комплектності набуває вигляду

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^l x_{ij}=xb_l,\ l=\overline{1,k}}. \tag{8}$$

За змістом задачі всі змінні $\boldsymbol{x, x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ невід’ємні:

$$\boldsymbol{x, x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}. \tag{9}$$

Отже, задача на оптимальний розкрій полягає у максимізації цільової функції

$$\boldsymbol{z(x)=x}$$

за виконання умов (7) − (9).

4. Пошук оптимального плану транспортування продукції

Змістова постановка задачі. Знайти найбільш дешевий план перевезень однорідного продукту з пунктів із відомими його запасами до місць з заданими його потребами при відомій вартості транспортування одиниці продукту з кожної точки зберігання у будь-який пункт споживання.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m пунктів відправлення і n пунктів призначення. Позначимо через: $a_i,\ i=\overline{1,m}$ − об’єм запасу продукту на i-му пункті відправлення; $b_j,\ j=\overline{1,n}$ − об’єм потреби у продукті в j-му пункті призначення; $c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ − вартість перевезення однієї одиниці продукту безпосередньо із i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення.

Нехай за планом перевезень із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення перевозиться $x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ одиниць продукту.

Тоді вартість всіх перевезень буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{L(x)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}}, \tag{10}$$

де $\boldsymbol{x=\{x_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}}$ − матриця перевезень.

Кількість продукту, що вивозиться з $\boldsymbol{i}$ -го пункту не повинно перевищувати його запасу $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$, тобто

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \le a_i, \; i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Для задоволення попиту у продукті в $\boldsymbol{j}$-му пункті призначення його кількість, що завозиться, має бути не меншою за потреби $\boldsymbol{b_j}$, $\boldsymbol{j = \overline{1,n}}$, тобто

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \ge b_j, \; j = \overline{1,n}. \tag{12}$$

За змістом задачі всі змінні $\boldsymbol{x_{ij}}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$, $\boldsymbol{j = \overline{1,n}}$ невід'ємні:

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Отже, транспортна задача полягає у пошуку такого плану перевезень $\boldsymbol{x = \{x_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}}$, який мінімізує функцію (10) і задовольняє умови (11) − (13).

Зауважимо, що без додаткових умов, накладених на величини $\boldsymbol{b_j}$, $\boldsymbol{j = \overline{1,n}}$ і $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$ ця задача може виявитись нерозв'язуваною.

Необхідною і достатньою умовою її розв'язуваності є виконання умови балансу: загальний об'єм запасу продукту має дорівнювати загальному об'єму потреби в ньому, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{14}$$

За виконання умови балансу (14) транспортна задача називається **збалансованою** або **закритою.**

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Экономико-математическое моделирование: учебник / под ред. И.Н. Дрогобницкого. – 2-е изд., стереотип. – М.: Экзамен, 2006. – 798 с.
2. Математическое моделирование: Методы, описание и исследование сложных систем / под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. – М. : Наука, 1989. – 266 с.
3. 6. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев. – ТЕИС, 2002. – 312 с.
4. Ходыкин В.Ф. Сборник задач по математическому программированию / В.Ф. Ходыкин, А.А. Преображенский. − 2002. − 218 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

Для кожної із наведених задач побудувати математичну модель, реалізувати її за допомогою надстройки «Пошук рішення» Microsoft Excel. Проаналізувати отримані розв'язки. Якщо для коректного розв'язання задачі наведеної інформації недостатньо, запропонувати додаткову умову і знайти відповідний розв'язок.

1. Фірма з переробки картоплі виробляє три види продукції − картопляні чіпси, кубики та пластівці. Аналіз завантаженості устаткування і попиту на ринку показує можливість зробити і збути до 1,8 т чіпсів, 1,2 т кубиків і 2,4 т пластівців. Необхідну кількість картоплі для переробки фірма закуповує у двох постачальників. Кількість готової продукції і відносний прибуток (дохід від реалізації готової продукції за винятком вартості сировини), який можна одержати з однієї тони картоплі кожного постачальника, зазначені в наступній таблиці.

Вид готової продукції	Вихід готової продукції з 1 т картоплі, т		Потреби ринку збуту, т
	Постачальник 1	Постачальник 2	
Чіпси	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Пластівці	0,3	0,3	2,4
Відносний прибуток, грош. од.	5,0	6,0	

Побудувати економіко-математичну модель для забезпечення найбільшого відносного прибутку з урахуванням можливості збуту готової продукції.

2. Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси сировини і робочої сили, необхідні для виробництва двох видів продукції. Витрати ресурсів на виготовлення однієї тони кожного продукту, прибуток, одержуваний підприємством від реалізації тони продукту, а також запаси ресурсів зазначені в наступній таблиці:

	Витрати ресурсу на 1 т		Запас ресурсу
	продукт 1	продукт 2	
Сировина, т	3	5	120
Робоча сила, год.	14	12	400
Прибуток за одиницю продукту, тис. грн/т	30	35	

Побудувати економіко-математичну модель для забезпечення максимального прибутку.

3. Нафтопереробна установка може працювати в двох різних режимах. При роботі в першому з однієї тони нафти виробляється 300 кг темних і 600 кг світлих нафтопродуктів; при роботі у другому – 700 кг темних і 200 кг світлих нафтопродуктів. Щодня на цій установці треба виробляти 110 т темних і 70 т світлих нафтопродуктів. Це планове завдання необхідно виконувати, витрачаючи мінімальну кількість нафти. Побудувати економіко-математичну модель для мінімізації щоденних витрат нафти.

4. З чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) виготовляють три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний і для художніх виробів. Вартості одиниць ваги міді, цинку, свинцю і нікелю складають відповідно 0,8 грн, 0,6 грн, 0,4 грн і 1,0 грн, а одиниць ваги сплавів, відповідно, 2 грн, 3 грн, 4 грн.
Сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6 % нікелю, не менше 50 % міді і не більше 30 % свинцю; спеціальний – не менше 4 % нікелю, не менше 70 % міді, не менше 10 % цинку і не більше 20 % свинцю. У звичайний сплав компоненти можуть входити без обмежень. Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати (за визначений строк) не більше 400 од. ваги звичайного сплаву, не більше 700 од. ваги спеціального і не більше 100 од. ваги декоративного. Знайти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

5. Фірма «Television» виготовляє телевізори «Астро» і «Космо». У цеху 1 на виробництво однієї передавальної телевізійної трубки до марки «Астро» потрібно витратити 1,2 людино-години, а до «Космо» – 1,8 людино-години. Нині у цьому

підрозділі на виробництво може бути витрачено не більш 120 людино-години на добу. У цеху 2 виготовляють шасі з електронною схемою приладу. На виробництво шасі для телевізора будь-якої марки потрібно витратити 1 людино-годину. На загальне виробництво шасі у другому підрозділі може бути витрачено не більше 90 людино-годин у день. Продаж кожного телевізора марки «Астро» забезпечує прибуток у розмірі 150 грн, а «Космо» – 200 грн. Побудувати економіко-математичну модель для максимізації прибутку.

6. Панчішно-шкарпеткова фірма виготовляє і продає чоловічі шкарпетки і жіночі панчохи. При цьому отримується прибуток у розмірі 1 грн від виробництва і продажу однієї пари панчіх та 0,4 грн від виробництва і продажу однієї пари шкарпеток. Виробничий процес здійснюється на трьох дільницях. Витрати праці (у годинах) на виробництво однієї пари зазначені в наступній таблиці:

Дільниця виробництва	Панчохи	Шкарпетки
1	0.02	0.01
2	0.03	0.01
3	0.03	0.02

Керівництво розрахувало, що в наступному місяці фірма щодня буде мати у своєму розпорядженні наступні ресурси робочого часу на кожній з дільниць: 60 год. на першій; 70 год. на другій і 100 год. на третій. Побудувати економіко-математичну модель максимізації прибутку.

7. Іван, крім занять в університеті, для підтримки належного фінансового рівня має працювати не менше 20 годин на тиждень. Для цього він вирішив влаштуватися у дві крамнички. У першій є можливість працювати від 5 до 12 годин на тиждень, а в другій – від 6 до 10 годин. Обидва магазини пропонують однакову погодинну оплату. Івану потрібно визначитися, у якій крамниці і скільки йому працювати, виходячи із фактора "напруженості" роботи. Ґрунтуючись на інформації, що була отримана під час спілкування з працівниками магазинів, він оцінив фактор за 10-бальною шкалою: для першої і другої крамниці відповідно 8 і 6 балів. Зрозуміло, що сумарна "напруженість" роботи за тиждень пропорційна кількості відпрацьованих годин. Побудувати економіко-математичну модель для мінімізації загальної сумарної "напруженості" роботи.

8. Після рекламної кампанії фірми «Давидко» спостерігається незвичайне зростання попиту на два типи мангалів для смаження шашликів на відкритому повітрі – газові й вугільні. Виробник уклав контракт на щомісячне постачання в магазини 300 вугільних і 300 газових мангалів. Їх виробництво обмежується потужністю наступних трьох дільниць: виробництво деталей, збирання й упакування. У таблиці показано, скільки людино-годин витрачається на кожну одиницю продукції, а також наведений можливий щомісячний обсяг витрат часу:

Дільниця	Витрати праці на виробництво одного мангалу, год.		Фонд часу, людино-години
	вугільного	гзового	
Виробництво	5	8	2600
Збирання	0,8	1,2	400
Упакування	0,5	0,5	200

Фірма не може забезпечити виконання контракту самотужки. Тому вона провела перемовини з іншим виробником, який нині має у своєму розпорядженні надлишкові потужності. Він погодився постачати фірмі у будь-якій кількості вугільні мангали по 300 грн і газові по 500 грн за штуку. Такі ціни перевищують собівартість продукції на фірмі «Давидко» на 150 грн за кожен вугільний мангал і на 200 грн за кожен газовий. Побудувати економіко-математичну модель знаходження такого співвідношення між кількістю мангалів, що закуповується та виробляється, яке забезпечило б виконання контракту з мінімальними загальними витратами.

9. Нафтова компанія Oil Co будує новий нафтопереробний завод для виробництва авіаційного і дизельного палива, бензину, мастильних матеріалів. Попит на ці види продукції складає відповідно 8, 14, 30 і 10 тис. барелей у день. Компанія уклала контракти з Іраном і ОАЕ на постачання сирої нафти танкерами. Оскільки обсяг видобутку нафти квотується рішеннями ОПЕК (Організація країн-експортерів нафти), компанія розраховує, що не менш 40 % нафти вона буде одержувати з Ірану, а іншу – з Об'єднаних Арабських Еміратів. Oil Co також прогнозує, що в найближчі 10 років попит на її продукцію і квоти на сиру нафту залишаться незмінними. Нафта, що постачається з Ірану й ОАЕ, відрізняється своїми якостями. З одного бареля іранської можна досягти показників 0,2 дизельного палива, 0,25 бензину, 0,1 мастильних матеріалів і 0,15 авіаційного палива. Відповідно для нафти з ОАЕ вони складають 0,1, 0,6, 0,15 і 0,1. Побудувати економіко-математичну модель для мінімізації завантаження сирою нафтою нового нафтоперегонного заводу компанії.

10. Біржовий маклер хоче вкласти в акції деяку суму грошей для того, щоб під кінець року мати не менш 10 тис. дол. Існує два типи паперів, у які варто робити вкладення: акції надійних компаній з мінімальним ризиком (так звані "блакитні фішки"), що приносять у середньому 10 % річних, та компаній, що займаються високими технологіями. Останні мають більш високу прибутковість – у середньому 25 % річних, однак вони значно ризикові. Тому маклер вирішив вкладати в них не більш 60 % коштів. Побудувати економіко-математичну модель, яка дозволить досягти бажаної мети при мінімальному обсязі вкладених коштів.

11. Магазин В&До продає колу А1 відомого виробника, а також власного виробництва. Дохід від однієї банки А1 складає 5 центів, тоді як від однієї банки власної – 7 центів. У середньому магазин за день продає не більше 500 банок обох напоїв. Незважаючи на те, що А1 є відомою торговельною маркою, споживачі краще купують колу В&До, оскільки вона значно дешевше. Підраховано, що обсяги продажів В&До і А1 (у натуральному вирахуванні) співвідносяться як 2:1. Крім того, відомо, що магазин реалізує не менш 100 банок А1 у день. Побудувати економіко-математичну модель, яка дозволяє визначити кількість банок кожного напою на початку робочої доби для максимізації доходу.

12. Нафтопереробний завод отримує 4 напівфабрикати: **Р1** – 400000 л, **Р2** – 250000 л, **Р3** – 350000 л, **Р4** – 300000 л. В результаті змішування у відношенні 2:3:5:2 одержують бензин марки **А** вартістю 120 гр. од. за 1000 л; у відношенні 3:2:2:1 – бензин марки **В** вартістю 100 гр. од. за 1000 л; у відношенні 2:2:1:3 – бензин марки **С** вартістю 150 гр. од. за 1000 л. Знайти такий план змішування компонентів, який максимізує загальну вартість виробленої продукції за умови, що завод повинен випустити бензину **А** не менше, ніж 400000 л, бензину **В** – не менше, ніж 100000 л, бензину **С** – не менше, ніж 100000 л.

13. З пункту А в пункт В кожного дня відправляються пасажирські і швидкі потяги. У таблиці вказано наявний парк вагонів різних типів, з яких кожного дня можна комплектувати поїзди, і кількість пасажирів, що вміщуються у кожному з вагонів:

Потяги	Вагони				
	багажний	поштовий	ж/плацк	купейний	м’який
швидкий	1	1	5	6	3
пасажирський	1	−	8	4	1
число пасажирів	−	−	58	40	32
парк вагонів	12	8	81	70	26

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських потягів, при якому число перевезених пасажирів максимальне.

14. Обладнання фабрики дозволяє випускати за зміну фруктові компоти в трьох видах тари: скляній − у кількості 10 ц, жерстяній − у кількості 8 ц, поліетиленовій − у кількості 5 ц. Знайти виробничу програму підприємства на місяць (24 календарні дні), яка максимізує прибуток, якщо собівартість 1 ц компоту складає: в скляній тарі − 16 грн, у жерстяній – 10 грн, і в поліетиленовій – 16 грн. Відпускна ціна незалежно від тари складає 40 грн за 1 ц. Сумарний місячний обсяг реалізації фруктових компотів не перевищує 400 ц.

15. Для виготовлення брусів трьох розмірів (0,6 м, 1,5 м і 2,5 м) у відношенні 2:1:3 для розпилювання надходять колоди довжиною у 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальне число комплектів.

16. Визначити за даними задачі 15 оптимальний план робіт, якщо на обробку надходять ще двометрові колоди, причому співвідношення між ними та триметровими складає 3:1.

17. Розпиляти п’ятиметрові колоди на бруси розмірами 1,5; 2,4 і 3,2 м у відношенні 2:3:5 так, щоб мінімізувати загальну величину відходів.

18. Полуфабрикати надходять на підприємство у вигляді листів фанери. Усього є дві партії матеріалів, причому перша має 400, а друга 250 листів. Із них необхідно виготовити комплекти, що містять чотири деталі 1-го типу, три 2-го типу і дві 3-го типу. Лист фанери кожної партії може розкроюватись різними способами. Кількість деталей кожного типу, яку отримують при розкрої одного листа відповідної партії тим чи іншим способом, наведена в таблиці.

Перша партія				Друга партія		
Деталі \ спосіб розкрою	1	2	3	Деталі \ спосіб розкрою	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Потрібно розкроїти матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів.

19. Раціон піддослідної тварини повинен містити не менше 15 одиниць хімічної речовини А1 (вітаміну або деякої солі) і не менше 15 одиниць хімічної речовини А2. Не маючи можливості давати А1 або А2 в чистому вигляді, можна купувати продукт В1 по 1 коп. або продукт В2 по 3 коп. за 1 кг, причому кожний кілограм В1 вміщає 1 од. А1 і 5 од. А2, а кілограм В2 – 5 од. А1 і 1 од. А2. Визначити оптимальний вміст продуктів А1 та А2 у щоденному раціоні.

20. При складанні добового раціону для відгодівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більше 50 кг) і силос (не більше 85 кг). Раціон повинен мати визначену поживність (число кормових одиниць не менше 30) і вміщувати поживні речовини: білок (не менше 30 кг), кальцій (не менше 100 г) і фосфор (не менше 80 г). У таблиці наведені дані про вміст вказаних компонентів у 1 кг кожного продукту та їх собівартість (коп./кг):

Продукти\комп.	Кількість кормових одиниць	Білок г/кг	Кальцій, г/кг	Фосфор, г/кг	Собівартість коп./кг
Сіно свіже	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Визначити оптимальний раціон за умови мінімальної собівартості**.**

21. Підприємство має ресурси сировини, робочої сили та устаткування, необхідного для виробництва будь-якого з чотирьох видів товарів. Затрати ресурсів на виготовлення одиниці кожного виду товару, прибуток, що отримується підприємством, а також запаси ресурсів вказані у таблиці:

Вид ресурсу \ Вид товару	1	2	3	4	Об'єм ресурсів
Сировина, кг	3	5	2	4	60
Робоча сила, ч	22	14	18	30	400
Обладнання, верстато-г	10	14	8	16	128
Прибуток на одиницю товару, грн	30	25	56	48	

З цими вихідними даними розв'язати такі задачі:
1) визначити асортимент товару, що максимізує прибуток;
2) віднайти оптимальний асортимент за додаткових умов: 1-го товару випустити не більше 5 од., 2-го – не менше 8 од., 3-го і 4-го – у відношенні 1:2;
3) додатково до умов задачі 1) задані виробничі витрати у гривнях на одиницю кожного виробу, відповідно – 6, 9, 12, 3; потрібно знайти оптимальний асортимент, що максимізує прибуток, за умови, що сумарні виробничі витрати не повинні перевищувати 96 грн.

22. Для виготовлення двох видів виробів А і В фабрика використовує як сировину сталь і кольорові метали, запаси яких обмежені. При цьому зайняті токарні і фрезерні верстати. У таблиці наведені вихідні дані задачі: обмежена кількість ресурсів, норми їх витрат на одиницю виробу кожного виду.

Види ресурсів	Об'єм ресурсів	Норми витрат на один виріб	
		виріб А	виріб В
Сталь (кг) Кольорові метали (кг) Токарні верстати (верстато -г) Фрезерні верстати (верстато -г)	570 420 5600 3400	10 20 300 200	70 50 400 100
Прибуток (тис. грн)		8	3

Визначити план випуску продукції, при якому буде досягнутий максимальний прибуток.

23. Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро та книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок, причому підприємство має у наявності 1500 м 1-го типу і 1000 м 2-го. Трудові ресурси складають 800 люд.-год. У таблиці наведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток від нього. З цими вихідними даними розв'язати такі задачі:
1) визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток;
2) розв'язати ту саму задачу при додаткових умовах, що накладаються на асортимент: столів – не менше 40, стільців – не менше 130, бюро – не менше 30, книжкових шаф – не більше 10;
3) розв'язати задачу 1) за умови комплектності: кількість столів відноситься до кількості стільців, як 1:6;
4) задані додатково ціни: стіл – 32 грн, стілець – 15 грн, бюро – 12 грн, книжкова шафа – 80 грн; потрібно визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію, при єдиному обмежені – умові комплектності столів і стільців 1:6.

Ресурси \ Вироби	Витрати на 1 од. виробу			
	столи	стільці	бюро	Книжкові шафи
Дошки 1-го типу, м	5	1	9	12
Дошки 2-го типу, м	2	3	4	1
Трудові ресурси люд.-год.	3	2	5	10
Прибуток, грн/шт.	12	5	15	10

24. Тваринницька ферма складає раціон годування корів на зиму. Є два науково розроблених раціони А і В і довільний С з таким складом:

Раціон А	Не менше 40 % кукурудзяного силосу, не більше 40 % кормових трав
Раціон В	Не менше 30 % кукурудзяного силосу, не більше 50 % кормових трав
Раціон С	Корм без обмеження

Задані такі граничні норми витрат кожного продукту, виходячи із заготівлі кормів: кукурудзяного силосу – 200 ц, кормових трав – 300 ц. Яку кількість кожного із раціонів повинна використати ферма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо при раціоні А він складає 10 грн/ц, при В – 12 грн/ц, при довільному С – 5 грн/ц?

25. Шпиталь прагне мінімізувати вартість м'ясного харчування (яловичина, свинина і баранина). Лікарняний раціон повинен містити, принаймні, 1,5 фунти жирного м'яса на людину в тиждень. Яловичина, яка коштує 1,25 долара за фунт, містить 20 % жирної і 80 % пісної частини. Свинина (1,5 долара за фунт) – 60 % жирної і 40 %

пісної. Баранина (1,4 долара за фунт) складається з 30 % жирної і 70 % пісної. Медичний заклад має холодильну площу не більше ніж на 900 фунтів м'яса. На м'ясній дієті в ньому перебуває 200 пацієнтів. Скільки фунтів кожного виду м'яса необхідно купувати щотижня для того, щоб забезпечити необхідну калорійність раціону при мінімальній вартості?

26. Потужності заводу дозволяють зробити в поточному місяці інгредієнти для виробництва добрив в кількостях: 10 т нітратів, 15 т фосфатів і 12 т поташу. В результаті змішування активних інгредієнтів з інертними, запаси яких не обмежені, можуть бути отримані чотири типи добрив.

Перше містить 5 % нітратів, 10 % фосфатів і 5% поташу.

Друге – 5 % нітратів, 10 % фосфатів і 10 % поташу.

Третє – 10 % нітратів, 10 % фосфатів і 10 % поташу.

Четверте – 10 % нітратів, 5 % фосфатів і 5 % поташу.

Ціни на добрива – відповідно 400, 500, 400 і 450 грн за 1 т. Причому обсяг попиту на них практично не обмежений.

Вартість виробництва 1 т нітратів – 360 грн, фосфатів – 240 грн і поташу – 200 грн. Інертні інгредієнти закуповуються за ціною 100 грн за 1 т.

На поточний місяць вже укладено контракт на поставку 10 т добрива 3.

Визначте, які добрива і в яких кількостях слід виробляти, щоб в поточному місяці завод отримав максимальний прибуток.

Питання:

1. Скільки треба виробляти добрива 2 (в т)?
2. Скільки всього необхідно виробляти добрив (в т)?
3. Який максимальний прибуток (в грн)?

27. На кондитерській фабриці виготовляють 3 види продуктів − східні солодощі, для яких використовують горіхи: мигдаль, фундук і арахіс. Мигдаль купується за ціною 75 грн за 1 кг, фундук – 60 грн, арахіс – 45 грн. Продукт 1 повинен містити не менше 12 % мигдалю і не більше 18 % фундука, продукт 2 − не менше 25 % мигдалю.

Ціни готових продуктів – відповідно 70 і 65 грн за 1 кг. Щодня фабрика отримує таку кількість горіхів: мигдалю − 33 кг, фундука − 80 кг, арахісу − 60 кг.

Питання:

1. Яку кількість (в кг) фундука слід використовувати при виробництві продукту 1?
2. Яку кількість (в кг) продукту 2 треба виробляти щодня, щоб фабрика отримала максимальний прибуток?
3. Який загальний щоденний обсяг (у кг) виробленої продукції?
4. Який максимальна прибуток (в грн.)?
5. На скільки підвищиться прибуток, якщо збільшити закупівлі мигдалю на 5 кг?

28. Винзавод виробляє три марки сухого вина: «Чорний лікар», «Букет троянд» і «Білі ночі». Оптові ціни, за якими реалізується готова продукція, відповідно 68, 57 і 60 грн за 1 л. Інгредієнтами для приготування цих марок є біле, рожеве і червоне сухі вина. Вони коштують відповідно 70, 50 і 40 грн за 1 л. В середньому на винзавод постачається щодня 2000 л білого, 2500 л рожевого і 1200 л червоного вина.

У «Чорному лікарі» має міститися не менше 60 % білого вина і не більше 20 % червоного. У «Букеті троянд» – не більше 60 % червоного і не менше 15 % білого. Сумарний вміст червоного і рожевого вина в «Білих ночах» має не перевищувати 90 %.

Визначте рецепти змішування інгредієнтів для виробництва марок «Чорний лікар» і «Букет троянд», що забезпечують заводу максимальний прибуток.

Питання:

1. Який максимальний прибуток (в грн) можна отримати за 1 день?
2. Скільки літрів вина «Чорний лікар» слід виробляти щодня?
3. Скільки відсотків білого вина повинен містити «Чорний лікар»?
4. Скільки літрів «Букету троянд» треба виробляти щодня?
5. Скільки літрів «Білих ночей» необхідно виробляти щодня?
6. Скільки відсотків рожевого вина має міститися в «Білих ночах»?

29. Листи матеріалу розміром 6 × 13 треба розкроїти так, щоб вийшли заготовки двох типів: 800 розміром 4 × 5 м і 400 розміром 2 × 3 м. При цьому витрати матеріалу мають бути мінімальними.

30. Потрібно визначити всі раціональні способи розкрою прямокутника шкіри розміром 100 × 60 см на квадратні заготовки зі сторонами 50, 40 і 20 см і вказати величину відходів для кожного. Як має бути розкроєний матеріал, щоб отримати заготовки у кількості 30, 56, 28 штук з мінімальними витратами шкіри?

31. При виготовленні парників використовується матеріал у вигляді металевих стрижнів довжиною 200 см. Він в свою чергу розрізається на стрижні довжиною 120, 100 і 70 см.
1. Скільки існує раціональних способів розкрою?
2. Яку мінімальну кількість матеріалу слід розрізати, щоб виконати замовлення?
3. Скільки способів розкрою треба використовувати при виконанні замовлення?

32. З прямокутника заліза розміром 100 × 60 см необхідно виготовити квадратні заготовки зі сторонами 50, 40 і 20 см. Вони потрібні для перегородок при виготовленні пластмасових коробок для зберігання інструментів. Щоб зробити одну коробку, треба мати 4 заготовки зі стороною 50 см, 6 зі стороною 40 см і 12 зі стороною 20 см. На складі знаходяться 100 листів матеріалу.
Питання:
1. Скільки існує раціональних способів розкрою?
2. Яку максимальну кількість коробок можна виготовити за умови, що залишки заготовок використовуються при виготовленні наступної партії?
3. Скільки раціональних способів розкрою слід застосовувати?
4. Скільки листів матеріалу потрібно, щоб виготовити одну коробку?

33. На виробництво надійшла партія стрижнів довжиною 250 і 190 см. Необхідно отримати 470 заготовок довжиною 120 см і 450 довжиною 80 см. Відходи повинні бути мінімальними.
Питання:
1. Яку кількість стрижнів довжиною 250 см треба розрізати?
2. Яку кількість стрижнів довжиною 190 см необхідно розрізати?
3. Яка величина відходів (в см) за умови, що кількість стрижнів довжиною 250 см обмежена і дорівнює 200 шт?
4. Яку кількість стрижнів довжиною 190 см треба розрізати в цьому випадку?
5. На скільки збільшиться кількість відходів (в см)?

34. Завод уклав договір на поставку комплектів відрізків стрижнів довжиною по 18, 23 і 32 см. Причому їх кількості складають співвідношення 1: 5: 3. На сьогоднішній момент є 80 стрижнів довжиною по 89 см. Як їх слід розрізати, щоб кількість комплектів була максимальною?
Питання:
1. Скільки існує раціональних способів розкрою?

2. Скільки комплектів стрижнів буде вироблено?
3. Яка при цьому величина відходів (в см)?

35. Випуск продукції на трьох заводах складає 460, 340 і 300 тонн відповідно. Потреба чотирьох споживачів на цю продукцію – 350, 200, 450 і 100 тонн. Відомі також витрати на виробництво одиниці продукції на кожному заводі: 9, 8 і 2 грн відповідно, а також матриця транспортних витрат на її доставку від i-го заводу k-му споживачеві:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний план прикріплення споживачів до заводів за умови мінімізації сумарних витрат на виробництво і транспортування.
Порівняти з оптимальним планом, побудованим за умови мінімізації тільки транспортних витрат.

36. На першому складі (S1) зберігається 3000 т сталі марки «А» і 4000 т «Б». На другому складі (S2) – 5000 т марки «А» і 2000 т «Б». В пункт споживання P1 необхідно доправити 2000 т сталі марки «А», 3000 т «Б» і 2000 т будь-якої марки. Аналогічно другий пункт споживання P2 повинен отримати 6250 т стали, з них 1000 т стали марки «А» і 1500 т «Б». Відомо, що 2000 т сталі марки «А» можуть бути замінені на 1600 т «Б» (але не навпаки). Вартість перевезень в гривнях за тонну становить: з пункту S1 в пункти P1 і P2 1 грн і 1,5 грн, з пункту S2 в P1 і P2 відповідно 2 грн і 1 грн.
Скласти модель оптимального плану перевезень.

37. Чотири ремонтні майстерні можуть за рік відремонтувати відповідно 700, 500, 450 і 550 машин при собівартості ремонту однієї одиниці в 50, 70, 65 і 60 грн. Планується річна потреба в ремонті на п'яти автобазах: 350, 350, 300, 250 і 200 машин. Надлишкові потужності 1-ї і 2-ї майстерень можуть бути використані для обслуговування інших видів робіт, 3-ї і 4-ї − тільки на вказаний вид робіт. Матриця

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{40} & \mathbf{10} & \mathbf{60} & \mathbf{64} \\ \mathbf{25} & \mathbf{54} & \mathbf{61} & \mathbf{29} \\ \mathbf{80} & \mathbf{50} & \mathbf{17} & \mathbf{19} \\ \mathbf{28} & \mathbf{54} & \mathbf{94} & \mathbf{42} \\ \mathbf{61} & \mathbf{35} & \mathbf{27} & \mathbf{37} \end{pmatrix}$$

характеризує транспортні витрати на доставку машини з i-ї автобази на k-у ремонтну майстерню.
Визначити мінімальну річну потребу в кредитах для виконання зазначеного обсягу ремонтних робіт на всіх автобазах.

38. Фірма «Мийдодір» оцінила попит на вироблений нею лосьйон для кожного з чотирьох наступних місяців: 100 ящиків в червні, 140 − в липні, 170 − в серпні і 90 − у вересні. Без використання понаднормового часу організація може виробляти до 125 ящиків на місяць. В надурочний час – ще 25 ящиків на місяць, але виробництво кожного обійдеться при цьому на 1 тис грн дорожче. Зберігання одного ящика протягом місяця коштує 100 грн.
Використовуючи модель транспортної задачі, визначте, скільки ящиків лосьйону треба виготовляти кожного з цих місяців, щоб задовольнити попит з мінімальними сукупними витратами.
1. Скільки ящиків лосьйону слід виробити в червні?
2. Скільки годин понаднормового часу потрібно використовувати у вересні?

39. Для спорудження будинків на 100 майданчиках обрані 5 типів проєктів. Щодо кожного з них відомо: тривалість закладки фундаменту і будівництва решти будівель, а також житлова площа будинку і вартість 1 кв. м житлової площі.

Тип будинку	I	II	III	IV	V
Тривалість закладки фундаменту	20	30	35	30	40
Тривалість решти робіт	40	20	60	35	25
Житлова площа, кв.м	3000	2000	5000	4000	6000
Вартість 1 кв. м	200	150	220	180	200

Паралельно можна вести закладку 10 фундаментів і спорудження 15 будівель.

1) Визначити план будівництва, який би дозволив ввести в експлуатацію максимальну житлову площу протягом року (300 робочих днів) .

2) Вирішити ту саму задачу при додатковому обмеженні, що кількість будинків має бути не менше десяти.

3) Визначити річний план будівництва, який максимізує сумарну площу за додаткової умови, що середня собівартість 1 кв. м не перевищує 180 грн.

40. Компанія, що займається видобутком залізної руди, має чотири кар'єри. Їх продуктивність відповідно складає 170, 130, 190 і 200 тис. т щомісячно. Залізна руда направляється на три збагачувальні фабрики, що належать цій компанії, потужності яких відповідно 250, 150 і 270 тис. т на місяць.

Транспортні витрати (в тис. грн) на перевезення 1 тис. т руди з кар'єрів на фабрики подамо в наступній таблиці:

Кар’єр \ фабрика	1	2	3
1	7	3	5
2	5	4	6
3	4	5	6
4	3	2	5

Визначте план перевезень залізної руди на збагачувальні фабрики, який забезпечує мінімальні сукупні транспортні витрати.

Питання:

1. Скільки руди слід перевозити з кар'єру 1 на збагачувальну фабрику 2?
2. Скільки руди треба перевозити з кар'єру 4 на збагачувальну фабрику 1?
3. Який обсяг потужностей з видобутку руди виявиться невикористаним?
4. Які мінімальні сукупні транспортні витрати?

41. За рахунок меліоративних робіт площа ріллі в господарстві зросла на 120 га. Її було вирішено відвести під посів двох найбільш ефективних культур: проса і гречки, причому другої необхідно отримати щонайменше 1000 ц. У господарстві є 800 ц мінеральних добрив. Вирощування культур характеризується наступними показниками:

Показники	Просо	Гречка
прибуток (грн за 1 ц)	20	40
Площа ріллі (га) на 1 ц культури	0.03	0.06
Внесення добрив (ц) на 1 га ріллі	0.6	0.2

Знайти такий розподіл ріллі під зазначені культури, що дасть можливість отримати максимальний прибуток.

42. Залізничне депо формує швидкі і пасажирські поїзди для забезпечення перевезення пасажирів на одному з напрямків. Швидкий складається з 1 багажного, 1 поштового, 5 плацкартних, 6 купейних і 3 м'яких вагонів. Пасажирський – з 1 багажного, 8 плацкартних, 4 купейних, 1 м'якого. Відомо також, що в одному плацкартному вагоні може розміститися 58 пасажирів, в купейному − 40, в м'якому − 32. У парку вагонів наявні 12 багажних, 8 поштових, 81 плацкартних, 70 купейних і 26 м'яких.
Визначити план формування швидких і пасажирських поїздів, при якому забезпечувалося б перевезення максимальної кількості пасажирів.

43. Для риття котловану об'ємом 1350 м^3 будівельники отримали три екскаватори.
Потужна машина продуктивністю 25.5 м^3/год витрачає за годину 10 л бензину. Характеристики середнього екскаватора − 10 м^3/год і 3.3 л/год, малого − 5 м^3/год і 2 л/год. Машини можуть працювати всі одночасно. Запас бензину у будівельників обмежений і дорівнює 540 л. Якщо рити котлован тільки малим екскаватором, то бензину вистачить, але процес виявиться довгим. Яким чином слід використовувати наявну техніку, щоб виконати роботу при найменшому загальному часі роботи всіх екскаваторів?

44. Нафтопереробний завод отримує за плановий період чотири напівфабрикати − 600 тис. л алкілату, 316 тис. л крекінг-бензину, 460 тис. л бензину прямої перегонки і 200 тис. л ізопентану. Внаслідок змішування цих інгредієнтів в пропорціях 2: 3: 1: 5; 2: 4: 3: 4; 5: 1: 6: 2 і 7: 1: 3: 2 одержують паливо чотирьох сортів Б-1, Б-2, Б-3 і Б-4. Ціна їх реалізації відповідно 1800, 2400, 2600 і 1400 грн за тисячу літрів.
Припустивши, що продаж будь-якого сорту бензину не викличе труднощів, побудувати модель визначення максимального обсягу виробництва різних сортів бензину у вартісному вираженні.

45. Випуск продукції на трьох заводах складає 340, 830 і 400 тон відповідно. Вимоги чотирьох споживачів на цю продукцію – 250, 510, 150 і 240 тон. Відомі також витрати на виробництво 1 одиниці продукції на кожному заводі: 9, 7 і 6 грн відповідно, а також матриця транспортних витрат на доставку 1 одиниці продукції від i-го заводу k-му споживачеві:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Визначити оптимальний план прикріплення споживачів до заводів за умови мінімізації сумарних витрат на виробництво і транспортування. Порівняти з оптимальним планом, що побудовано з урахуванням мінімізації лише транспортних витрат.

46. До складу деревини шахти надійшло замовлення на партію шахтних стійок, що виготовляються з трьох видів заготовок розмірами 190, 250 і 230 см в кількостях відповідно 250, 380 і 450 шт. На складі достатньо колод довжиною 8 м.
Знайти такий план їх розпилу, при якому використана кількість буде мінімальною.

47. На заводі щомісяця накопичується близько 14 т відходів металу, з якого можна штампувати великі і малі шайби. Місячна потреба в великих − 600 тис. шт., в малих − 1100 тис. шт. (решта закуповується на спеціалізованому підприємстві). Оптова ціна великих – 119 грн (за тисячу штук), малих − 52 грн. Витрата металу на тисячу великих шайб − 22 кг, на тисячу малих − 8 кг.
Місячна можливість штампування шайб становить 440 тис. шт. великих шайб або 720 тис. шт. малих.

Визначити план виробництва шайб (з відходів), при якому вартість потрібної кількості буде мінімальною.

48. Фермерське господарство має стадо великої рогатої худоби, яке може утримуватися (з урахуванням природного приросту) протягом шести років. В кінці кожного року частину тварин (або все стадо) може бути продано за ціною 500 грн за голову, чисельність решти стада подвоюється до кінця наступного року.
Побудувати модель, на основі якої можна обґрунтувати вибір плану щорічних продажів худоби в плановий період, який забезпечив би максимальний дохід.

49. На придбання обладнання для нової виробничої дільниці виділено 20 тис. грн. Його необхідно розмістити на площі, яка не більше 38 м^2. Підприємство може замовити устаткування двох типів − А і В − з такими даними за одиницю: А – з вартістю 5 тис. грн вимагає площі 8 м^2, випускає продукції на 7 тис. грн за зміну; В − з вартістю 2 тис. грн вимагає площі 4 м^2, випускає продукції на 3 тис. грн за зміну.
Необхідно визначити, в якій кількості слід придбати обладнання, щоб дільниця отримала максимальну валову виручку.

50. Об'єднання «Комфорт» виробляє холодильники, газові плити, морозильні шафи і електропечі за ціною 2; 1,8; 2,5 і 1 тис. грн відповідно. Постійним чинником, що обмежує обсяги виробництва, є фіксована величина трудових ресурсів − 12 тис. людино-годин на місяць. З'ясувалося, однак, що в найближчий місяць дефіцитною буде й листова сталь для корпусів зазначених виробів, оскільки постачальники зможуть забезпечити лише 7 тис. м^2 цього матеріалу. Відомо, що для виготовлення холодильника потрібно 2 м^2 листової сталі і 3 люд.-год. робочого часу, для газової плити – відповідно 1,5 м^2 і 3 люд.-год., для морозильного шафи − 3 м^2 і 4 люд.-год., для електропечі − 1 м^2 і 2 люд.-год.
Потрібно скласти план виробництва на поточний місяць таким чином, щоб максимізувати вартість випущеної продукції.

Поточні контрольні запитання

1. Що розуміють під назвою «дослідження операцій»?
2. Які основні етапи дослідження операцій?
3. В яких ситуаціях використовуються змінні з двома індексами при побудові математичної моделі задачі оптимізації?
4. Наведіть приклад операції, в якій невідомі величини приймають цілі значення.
5. Що таке цільова функція задачі дослідження операцій?
6. В якому вигляді записуються обмеження на невідомі змінні в задачах дослідження операцій?
7. Чи можна розглядати задачу про призначення як окремий випадок транспортної задачі?
8. Який зміст мають змінні в задачах оптимального розкрою?

Практичне заняття № 2. Задачі лінійного програмування. Графічний спосіб розв'язання

Мета: засвоєння теоретичного матеріалу стосовно моделей та методів лінійного програмування, здобуття практичних навичок розв'язання задач ЛП за допомогою графічного способу. Виявлення властивостей задач ЛП.

План

1. Загальная постановка задачі ЛП
2. Геометрична інтерпретація розв'язання задач ЛП
3. Графічний метод розв'язання задачі ЛП
4. Ілюстративні приклади

Опорні поняття

1. Загальна постановка задачі лінійного програмування

Основна задача лінійного програмування формулюється у такий спосіб: потрібно знайти значення дійсних змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots,, x_n$, при яких цільова функція (показник ефективності)

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n + c \quad (1)$$

приймає екстремальне значення за таких обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \dots,\ n, \quad (3)$$

де a_{ij}, b_i, c_j, c – задані сталі величини, $i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,\ 2, \dots,\ n.$

Зауваження: знак «≤» в обмеженнях вибраний умовно (для визначеності), оскільки, наприклад, нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$ завжди можна замінити на еквівалентну умову $-(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) \le -b_i$, а рівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ – на систему нерівностей $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$ і $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$.

Якщо всі обмежувальні умови, що накладаються на елементи розв'язку, крім вимоги $x_j \ge 0$, є рівностями, то в цьому випадку задачу лінійного програмування називають *канонічною задачею* лінійного програмування (скорочено КЗЛП). Будь-яку задачу ЛП можна привести до канонічної форми.

Точка або точки (якщо їх декілька), що задовольняють систему обмежень, називають допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування. Всі такі точки складають множину допустимих розв'язків (скорочено МДР), яку позначають $\overline{\mathrm{X}}$. Допустимий розв'язок, на якому досягається екстремальне значення цільової функції, називають оптимальним розв'язком або планом задачі лінійного програмування і позначають x_{opt}.

Постановку загальної задачі лінійного програмування (скорочено ЗЗЛП) можна записати компактніше:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c \rightarrow max(\,min)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\, i = 1,2,\dots,m;\; x_j \ge 0, j = 1,\; 2,\dots,\; n.$$

2. **Геометрична інтерпретація ЗЛП**

Розглянемо задачу лінійного програмування із знаходження максимуму (мінімуму) цільової функції $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c$ на допустимій множині $\overline{X}$, що задана за допомогою системи лінійних обмежень (нестрогих нерівностей або рівностей).

Нагадаємо декілька визначень.

Опуклою лінійною комбінацією елементів $X_1,\ldots,X_k$ з простору R^n називають элемент X вигляду

$$X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k, \text{ де всі } \lambda_i \ge 0 \text{ і } \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1.$$

Множина $M \subset R^n$ називається *опуклою*, якщо $M = \varnothing$ або разом з будь-якими двома елементами X_1 та X_2 містить також і їхню довільну опуклу лінійну комбінацію. Геометрично опуклість множини $M \subset R^n$ означає, що разом з будь-якими двома точками вона містить і відрізок, що їх з'єднує (рис. 1).

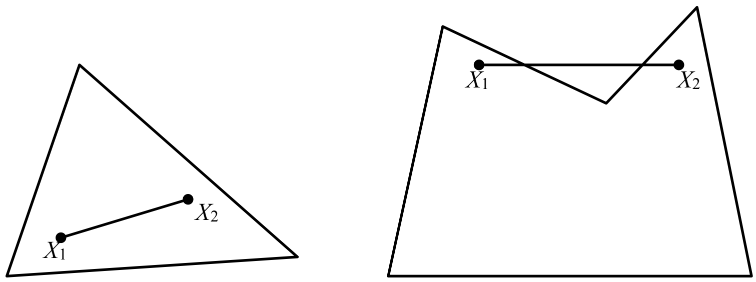


Рис. 1. Опукла і неопукла множини з R^2

Така геометрична інтерпретація опуклості пояснюється тим, що будь-яка точка відрізка є опуклою лінійною комбінацією його кінців. Дійсно, якщо точки X, X_1, X_2 визначені в R^n відповідно координатами $(x_1,\ldots, x_n)$, $(x_{11},\ldots, x_{1n})$, $(x_{21},\ldots, x_{2n})$, а X − довільна точка відрізку X_1X_2, то $x_1 = \lambda x_{11} + (1-\lambda)x_{21}, \ldots, x_n = \lambda x_{1n} + (1-\lambda)x_{2n}$, $0 \le \lambda \le 1$.

В скороченому вигляді це запишеться так:

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2,\; 0 \le \lambda \le 1.$$

Прикладами опуклих множин в R^3 є куб, куля, точка. Опуклою множиною в R^n є, наприклад, гіперплощина.

Доведено, що а) множина розв'язків системи обмежень (2), (3) задачі лінійного програмування є опуклою множиною; б) множина розв'язків задачі лінійного програмування (1) − (3) є опуклою множиною.

Отже, геометрично задачу лінійного програмування можна проінтерпретувати так: потрібно знайти максимальне (мінімальне) значення лінійної функції на опуклій множині.

Обмежену множину розв'язків системи обмежень ЗЛП називають опуклим багатогранником, а неомежену − опуклою багатогранною множиною. В R^2 − це опуклі багатокутники або опуклі багатокутні множини (див., наприклад, рис. 2).

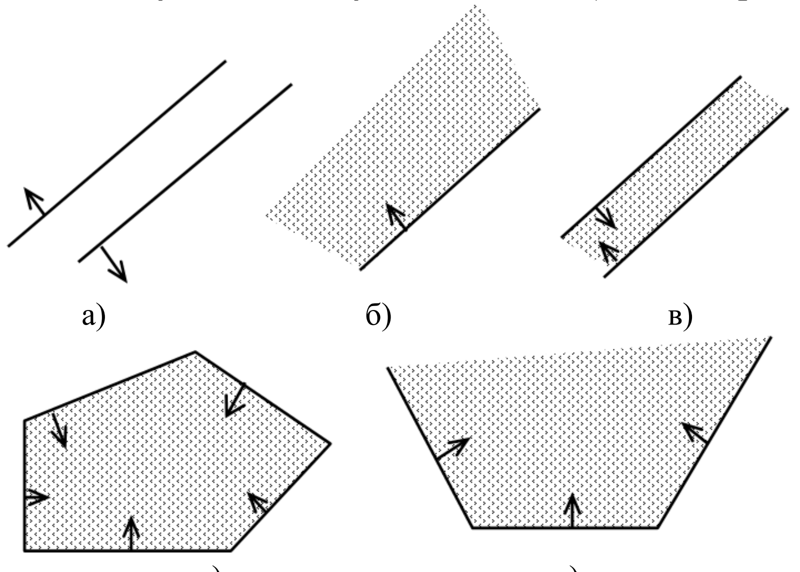


Рис. 2. Опуклі багатокутники та багатокутні множини

Функція $L(x)$ називається *обмеженою зверху (знизу)* на множині $M \subset R^n$, якщо існує число K таке, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $L(x) \leq K$ ($L(x) \geq K$). Функція, яка обмежена і зверху, і знизу, називається *обмеженою*.

Будемо говорити, що цільова функція ЗЛП обмежена, якщо в задачі на максимум вона обмежена на допустимій множині зверху, а в задачі на мінімум − знизу.

Якщо в задачі лінійного програмування допустима множина не є порожньою і цільова функція обмежена, то існує принаймні один оптимальний розв'язок.

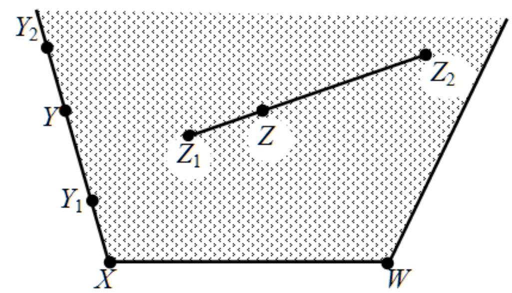


Рис. 3. Вершини, граничні і допустимі точки опуклої множини

Точку опуклої множини, що не є опуклою лінійною комбінацією ніяких інших її точок, називають кутовою (або вершиною).

У опуклій множині, зображеній на рис. 3, точки X і W є її вершинами, а точки Y та Z − ні.

Якщо в задачі лінійного програмування цільова функція $L(x)$ обмежена на допустимій множині, то серед усіх кутових точок цієї множини кутова точка, в якій $L(x)$ приймає найбільше (найменше) значення, є оптимальним розв'язком даної задачі.

2. Графічний метод ррзвязання задач ЛП

Графічний метод заснований на геометричній інтерпретації оптимізаційних задач, яка дає можливість наочно уявити їх структуру. Задачу лінійного програмування з двома змінними завжди можна розв'язати графічно. Однак уже в тривимірному просторі це ускладнюється, а в просторах, розмірність яких більше трьох, графічним методом може бути розв'язана задача лінійного програмування, система обмежень якої містить *n* невідомих і *m* лінійно незалежних рівнянь, причому $\boldsymbol{n - m \leq 2}$.

Нехай задача лінійного програмування задана в двовимірному просторі, тобто цільова функція і обмеження містять лише дві змінні:

$$\boldsymbol{c_1x_1 + c_2x_2 \to max,} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m,} \\ \boldsymbol{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{cases} \tag{5}$$

Перш, ніж перейти до опису алгоритму, нагадаємо декілька понять.

Лінією рівня функції $f(x_1, x_2)$ називається множина всіх точок простору R^2, в яких функція приймає деяке стале значення. Отже, для цільової функції $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ лінія довільного рівня L_0 – це пряма з вектором нормалі $c(c_1, c_2)$.

Градієнтом функції $f(x_1, x_2)$ називається вектор, що складається з частинних похідних функції. Тобто вектор $grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$.

Основною властивістю градієнта є той факт, що він вказує напрям найшвидшого зростання функції. В напрямку антіградієнта $(-grad\ f)$ функція найскоріше спадає.

Якщо в рівності $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ вважати Z параметром, отримаємо рівняння сім'ї паралельних прямих, які називаються лініями рівня цільової функції ЗЛП. З метою встановлення напряму зростання (спадання) цільової функції знайдемо градієнт цієї функції:

$$grad\ L = \bar{c} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = (c_1; c_2)\ , \text{ тому що } \frac{\partial L}{\partial x_1} = c_1,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2.$$

Зауважимо, що $c(c_1, c_2)$ являє собою вектор нормалі прямих $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і тому є ортогональним до прямих $L(x) = const$. Отже, значення цільової функції $L(x)$ в точках лінії рівня L_0 зростають, якщо лінію рівня переміщувати в напрямку вектора нормалі, і зменшуються, якщо лінію рівня переміщувати в напрямку, протилежному напрямку вектора нормалі.

Алгоритм графічного методу розв'язання задачі лінійного програмування:

1. Побудуємо множину допустимих розв'язків задачі ЛП, враховуючи обмеження задачі (5) (на рис. 4 багатокутник $A_1A_2A_3A_4A_5$). Якщо МДР виявилася порожньою, то робимо висновок про те, що задача лінійного програмування розв'язків немає, інакше переходимо на крок 2.

2. Побудуємо $c(c_1, c_2)$ − вектор найскорішого зростання цільової функції.

3. Побудуємо довільну лінію рівня $L(x) = L_0$, перпендикулярну до вектора *c* всередині МДР.

4. При розв'язанні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня $L(x) = L_0$ в напрямку c до тих пір, поки вона не буде дотикатися множини допустимих розв'язків в її крайньому положенні (на рис. 2 до точки A_3). У випадку розв'язання задачі на мінімум лінію рівня $L(x) = L_0$ слід переміщувати в напрямку антіградієнта (на рис. 4 до точки A_1).

5. Визначаємо оптимальний план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ і екстремальне значення цільової функції $L_* = L(x^*)$.

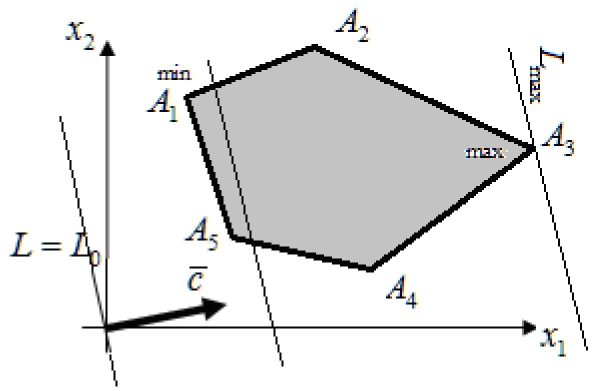


Рис. 4. Ілюстрація графічного методу розв'язання ЗЛП

Як видно з рис. 5, можливі наступні випадки:

1) оптимальний план єдиний; лінія рівня і множина допустимих розв'язків у вирішальному положенні мають одну загальну точку (а);

2) оптимальних планів безліч: у вирішальному положенні лінія рівня проходить уздовж сторони множини допустимих розв'язків (б);

3) цільова функція необмежена: лінія рівня не може зайняти вирішального положення (в, г);

4) множина допустимих розв'язків містить лише одну точку, де цільова функція досягає одночасно і максимального, і мінімального значень (д);

5) задача не має розв'язків, оскільки множина допустимих розв'язків порожня (е).

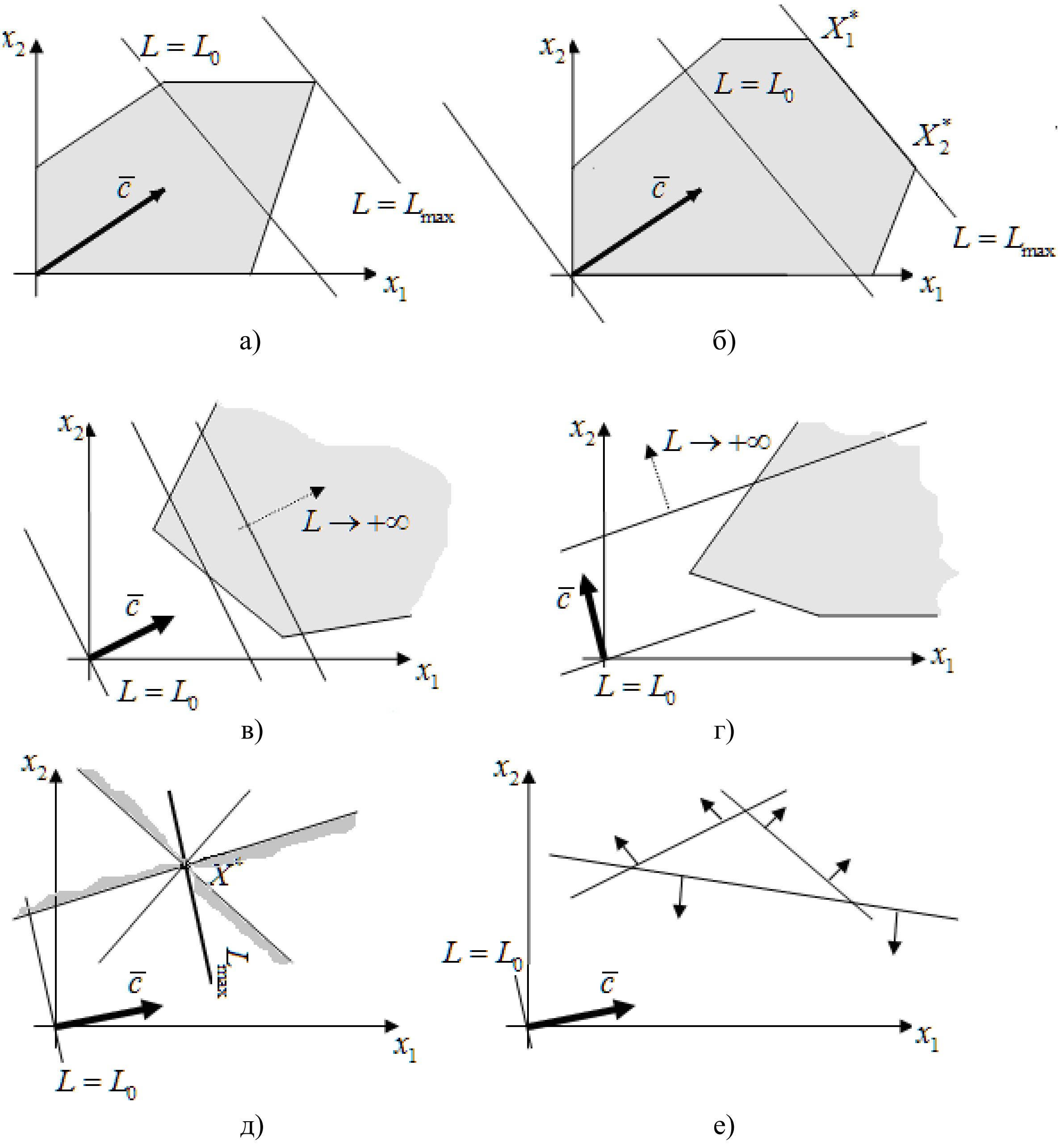


Рис. 5. Можливі вирішальні положення лінії рівня цільової функції та множини допустимих розв'язків

3. Илюстратівні приклади

Приклад 1. Знайти значення змінних x_1, x_2, за яких функція

$$L(x) = 3x_1 + 4x_2$$

приймає екстремальні значення за умов:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97, \\ x_1 + 7x_2 \ge 74, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Введемо на площині прямокутну систему координат x_1Ox_2.

1. Побудуємо множину допустимих значень, яка визначається умовами задачі. Для цього потрібно побудувати граничні прямі

$$-x_1 + x_2 = 3, \quad (1)$$
$$5x_1 + 3x_2 = 97, \quad (2)$$
$$x_1 + 7x_2 = 74 \quad (3)$$
(наприклад, за точками їх перетину з осями координат), а далі визначити відповідні напівплощини.

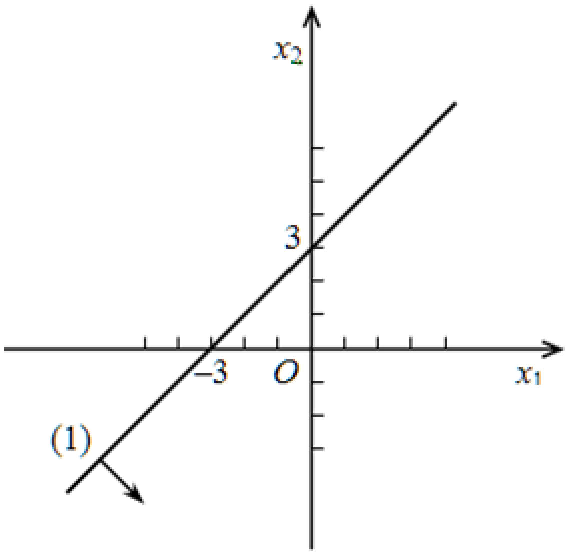


Рис. 6. Побудова напівплощини, що задається лінійною нерівністю

Побудову однієї напівплощини опишемо більш детально. Знаходимо точки перетину прямої (1) з осями Ox_1 і Ox_2 − відповідно (–3; 0) та (0; 3). Через них проводимо пряму (1). Далі підставляємо координати будь-якої точки площини в нерівність $-x_1 + x_2 \le 3$, наприклад, початок координат: $-0 + 0 \le 3$. Оскільки отримали правильну нерівність, геометричним місцем точок, координати яких задовольняють нерівність $-x_1 + x_2 \le 3$, є напівплощина, що містить точку $O(0; 0)$ (рис. 6).

Взагалі, для того щоб визначити, яку напівплощину описує нерівність

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b$$

(знак нерівності вибраний довільно), потрібно:

1) побудувати пряму $a_1x_1 + a_2x_2 = b;$

2) визначити, з якої сторони від неї розміщена точка $O(0; 0)$ (або будь-яка інша, що не лежить на даній прямій):

• якщо координати обраної точки задовольняють дану нерівність, то напівплощина, в якій знаходиться обрана точка, є шуканою,

• якщо координати обраної точки не задовольняють дану нерівність, то шуканою напівплощиною буде та, яка цю точку не містить.

Множина точок, координати яких задовольняють решті нерівностей, зображені на рис. 7.

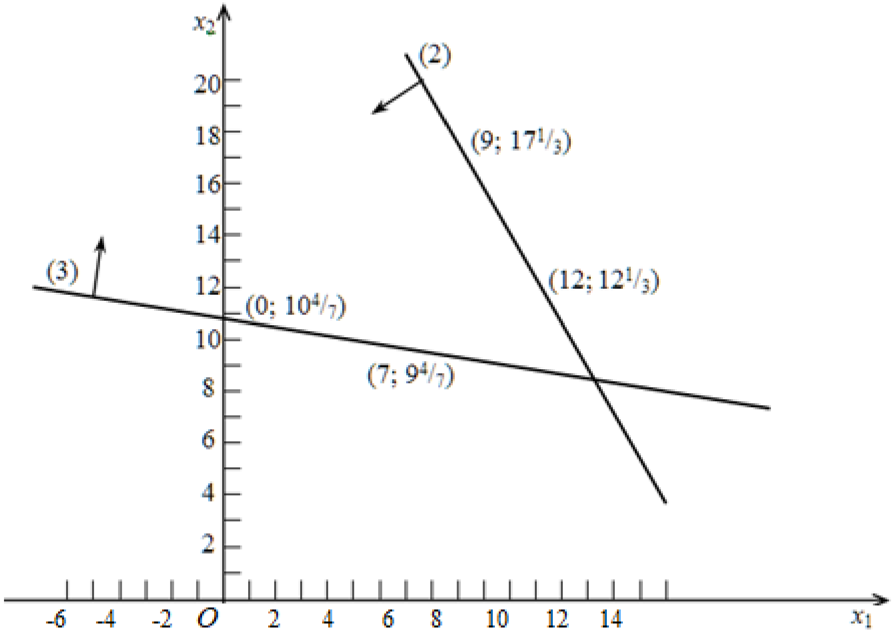


Рис. 7. Множина розв’язків системи двох лінійних нерівностей

З умов $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ випливає, що геометричний образ МДР має розташовуватися в першій чверті площини x_1Ox_2. Перетином усіх отриманих напівплощин є зображений на рис. 8 трикутник *ABD,* який і є множиною допустимих розв'язків.

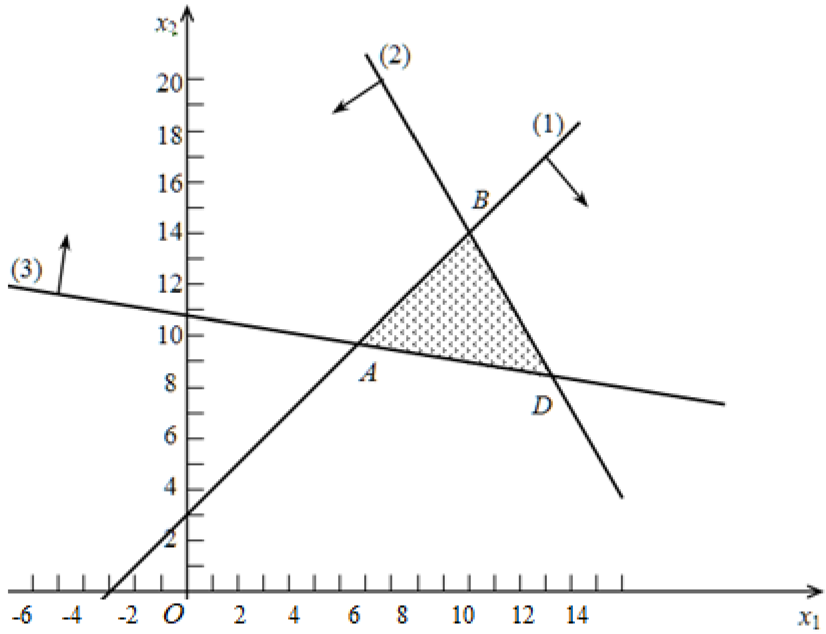


Рис. 8. Множина допустимих розв’язків

3. Будуємо вектор $\vec{C}$ (3; 4) (рис. 9) і лінію рівня L_0, яка задається рівнянням $3x_1 + 4x_2 = \text{const}$. На рис. 9 побудована лінія L_0 рівня, що відповідає значенню 79.

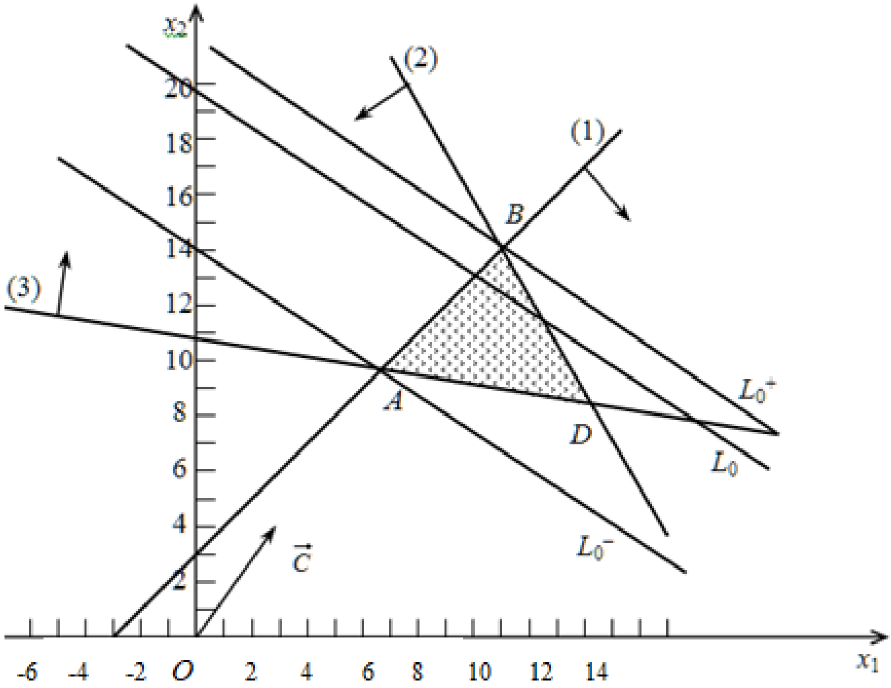


Рис. 9. Графічне розв'язання прикладу 1

Знайдемо величини змінних x_1, x_2, за яких цільова функція приймає максимальне значення. Для цього переміщуємо L_0 за напрямком вектора $\vec{C}$ до лінії рівня L_0^+, яка є границею напівплощини, що цілком містить МДР (трикутник *ABD*). Крайньою (кутовою) точкою в напрямку градієнта функції є точка *B*. Отже, максимального значення цільова функція набуває в точці *B* (точці виходу з МДР), координати якої визначаються як перетин двох прямих (1) і (2). Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 97, \end{cases}$$

отримаємо $x_1 = 11$, $x_2 = 14$. Цільова функція приймає максимальне значення в точці (11; 14), при цьому $L_{\max} = 3 \cdot 11 + 4 \cdot 14 = 89$.

Тепер знайдемо значення змінних x_1, x_2, за яких цільова функція мінімізується. Система обмежень − та сама. Переміщуючи лінію рівня в напрямку, протилежному вектору $\vec{C}$, визначимо, що найменше значення $L(x)$ на МДР досягається в точці *A* − точці перетину прямых (1) та (3). Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 7x_2 = 74, \end{cases}$$

знаходимо координати вказаної точки A(6,625; 9,625). Мінімальне значення цільової функції $L_{\min} = L(A) = 3 \cdot 6{,}625 + 4 \cdot 9{,}625 = 58{,}375$.

Розв'язання інших прикладів наведемо менш детально.

Приклад 2.

$$L(x) = 5x_2 \to extr,$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \le 84, \\ 35x_1 - 12x_2 \ge 0, \\ 7x_1 - 6x_2 \le 42, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо на площині прямокутну систему координат x_1Ox_2.

Множина допустимих значень − чотирикутник $OABD$. Вершина $A(2;\ 5\frac{5}{6})$ визначається як перетин граничних прямих $7x_1 + 12x_2 = 84$ та $35x_1 - 12x_2 = 0$, $B(8;\ 2\frac{1}{3})$ − як перетин $7x_1 + 12x_2 = 84$ і $7x_1 - 6x_2 = 42$, $D(6;\ 0)$ − перетин прямої $7x_1 - 6_2 = 42$ і осі Ox_1.

Вектор-градієнт цільової функції − $\bar{c}(0{,}5)$ (рис. 10).

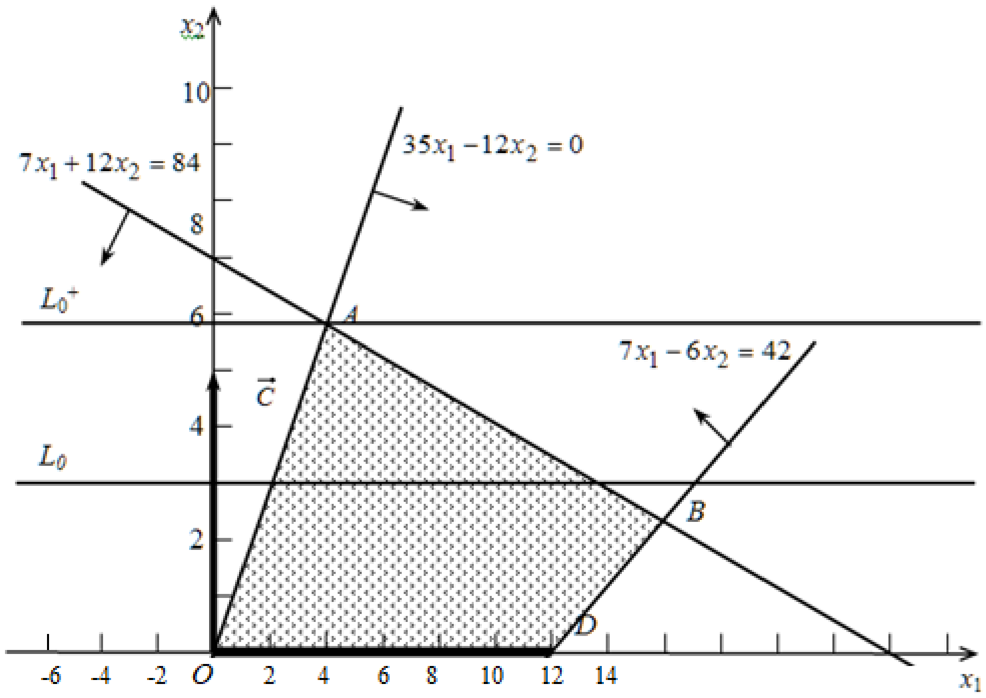


Рис. 10. Графічне розв'язання прикладу 2

На рис. 10 побудована лінія рівня L_0, що відповідає значенню 15. Видно, що A є точкою максимуму, при цьому

$$L_{\max} = L(A) = 5\ 5\frac{5}{6} = 29\frac{1}{6}.$$

Якщо переміщувати лінію рівня в напрямку, протилежному вектору $\vec{C}$, то з рис. 10 видно, що найменше значення $L(x\ )$ на МДР досягається на відрізку OD.

Тому (0; 0), (6; 0) − оптимальні розв'язки відповідно в кутових точках O і D множини допустимих розв'язків. Тоді загальний розв'язок

$x_{opt} = (1-\lambda)(0;0) + \lambda(6;0) = (0;0) + (6\lambda;0) = (6\lambda;0)$, де $0 \le \lambda \le 1$.

При цьому $L_{\min} = 0$.

Приклад 3.

$$L(x) = 5{,}2x_1 - x_2 \to extr,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо на площині прямокутну систему координат x_1Ox_2.

Множина допустимих значень – необмежена багатокутна, вона зображена на рис. 11.

Будуємо вектор $\vec{C}$ (5.2; –1). Проводимо лінію рівня L_0 таким чином, щоб вона мала з МДР спільні точки. На рис. 11 видно, що $L_{\max} = +\infty$, тобто задача на максимум нерозв’язна.

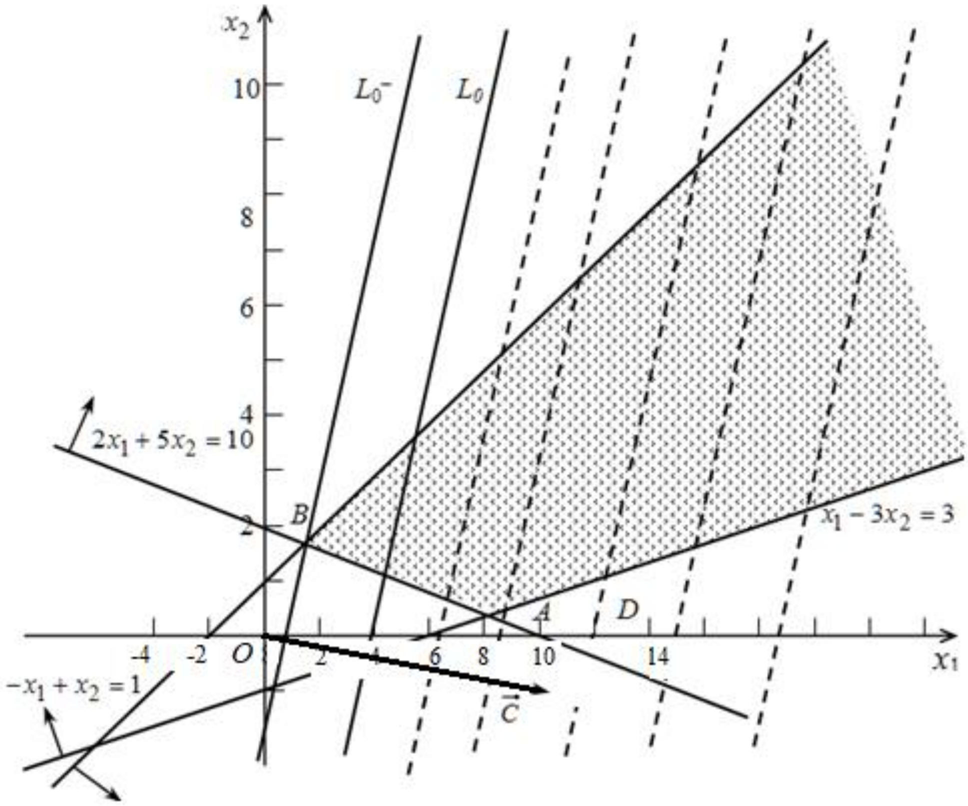


Рис. 11. Необмеженість МДР і цільової функції

Переміщуємо лінію рівня L_0 в напрямку, протилежному вектору $\vec{C}$, до лінії, яка є границею напівплощини, що цілком вміщує МДР. Такою лінією є пряма L_0, котра проходить через точку B. Отже, $L_{\min} = L(B)$.

Координати точки B визначаються як перетин двох прямих $2x_1 + 5x_2 = 10$ і $-x_1 + x_2 = 1$. Розв'язуючи відповідну систему рівнянь, знайдемо координати точки B: $x_1=5/7$ і $x_2=12/7$. Відповідно,

$$L_{\min} = 5.2 \cdot 5/7 - 12/7 = 2.$$

Вправи: розв'язати задачі ЛП графічним методом.

1. $L = x_1 + 2x_2 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 1,$
$-x_1 + x_2 \ge -1,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $L = 2x_1 - 3x_2 \to \min$
$-4x_1 + 5x_2 \le 20,$
$2x_1 + x_2 \ge 6,$
$5x_1 - x_2 \le 45,$
$x_1 - x_2 \le 6, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $L = x_1 - 2x_2 \to \min$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1 + x_2 \ge 2,$
$x_1 - 2x_2 \le 0,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \min$
$-3x_1 - 2x_2 \le -6,$
$x_1 + 4x_2 \ge 4,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

6. $L = x_1 + 3x_2 \to \max$
$x_1 - x_2 \le 1,$
$x_1 - x_2 \ge 0,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

7. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \min$
$x_1 + x_2 \le 4,$
$3x_1 + x_2 \ge 4,$
$-x_1 - 5x_2 \le -4,$
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3.$

8. $L = x_1 + x_2 \to \max$
$x_1 + 2x_2 \le 10,$
$x_1 + 2x_2 \ge 2,$
$2x_1 + x_2 \le 10,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

9. $L = x_1 + x_2 \to \min$
$x_1 + x_2 \le 3,$
$x_1 + x_2 \ge 0,$
$x_1 - x_2 \le 0,$
$x_1 - x_2 \ge -1$
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 2.$

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов и др. – МЛ "Высшая школа", 1980 .

2. Кузнецов А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов. – Минск, "Вышэйшая школа", 1994 .

3. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

4. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И.Савельева. – М.: Экономика, 1987.

5. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1985. – 320 с.

7. Ржевський С.В. Дослідження операцій / С.В. Ржевський, В.М.Александрова. − К.: Академвидав, 2006. − 560 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

1. Варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Задача 1: розв'язати задачі ЛП графічним методом.

1.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \le -8 \\ -4x_1 + 6x_2 \le 24 \end{cases}$$
$$max\, Z = x_1 + 2x_2$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 5x_1 + 15x_2 \le 75 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$$
$$min\, Z = -3x_1 + 4x_2$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 \ge 5 \\ -3x_1 + 3x_2 \ge -24 \\ 4x_1 + 10x_2 \le 50 \\ 5x_1 - 12x_2 \ge -35 \end{cases}$$
$$max\, Z = 5x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

4.
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq -\frac{3}{2}\\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30\\ -3x_1 + 9x_2 \leq 27\end{cases}$$
$min\, Z = 3x_1 + x_2$

5.
$$\begin{cases}x_1 + 6x_2 \geq 6\\ x_2 \leq 3\\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{4}\\ 11x_1 + 7x_2 \leq 77\end{cases}$$
$max\, Z = x_1 + 2x_2$

6.
$$\begin{cases}x_1 \leq 8\\ 5x_1 + 7x_2 \geq 35\\ -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{27}{2}\\ x_1 - 3x_2 \geq -12\end{cases}$$
$min\, Z = -6x_1 + 2x_2$

7.
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \geq 1\\ 6x_1 + 10x_2 \leq 60\\ -2x_1 + x_2 \geq -2\\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15\end{cases}$$
$max\, Z = 3x_1 + x_2$

8.
$$\begin{cases}2x_1 + 4x_2 \geq 8\\ 4x_1 + 8x_2 \leq 32\\ x_1 \leq 7\\ x_2 \leq 2\end{cases}$$
$min\, Z = 2x_1 - 3x_2$

9.
$$\begin{cases}-8x_1 + 5x_2 \leq 29\\ 5x_1 + 2x_2 \leq 54\\ x_1 + 4x_2 \geq 4\\ -9x_1 + 3x_2 \geq -30\end{cases}$$
$max\, Z = 2x_1 + 3x_2$

10.
$$\begin{cases}2x_1 + x_2 \geq 6\\ 9x_1 + 6x_2 \leq 54\\ -\frac{7}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \geq -\frac{63}{4}\\ 3x_1 - 4x_2 \geq -12\end{cases}$$
$min\, Z = -6x_1 + x_2$

11.
$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 \geq 4\\ 8x_1 + 12x_2 \leq 96\\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12\\ -5x_1 + 2x_2 \leq 10\end{cases}$$
$max\, Z = 4x_1 + x_2$

12.
$$\begin{cases}-2x_1 + 2x_2 \geq -14\\ x_1 + 3x_2 \geq 7\\ x_1 - x_2 \leq 5\\ x_2 \leq 3\end{cases}$$
$max\, Z = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2$

13.
$$\begin{cases}x_1 + 6x_2 \geq 6\\ -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \geq -1\\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq \frac{5}{2}\\ 7x_1 + 11x_2 \leq 77\end{cases}$$
$max\, Z = 3x_1 + x_2$

14.
$$\begin{cases}x_1 \leq 6\\ x_1 + 6x_2 \geq 6\\ x_1 + 2x_2 \leq 12\\ x_1 - x_2 \geq -1\end{cases}$$
$max\, Z = x_1 + \frac{3}{2}x_2$

15.
$$\begin{cases}-2x_1 + 2x_2 \geq -8\\ -3x_1 + x_2 \geq -14\\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4\\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \leq \frac{21}{2}\end{cases}$$
$min\, Z = -7x_1 + 7x_2$

16.
$$\begin{cases}x_1 \leq 6\\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4\\ 8x_1 + 12x_2 \leq 96\\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12\end{cases}$$
$min\, Z = -3x_1 + \frac{5}{2}x_2$

17.
$$\begin{cases}7x_1 - 4x_2 \geq -48\\ 4x_1 + 5x_2 \geq 40\\ 7x_1 - 5x_2 \leq 15\\ 4x_1 + 3x_2 \leq 73\end{cases}$$
$max\, Z = 6x_1 + 5x_2$

18.
$$\begin{cases}2x_1 - 3x_2 \geq -20\\ 4x_1 + 3x_2 \geq 32\\ 2x_1 - 5x_2 \leq 24\\ 4x_1 + 7x_2 \leq 116\end{cases}$$
$max\, Z = 3x_1 + 5x_2$

19.
$$\begin{cases}-\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \geq -1\\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq \frac{5}{2}\\ 7x_1 + 11x_2 \leq 77\\ x_1 \geq 3\end{cases}$$
$min\, Z = -x_1 + 7x_2$

20.
$$\begin{cases}5x_1 - 2x_2 \geq -24\\ x_1 + 2x_2 \geq 16\\ x_1 - 4x_2 \leq -8\\ 4x_1 + 3x_2 \leq 82\end{cases}$$
$max\, Z = 7x_1 + 6x_2$

21.
$$\begin{cases}4x_1 - 3x_2 \geq -16\\ 4x_1 + 5x_2 \geq 48\\ 2x_1 - 3x_2 \leq 32\\ 6x_1 + 7x_2 \leq 160\end{cases}$$
$max\, Z = 7x_1 + 8x_2$

22.
$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 \geq 20 \\ x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ 3x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq \frac{27}{2} \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$
$$max\, Z = x_1 + 2x_2$$

23.
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \geq -24 \\ x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 16 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 104 \end{cases}$$
$$min\, Z = -4x_1 + 5x_2$$

24.
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \geq -30 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 162 \end{cases}$$
$$min\, Z = -3x_1 + 7x_2$$

25.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \geq -20 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \end{cases}$$
$$max\, Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

26.
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 136 \end{cases}$$
$$min\, Z = -5x_1 + 7x_2$$

27.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 36 \\ x_1 - 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 90 \end{cases}$$
$$min\, Z = 2x_1 - 5x_2$$

28.
$$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - x_2 \geq -10 \\ x_1 + \frac{4}{3}x_2 \geq \frac{32}{3} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 162 \end{cases}$$
$$max\, Z = 2x_1 + 3x_2$$

29.
$$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 \geq -12 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 84 \end{cases}$$
$$max\, Z = 7x_1 + 9x_2$$

30.
$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \geq -14 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 94 \end{cases}$$
$$min\, Z = 8x_1 - 7x_2$$

Задача 2. Знайти графічним методом оптимальний план задач лінійного програмування ($x_j \geq 0$).

1.
$$5x_1 - x_2 + x_3 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

2.
$$x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5 \to max$$
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -x_1 - x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

3.
$$6x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

4.
$$-8x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 9 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

5.
$$6x_2 + x_3 - x_4 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

6.
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

7.
$$8x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

8.
$$2x_2 + x_4 - 3x_5 \to max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_5 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 6 \end{cases}$$

9. $7x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

10. $10x_1 + 5x_2 - 25x_3 - 5x_4 \to max$

$$\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 24x_5 = 32 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

11. $x_1 - 3x_3 - x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

12. $6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

13. $x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

14. $-5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7 \\ 4x_2 + 8x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

15. $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

16. $3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

17. $7x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

18. $x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$$

19. $6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$$

20. $x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

21. $3x_3 - 2x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 7 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

22. $5x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

23. $x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

24. $7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$$

25. $2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

26. $x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 28 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

27.
$$6x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 \to max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

28.
$$-2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

29.
$$3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

30.
$$8x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \to max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

1. $F = x_1 + x_2 \to max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $F = x_1 + 3x_2 \to max;$
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $F = x_1 + 2x_2 \to max;$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $F = 3x_1 + 4x_2 \to min;$
$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \geq 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \geq 32, \\ 2x_1 \geq 2, \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. $F = -2x_1 + x_2 \to min;$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. $F = x_1 + x_2 \to max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7. $F = x_1 + x_2 \to min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $F = x_1 - 2x_2 \to min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. $F = 12x_1 + 15x_2 \to max;$
$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10. $F = 10x_1 + 14x_2 \to min;$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \geq 35, \\ 2x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Поточні контрольні запитання

1. Які властивості задачі лінійного програмування?
2. Що таке опукла множина?
3. Яку функцію називають опуклою?
4. Що таке лінія рівня функції? Який вигляд вона має для лінійної функції двох змінних?
5. Градієнт функції − це…
6. Коли ЗЛП не має розв'язків?
7. В яких випадках ЗЛП має безліч розв'язків?
8. Як визначається лінійна комбінація двох точок опуклої множини?
9. Яка множина на площині відповідає обмеженню нерівності?
10. Чи може задача лінійного програмування мати три розв'язки?

Практичне заняття № 3. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою надстройки «Пошук рішення» Microsoft Excel. Постоптимізаційний аналіз

Мета: закріпити знання теорії двоїстості в лінійному програмуванні та вміння практично використовувати двоїсті оцінки в аналізі економічних моделей. При виконанні завдань студенти мають набути та закріпити навички побудови лінійних економіко-математичних моделей; виконання аналізу розв'язків задач лінійного програмування; оцінки рентабельності продукції, що випускається, і нової, виготовлення якої планується; проведення аналізу обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

План

1. Теореми двоїстості в лінійному програмуванні

2. Застосування теорії двоїстості для післяоптимізаційного аналізу розв’язку задачі лінійного програмування

Опорні поняття

Теореми двоїстості в лінійному програмуванні

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі завдання оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва *n* видів продукції застосовується *m* видів ресурсів, запаси яких обмежені значенням $b_i(i = \overline{1,m})$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij}(j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j(j = \overline{1,n})$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$max\,F = max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m})\ ; \qquad x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Пряма задача полягає у визначенні оптимального плану виробництва продукції $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який дає найбільший дохід при обмежених ресурсах.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y \ge c_j (j=\overline{1,n}); \qquad y_i \ge 0 (i=\overline{1,m}).$$

Економічний зміст двоїстої задачі: необхідно визначити оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, що використовуються для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою за умови, що витрати на ресурси при виробництві кожного виду продукциї будуть не менше прибутку (виручки) від реалізації цієї продукції. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці і-го ресурсу, їх інколи ще називають **тіньовою ціною відповідного ресурсу**.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має і друга, при цьому оптимальні значення їх линийних функцій рівні: $F_{max}=Z_{min}$. Якщо лінійна функція однієї із задач не обмежена, то умови другої несумісні.

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку двоїстоі задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, що записана через неосновні змінні її оптимального розв'язку.

Третя теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням часткових похідних лінійної функції $F_{max}(b)$ за відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i^*}, \quad i=1,2,\dots,m.$$

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції , що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на **дефіцитні** та **недефіцитні** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний і-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є **недефіцитним**. Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то і-й ресурс застосовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається **дефіцитним**. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона **нерентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна x_j=0. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона **рентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна x_j>0.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до зміни умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

- ✓ склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;
- ✓ склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;
- ✓ змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв`язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

Введення нової змінної до математичної моделі задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

Застосування теорії двоїстості для аналізу оптимального розв'язку задачі ЛП далі розглянуто на прикладі двох взаємно двоїстих задач:

$$F = 2x_1+3x_2 \to \max \tag{1}$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

та

$$Z = 18y_1+16y_2+5y_3+21y_4 \to \min \tag{2}$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \end{cases}$$
$$y_i \ge 0 (i = 1,2,3,4).$$

Канонічна форма задачі (1) записується в такий спосіб:

$$F = 2x_1+3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

Остання симплекс-таблиця для задачі (1) має вигляд:

Таблиця 1

№п/п	базис	Вільні члени	Змінні					
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_1	6	1	0	-1/5	3/5	0	0
2	x_5	1	0	0	-2/5	1/5	1	0
3	x_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0
4	x_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1
	F	24	0	0	4/5	3/5	0	0

Відповідність між початковими змінними однієї із двоїстих задач та допоміжними змінними другої наведена в наступній таблиці 2.

Оптимальний розв'язок задачі (1): $X^* = (6;4;0;0;1;3)$, $F_{\max} = 24$.

Оптимальний розв'язок задачі (2): $Y^* = (4/5;3/5;0;0;0;0)$, $Z_{\min} = 24$.

Таблиця 2

Змінні задачі (1)											
Вихідні						Допоміжні					
x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{1+n}	x_{2+n}	…	x_{j+n}	…	x_{m+n}
y_{1+m}	y_{2+m}	…	y_{m+j}	…	y_{m+n}	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
Допоміжні						Вихідні					
Змінні двоїстої задачі (2)											

Знайдемо інтервали стійкості (незмінності) двоїстих оцінок стосовно змін запасів ресурсів кожного виду. Чи зміняться ці оцінки, якщо збільшити запаси кожного з ресурсів на 10 одиниць: а) окремо; б) одночасно? Знайдемо відповідну зміну максимального прибутку від реалізації продукції.

Припустимо, що запаси ресурсів S_1, S_2 S_3 ,S_4, що дорівнювали спочатку 18, 16, 5 і 21 одиниці, змінилися відповідно на величини Δb_1, Δb_2, Δb_3, Δb_4. Тоді витрати на ресурси складають

$$Z = (18 + \Delta b_1)y_1 + (16 + \Delta b_2)y_2 + (5 + \Delta b_3)y_3 + (21 + \Delta b_4)y_4.$$

Заміняючи змінні b_1 і b_2 їхніми виразеннями через неосновні змінні оптимального розв'язку

$$y_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 - \frac{1}{5}y_5 + \frac{2}{6}y_6,$$

$$y_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}y_3 - \frac{9}{5}y_4 + \frac{3}{5}y_5 - \frac{1}{5}y_6$$

одержимо після перетворення

$$Z = \left(24 + \frac{4}{5}\Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_2\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\Delta b_1 + \frac{1}{5}\Delta b_2 + \Delta b_3\right)y_3 +$$
$$+ \left(3 + \frac{3}{5}\Delta b_1 - \frac{9}{5}\Delta b_2 + \Delta b_4\right)y_4 + \left(6 - \frac{1}{5}\Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_2\right)y_5 +$$
$$+ \left(4 + \tfrac{2}{5}\Delta b_1 - \tfrac{1}{5}\Delta b_2\right)y_6. \quad (3)$$

У випадку, коли $\Delta b_1=\Delta b_2=\Delta b_3=\Delta b_4=0$, тобто запаси ресурсів дорівнюють первісним значенням, вийшло б знайоме вираження лінійної функції Z через неосновні змінні оптимального розв'язку. Для того щоб об'єктивно обумовлені оцінки ресурсів залишилися незмінними при зміні їх запасів, себто зберігся оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y^*=(4/5;3/5;0;0;0;0)$, досить, щоб коефіцієнти при неосновних змінних у виразі (3) залишалися невід'мними:

$$\begin{cases} 1-(\frac{2}{5})\Delta b_1+(\frac{1}{5})\Delta b_2+\Delta b_3 \geq 0 \\ 3+(\frac{3}{5})\Delta b_1-(\frac{9}{5})\Delta b_2+\Delta b_4 \geq 0 \\ 6-(\frac{1}{5})\Delta b_1+(\frac{3}{5})\Delta b_2 \geq 0 \\ 4+(\frac{2}{5})\Delta b_1-(\frac{1}{5})\Delta b_2 \geq 0. \end{cases}$$

Припустимо, що змінюється тільки запас ресурсу S_1, а інші запаси ресурсів залишаються незмінними: $\Delta b_2=\Delta b_3=\Delta b_4=0$. Тоді з (4) одержимо, що

$$\begin{cases} 1-0{,}4\Delta b_1 \geq 0 \\ 3+0{,}6\Delta b_1 \geq 0 \\ 6-0{,}2\Delta b_1 \geq 0 \\ 4+0{,}4\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \Delta b_1 \leq 2{,}5 \\ \Delta b_1 \geq -5 \\ \Delta b_1 \leq 30 \\ \Delta b_1 \geq -10. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$-5 \leq \Delta b_1 \leq 2{,}5 \ \text{ і } \ 18-5 \leq b_1+\Delta b_1 \leq 18+2{,}5 \ \text{ чи } \ 13 \leq b_1+\Delta b_1 \leq 20{,}5,$$

тобто при незмінності об'єктивно обумовлених оцінок запас ресурсу S_1 може змінюватися в межах від 13 до 20,5 одиниць. Аналогічно можна одержати, що

$$11 \leq b_2+\Delta b_2 \leq 17\tfrac{2}{3},$$

$$4 \leq b_3+\Delta b_3 < \infty,$$

$$18 \leq b_4+\Delta b_4 < \infty.$$

Таким чином, при зміні запасу тільки одного з ресурсів S_1 у межах від 13 до 20,5 одиниць або S_2 – від 11 до $17\frac{2}{3}$ одиниці, S_3 – не менш 4 одиниць, S_4 – не менш 18 одиниць оптимальне рішення двоїстої задачі залишається незмінним, тобто $Y^*=(4/5; 3/5; 0; 0; 0; 0)$.

На підставі викладеного ясно, що збільшення на 10 одиниць окремо запасу ресурсу S_1 (дорівнює 18 одиницям) чи S_2 (16 одиницям) приведе до зміни їхніх об'єктивно обумовлених оцінок, а запасу ресурсу S_3 (5 одиницям) чи S_4 (21 одиниці) залишить оцінки цих ресурсів незмінними (становитимуть нуль). В результаті за допомогою отриманих оптимальних оцінок ресурсів неможливо знайти відповідну зміну максимального прибутку ΔF_{max}.

Якщо запаси ресурсів змінюються одночасно, то дослідження стійкості об'єктивно обумовлених оцінок ускладнюється, оскільки в даному випадку потрібно знайти багатогранник розв'язків системи нерівностей (4). Однак завжди можна перевірити, чи задовольняють конкретні зміни запасів ресурсів системі (4). Так, у нашій задачі при одночасному збільшенні запасів усіх ресурсів на 10 одиниць, тобто при $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 10$, всі нерівності системи (4) справедливі, тому оптимальний розв'язок двоїстої задачі залишається колишнім, себто $Y^* = (4/5\ ;\ 3/5\ ;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$. Таким чином, зміна максимального прибутку з урахуванням теореми 3 двоїстості становитиме:

$$\Delta F_{max} = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + y_3^* \Delta b_3 + y_4^* \Delta b_4 = \frac{4}{5} \cdot 10 + \frac{3}{5} \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 =$$
$$= 14\ \textit{грош. од.}$$

За співвідношеннями об'єктивно обумовлених оцінок можуть бути визначені розрахункові норми заміни ресурсів, при дотриманні яких проведені заміни в межах стійкості двоїстих оцінок не впливають на ефективність оптимального плану. Наприклад, складемо відношення об'єктивно обумовлених оцінок ресурсів S_1 і S_2, тобто $y_1^* : y_2^* = (4/5):(3/5) = 4:3$, тобто для максимізації загального прибутку кожні додаткові 3 одиниці ресурсу S_1 еквівалентні додатковим 4 одиницям ресурсу S_2, висновок правильний у межах стійкості двоїстих оцінок, коли зміни запасів ресурсів $\Delta b_1, \Delta b_2$, а також $\Delta b_3, \Delta b_4$задовольняють системі (4).

Далі буде показано, як вирішити задачу (1) при змінах запасів ресурсів $\Delta b_1 = -2, \Delta b_2 = 1, \Delta b_3 = 5, \Delta b_4 = 19$, використовуючи (якщо це можливо) двоїсті оцінки ресурсів. Зміни запасів $\Delta b_1 = -2, \Delta b_2 = 1, \Delta b_3 = 5, \Delta b_4 = 19$ знаходяться в межах стійкості двоїстих оцінок (вони задовольняють системі (4)), тому розв'язок двоїстої задачі залишиться тим же: $Y^* = (4/5;\ 3/5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$. На підставі другої теореми двоїстості позитивним значенням змінних $y_1 = 4/5$, $y_2 = 3/5$ оптимального розв5'язку двоїстої задачі відповідають нульові значення змінних вихідної задачі: x_3,=0, $x_4 = 0$. Тому інші компоненти оптимального розв'язку вихідної задачі можна знайти безпосередньо з її системи обмежень, в якій x_3,=0, $x_4 = 0$, а в правих частинах зазначені нові запаси ресурсів: $b_1' = 18 - 2 = 16$, $b_2' = 16 + 1 = 17$, $b_3' = 5 + 5 = 10$,
$b_4' = 21 + 19 = 40$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 16, \\ 2x_1 + x_2 = 17, \\ x_2 + x_5 = 10, \\ 3x_1 + x_6 = 40. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 19$. Відповідне значення максимума лінійної функції $F_{max} = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 23$.

Отже, максимальний розмір прибутку $F_{max} = 23$ у.о. при оптимальному плані виробництва $X^* = (7;\ 3;\ 0;\ 0;\ 7;\ 19)$.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

2. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И.Савельева. – М.: Экономика, 1987.

3. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1985. – 320 с.
5. Ржевський С.В. Дослідження операцій / С.В. Ржевський, В.М.Александрова. − К.: Академвидав, 2006. − 560 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

Варіанти 1 − 10. Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує три типи ресурсів. Норми витрат кожного на одиницю продукції, наявність, а також ціни продукції наведені в таблиці відповідного варіанту. Потрібно:

– визначити оптимальний план виробництва продукції кожного типу в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству максимальний дохід;

– сформулювати двоїсту задачу і знайти оптимальні плани прямої і двоїстої задач;

– знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів ресурсів кожного типу;

– виявити зміну загальної вартості виготовленої продукції, обумовлену оптимальним планом її виробництва при зменшенні кількості ресурсу першого типу на 60 одиниць і збільшенні кількості ресурсів другого і третього типів відповідно на 120 і 160 одиниць;

– провести аналіз можливої зміни загальної вартості продукції як при зміні обсягів ресурсів кожного виду окремо, так і при одночасній їхній зміні в зазначених розмірах;

– знайти інтервали можливої зміни вартості одиниці продукції кожного виду.

Структура даних відповідає таблиці 1. Вихідні дані задаються в таблиці 3 відповідно до номера варіанта.

Варіанти 11 − 20. Для виготовлення трьох видів продукції A,B,C підприємство використовує три типи ресурсів. Норми витрат кожного на одиницю продукції, наявність, а також ціни продукції наведені в таблиці. Потрібно:

– визначити оптимальний план виробництва продукції кожного типу в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству максимальний дохід;

– сформулювати двоїсту задачу і знайти оптимальні плани прямої і двоїстої задач;

– знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно змін ресурсів кожного типу;

– визначити зміни загальної вартості продукції як при зміні обсягів ресурсів кожного виду окремо, так і при одночасній їхній зміні в зазначених розмірах;

– визначити доцільність у плані виробництва 4-го виду виробів Д, норми витрат сировини на його одиницю наведені в таблиці;

– виявити зміну загальної вартості виготовленої продукції, обумовленої оптимальним планом її виробництва при зменшенні кількості ресурсу першого типу на 40 одиниць і збільшенні кількості ресурсів другого і третього типів відповідно на 80 і 100 одиниць;

– знайти оптимальні плани двоїстої і прямої задач, якщо кількість сировини I, II, III видів дорівнює 140, 250 і 240 кг.

Структура даних відповідає таблиці 1. Вихідні дані задаються в таблиці 3 відповідно до номера варіанта.

Варіанти 21 − 30. Для виготовлення чотирьох видів продукції А, В, С, Д підприємство використовує три типи ресурсів. Норми витрати кожного на одиницю продукції, їхня наявність, а також ціни продукції наведені в таблиці відповідного варіанта. Потрібно:

– визначити оптимальний план виробництва продукції кожного типу в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству максимальний дохід;

– сформулювати пряму та двоїсту задачу і знайти їх оптимальні плани;

– визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок з огляду на зміни запасів дефіцитних ресурсів;

– виявити зміну загальної вартості виготовленої продукції, обумовлену оптимальним планом її виробництва при зменшенні кількості ресурсу другого типу на 10 одиниць і збільшенні кількості ресурсів першого і третього типів відповідно на 10 і 15 одиниць; розглянути два випадки, коли зміна обсягів ресурсів здійснюється окремо за кожним або одночасно;

– визначити рентабельність виробництва кожного виду продукції, що виробляється на підприємстві;

– розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції, за якої максимальний дохід не зменшиться.

Структура даних відповідає таблиці 1. Вихідні дані задаються в таблиці 3 відповідно до номера варіанта.

Варіанти 31 − 40. Фірма виготовляє продукцію трьох видів А, В, С. При цьому потрібен певний час для обробки кожного на різних групах обладнання (I, II, III) (див. відповідну таблицю). Визначити, яку продукцію і в якій кількості слід виготовляти, щоб організація отримувало найбільший дохід. Керівництво цікавить, чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким він буде у кожній з наведених далі ситуаці.

1. Підприємство може збільшити час роботи обладнання груп II та III відповідно на 100 та 80 годин за місяць, орендуючи для цього додаткове устаткування, яке коштуватиме 5000 у.о. Чи вигідно це? Якщо так, то яким має бути новий план виробництва продукції?

2. Фінансовий відділ вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може привести до зниження ціни на продукцію В на 25 у.о. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції?

3. Відділ досліджень і розробок пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції С (дивись таблицю). Керівництво цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4. Споживач продукції А за певних обставин порушує попередню домовленість і відмовляється прийняти більше 100 одиниць продукції А. Визначити, як фірма має змінити план виробництва, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Структура даних відповідає таблиці 2. Вихідні дані задаються в таблиці 3 відповідно до номера варіанта.

Варіанти 41 − 50. Фірма виготовляє продукцію трьох видів А, В, С. При цьому потрібен певний час для обробки кожного на різних групах обладнання (І, ІІ, ІІІ) (див. відповідну таблицю). Визначити, яку продукцію і в якій кількості слід виготовляти, щоб організація отримувало найбільший дохід. Керівництво цікавить, чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким він буде у кожній з наведених далі ситуаці.

1. Фірма може збільшити час роботи обладнання груп ІІ та ІІІ відповідно на 50 та 20 годин за місяць, орендуючи для цього додаткове устаткування, яке коштуватиме 1000 у.о. Чи вигідно це? Якщо так, то яким має бути новий план виробництва?
2. Фінансовий відділ вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може привести до зниження ціни на продукцію В на 32 у.о. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції?
3. Відділ досліджень і розробок пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції С (дивись таблицю). Керівництво цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.
4. Споживач продукції А за певних обставин порушує попередню домовленість і відмовляється прийняти більше 50 одиниць продукції А. Визначити, як фірма має змінити план виробництва, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Структура даних відповідає таблиці 2. Вихідні дані задаються в таблиці 3 відповідно до номера варіанта.

Таблиця 1

Тип ресурсу	Норми витрат ресурсу на одиницю продукції				Наявність ресурсу
	А	В	С	Д (модифікація С)	
I II III	a_1 n_1 k_1	a_2 n_2 k_2	a_3 n_3 k_3	a_4 n_4 k_4	b_1 b_2 b_3
Ціна одиниці продукції	c_1	c_2	c_3	c_4	

Таблица 2

Група обладнання	Час обробки одиниці продукції, год, за видами				Можливий час роботи обладнання, годин на місяць
	A	B	C	модифікація C	
I II III	a_1 n_1 k_1	a_2 n_2 k_2	a_3 n_3 k_3	a_4 n_4 k_4	b_1 b_2 b_3
Ціна одиниці продукції	c_1	c_2	c_3	c_4	

Таблиця 3

№	$\boldsymbol{a_i}$				$\boldsymbol{n_i}$				$\boldsymbol{k_i}$				$\boldsymbol{b_i}$			$\boldsymbol{c_i}$			
	1	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*4*
1.	3	7	7	6	2	2	7	6	6	7	6	6	157	164	136	5	8	8	5
2.	7	5	2	2	3	3	7	5	7	7	4	6	120	225	219	7	5	7	4
3.	6	3	6	4	6	6	3	4	7	4	8	5	176	196	235	7	6	5	5
4.	3	7	5	5	6	3	4	8	5	8	2	4	236	241	222	5	6	7	7
5.	8	6	4	7	6	8	8	8	4	6	4	4	152	226	172	8	5	6	7
6.	6	7	3	4	5	8	6	2	6	3	7	6	140	143	143	7	5	7	4
7.	7	7	8	4	4	5	5	5	3	5	3	7	177	209	100	7	8	7	6
8.	5	8	4	3	5	3	6	6	4	7	7	4	234	163	215	5	6	6	6
9.	5	4	6	6	6	4	6	5	7	3	5	3	183	207	199	4	7	5	6
10.	7	6	7	7	3	4	5	3	2	4	4	7	240	223	266	8	5	7	6
11.	6	6	7	6	5	4	8	5	6	5	4	5	165	110	197	6	7	7	6
12.	8	8	7	7	2	4	3	3	7	8	7	4	128	156	177	4	6	6	6
13.	3	5	3	3	7	5	4	6	7	3	7	7	140	262	209	4	7	7	6
14.	6	8	4	6	4	6	6	3	7	2	3	5	184	150	264	6	5	4	5
15.	4	3	4	7	2	7	5	2	4	4	5	7	244	237	223	4	7	7	4
16.	6	5	5	6	5	4	3	5	4	7	2	5	143	153	133	5	7	6	6
17.	4	5	7	3	6	3	5	4	6	3	7	4	241	125	235	6	7	5	8
18.	5	5	2	5	3	7	2	2	3	7	7	7	209	180	140	5	5	5	6
19.	8	7	4	7	5	4	5	2	7	5	5	4	215	133	179	5	7	5	7
20.	5	2	4	5	4	6	7	5	5	3	3	2	214	107	154	4	7	6	6
21.	3	5	7	7	2	4	3	4	6	4	5	4	210	222	151	7	7	8	6
22.	5	5	5	4	7	7	2	5	5	3	4	5	230	172	218	5	5	6	5
23.	6	8	5	6	6	3	5	6	4	7	7	5	168	176	142	6	6	4	7
24.	8	3	7	6	7	5	6	3	2	6	2	7	129	168	167	6	6	6	6
25.	7	7	2	7	2	2	5	4	4	4	7	3	257	210	188	4	6	7	5
26.	4	5	5	8	6	5	7	4	7	2	5	3	141	125	198	7	6	6	8
27.	4	4	5	4	4	6	4	7	7	7	5	4	146	171	136	6	5	6	5
28.	5	8	2	2	3	7	4	5	7	7	3	3	250	258	170	4	7	5	5
29.	2	6	3	3	5	7	7	5	2	5	7	6	141	254	251	7	6	7	6
30.	7	5	8	7	2	4	3	7	8	3	4	3	148	248	261	6	5	6	7
31.	7	5	4	4	6	4	5	4	4	4	2	5	127	235	237	6	6	6	5

32.	7	4	3	6	8	2	6	2	8	7	6	7	136	202	171	7	8	6	7
33.	7	7	7	4	2	6	3	5	2	3	4	5	124	186	106	6	8	8	6
34.	3	6	5	6	8	3	6	4	5	3	7	6	183	248	159	7	5	8	6
35.	4	4	4	6	4	5	7	5	4	7	8	2	265	228	173	7	6	8	5
36.	2	7	7	4	6	7	2	3	4	5	3	7	250	106	219	4	6	5	5
37.	6	7	7	5	5	5	6	4	8	2	6	2	234	154	226	6	5	8	6
38.	5	2	5	8	2	5	5	5	4	5	4	7	239	252	133	5	4	5	7
39.	5	2	5	3	3	4	4	4	6	5	3	4	245	130	257	7	5	8	5
40.	8	3	4	4	4	4	4	4	3	2	6	5	143	251	188	5	5	4	7
41.	4	7	7	7	5	4	5	4	6	6	3	3	139	130	102	8	7	5	5
42.	6	7	6	3	8	8	8	3	6	4	5	7	145	174	102	4	4	5	5
43.	2	2	7	5	5	7	2	4	5	3	4	3	247	189	183	5	4	5	6
44.	7	5	4	4	6	2	4	4	4	2	3	2	193	208	206	5	8	8	8
45.	8	2	5	5	6	4	4	6	7	8	3	8	135	166	251	6	5	7	7
46.	6	7	2	3	2	4	8	8	3	5	7	5	140	114	114	4	7	5	6
47.	7	7	4	4	6	5	4	3	5	4	5	8	163	190	253	4	7	5	4
48.	8	2	8	5	4	6	6	8	8	4	3	6	267	177	179	6	4	7	5
49.	3	4	6	4	7	7	5	7	6	3	7	2	255	141	163	5	5	7	5
50.	5	5	8	7	4	5	2	4	6	7	4	4	235	123	208	5	8	6	8

Поточні контрольні запитання

1. Сформулювати першу теорему двоїстості.
2. Дати економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості.
3. Сформулювати другу теорему двоїстості.
4. Дати економічну інтерпретацію двоїстим оцінкам.
5. Сформулювати третю теорему двоїстості.
6. Дати економічну інтерпретацію третьої теореми двоїстості.
7. Що таке інтервали стійкості двоїстих оцінок?
8. Як визначити рентабельність продукції за двоїстою оцінкою?
9. Як визначається дефіцитність ресурсу за відповідною двоїстою оцінкою?
10. Що означає основна нерівність двоїстості?

Практичне заняття № 4. Задачі транспортного типу. Метод потенціалів

Мета: засвоїти метод потенціалів для розв'язання транспортної задачі в різних її постановках.

План

1. Постановка транспортної задачі (ТЗ) у табличній формі
2. Перехід до закритої моделі
3. Метод потенціалів і його застосування для розв'язування ТЗ

Опорні поняття

Постановка транспортної задачі в табличній формі

Транспортною є специфічна задача лінійного програмування, в якій потрібно визначити найекономічніший план перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Нехай однорідний вантаж зосереджений у m постачальників в обсягах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Його необхідно доставити n споживачам в обсягах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Відомі c_{ij} – вартості перевезення одиниці вантажу від кожного i -го постачальника кожному j -му споживачу. Потрібно скласти такий план перевезень, при якому потреби всіх споживачів, за можливістю, повністю задовольняться, а сумарні витрати на перевезення всіх вантажів будуть мінімальними.

Вихідні дані транспортної задачі зазвичай записуються в таблиці.

a_i \ b_i	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
...				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

Вихідні дані задачі можуть бути представлені також у вигляді векторів запасів постачальників $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, попиту споживачів $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і матриці вартостей:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{2}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{3}$$
$$x_{ij} \ge 0\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right), \tag{4}$$

де x_{ij} − кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача; c_{ij} − вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i − запаси продукції i-го постачальника; b_j − попит на продукцію j-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5}$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Зазначимо, що у випадку закритої моделі ТЗ обмеження (2), (3) записуються у формі рівностей, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{7}$$

Для того, щоб перейти від ТЗ у відкритій формі до ТЗ в закритій формі, потрібно ввести до розгляду або фіктивного споживача B_{n+1} з попитом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і вартістю перевезення одиниці продукції $c_{i,n+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$ (у випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$), або фіктивного постачальника A_{m+1} з обсягом постачання $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і вартістю перевезення одиниці продукції $c_{m+1,j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$ (у випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$). При цьому розмірність ТЗ, себто кількість невідомих в задачі збільшиться відповідно або на m, або n змінних.

Допустимим планом **(**або просто ***планом*****)** транспортної задачі називають будь-який розв'язок системи обмежень (2) − (4), який позначають матрицею $x = \{x_{ij}\}$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$.

Опорний план перевезень в ТЗ (у закритій формі) є невід'ємним, він задовольняє умовам (6), (7), а його додатним компонентам відповідає система лінійно незалежних векторів-умов системи обмежень (6), (7). Якщо опорний план є ***невиродженим***, то у ньому кількість додатних компонент дорівнює $(m + n - 1)$. У ***виродженому*** опорному плані таких компонент менше.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \{x_{ij}^*\}$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови (2) − (4) задачі і забезпечує найменше значення цільової функції (1).

Необхідною і достатньою умовою існування розв’язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто виконання умови (5).

Метод потенціалів

Як задача лінійного програмування ТЗ може бути розв'язана за допомогою симплекс-методу. Але її специфічна структура дозволяє використати більш ефективніший **метод потенціалів**, який насправді відтворює кроки симплекс-методу.

Зазначимо, що він застосовується до ТЗ в закритій формі. Тому спочатку слід визначити тип транспортної задачі (відкрита чи закрита) і збалансувати її.

Алгоритм методу потенціалів складається з наступних етапів.

1. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі.
2. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
3. Якщо умова оптимальності виконується, то отримуємо оптимальний розв’язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, то визначається наступний опорний план і здійснюється перехід до кроку 2.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Опорний план ТЗ зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальникам продукції відповідають рядки, а споживачам − стовпчики.

Побудову першого плану за **методом північно-західного кута** починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), куди записують значення, що є меншим з двох чисел a_1 та b_1. Тобто $x_{11} = min(a_1, b_1)$. Далі корегуємо обсяги постачання і попиту у A_1 і B_1: $a_1 := a_1 - x_{11}$, $b_1 := b_1 - x_{11}$. Якщо виявиться, що $a_1 = 0$, то з розгляду виключають постачальника A_1. Якщо попит споживача B_1 повною мірою задоволений, тобто $b_1 = 0$, то з розгляду виключають B_1. Потім переходять до наступної північно-західної клітинки і так далі. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Якщо на етапі після визначення обсягу перевезень $x_{ij} = min(a_i, b_j)$ і корегування величин a_i та b_j виявиться, що $a_i = b_j = 0$, то з розгляду виключають лише одного учасника − або постачальника A_i, або споживача B_j. А на черговому етапі одна з базисних змінних прийме нульове значення, тобто $x_{ps} = 0$. У цьому випадку початковий опорний план буде виродженим.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка містить величину найменшої вартості перевезення одиниці продукції, за алгоритмом, що наведений вище, доти, поки вся продукція не буде розподілена між споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які містять найменшу величину вартості c_{ij} у рядках і стовпчиках. Таблицю опорного плану починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За його допомогою на кроках визначають різниці між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Їх записують у спеціально відведених місцях (поряд з відповідними рядками або стовпчиками). Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою величиною вартості перевезення. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови початкового опорного плану за допомогою одного із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $(m+n-1)$ клітинок (далі будемо називати їх ***базисними***), де m – кількість постачальників; n – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(n+m-1)$, то початковий план побудовано неправильно і він не є опорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу з базисних компонент. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

2. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою наступного критерію.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Опорний план $X^* = \{x_{ij}^*\}$ є оптимальним тоді і тільки тоді, коли існують числа u_i та v_j, для яких виконуються умови

$$u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0, \tag{8}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0 \tag{9}$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$.

Величини u_i та v_j називають відповідно *потенціалами* постачальників та споживачів.

3. Потенціали розраховують, розв'язуючи систему рівнянь (8). Далі перевіряють умову оптимальності (9) для небазисних клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то роблять висновок про те, що поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують, визначаючи величину x_{ps}, для якої порушено умову оптимальності. Якщо клітинок, на яких порушується умова оптимальності, декілька, то для заповнення (визначення x_{ps}) вибирають ту, якій відповідає найбільше значення величин $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$, тобто $\Delta_{ps} = max\,\Delta_{ij}$.

Для вибраної клітинки будують цикл перерахування, так званий компенсаційний ланцюжок, до якого включають вибрану та деякі клітинки, що відповідають базисним компонентам поточного опорного плану. Далі виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці − знак «+», а всім іншим по черзі – знаки «–» та «+»;

2) визначають величину θ, яка вказує, наскільки слід змінити величини перевезень в компенсаційному ланцюжку за правилом: $\theta = min(x_{ij}^{-})$;

3) у порожню клітинку переносять θ, тобто $x_{ij} = \theta$. Всі обсяги перевезень, що позначені в ланцюжку знаком «–», зменшуються на величину θ, а позначені знаком «+» − збільшуються на θ.

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою (базисною), а одна з клітинок, в якій перевезення стало дорівнювати нулю ($x_{ij} = 0$), вважається порожньою (небазисною). Якщо таких клітинок декілька, то вилучити з базису доцільніше ту, яка відповідає найбільшій вартості перевезення одиниці продукції.

В результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі, який у свою чергу перевіряють на оптимальність згідно з п. 2 розглянутого алгоритму.

Приклади розв'язування транспортних задач

Задача 1. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Укладено договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} − кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то умови відносно постачальників записуються у вигляді

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Тобто, уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов’язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} +$$
$$+ 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \rightarrow \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}.$$

Розв’язування. Процес розв’язання задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Початковий опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості (табл. 1).

Початковий опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість ненульових перевезень (заповнених клітинок) у таблиці дорівнює п’яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

Таблиця 1

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 **110**	4	2 *2* +	5 **40**–	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 –**60**	2 **0**+	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 **40**	4	2 **40**	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

$Z_1 = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

A_1B_2: $u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4$;
A_1B_3: $u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2$;
A_2B_1: $u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5$;
A_2B_2: $u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3$;
A_3B_1: $u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2$;
A_3B_3: $u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4$.

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Початковий опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх (базисних і небазисних) клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перерозподілити продукцію в межах побудованого циклу. Визначаємо величину $\theta = min\{60; 40\} = 40$, і змінюємо значення обсягів перевезень в ланцюжку. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 – 40 од. продукції, A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., A_2B_4 – (0 + 40) = 40 од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою (небазисною). Усі інші базисні клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість базисних клітинок у новій таблиці має дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме вигляд, наведений в табл. 2.

$$Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740 \text{ ум. од.}$$

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії.

Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану (див. табл. 3).

Таблиця 2

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 –110	4	2 40+	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 –20	2 40+	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 40–	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Таблиця 3

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 **90**	4	2 **60**	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 **60**	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 **20**	1 **40**	4	2 **20**	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

$$Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720 \text{ ум. од.}$$

Перевірка останнього плану показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. − з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Задача 2. Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств A_1, A_2, A_3, що спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне з них щотижня збирає відповідно 50, 30 та 20 т, які необхідно відправляти в чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4. Ті бажають отримувати ранні овочі в кількості відповідно 30, 30, 10 та 20 т. Вартості перевезення 1 т овочів від господарств до магазинів наведено в таблиці.

Господарство	Вартість перевезення 1 т овочів у магазини			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} − кількість тон овочів, які перевозять з i-го господарства до j-го магазину ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$). Тоді математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} +$$

$$+3x_{33} + 2x_{34} \to \min,$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} += 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} += 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} += 10, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} += 20, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}.$$

Знак «≤» у перших трьох обмеженнях пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100; \sum_{j=1}^{4} b_j = 90.$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично буде вивезено менше, ніж зібрано.

Розв’язування. Щоб визначити оптимальний план поставленої задачі, її необхідно збалансувати, тобто звести до закритого типу. Це виконується шляхом уведення додаткового, умовного споживача B_5 із попитом $B_5 = 100 – 90 = 10$ т. Вартість перевезення одиниці продукції до умовного споживача дорівнює нулю.

Перший опорний план транспортної задачі побудуємо за методом подвійної переваги (таблиця 1).

Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він є неоптимальним. Перехід до другого опорного плану виконується шляхом заповнення клітинки A_3B_2 згідно із побудованим циклом. Зазначену клітинку включено до циклу, оскільки в разі кількох однакових найбільших порушень ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = 1$) заповнюють таку клітинку таблиці, яка має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Таблиця 1

A_j	B_j					u_i
	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	
$A_1 = 50$	2 **30**	3 **20**	4	2	0	$u_1 = –4$
$A_2 = 30$	5 1	7 **–10**	1 **10**	4 **0**+	0 **10**	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4 1 +	3	2 **20**–	0	$u_3 = –2$
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	$v_5 = 0$	

Другий план транспортної задачі наведемо у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2

A_j	B_j					u_i
	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	
$A_1 = 50$	2 **30**	3 **20**	4	2	0	$u_1 = –3$
$A_2 = 30$	5	7	1 **10**	4 **10**	0 **10**	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4 **10**	3	2 **10**	0	$u_3 = –2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Умова оптимальності для цього опорного плану виконується, і тому можна записати:

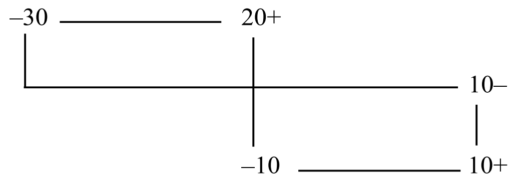
$$X^*{}_1 = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 320 \text{ ум. од.}$$

Згідно з оптимальним планом потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивезенню продукції з першого та третього господарств і лише частково − з другого (залишок дорівнює 10 т). В цьому випадку загальна вартість усіх перевезень буде найменшою і становитиме 230 ум. од.

Але виявляється, що розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітинки: $u_i + v_j = c_{ij}$. В останній таблиці це справджується для порожньої клітинки A_2B_1: $u_1 + v_1 = 0 + 5 = c_{21} = 5$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо заповнити зазначену клітинку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за таким циклом:



Наведемо транспортну таблицю, що відповідає другому оптимальному плану задачі.

Таблиця 3

A_j	B_j					u_i
	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	
$A_1 = 50$	2 **20**	3 **30**	4	2	0	$u_1 = –3$
$A_2 = 30$	5 **10**	7	1 **10**	4 **0**	0 **10**	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4	3	2 **20**	0	$u_3 = –2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Тому

$$X^*{}_2 = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 230 \text{ ум. од.}$$

Другий оптимальний план задачі формулюється так. Перевезти з першого господарства 20 т овочів до першого магазину та 30 т до другого; з другого господарства − 10 т до першого магазину та 10 т овочів до третього, залишаючи невивезеними 10 т, а також з третього господарства до четвертого магазину − 20 т овочів. У цьому разі загальні транспортні витрати становитимуть 230 ум. од. і також будуть найменшими.

Задача 3. Три нафтопереробних заводи A_1, A_2, A_3 із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20, 15 тис. т бензину забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4, потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 та 20 тис. т. Паливо транспортується до бензосховищ за допомогою трубопроводів. Вартість перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ (в умовних одиницях) наведено в таблиці.

Завод	Вартість, ум. од., перекачування 1000 т палива до сховищ			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	2	3	9	8

Сформулювати та розв’язати відповідну транспортну задачу з неодмінним виконанням таких умов:

1) повністю задовольнити попит бензосховища B_4;

2) недопостачання палива до сховища B_2 штрафується 5 ум. од. вартості за кожні 1000 т бензину;

3) у зв’язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання бензину із заводу A_1 до сховища B_1 тимчасово не можливе.

Розв’язування. Визначимо, до якого типу належить транспортна задача:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 20 + 15 = 65,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75.$$

За умовою вона є відкритою, незбалансованою. Зведення її до закритого типу потребує введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю $a_4 = 75 - 65 = 10$ (тисяч тон).

В оптимальному плані кількість бензину, що «відправляється» фіктивним заводом до бензосховищ, означатиме обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно блокувати клітинку фіктивного постачальника A_4 та споживача B_4, записавши в ній досить високу вартість M. Тоді в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов’язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника у стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т бензину дорівнюватиме 5 ум. од. замість нуля.

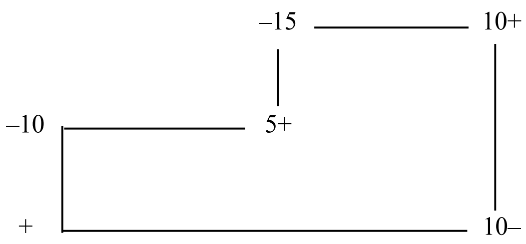
Оскільки неможливо транспортувати бензин від заводу A_1 до сховища B_1, необхідно також блокувати маршрут A_1B_1. Для цього в зазначеній клітинці замість $c_{11} = 4$ записуємо величину M.

З огляду на викладене таблиця для першого плану транспортної задачі має такий вигляд (початковий опорний план побудовано методом апроксимації Фогеля).

Отже, перший опорний план задачі неоптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім клітинкам A_4B_1 та A_3B_3 таблиці. Оскільки обидві вони мають однаковий коефіцієнт $c_{41} = c_{43} = 0$, то для заповнення можна вибрати будь-яку з них, наприклад A_4B_1.

A_j	B_j				u_i	Різниці для рядків
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$		
$A_1 = 30$	**M**	5 **–15**	3 **5**	7 **10**+	$u_1 = 0$	2 2 2
$A_2 = 20$	7	6	2 **20**	5 1	$u_2 = -1$	3 3 3
$A_3 = 15$	1 **–10**	3 **5**+	9	8	$u_3 = -2$	2 5
$A_4 = 10$	0 M – 4	5 M – 7	0 M – 4	**M** **10**–	$u_4 = M - 7$	
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$		
Різниці для стовпчиків	6	2 2 1	1 1 1	2 2 2		

Перехід до другого плану виконується за таким циклом:



При цьому заблокована клітинка A_4B_4 звільняється.

Подальше розв’язування задачі подано у вигляді таблиць.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	**M**	5 5	3 +5	7 –20	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	2 –20	5 1 +	$u_2 = –1$
$A_3 = 15$	1 0	3 15	9	8	$u_3 = –2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0	**M**	$u_4 = –3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	**M**	5 **5**	3 **25**	7 M	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	2 **0**	5 **20**	$u_2 = –1$
$A_3 = 15$	1 **0**	3 **15**	9	8	$u_3 = –2$
$A_4 = 10$	0 **10**	5	0	**M**	$u_4 = –3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 6$	

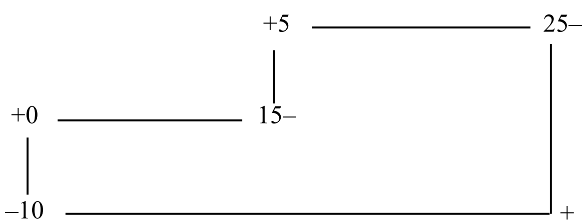
В останній таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі. Тому

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{\min} = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 245 \text{ ум. од.}$$

Через незбалансованість поставленої транспортної задачі спостерігатиметься недопостачання бензину до першого бензосховища в кількості 10000 т. Загальні витрати на транспортування в цьому разі будуть найменшими і становитимуть 245 ум. од.

Альтернативний оптимальний план дістанемо, заповнивши клітинку A_4B_3 (для неї $u_4 + v_3 = c_{43}$) згідно з таким циклом:



Тоді можна записати:

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{\min} = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 = 245 \text{ } \textit{ум. од.}$$

Мінімальні загальні витрати на транспортування в розмірі 245 ум. од. відповідають також ще одному оптимальному плану задачі, згідно з яким третє бензосховище отримає на 10000 т бензину менше, ніж потребує.

Існування двох альтернативних оптимальних планів розглянутої транспортної задачі розширює можливості стосовно остаточного прийняття рішення.

Задача 4. Виробниче об'єднання складається з трьох філіалів A_1, A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в кількості відповідно 1000, 1500 та 1200 од. на місяць. Вона відправляється на два склади D_1, D_2 місткістю відповідно 2500 та 1200 од., а потім − до п'яти споживачів B_1, B_2, …, B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартість перевезення одиниці продукції (в умовних одиницях) від виробника на склад, а потім зі складів до споживачів наведено в таблицях.

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першого філіалу до другого споживача, а також з третього філіалу до четвертого споживача. Вартість транспортування одиниці продукції за транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 ум. од., а за маршрутом A_3B_4 − 4 ум. од. Перевезення продукції зі складу на склад не припустиме.

<table>
<tr><td rowspan="2">A</td><td colspan="5">Вартість, ум. од., перевезення від виробника на склад</td></tr>
<tr><td colspan="3">D_1</td><td colspan="2">D_2</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>Завод</td><td colspan="5">Вартість, ум. од., перевезення із складів до споживачів</td></tr>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td>B_5</td></tr>
<tr><td>D_1</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>D_2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>

Сформулювати поставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двоетапну) та визначити її оптимальний план.

Розв'язування. У поставленій задачі кожний склад можна подати як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому вони відіграють роль і постачальника продукції, і її споживача.

Перевезення продукції безпосередньо від філіалів до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості M.

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двоетапної задачі наведено далі (табл. 1).

$Z_1 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + + 3 \cdot 700 + 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + + 1 \cdot 600 = 22\,900$ ум. од.

Зауважимо, що в клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає можливість неповного використання складських приміщень у зв’язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Поставлена транспортна задача є збалансованою.

Таблиця 1

A, D	D, B							u_i
	$D_1 = 2500$	$D_2 = 1200$	$B_1 = 900$	$B_2 = 700$	$B_3 = 1000$	$B_4 = 500$	$B_5 = 600$	
$A_1 = 1000$	– 2 1000	8	**M**	3 0+	**M**	**M**	**M**	$u_1 = 0$
$A_2 = 1500$	3 300	5 1200	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	$u_2 = 1$
$A_3 = 1200$	1 1200	4	**M**	**M**	**M**	4 *1*	**M**	$u_3 = –1$
$D_1 = 2500$	0 *2* +	**M**	1 ***900***	3 ***700–***	8 ***900***	5 *1*	4	$u_4 = 0$
$D_2 = 1200$	**M**	0 *1*	2	4	5 ***100***	3 ***500***	1 ***600***	$u_5 = –3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Перший опорний план транспортної задачі, побудований методом мінімальної вартості, не є оптимальним (табл. 2). Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку D_1D_1 згідно з побудованим циклом.

Таблиця 2

A, D	D, B							u_i
	$D_1 = 2500$	$D_2 = 1200$	$B_1 = 900$	$B_2 = 700$	$B_3 = 1000$	$B_4 = 500$	$B_5 = 600$	
$A_1 = 1000$	***2*** 300	8	**M**	3 700	**M**	**M**	**M**	$u_1 = 2$
$A_2 = 1500$	3 300	5 1200	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	$u_2 = 3$
$A_3 = 1200$	1 –1200	4	**M**	**M**	**M**	4 3	**M**	$u_3 = 1$
$D_1 = 2500$	0 +700	**M**	1 ***900***	3	8 ***900–***	5 ***1***	4	$u_4 = 0$
$D_2 = 1200$	**M**	0	2	4	5 ***+100***	3 ***500–***	1 600	$u_5 = –3$
v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Тому $Z_2 = 2{\cdot}300 + 3{\cdot}700 + 3{\cdot}300 + 5{\cdot}1200 + 1{\cdot}1200 + 1{\cdot}900 + 8{\cdot}900 + 5{\cdot}100 + 3{\cdot}500 +$

$$+\ 1{\cdot}600 = 21\ 500 \text{ ум. од.}$$

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має такий вигляд:

Таблиця 3

A, D	D, B							u_i
	$D_1 =$ = 2500	$D_2 =$ = 1200	$B_1 =$ 900	$B_2 =$ 700	$B_3 =$ = 1000	$B_4 =$ 500	$B_5 =$ 600	
$A_1 =$ 1000	***2*** 300	8	**M**	3 700	**M**	**M**	**M**	$u_1 =$ 0
$A_2 =$ 1500	3 300	5 1200	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	$u_2 =$ 2
$A_3 =$ 1200	1 700	4	**M**	**M**	**M**	4 500	**M**	$u_3 =$ 3
$D_1 =$ = 2500	0 1200	**M**	1 ***900***	3	8 ***400***	5	***4***	$u_4 =$ 0
$D_2 =$ = 1200	**M**	0	2	4	5 ***600***	3	***1*** 600	$u_5 =$ –3
v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	$v_5 = 8$	$v_6 = 3$	$v_7 = 4$	

В останній таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі:

$$Z_{\min} = 2{\cdot}300 + 3{\cdot}700 + 3{\cdot}300 + 5{\cdot}1200 + 1{\cdot}700 + 4{\cdot}500 + 1{\cdot}900 + 8{\cdot}400 + 5{\cdot}600 +$$
$$+1{\cdot}600 = 20\ 000 \textit{ ум. од.}$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезення продукції двоетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми (рис. 1).

На ній бачимо, що на перший склад надходить лише 300 + 300 + 700 = 1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не повністю (D_1D_1 = 1200 од.). Це виникає внаслідок прямих поставок продукції за маршрутом A_1B_2 у кількості 700 од. і A_3B_4 – у кількості 500 од.

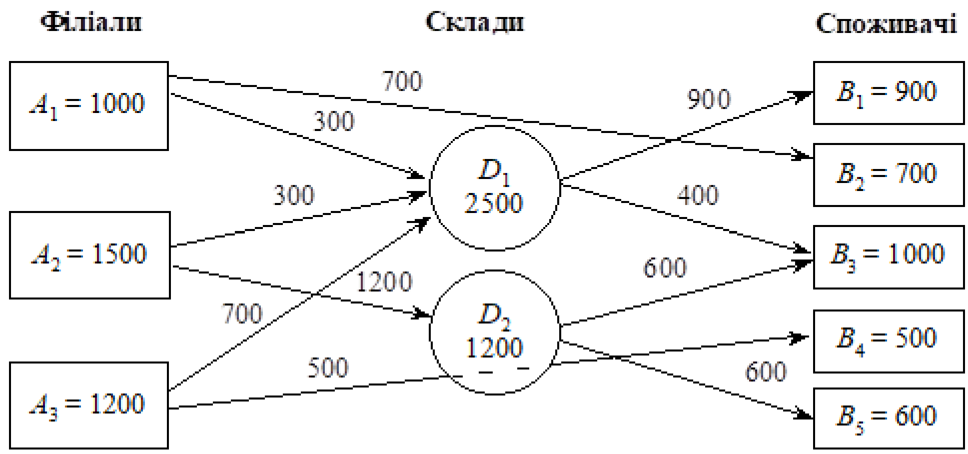


Рис. 1 Схема перевезень

Розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, який відрізняється від першого лише в частині, що стосується перевезення продукції зі складів до третього та п'ятого споживачів.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов и др. – М: Высшая школа, 1986 .
2. Кузнецов А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов. – Минск, "Вышэйшая школа", 1994 .
3. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
4. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И.Савельева. – М.: Экономика, 1987.
5. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1985. – 320 с.
7. Ржевський С.В. Дослідження операцій / С.В. Ржевський, В.М.Александрова. − К.: Академвидав, 2006. − 560 с.
8. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / Под ред. А. И. Карасева и Н. Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 1989.
9. Банди Б. Основы линейного программирования / Б.Банди [Пер. с англ.]. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
10. Козаченко Д.М. Основи дослідження операцій у транспортних системах: приклади та задачі [Текст]: навчальний посібник для ВНЗ / Д.М. Козаченко, Р.В. Вернигора, В.В. Малашкін; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. − Дніпропетровськ, 2015. − 277 с.

Поточні контрольні запитання

1. Яка умова визначає закриту модель транспортної задачі?
2. Сформулюйте критерій оптимальності плану перевезень в ТЗ.
3. Чи будь-яка задача транспортного типу розв'язна?
4. У якому випадку вводиться до розгляду фіктивний споживач?
5. У якому випадку вводиться до розгляду фіктивний виробник?
6. На скільки зміниться розмірність ТЗ у випадку, коли сумарний обсяг споживання менший за сумарний обсяг виробництва продукції?
7. На скільки зміниться розмірність ТЗ у випадку, коли сумарний обсяг споживання більший за сумарний обсяг виробництва продукції?
8. Які критерії оптимальності можуть розглядатися в задачі транспортного типу?
9. Які є методи визначення початкового плану перевезення продукції?
10. Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

1	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&8&2&3\\4&7&5&1\\5&3&4&4\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}30\\50\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 15 15 40 30	**2**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&4&5&1\\2&3&9&4\\3&4&22&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}60\\70\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 40 30 30 50	**9**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}3&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&7&4\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}50\\40\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 30 25 35 20
3	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}4&5&5&7\\8&7&5&4\\9&6&4&5\\3&2&9&3\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}100\\120\\150\\130\end{matrix}\end{array}$ b_i 140 130 90 140	**4**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&4&5&1\\2&3&9&4\\3&4&2&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}60\\70\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 40 30 30 50	**10**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&2&9&7\\3&40&15&5\\6&4&8&3\\24&3&3&1\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}60\\55\\40\\35\end{matrix}\end{array}$ b_i 70 5 45 70
5	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&4&3&2\\3&1&2&3\\5&4&1&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}60\\65\\70\end{matrix}\end{array}$ b_i 40 60 70 25	**6**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&4\\5&2&7&5\\6&4&8&2\\7&1&5&7\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}50\\20\\30\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 40 30 35 15	**11**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\7&7&3&8\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}20\\20\\40\\45\end{matrix}\end{array}$ b_i 25 30 40 15
7	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&2&6&4\\3&1&3&2\\5&7&5&1\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}40\\30\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 30 25 18 20	**8**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}10&5&7&4\\7&4&9&10\\6&14&8&7\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}40\\25\\35\end{matrix}\end{array}$ b_i 15 40 30 15	**12**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}18&2&9&7\\30&4&1&55\\6&4&8&3\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}68\\55\\40\end{matrix}\end{array}$ b_i 2 3 3 16
13	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}3&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&7&4\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}50\\40\\20\end{matrix}\end{array}$ b_i 30 25 35 20	**14**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&8&6&8&2&10\\8&1&2&3&5&6\\7&4&4&1&4&8\\2&8&5&1&3&6\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}130\\90\\100\\140\end{matrix}\end{array}$ b_i 110 50 30 80 100 90	**15**	$\begin{array}{rl} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}18&2&9&7\\30&4&1&55\\6&4&8&3\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}68\\55\\40\end{matrix}\end{array}$ b_i 2 3 3 16

16	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 130 \\ 90 \\ 40 \end{matrix}$ b_i 110 30 50 80 90	**21**	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 45 \\ 35 \\ 70 \end{matrix}$ b_i 20 60 55 45
17	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 20 \\ 40 \\ 40 \\ 45 \end{matrix}$ b_i 25 30 40 35	**22**	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 45 \end{matrix}$ b_i 25 40 40 15
18	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{matrix}$ b_i 70 5 45 70	**23**	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 30 \\ 5 \\ 45 \\ 70 \end{matrix}$ b_i 10 35 15 25 35
19	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 20 \\ 20 \\ 40 \\ 45 \end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**24**	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 60 \\ 40 \\ 100 \\ 50 \end{matrix}$ b_i 30 80 65 35 40
20	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 40 \\ 30 \\ 35 \end{matrix}$ b_i 20 34 16 10 15	**25**	a_i $C=\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} 20 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{matrix}$ b_i 16 18 12 15

26	$C=\begin{Vmatrix}2&4&1&3\\5&6&5&4\\3&7&9&5\\1&2&2&7\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\30\\20\\40\\50\end{matrix}$ b_i 35 20 55 30	**27**	$C=\begin{Vmatrix}2&8&6&8&2&10\\8&1&2&3&5&6\\7&4&4&1&4&8\\2&8&5&1&3&6\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\130\\90\\100\\140\end{matrix}$ b_i 110 50 30 80 100 90	**28**	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15
29	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\7&7&3&8\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\20\\20\\40\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**30**	$C=\begin{Vmatrix}2&5&3&4\\6&1&2&5\\3&4&3&8\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\45\\35\\70\end{matrix}$ b_i 20 60 55 45	**31**	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15
32	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**33**	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&2\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\70\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 65	**34**	$C=\begin{Vmatrix}4&5&6&8&10\\10&3&2&3&15\\4&10&5&1&16\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\130\\90\\40\end{matrix}$ b_i 110 30 50 80 90
35	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**36**	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**37**	$C=\begin{Vmatrix}2&5&3&4\\6&1&2&5\\3&4&3&8\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\45\\35\\70\end{matrix}$ b_i 20 60 55 45
38	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**39**	$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\10\\20\\35\\45\end{matrix}$ b_i 25 30 40 15	**40**	$C=\begin{Vmatrix}2&6&3&4&8\\1&5&6&9&7\\3&4&1&6&10\end{Vmatrix}\begin{matrix}a_i\\40\\30\\35\end{matrix}$ b_i 20 34 16 10 15

41	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}6&3&5&1\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}10\\60\\7\\45\end{matrix} \\ b_i\ \ 25\ 30\ 13\ 15 & \end{array}$	**42**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&2&2&3\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}10\\20\\15\\45\end{matrix} \\ b_i\ \ 45\ 10\ 20\ 15 & \end{array}$	**43**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&1\\8&6&2&6\\4&5&7&3\\5&2&2&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}10\\20\\35\\45\end{matrix} \\ b_i\ \ 25\ 30\ 40\ 15 & \end{array}$
44	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&1&7&3\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}50\\30\\35\\45\end{matrix} \\ b_i\ \ 35\ 30\ 40\ 55 & \end{array}$	**45**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&4\\8&6&2&2\\4&3&7&3\\5&7&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}10\\20\\65\\15\end{matrix} \\ b_i\ \ 25\ 30\ 40\ 35 & \end{array}$	**46**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}8&5&3&8\\8&6&9&6\\4&6&7&3\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}50\\20\\35\\25\end{matrix} \\ b_i\ \ 45\ 30\ 50\ 15 & \end{array}$
47	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\\5&2&4&5\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}10\\20\\35\\45\end{matrix} \\ b_i\ \ 25\ 30\ 40\ 15 & \end{array}$	**48**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}5&5&3&4\\6&8&2&5\\1&4&3&2\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}45\\35\\70\end{matrix} \\ b_i\ \ 20\ 60\ 55\ 45 & \end{array}$	**49**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}4&5&6&8&10\\10&3&2&3&15\\4&10&5&1&16\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}13\\90\\40\end{matrix} \\ b_i\ \ 11\ 30\ 50\ 80\ 90 & \end{array}$
50	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&5&3&4\\6&1&2&5\\3&4&3&3\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}45\\35\\70\end{matrix} \\ b_i\ \ 20\ 60\ 55\ 45 & \end{array}$	**51**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&5&3&4\\6&7&4&5\\3&4&3&7\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}25\\25\\70\end{matrix} \\ b_i\ \ 20\ 10\ 55\ 45 & \end{array}$	**52**	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C=\left\Vert\begin{matrix}2&5&3&4\\2&6&2&5\\3&4&3&4\end{matrix}\right\Vert & \begin{matrix}48\\85\\70\end{matrix} \\ b_i\ \ 54\ 60\ 95\ 45 & \end{array}$

Практичне заняття № 5. Задача про максимальний потік на транспортній мережі

Мета: засвоїти ідею методу Форда – Фалкерсона, набути навичок розв'язування задачі про максимальний потік на мережі

План

1. Математична модель задачі про максимальний потік
2. Теорема Форда – Фалкерсона
3. Алгоритм розв'язання задачі про максимальний потік. Приклад розв'язування задачі

Опорні поняття

Математична модель задачі про максимальний потік

Розглянемо мережу, що визначається графом G=(U, V), де U– множина вершин, у тому числі єдине джерело s, єдиний стік t, V – множина ребер, що з'єднують вузли графу. На множині $V = \{(u_i, u_j): \ u_i, u_j \in U\}$ визначена функція пропускної здатності r_{ij}. Нехай інтенсивність джерела $d_s = d$. За теоремою існування потоку на мережі інтенсивність стоку становитиме $d_t = -d$. Допустимий потік для розглядуваної мережі визначається співвідношеннями:

$$\begin{cases} \sum_{j:(s,j)\in V} x_{sj} = d, \\ \sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in V} x_{ki} = 0, i \neq s, i \neq t, \\ -\sum_{k:(k,t)\in V} x_{kt} = -d, \\ 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, (i,j) \in V. \end{cases}$$

Задача про максимальний потік полягає у знаходженні максимального значення інтенсивності d, при якому в розглядуваній мережі існує потік. Потік $x^* = \{x_{ij}^*, (i,j) \in V\}$, що відповідає максимальному значенню $d*$ інтенсивності, називається максимальним потоком, а $d*$ – величиною цього потоку.

Дослідження максимального матеріального або фінансового потоку можна за допомогою методу Форда – Фалкерсона. Основні переваги цього методу у порівнянні з іншими методами математичного програмування – розділу науки, до якого належить сформульована задача, – зазначимо у наступному пункті.

Обґрунтування методу розв'язання задачі

Задача про максимальний потік у мережі вивчається вже більше 60 років. Інтерес підігрівається практичною значимістю цієї проблеми. Вона виникає в транспортних, комунікаційних, електричних мережах, при моделюванні різних процесів фізики і хімії, в деяких операціях над матрицями, для вирішення задач теорії графів. У початковий період задача розв'язувалась симплекс-методом лінійного програмування, що було вкрай неефективно. Лестер Форд і Делберт Рей Фалкерсон запропонували розглядати для розв'язання задачі про максимальний потік орієнтовану мережу і шукати розв'язок за допомогою ітераційного алгоритму. У 1970 р. Юхим Дініц почав розв'язувати задачу з використанням допоміжних безконтурних мереж і псевдомаксимальних потоків, що набагато збільшило швидкодію розроблюваних алгоритмів. В 1974 р. Олександр Карзанов поліпшив метод Дініца, ввівши таке поняття як передпотік. Алгоритми Дініца і Карзанова, як і дослідження Форда і Фалкерсона, стали величезним внеском у вирішення даної проблеми. 1986 року в науковій літературі з'явився третій метод, який також без роздумів можна віднести до фундаментальних. Його розроблено Ендрю Голдбергом і Робертом Тарджаном під назвою Push-Relabel-метод. Для знаходження максимального потоку тут використовуються передпотоки і мітки, що змінюються під час роботи алгоритму. Ефективність Push-Relabel досліджується і зараз. 1997 року Голдберг і К.-Р. Рао запропонували алгоритм, що привласнює дугам непоодиноку довжину. Він – найсучасніший з усіх відомих. Асимптотична оцінка його швидкодії перевершила O(nm), про такий показник багато років можна було тільки мріяти. Алгоритм Голдберга і Рао ретельно вивчався і поліпшувався. В силу того, що мережі руху матеріального і фінансового потоків, що розглядаються далі, містять не так багато вузлів, задачі про максимальний потік в мережі доцільно розв'язувати методом позначок Форда – Фалкерсона. Крім того, результати розрахунків максимальних потоків за допомогою вказаного метода відображаються на мережі, що є зручним інструментом для подальшого дослідження і узагальнення задач, що розглядаються.

Опис методу позначок Форда – Фалкерсона

Отже, математична постановка задачі має наступний вигляд:

$$d \to max, \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{j:(s,j)\in V} x_{ij} = d, \\ \sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in V} x_{ki} = 0, i \neq s, i \neq t, \\ -\sum_{k:(k,t)\in V} x_{kt} = -d, \\ 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, (i,j) \in V. \end{cases} \tag{2}$$

Розрізом мережі, що відокремлює s від t, називається множина дуг $V(C) = \{(i,j) \in V : i \in C, j \notin C\}$, де C – деяка множина вершин $C \subset U$мережі, така, що $s \in C, t \notin C$.

Нагадаємо, що пропускна здатність цього розрізу визначається звичайним чином:

$$r(C) = \sum_{(i,j)\in V(C)} r_{ij}.$$

Зрозуміло, що для кожної конкретної мережі вибір множини *C* повністю визначає пропускну здатність розрізу. *Розріз, що має найменшу пропускну здатність, називається мінімальним. Пошук його є задачею про мінімальний розріз.*

Виявляється, що сформульовані задачі про максимальний потік і мінімальний розріз в (s,t)-мережі є двоїстими і, як слід чекати, їх розв'язки тісно пов'язані між собою. Обґрунтування цього факту дає наступна **теорема** (**Форда – Фалкерсона**): *величина максимального потоку із s в t дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу, що відокремлює s від t .*

Зауважимо, що теорема тривіальна, якщо мережа складається з вершин та дуг, що утворюють єдиний шлях від s до *t* (див. рис. 1).

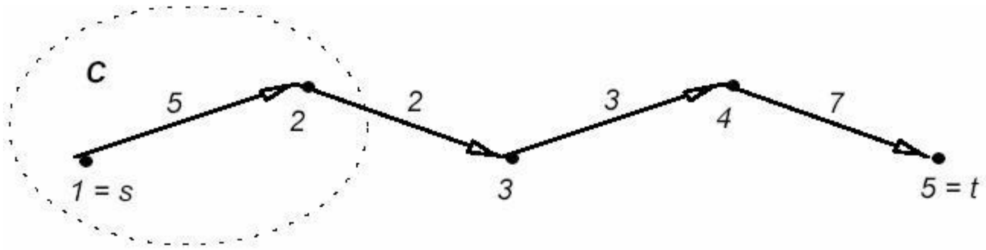


Рис. 1. Шлях, що з’єднує джерело і стік

Наслідок. Якщо дуга (*i, j*) входить до мінімального розрізу, то величина максимального потоку по цій дузі дорівнює її пропускній здатності r_{ij}. При цьому кажуть, що потік насичує дугу.

Для розв'язування задачі про максимальний потік був розроблений і програмно реалізований алгоритм методу *Форда – Фалкерсона*.

Згідно з теоремою про максимальний потік та мінімальний розріз за відомим максимальним потоком $x^* = \left\{x^*_{ij}, (i,j) \in U\right\}$ легко побудувати мінімальний розріз *U(C*)*. Крім того, якщо потік не є максимальним, то можливе його збільшення шляхом зміни вздовж певного ланцюга. Ці факти лежать в основі *методу Форда – Фалкерсона,* що являє собою рекурентну процедуру, на кожному кроці якої позначаються вершини або будується потік більшої величини.

Алгоритм Форда – Фалкерсона розпочинає роботу з будь-якого допустимого потоку x^0 (зокрема нульового) величини d^0. Згідно з (2) для цього потоку визначається множина C^0. Якщо $t \notin C^0$, то потік x^0є максимальним, в іншому випадку можна знайти $\theta^0 > 0$та новий потік $x^1 = \{x^1_{ij}, (i,j) \in U\}$ величини $d^1 = d^0 + \theta^0$.

Для нового потоку цей цикл операцій повторюється і т. д.

Процеси визначення C^kта θ^kоб'єднуються в один – "розставлення позначок" вершин. Позначка $\mu(i)$ довільної вершини *i* складається з двох чисел N_i та θ_i. Вони означають, що вздовж деякого ланцюга, останнім ребром якого є $[|N_i|, i]$, можна додатково доставити θ_i одиниць потоку з вершини *s* до вершини i .

Дамо детальний виклад алгоритму, вважаючи, що відомий допустимий потік *x* (зокрема нульовий).

Алгоритм Форда – Фалкерсона:

Крок 1 (процес розставлення позначок). Тут кожна з вершин належить до одного з трьох типів:

- непозначена,
- позначена і непроглянута,
- позначена і проглянута.

Спочатку всі вершини непозначені.

Позначимо вершину s парою $\mu(s) = (+s, \theta_s = \infty)$, яка умовно вказує на те, що з вершини s у саму себе можна послати потік необмеженої величини.

Тепер вершина s позначена і непроглянута.

Взагалі, нехай j − позначена і непроглянута вершина, $\mu(j) = (+i, \theta_j)$ або $\mu(j) = (-i, \theta_j)$ − її позначка. Розглядаємо ще непозначені вершини k: $(j, k) \in U$ і $x_{jk} < r_{jk}$. Кожній з них приписуємо позначку $\mu(k) = (+j, \theta_k)$, де $\theta_k = min\{\theta_j, r_{jk} - x_{jk}\}$. Розглядаємо ще непозначені вершини k: $(k, j) \in U$ і $x_{kk} > 0$. Кожна з них одержує позначку $\mu(k) = (-j, \theta_k)$, де $\theta_k = min\{\theta_j, x_{kj}\}$.

Всі вершини *k,* які отримали позначки, тепер позначені і непроглянуті, а вершина j − позначена і проглянута.

Продовжуємо приписувати позначки непозначеним вершинам до тих пір, поки або вершина *t* виявиться позначеною, або не можна буде позначити жодної вершини і *t* виявиться непозначеною.

У другому випадку існуючий потік x − максимальний, а множина позначених вершин *C** визначає мінімальний розріз мережі.

У першому випадку існуючий потік *x* на кроці 2 можна збільшити.

Крок 2 (збільшення потоку). Нехай $\mu(t) = (+k, \theta_t)$ або $\mu(t) = (-k, \theta_t)$ − позначка вершини t . Це означає, що існуючий потік з s в *t* можна збільшити на величину θ_t. Для цього в першому випадку замінюємо x_{kt}на $x_{kt} + \theta_t$, у другому – x_{tk}замінюємо *на* $x_{tk} - \theta_t$.

Переходимо до вершини k і виконуємо аналогічні операції, змінюючи величину потоку на ту ж величину θ_t. Продовжуємо ці дії, поки не досягнемо вершини s. Після цього ліквідовуємо позначки всіх вершин і переходимо до кроку 1.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. В трех томах. Том 1. Пер. с англ./ Г. Вагнер. – М.: Мир, 1973 – 336 с.
3. Аронович А.Б. Сборник задач по исследованию операций. / А.Б. Аронович, М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М. Изд-во МГУ. – 1997. – 256 с.
4. Алгоритмы: построение и анализ. 2 издание: Пер. с англ./ Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Д. Риверс, Клиффорд Штайн. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
5. Басакер Р. Конечные графы и сети. Пер. с англ. / Р. Басакер, Т. Саати. – М.: Наука, 1974 – 368 с.
6. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы./ М.Н. Кирсанов. – М.: Издательство ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

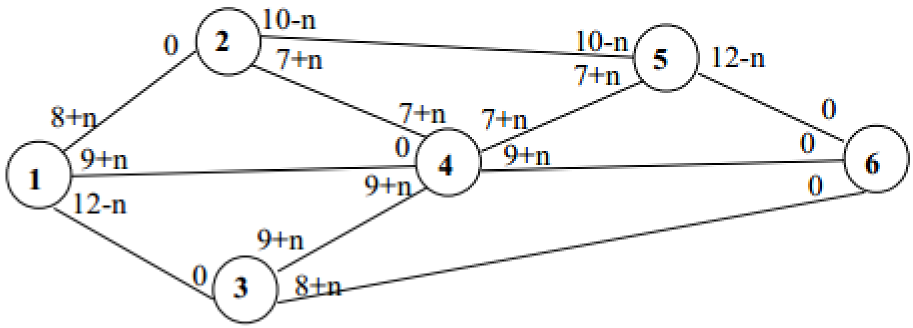
варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
задача	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	3
n	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	7	7

варіант	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
задача	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	4
n	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7

варіант	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
задача	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	3	1
n	8	8	8	8	9	9	9	9	1	3	5	7	3	4

варіант	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
задача	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	4
n	6	7	2	1	0	0	0	0	1	4	3	6	7	2

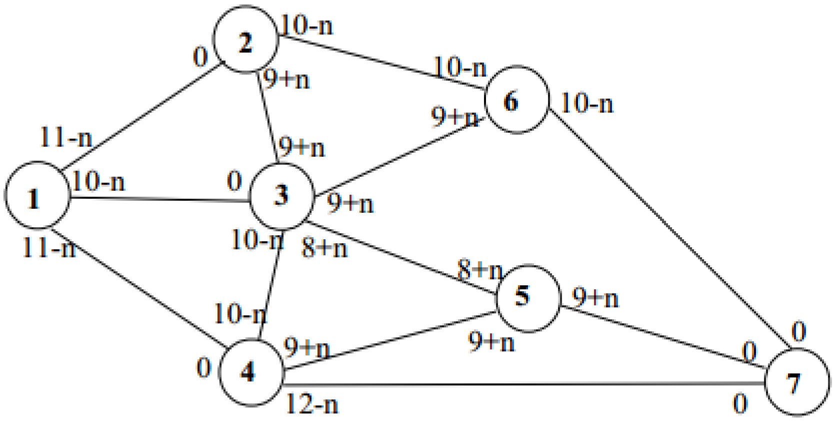
Задача 1. Система автодоріг, що проходять через Одеську область, може забезпечити пропускні здатності, які наводяться на рисунку (тисячі автівок на годину).



1) Який максимальний потік через цю систему (тис. автівок на годину)?

2) Скільки автівок на годину має проїхати по дорозі 5 – 6, щоб забезпечити максимальний потік?

Задача 2. Телефонна компанія використовує підземну кабельну мережу лінії зв'язку для забезпечення якісного аудіозв'язку між великими містами (вузли 1 і 7 мережі). Переговори здійснюються через серію кабельних ліній, які з'єднують вузли мережі, як це показано на рисунку. На ньому можна побачити число телефонних переговорів (тис.), яке допускається одночасно в будь-який момент часу.



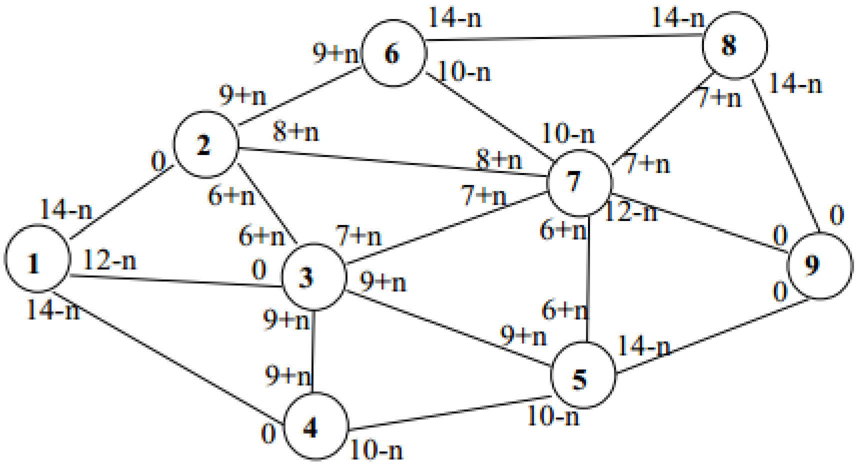
1) Яка максимальна кількість телефонних переговорів між двома містами може бути допущена одночасно (тис. шт.)?

2) Яке число телефонних переговорів має забезпечуватися кабелем 4 – 7?

Задача 3. Хімічний завод має мережу труб, призначених для переміщення рідких хімічних продуктів з одних підрозділів підприємства в інші. Мережа труб і пропускні здатності (т / хв) показані на рисунку.

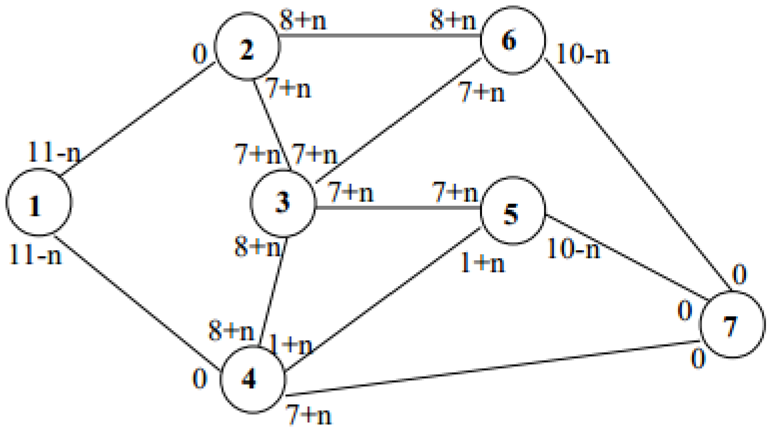
1) Який максимальний потік буде для системи, якщо завод збирається перегнати з вузла 1 до вузла 9 стільки рідких хімікатів, скільки це можливо?

2) Скільки хімікатів буде надходити через секцію 3 – 5?



Задача 4. Чому дорівнює максимальний потік автівок (їх кількість за годину) для системи автодоріг, поданої на рисунку?

Який максимальний потік може забезпечить дорога 3 – 4?



Поточні контрольні запитання

1. Сформулюйте економічну постановку задачі про максимальний потік.
2. Як математично записується задача про максимальний потік?
3. Як перейти до задачі про максимальний потік в (s,t)-мережі у випадку, коли джерел або стоків більше за один?
4. Сформулюйте теорему Форда – Фалкерсона.
5. Що таке розріз мережі?
6. Який розріз називається мінімальним?
7. Яка структура позначки вузла мережі в алгоритмі Форда – Фалкерсона?
8. В яких випадках вузол не може бути позначений?
9. Наведіть приклади практичних задач про максимальний потік?
10. Як застосувати алгоритм Форда – Фалкерсона для розв'язання задачі про потік мінімальної вартості?

Практичне заняття № 6. Задача комівояжера

Мета: ознайомитися з математичною постановкою задачі про комівояжера (ЗК); навчитися розв'язувати задачу комівояжера за допомогою методу гілок та меж

План

1. Економічна постановка ЗК
2. Математична модель задачі комівояжера
3. Ідея методу гілок та меж
4. Алгоритм методу гілок та меж для розв'язання ЗК

Опорні поняття

Задача комівояжера (ЗК) є відомою у такому формулюванні.

Є кількість міст і відстані між ними. Комівояжер (роз'їзний торговець) повинен виїхати з першого, відвідати по одному разу в певному порядку всі інші і повернутися в початковий пункт. Необхідно знайти такий порядок відвідування міст, щоб довжина замкнутого маршруту комівояжера була мінімальною.

Математична постановка задачі

Наведемо дві математичні постановки задачі комівояжера. Першу − в термінах перестановок, другу − як завдання цілочисельного лінійного програмування.

I. Задано квадратну матрицю вартостей $[d_{ij}]_n$, де d_{ij} – цілі, невід'ємні, довільні числа, $d_{ii} = \infty$. Потрібно знайти циклічну перестановку τ^* її стовпчиків, яка мінімізує функціонал

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{i\tau[i]}.$$

Тут $\tau = (\tau[1], \tau[2], \dots, \tau[n])$ – циклічна перестановка, якій відповідає маршрут комівояжера, представлений послідовністю $(\tau[1], \tau[2], \dots, \tau[n], \tau[1])$, де всі номери $\tau[1], \tau[2], \dots, \tau[n]$ із множини пунктів або міст $\{1,2, \dots, n\}$ є різними. Величину $D(\tau)$ назвемо вартістю маршруту.

II. Задано квадратну матрицю відстаней між пунктами $A_1, \dots, A_n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введемо змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо здійснюється перехід } з\ A_i\ в\ A_j, \\ 0 \text{ в противному випадку}, \quad i \neq j, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Тоді задача формулюється в такий спосіб: потрібно знайти матрицю $X^* = \{x_{ij}^*\}_{i,j=\overline{1,n}}$, яка забезпечує мінімальне значення цільової функції

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

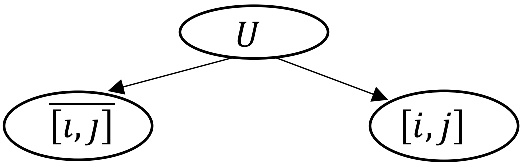
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq 1 \ \ \forall i, j = \overline{2, n}, u_2, \dots, u_n - \text{довільні змінні}, \tag{4}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1 \ \ i, j = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Зауважимо, що змінні u_i, $i = \overline{2, n}$, є лише в обмеженнях (4), які призначені забезпечити зв'язність маршруту комівояжера, а точніше, вони виключають з розгляду довільний цикл, що не проходить через пункт 1.

Представимо **метод Літтла.** Він є різновидом методу гілок та меж. Ідея його полягає в наступному. Нехай U – множина всіх допустимих маршрутів комівояжера. За деяким правилом оцінюємо знизу довжини всіх її елементів. Далі множину U розбиваємо на дві підмножини, базуючись на тому, що переїзд з міста i до міста j може бути включений в оптимальний маршрут або виключений з нього. Отже, першу підмножину складають всі маршрути, які містять безпосередній переїзд з міста i до міста j, а другу – маршрути, які не містять безпосередній переїзд з міста i до міста j. Позначимо отримані підмножини $[i, j]$ і $\overline{[i, j]}$ відповідно:



Для кожної з підмножин за тим самим правилом, що й для U, визначаємо нижню границю довжин всіх її маршрутів. Зрозуміло, що кожна нова границя не менша за оцінку, вираховану для всієї множини U. Порівнюючи отримані величини, можна виявити ту підмножину, яка з найбільшою ймовірністю містить оптимальний маршрут. Вона аналогічно розбивається на дві, і знову уточнюються нижні границі довжин всіх маршрутів і так до тих пір, поки не залишиться один єдиний цикл.

Після того, як буде отриманий деякий замкнений маршрут комівояжера, слід проаналізувати дерево розв'язання. Якщо серед обірваних його гілок виявляться такі, що мають нижню оцінку довжин всіх своїх елементів, меншу за довжину побудованого маршруту, то ці гілки за таким самим правилом розгалужуємо доти, поки або не буде знайдений маршрут меншої довжини, або не переконаємося у відсутності кращого серед цих підмножин. Гілки, для яких виявиться, що нижня границя перевищує або дорівнює довжині знайденого маршрута, виключаються з подальшого розгляду.

Основною «родзинкою» методу є спосіб обчислення нижньої границі для відповідних підмножин і вибір дуги (i, j), яка задає розбиття множини, що розглядається, на дві підмножини.

В методі Літтла обчислення оцінок базується на тому, що зміна довжини всіх шляхів, які приводять в дане місто, або всіх шляхів, котрі виходять з даного міста на одну й ту саму величину, приводять до нової задачі, оптимальний маршрут якої збігається з оптимальним маршрутом початкової задачі.

Поняття **зведеної матриці**.

Нехай є матриця відстаней:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Позначимо a_i – мінімальний елемент i -ого рядка матриці C, тобто $a_i = \min_j c_{ij}$. З кожного елемента i -ого рядка віднімемо мінімальний елемент a_i. Отримуємо нову матрицю:

$$C^1 = \begin{pmatrix} {c_{11}}^1 & {c_{12}}^1 & \dots & {c_{1n}}^1 \\ {c_{21}}^1 & {c_{22}}^1 & \dots & {c_{2n}}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {c_{n1}}^1 & {c_{n2}}^1 & \dots & {c_{nn}}^1 \end{pmatrix}.$$

Її елементи обчислено за формулою ${c_{ij}}^1 = c_{ij} - a_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. В кожному рядку цієї матриці буде міститися принаймні один нульовий елемент. Одержана матриця визначає нову задачу комівояжера, оптимальний розв'язок якої збігається з оптимальним розв'язком початкової задачі. Тепер позначимо b_j – мінімальний елемент j -ого стовпчика матриці C^1: $b_j = \min_i {c_{ij}}^1$. Побудуємо матрицю C^2, елементи якої визначаються за формулою: ${c_{ij}}^2 = {c_{ij}}^1 - b_j,\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$.

Кожний стовпчик цієї матриці містить принаймні один нульовий елемент. Оскільки кожен рядок матриці C^1 має хоча б один нульовий елемент, то матриця C^2 містить принаймні один нульовий елемент в кожному рядку і кожному стовпчику. Матриця C^2 визначає нову задачу комівояжера, оптимальний розв'язок якої збігається з оптимальним розв'язком початкової задачі.

Величини $a_i,\ i = 1, \dots, n$ та $b_j,\ j = 1, \dots, n$ називаються **константами зведення**, а матриця C^2 – **зведеною**.

Нехай є деякий допустимий розв'язок початкової задачі (допустимий маршрут комівояжера) та визначена відповідна йому довжина шляху: $l_s = \sum_{i,j} c_{ij}$. Цьому розв'язку відповідає допустимий розв'язок задачі із зведеною матрицею C^2. Довжина його шляху буде визначатися за формулою: ${l_s}^2 = \sum_{i,j} {c_{ij}}^2$.

Вказані довжини пов'язані рівністю: ${l_s}^1 = {l_s}^2 + h$, де $h = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j$, де $h -$ нижня грань функції цілі на множині U. Тому $m(U) = h$.

Далі наведемо деякі міркування про вибір дуги (i, j) як основи розгалуження.

Апріорне виключення переходу (i, j) з маршруту виражається в заміні відповідного елемента c_{ij} у вихідній (або зведеній) матриці відстаней на нескінченність, тобто $c_{ij} = \infty$. А отже, за рахунок такої заміни з'являється можливість провести додаткове зведення матриці та уточнити нижню оцінку довжин всіх маршрутів, що включені до відповідної підмножини.

Апріорне включення переходу (i, j) до маршруту комівояжера автоматично означає:

1) скорочення розмірності матриці (викреслюється i-й рядок та j-й стовпчик);

2) виключення одного з переходів (*q,p*) з метою уникнення появи замкненого маршруту, який не проходить через всі пункти (див. рис. 1);

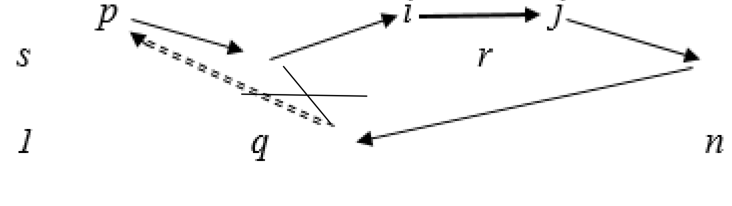


Рис. 1. Виключення переходу (*q,p*)

3) можливість покращення нижньої оцінки довжин всіх маршрутів, що увійдуть для створеної підмножини.

Отже, найбільш імовірно, що до оптимального маршруту будуть включені ті переходи (i,j), для яких в зведеній матриці $c_{ij} = 0$. Заборона включення саме цих дуг суттєво збільшує нижню оцінку довжин всіх таких маршрутів, оскільки виключення дуги (i,j) означає заміну $c_{ij} = \infty$, і отриману матрицю можна додатково звести, враховуючи константи зведення в i-му рядку та j-му стовпчику. Найбільш вагоме зростання нижньої оцінки викликає той елемент зведеної матриці відстаней, для якого:

а) $c_{ij} = \infty$,

б) величина $\theta_{ij} = \underset{m\neq i}{min} c_{mj} + \underset{k\neq j}{min} c_{ik}$ є максимальною.

Обчислювальна **схема методу Літтла**:

1. Здійснюється зведення матриці відстаней С, яка відповідає допустимій множині U. В результаті отримуємо C^0. Далі індекс 0 будемо опускати, і під C будемо розуміти поточну зведену матрицю.

Нехай $m *= \infty, k = 0, [i_0, j_0] = \mathrm{U}$.

2. Обчислюється сума констант зведення $h = \sum_i a_i + \sum_j b_j$.

$m([i_0, j_0]) = h = \sum_i a_i + \sum_j b_j$.

3. $k = k + 1$.

4. Обираються претенденти для включення в маршрути множини $[i_k, j_k]$ – пари (i,j), для яких $c_{ij} = 0$ (тут в зведеній матриці верхній індекс, що дорівнює 2, опущений).

Для них розраховуються величини $\theta_{ij} = \underset{m\neq i}{min} c_{mj} + \underset{k\neq j}{min} c_{ik}$.

5. Визначається $\theta_{i_k j_k} = \underset{ij}{max} \theta_{ij}$ для всіх c_{ij}, що дорівнюють нулю. Пара (i_k, j_k) буде ініціювати розгалуження. Пара (i_k, j_k) включається в усі маршрути множини $[i_k, j_k]$ і забороняється в $\overline{[i_k, j_k]}$.

6. В матриці C (що розглядається на даний момент) елемент $c_{j_k i_k}$ замінюється на ∞. Над отриманою матрицею здійснюється операція додаткового зведення (у разі необхідності). В результаті цього отримуємо матрицю $\bar{C}$, що відповідає множині $\overline{[i_k, j_k]}$. Сума констант зведення дорівнює $\theta_{i_k j_k}$, і оцінка довжин маршрутів з $\overline{[i_k, j_k]}$ має вигляд: $m\left(\overline{[i_k, j_k]}\right) = m([i_{k-1}, j_{k-1}]) + \theta_{i_k j_k}$.

Якщо вона не менша за межу $m *$, то цю множину вважаємо прозондованою.

7. В матриці C викреслюється i_k-й рядок, j_k-й стовпчик, задаєтьсят або $c_{j_k i_k} = \infty$, або деяке $c_{qp} = \infty$, якщо перехід (q,p) приводить до виникнення підциклу. Отримана матриця зводиться, обчислюється сума констант зведення ${d_1}^k$. Розраховується оцінка множини $m([i_k, j_k])$. Коли вона не менше верхньої межі $m *$, то множина вважається прозондованою і виконується п. 8, якщо ні, то запам'ятовується пара (i_k, j_k).

8. Якщо порядок матриці C дорівнює 2, то множина $[i_{k+1}, j_{k+1}]$ складається з єдиного маршруту. Додаємо до поточного маршруту два переходи, що залишилися в цій матриці, і замикаємо його. Величина $m([i_{k+1}, j_{k+1}])$ визначає довжину шляху комівояжера. А отриманий цикл запам'ятовується як претендент на оптимальний. Верхня межа $m*$ стає такою, що дорівнює довжині цього маршруту. Оцінки всіх підмножин, які не було прозондовано, порівнюються з новою верхньою межею $m*$. Ті з них, що більші за неї або дорівнюють ній, виключаються з розгляду (зондуються).

9. Якщо висячих вершин немає, то процес зупиняється. Розв'язком задачі є маршрут, котрий було занотовано як претендент на оптимальний (довжина його дорівнює $m*$).

Інакше кажучи, визначається мінімальна з оцінок всіх множин, які не підлягали розгалуженню, тобто переглядаються всі висячі вершини дерева та знаходиться та, яка має мінімальну оцінку. Вона підлягає розгалуження.

Здійснюється перехід до п. 3.

Приклад розв'язання ЗК.

Приклад 1. Розв'яжемо задачу комівояжера з наступною матрицею відстаней C

$$\begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & \infty & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & \infty & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & \infty & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & \infty \end{matrix}$$

методом гілок та меж.

Розв'язання. Знайдемо нижню оцінку довжини всіх гамільтонових контурів

$$h = \sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{j=1}^{5} b_j \text{ ,}$$

де $a_i = \min_{j=\overline{1,5}} c_{ij}$; $b_j = \min_{i=\overline{1,5}} (c_{ij} - a_i)\ \forall i, j$:

	1	2	3	4	5	a_i
1	∞	1	2	5	2	1
2	1	∞	5	6	4	1
3	6	3	∞	4	2	2
4	5	1	1	∞	5	1
5	4	3	4	2	∞	2

h =1+1+2+1+2=7.

	1	2	3	4	5
1	∞	0^1	1	4	1
2	0^5	∞	4	5	3
3	4	1	∞	2	0^2
4	4	0°	0^1	∞	4
5	2	1	2	0^3	∞
b_j	0	0	0	0	0

Далі послідовно будеми включати в маршрут вигідні дуги і при цьому будуватимемо дерево розв'язків:

	2	3	4	5
1	∞	13	1	3
3	1	∞	2	0
4	0	0	∞	4
5	1	2	0	∞

	2	3	4	5
1	∞	0^0	3	0°
3	1	∞	2	0^1
4	0^1	0°	∞	4
5	1	2	0	∞

	3	4	5
1	0^2	∞	0^0
3	∞	2	0^2
5	2	0^4	∞

	3	5
1	0	∞
3	∞	0

Воно наведене на рис. 2.

Оскільки всі гілки дерева розв'язків мають нижню оцінку довжин усіх гамільтонових контурів, що включені у відповідні множини допустимих розв'язків, вищу за довжину побудованого маршруту, то робимо висновок, що цей маршрут комівояжера є мінімальним, тобто його довжина L найменша за всі можливі і дорівнює 8. Оптимальний маршрут показаний на рис. 3.

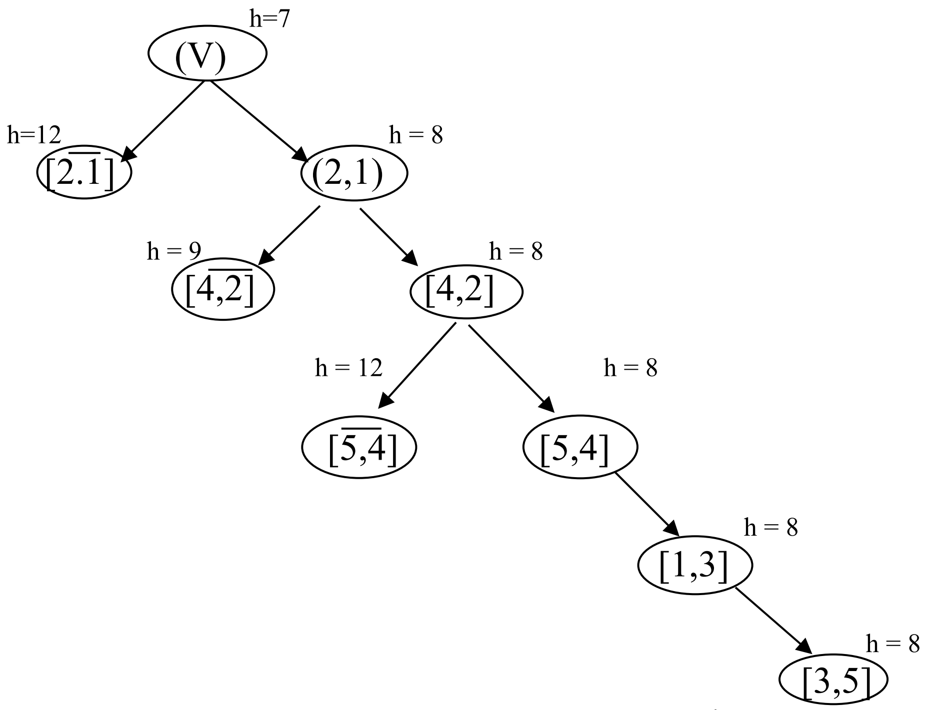


Рис. 2. Дерево розв'язків

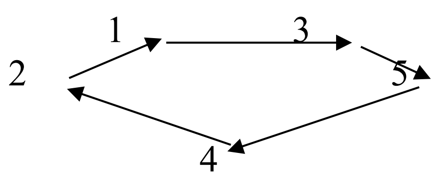


Рис. 3 Оптимальний маршрут комівояжера

Приклад 2. Наведемо процес розв'язання за допомогою Microsoft Excel задачі комівояжера з наступною матрицею відстаней:

∞	4	39	22	10	47
58	∞	56	18	4	35
34	29	∞	17	57	18
52	4	22	∞	15	37
41	44	25	11	∞	32
11	6	19	2	58	∞

Розв'язання:
Приведення матриці до такого вигляду, щоб в кожному її рядку і кожному стовпці був принаймні один нуль.

Спочатку по рядках.

	1	2	3	4	5	6	di
1	1,00E+09	4	39	22	10	47	4
2	58	1,00E+09	56	18	4	35	4
3	34	29	1,00E+09	17	57	18	17
4	52	4	22	1,00E+09	15	37	4
5	41	44	25	11	1,00E+09	32	11
6	11	6	19	2	58	1,00E+09	2
							42

Далі по стовпчиках.

	1	2	3	4	5	6	
1	1,00E+09	0	35	18	6	43	
2	54	1,00E+09	52	14	0	31	
3	17	12	1,00E+09	0	40	1	
4	48	0	18	1,00E+09	11	33	
5	30	33	14	0	1,00E+09	21	
6	9	4	17	0	56	1,00E+09	
dj	9	0	14	0	0	1	24

Отже**,** h=42+24=66.

Матриця відстаней після приведення:

	1	2	3	4	5	6
1	1,00E+09	0	21	18	6	42
2	45	1,00E+09	38	14	0	30
3	8	12	1,00E+09	0	40	0
4	39	0	4	1,00E+09	11	32
5	21	33	0	0	1,00E+09	20
6	0	4	3	0	56	1,00E+09

h=42+24=66

Розрахунок оцінок нулів матриці:

	1	2	3	4	5	6	di
1	1,00E+09	0**(6)**	21	18	6	42	6
2	45	1,00E+09	38	14	0**(20)**	30	14
3	8	12	1,00E+09	0**(0)**	40	0**(20)**	0
4	39	0**(4)**	4	1,00E+09	11	32	4
5	21	33	0**(3)**	0**(0)**	1,00E+09	20	0
6	0**(8)**	4	3	0**(0)**	56	1,00E+09	0
dj	8	0	3	0	6	20	

	1	2	3	4	5	6	di
1	1,00E+09	0(6)	21	18	6	42	6
2	45	1,00E+09	38	14	**0(20)**	30	14
3	8	12	1,00E+09	0	40	0(20)	0
4	39	0(4)	4	1,00E+09	11	32	4
5	21	33	0(3)	0	1,00E+09	20	0
6	0(8)	4	3	0	56	1,00E+09	0
dj	8	0	3	0	6	20	0

Побудова маршруту:

2;5	1	2	3	4	6	di
1	1,00E+09	0(6)	21	18	42	6
3	8	12	1,00E+09	0	**0(20)**	0
4	39	0(4)	4	1,00E+09	32	4
5	21	1,00E+09	0(3)	0	20	0
6	0(8)	4	3	0	1,00E+09	0
dj	8	0	3	0	20	**20**

3;6	1	2	3	4	di
1	1,00E+09	0(18)	21	18	18
4	39	0(4)	4	1,00E+09	4
5	21	1,00E+09	0(4)	0	0
6	**0(21)**	4	1,00E+09	0	0
dj	21	0	4	0	20

6;1	2	3	4	di
1	**0(18)**	1,00E+09	18	18
4	0(4)	4	1,00E+09	4
5	1,00E+09	0(4)	0(18)	0
dj	0	4	18	21

1;2	3	4	di
4	0	1,00E+09	4
5	1,00E+09	0	
dj			18

Оптимальний маршрут: (4 – 3 – 6 – 1 – 2 – 5 – 4).
Довжина маршруту: 4 + 66 = **70**.

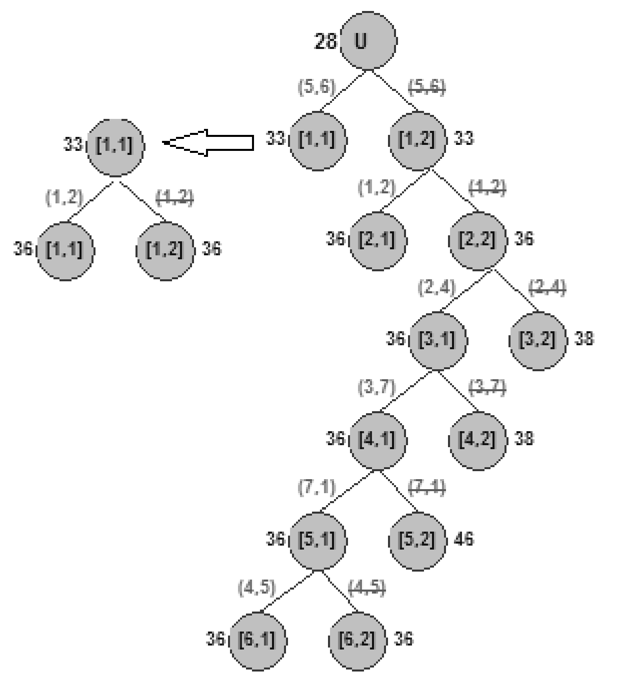
Вправи.
Спробуйте відтворити процес побудови маршруту комівояжера за побудованим деревом розв'язків для наступних задач. Зауважимо, що в наведених деревах дуги, що лежать в основі розбиття множини гамільтонових контурів, вказані над вершинами дерева. Самі вершини мають позначку з двома складовими: перша – рівень ієрархії, друга – номер гілки.

Задача 1

Матриця відстаней:

∞	7	12	11	4	11	9
4	∞	4	6	10	7	4
11	5	∞	5	7	4	4
9	6	7	∞	3	7	9
8	12	3	4	∞	6	11
9	10	12	10	4	∞	9
8	8	5	9	4	7	∞

Дерево розв'язків:

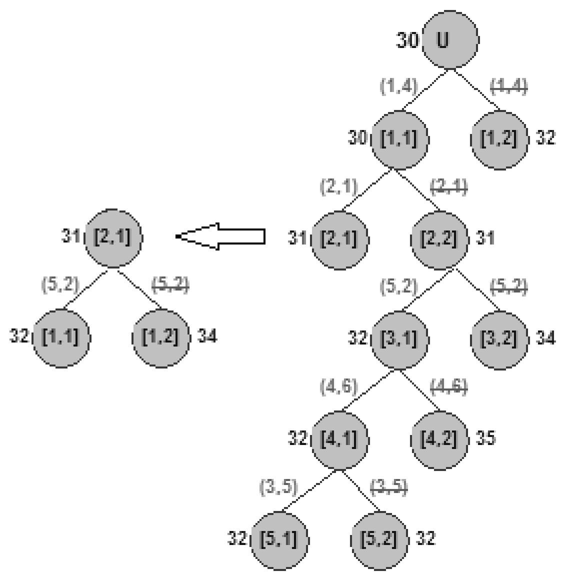


Задача 2

Матриця відстаней:

∞	8	9	10	11	12
7	∞	6	7	8	12
6	4	∞	8	0	5
3	8	7	∞	7	4
8	12	5	4	∞	4
8	9	4	3	9	∞

Дерево розв'язків:



Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. В трех томах. Том 1. Пер. с англ./ Г. Вагнер. – М.: Мир, 1973 – 336 с.
3. Аронович А.Б. Сборник задач по исследованию операций. / А.Б. Аронович, М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М. Изд-во МГУ. – 1997. – 256 с.
4. Алгоритмы: построение и анализ. 2 издание: Пер. с англ./ Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Д. Риверс, Клиффорд Штайн. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

1

∞	26	34	36	25	38
15	∞	31	24	24	35
27	24	∞	23	36	34
16	28	39	∞	25	34
17	22	36	24	∞	38
20	27	37	34	29	∞

2

∞	32	43	50	54	74
15	∞	39	56	62	66
29	30	∞	56	54	64
26	26	39	∞	61	61
18	33	42	55	∞	61
19	29	41	62	54	∞

3

∞	28	33	27	29	40
19	∞	29	34	28	34
15	29	∞	28	24	32
24	23	39	∞	33	43
19	20	34	30	∞	43
19	18	36	27	28	∞

4

∞	28	39	24	25	34
17	∞	36	24	26	38
20	27	∞	34	29	40
20	28	38	∞	29	42
21	15	37	28	∞	44
20	28	33	27	29	∞

5

∞	29	35	28	24	32
24	∞	39	24	33	43
19	20	∞	30	28	43
19	18	36	∞	28	44
17	16	38	34	∞	44
19	16	37	33	28	∞

6

∞	16	40	24	37	35
22	∞	35	35	31	38
21	23	∞	24	30	45
24	19	35	∞	33	32
16	26	34	36	∞	38
15	18	31	24	24	∞

7

∞	18	25	32	33	31
22	∞	33	32	31	31
26	24	∞	25	35	42
17	15	37	∞	26	35
26	16	25	31	∞	33
18	18	25	27	27	∞

8

∞	28	32	23	33	42
16	∞	32	28	25	43
22	26	∞	34	31	40
24	16	34	∞	33	33
19	20	30	24	∞	36
29	27	38	33	38	∞

9

∞	26	16	25	31	35
22	∞	18	25	27	27
23	28	∞	40	24	37
26	22	18	∞	35	31
25	21	23	27	∞	30
28	24	19	35	28	∞

10

∞	30	26	22	25	38
28	∞	25	28	37	34
27	25	∞	28	36	37
22	24	36	∞	31	34
26	24	28	27	∞	37
20	19	29	34	29	∞

11

∞	26	24	28	27	35
22	∞	19	29	34	29
21	25	∞	36	31	34
19	15	17	∞	36	24
15	25	27	33	∞	34
27	30	26	30	28	∞

12

∞	19	16	37	33	28
28	∞	17	32	22	38
17	16	∞	39	34	25
23	20	21	∞	28	29
20	20	15	30	∞	29
22	26	17	26	26	∞

13

∞	21	23	23	20	21
18	∞	29	20	20	15
25	19	∞	22	26	17
23	29	26	∞	27	20
22	21	15	19	∞	26
23	29	18	16	18	∞

14

∞	18	19	24	23	39
23	∞	20	19	20	34
20	30	∞	19	18	36
27	24	25	∞	16	38
26	23	23	19	∞	37
15	22	28	29	17	∞

15

∞	22	26	29	34	31
27	∞	16	34	23	33
27	19	∞	30	24	28
20	29	27	∞	33	38
28	24	18	25	∞	33
18	22	19	33	32	∞

16

∞	23	39	24	33	24
19	∞	34	30	28	19
19	18	∞	27	28	29
17	16	38	∞	26	37
19	16	37	33	∞	19
29	17	32	22	38	∞

17

∞	17	16	38	34	26
23	∞	16	37	33	28
28	29	∞	32	22	38
17	16	19	∞	34	25
23	20	21	37	∞	29
20	20	15	30	32	∞

18

∞	32	43	50	54	74
15	∞	39	56	62	66
29	30	∞	56	54	64
26	26	39	∞	61	61
18	33	42	55	∞	61
19	29	41	62	54	∞

19

∞	28	19	20	27	37
20	∞	16	20	28	38
21	23	∞	21	15	37
20	19	24	∞	28	33
27	29	15	19	∞	29
21	23	25	15	29	∞

20

∞	24	19	35	28	33
17	∞	26	34	36	25
20	15	∞	31	24	24
28	27	24	∞	23	36
28	16	28	39	∞	25
29	17	22	36	24	∞

21

∞	18	17	22	26	29
16	∞	27	24	16	34
17	19	∞	19	20	30
26	18	20	∞	27	38
25	29	28	24	∞	25
25	28	18	22	19	∞

22

∞	28	16	40	24	37
26	∞	18	35	35	31
25	21	∞	27	24	30
28	24	19	∞	28	33
17	16	26	34	∞	25
20	15	18	31	24	∞

23

∞	17	15	37	30	26
22	∞	16	25	31	35
22	18	∞	25	27	27
23	28	16	∞	24	37
26	22	18	35	∞	31
25	21	23	27	24	∞

24

∞	24	18	25	32	33
18	∞	19	33	32	31
29	26	∞	32	25	35
23	17	15	∞	30	26
22	26	16	25	∞	35
22	18	18	25	27	∞

25

∞	24	28	32	23	33
21	∞	23	32	28	25
17	22	∞	29	34	31
27	24	16	∞	23	33
27	19	20	30	∞	28
20	29	27	38	33	∞

26

∞	16	30	26	22	25
21	∞	22	25	28	37
19	27	∞	39	28	36
16	22	24	∞	27	31
16	26	24	28	∞	35
22	20	19	29	34	∞

27

∞	19	15	17	39	36
15	∞	25	27	33	35
28	27	∞	26	30	28
26	20	19	∞	36	35
23	28	28	18	∞	35
29	26	15	29	26	∞

28

∞	26	24	28	27	35
22	∞	19	29	34	29
21	25	∞	36	31	34
19	15	17	∞	36	24
15	25	27	33	∞	34
27	30	26	30	28	∞

29

∞	32	43	50	54	74
15	∞	39	56	62	66
29	30	∞	56	54	64
26	26	39	∞	61	61
18	33	42	55	∞	61
19	29	41	62	54	∞

30

∞	32	43	50	54	74
15	∞	39	56	62	66
29	30	∞	56	54	64
26	26	39	∞	61	61
18	33	42	55	∞	61
19	29	41	62	54	∞

31

∞	24	15	21	24	25
28	∞	20	26	23	27
17	24	∞	25	23	25
27	26	21	∞	19	29
22	17	21	28	∞	15
30	18	19	24	21	∞

32

∞	19	22	22	26	25
23	∞	26	17	27	23
22	21	∞	19	28	22
23	29	18	∞	18	23
30	16	16	30	∞	30
21	26	26	29	29	∞

33

∞	32	29	28	24	19
15	∞	27	17	16	26
29	30	∞	20	15	18
26	26	27	∞	27	24
18	33	18	28	∞	28
19	29	28	29	17	∞

34

∞	27	17	21	23	25
29	∞	28	17	18	19
24	28	∞	23	19	20
26	25	29	∞	30	22
28	25	29	27	∞	25
27	23	27	26	23	∞

35

∞	22	27	16	17	29
15	∞	28	21	24	21
29	26	∞	27	18	17
26	23	18	∞	21	27
18	16	21	17	∞	27
19	25	27	26	18	∞

36

∞	17	19	27	19	20
15	∞	18	20	29	27
29	25	∞	28	24	18
26	25	28	∞	22	19
18	18	30	29	∞	24
19	23	23	23	17	∞

37

∞	23	17	28	29	17
15	∞	27	28	19	20
29	27	∞	26	16	20
26	29	21	∞	27	21
18	25	20	19	∞	20
19	19	27	29	15	∞

38

∞	32	43	50	54	74
15	∞	39	56	62	66
29	30	∞	56	54	64
26	26	39	∞	61	61
18	33	42	55	∞	61
19	29	41	62	54	∞

39

∞	32	27	16	22	74
15	∞	24	26	21	66
29	30	∞	21	19	64
26	26	28	∞	15	61
18	33	21	28	∞	61
19	29	28	26	20	∞

40

∞	21	16	25	28	18
22	∞	27	18	30	29
27	20	∞	23	23	23
15	16	18	∞	21	22
15	27	26	20	∞	22
30	26	20	17	28	∞

41

∞	28	21	24	21	21
26	∞	27	18	17	26
23	18	∞	21	27	23
16	21	17	∞	27	16
25	27	26	18	∞	25
15	16	25	29	28	∞

42

∞	29	26	15	29	25
16	∞	29	24	28	26
21	24	∞	16	23	32
27	18	17	∞	26	27
16	21	27	24	∞	16
17	19	27	19	20	∞

43

∞	20	21	28	27	30
21	∞	28	26	20	19
25	30	∞	23	28	28
17	30	25	∞	26	15
22	27	16	17	∞	24
21	28	21	24	21	∞

44

∞	25	29	26	15	29
27	∞	17	29	24	28
28	21	∞	21	16	23
25	27	18	∞	22	26
18	16	21	27	∞	16
21	17	19	27	19	∞

45

∞	24	29	29	21	19
23	∞	18	28	15	15
20	23	∞	21	28	27
26	21	20	∞	26	20
22	25	30	28	∞	28
16	17	30	25	29	∞

46

∞	29	21	19	15	17
18	∞	15	15	25	27
20	21	∞	27	30	26
20	28	26	∞	19	27
30	28	23	28	∞	18
30	25	29	26	15	∞

47

∞	20	23	16	22	24
22	∞	21	16	26	24
21	27	∞	22	20	19
30	24	26	∞	25	16
29	29	21	19	∞	17
18	28	15	15	25	∞

48

∞	16	19	20	23	16
18	∞	22	20	21	16
19	19	∞	27	16	22
26	25	30	∞	26	21
29	24	29	29	∞	19
23	16	18	28	15	∞

49

∞	15	16	29	16	30
19	∞	24	21	28	22
22	21	∞	19	27	25
19	20	23	∞	22	24
22	20	21	16	∞	24
21	27	16	22	20	∞

50

∞	74	74	90	22	23
62	∞	86	82	29	19
54	64	∞	85	20	22
61	61	80	∞	16	19
59	61	84	84	∞	22
54	67	78	79	19	∞

Поточні контрольні запитання

1. До якого класу належить задача про комівояжера?
2. Сформулюйте економічну постановку задачі комівояжера.
3. Запишіть математичну модель задачі про комівояжера.
4. Який зміст мають штучні змінні і обмеження в математичній моделі задачі комівояжера?
5. Яка основна ідея методу гілок та меж?
6. Для розв'язання яких задач оптимізації можна застосовувати метод гілок та меж?
7. Чим відрізняється алгоритм методу гілок та меж від повного перебору варіантів?
8. Чим відрізняються математичні постановки задачі про призначення і задачі про комівояжера?
9. Який вигляд мають допустимі розв'язки задач про призначення і задачі комівояжера і чим вони відрізняються? Наведіть приклади.

Практичне заняття № 7. Задачі динамічного програмування

Мета: ознайомитися з моделями та методами динамічного програмування (ДП), які застосовуються до розв'язування задач, наприклад, при розробці правил керування запасами, що встановлюють момент їх поповнення та розмір заказу; при розробці принципів календарного планування виробництва; при розподілі дефіцитних матеріальних ресурсів між можливими новими напрямами їх використання; при складанні календарних строків поточного та капітального ремонту складного обладнання, термінів його заміни і т.п. Студенти мають добре засвоїти основні властивості задач динамічного програмування, принцип оптимальності Беллмана, на якому базується метод ДП, продемонструвати вміння використовувати його під час розв'язання вищезазначених задач.

План

1. Постановка задачі динамічного програмування
2. Принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Беллмана
3. Алгоритм методу динамічного програмування

Опорні поняття

Постановка задачі динамічного програмування. ДП − метод оптимізації, що застосовується до операцій, в яких процес ухвалення рішення може бути розбитий на етапи (кроки), тому їх називають багатокроковими.

У реально функціонуючих великих економічних системах щотижня потрібно приймати макроекономічні рішення. Моделі ДП зручні тим, що дозволяють це робити на основі стандартного підходу при мінімальному втручанні людини.

Сформулюємо загальну *постановку задачі ДП.* Нехай розглядається керований процес, наприклад, економічний процес розподілу коштів між підприємствами, використання ресурсів протягом низки років, заміни устаткування, поповнення запасів і т.п. В результаті керування система (об'єкт керування) S переводиться із початкового стану s_0 у стан $\hat{s}$. Припустимо, що керування можна розбити на n кроків. Рішення приймається послідовно на кожному кроці, а керування, що переводить систему S із початкового стану в кінцевий, є сукупність n покрокових керувань.

Позначимо через X_k керування на k-*му* кроці $(k=1, 2, ..., n)$. Змінні X_k задовольняють деяким обмеженням і тому називаються *припустимими.* Нагадаємо, що X_k може бути числом, точкою в r-*мірному* просторі, якісною ознакою.

Нехай $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ – керування, що переводить систему S зі стану s_0 у стан $\hat{s}$. Позначимо через s_k стан системи після k-*го* кроку керування. Одержуємо послідовність станів $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k \ldots, s_{n-1}, s_n=\hat{s}$.

Процес керування системою S можна зобразити у вигляді схеми (рис. 1).

$$S_0 \xrightarrow{\mathbf{X_1}} S_1 \xrightarrow{\mathbf{X_2}} S_2 \xrightarrow{\mathbf{X_3}} \dots \xrightarrow{\mathbf{X_n}} S_n=\hat{S}$$

Рис.1. Схема прийняття рішень в задачах ДП

Показник ефективності керованої операції − цільова функція − залежить від початкового стану і керування:

$$Z=F(s_0,X). \tag{1}$$

Зробимо кілька припущень.

1. Стан S_k системи наприкінці *k-го* кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керування на *k-му* кроці X_k (і не залежить від попередніх станів і керувань). Ця вимога називається "відсутністю післядії". Сформульована властивість записується як система

$$s_k = \phi_k(s_{k-1}, X_k)\ , \quad k= 1,2,\ ...,\ n, \tag{2}$$

які називаються *рівняннями станів.*

2. Цільова функція (1) є адитивною від показників ефективності кожного кроку. Якщо показник ефективності *k-го* кроку позначити через

$$Z_k = f_k(s_{k-1,}X_k)\ , \quad k=1,...,n, \tag{3}$$

то цільова функція має вигляд

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k)\ . \tag{4}$$

Задача покрокової оптимізації (задача ДП) формулюється так: визначити таке припустиме керування *X,* що переводить систему *S* зі стану s_0 у стан $\hat{s}$, при якому цільова функція (4) приймає найбільше (найменше) значення.

Слід зазначити, що існують різні методи розв’язання подібних задач, які застосовуються в залежності від виду функцій, обмежень, розмірності і т.п. Обчислювальна схема ДП є байдужою до способів завдання функцій і обмежень, базується на принципі оптимальності і використовує рекурентні співвідношення.

Принцип оптимальності Беллмана

> Для будь-якого стану s системи, отриманого в результаті якого-небудь числа кроків, на найближчому з них потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.

Принцип оптимальності стверджує, що для будь-якого процесу без зворотного зв'язку оптимальне керування таке, що є оптимальним для будь-якого його підпроцесу. Тому розв'язок на кожному кроці є найкращим з погляду управління в цілому. Якщо зобразити геометрично оптимальну траєкторію у виді ламаної лінії, то будь-яка частина цієї ламаної буде оптимальною траєкторією відносно початку і кінця.

Рівняння Беллмана. Замість вихідної задачі ДП із фіксованим числом кроків *n* і початковим станом s_0 розглянемо послідовність задач, приймаючи послідовно n=1, 2, ... при різних станах системи *s*. І таким чином будемо мати однокрокову, двокрокову і т.д. задачі динамічного програмування, до яких застосуємо наведений принцип оптимальності.

На кожному кроці для будь-якого стану системи s_{k-1} рішення X_k потрібно вибирати "із озиранням", оскільки воно впливає на наступний стан s_k та подальший процес керування. Про це йдеться у принципі оптимальності. Але є один крок, останній, котрий можна для будь-якого стану s_{n-1} планувати оптимально.

Розглянемо n-й крок: s_{n-1} − стан системи на початку n-го кроку, $s_n=\hat{s}$ − кінцевий стан, X_n − керування на n-му кроці, а $f_n(s_{n-1}, X_n)$ − цільова функція (виграш) n-го кроку.

Відповідно до принципу оптимальності X_n потрібно вибирати так, щоб для будь-яких станів s_{n-1} одержати максимум (мінімум) цільової функції на цьому кроці. Надалі для визначеності будемо розглядати задачу на максимум.

Позначимо через $Z^*_n(s_{n-1})$ максимум цільової функції − показника ефективності n-го кроку за умови, що до початку останнього кроку система S знаходилась в довільному стані s_{n-1}, а під час нього керування було оптимальним.

Величина $Z_n^*(s_{n-1})$ називається умовним максимумом цільової функції на *n*-ому кроці. Очевидно, що

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{X_n} f_n(s_{n-1}, X_n)\ . \qquad (5)$$

Максимізація ведеться щодо всіх допустимих керувань X_n.

Рішення X_n, при якому досягається $Z_n^*(s_{n-1})$, також залежить від s_{n-1} і називається **умовним оптимальним керуванням на *n*-ому кроці**. Воно позначається через $X^*_n(s_{n-1})$.

На рис. 2 подано умовно оптимальний процес керування на двох останніх кроках.

Розв'язавши одномірну задачу локальної оптимізації (5), знайдемо для всіх можливих станів s_{n-1} дві функції: $Z_n^*(s_{n-1})$ і $X_n^*(s_{n-1})$.

Далі розглянемо двокрокову задачу: приєднаємо до n-го кроку (n-1)-й крок (рис. 2). Для будь-яких станів s_{n-2}, довільних керувань X_{n-1} при оптимальному керуванні на n-му кроці значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})\ . \qquad (6)$$

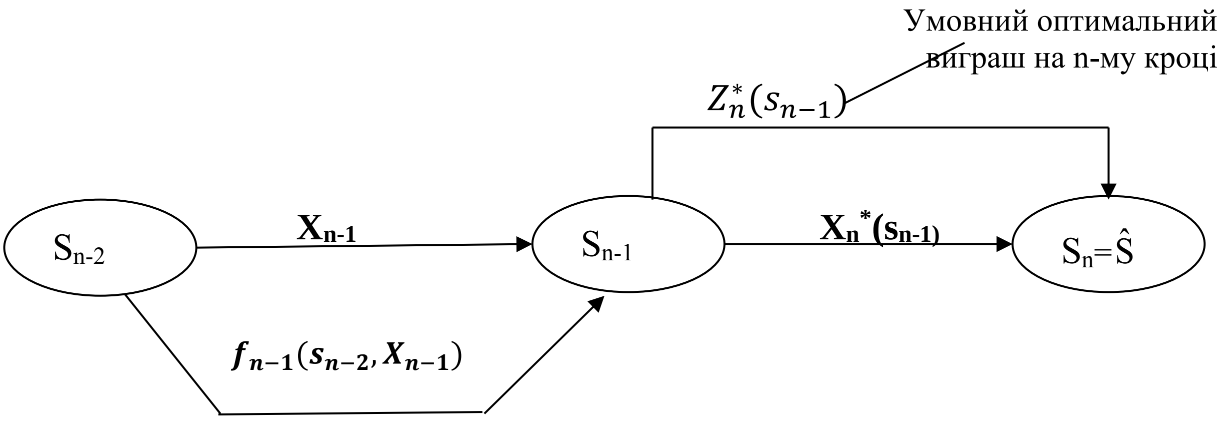


Рис. 2. Схема оптимального прийняття рішень в задачах ДП

Відповідно до принципу оптимальності для будь-яких s_{n-2} рішення потрібно вибирати так, щоб воно разом з оптимальним керуванням на останньому (n-му) кроці приводило б до максимуму цільової функції на двох останніх кроках. Отже, потрібно знайти максимум виразу (6) відносно всіх припустимих керуваннь X_{n-1}. Максимум цієї суми залежить від s_{n-2}, позначається через $Z^*_{n-1}(s_{n-2})$ і називається умовним максимумом цільової функції при оптимальному керуванні на двох останніх кроках. Відповідне керування X_{n-2} на (n-1)-му кроці позначається через $X^*_{n-1}(s_{n-2})$ і називається умовним оптимальним керуванням на (n-1)-му кроці:

$$Z^*_{n-1}(s_{n-2}) = \max_{X_{n-1}}[f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z^*_n(s_{n-1})]. \quad (7)$$

У результаті максимізації тільки щодо одної змінної X_{n-1} відповідно до рівняння (7) знову знаходимо дві функції:

$$Z^*_{n-1}(s_{n-2}),\ X^*_{n-1}(s_{n-2}).$$

Далі розглядається трикрокова задача, тобто до двох останніх кроків приєднується (n – 2)-й і т. д.

Позначимо через $Z^*_{n-k+1}(s_{n-k})$ умовний максимум цільової функції, отриманий при оптимальному керуванні на *n−k+l* кроках, починаючи з *k*-го до кінця, за умови, що на початку *k*-го кроку система знаходилася в стані s_{n-k}. Фактично

$$Z^*_{n-k+1}(s_{n-k}) = \max_{X_{n-k+1}}[f_{n-k+1}(s_{n-k}, X_{n-k+1}) + Z^*_{n-k+2}(s_{n-k+1})].$$

Цільова функція на *n-k* останніх кроках при довільному керуванні *X* на *k*-му кроці та оптимальному керуванні на наступних *n-k* кроках дорівнює

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(s_k)\,.$$

Відповідно до принципу оптимальності X_k вибирається з умови максимуму цієї суми, тобто

$$Z^*_k(s_{k-1}) = \max_{Xk}[f_k(s_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(s_k)]\,, \quad (8)$$

де $k = n$-1, n-2, ..., 2, 1.

Керування X^*_k на *k-му* кроці, при якому досягається максимум у (8), позначається через $X^*_k(s_{k-1})$ і називається **умовним оптимальним керуванням на *k*-му кроці**.

Вираз (8) є **рівнянням Беллмана**. Це рекурентні співвідношення, що дозволяють знайти попереднє значення функції, знаючи наступні. Процес розв’язування рівнянь (5) і (8) називається **умовною оптимізацією**. Внаслідок неї знаходимо дві послідовності: умовні максимуми цільової функції на останньому, на двох останніх, на ...*n* кроках

$$Z^*_n(s_{n-1}), \ldots, Z^*_{k+1}(s_k), Z^*_k(s_{k-1}), \ldots, Z^*_1(s_0),$$

і умовні оптимальні керування на n-м, (n-1)-м, ..., 1-м кроках

$$X^*_n(s_{n-1}), \ldots, X^*_{k+1}(s_k), X^*_k(s_{k-1}), \ldots, X^*_1(s_0)\,.$$

Використовуючи ці послідовності, можна знайти розв'язок задачі ДП при даних значеннях n та s_0. За визначенням $Z^*_1(s_0)$ − умовний максимум цільової функції на n кроках за умови, що до початку 1-го кроку система була у стані s_0, тобто

$$Z_{max} = Z_1^*(s_0)\,. \tag{9}$$

Далі при фіксованому s_0 одержуємо X_1^*=$X_1^*(s_0)$. З рівнянь (2) знаходимо $s_1 = \phi_1(s_0, X_1^*)$ і підставляємо це значення в послідовність умовних оптимальних керувань: $X_2^* = X_2^*(s_1)$ і т.д. за ланцюжком. Одержуємо оптимальний розв'язок задачі ДП: $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$.

Загальна схема застосування метода динамічного програмування

Припустимо, що процес керування задовольняє вимогам задач динамічного програмування. Побудова моделі ДП та її розв'язання зводиться до наступного алгоритму.

1. Обирається спосіб ділення процесу на кроки.

2. Визначаються параметри стану s_k та змінні керування X_k на кожному кроці.

3. Записуються рівняння станів.

4. Вводяться цільові функції на кожному кроці керування процесом та сумарна цільова функція.

5. Вводяться до розгляду умовні максимуми (мінімуми) $Z_k^*(s_{k-1})$ та умовні оптимальні керування $X_k^*(s_{k-1})$, $k = n$-1, n-2, ..., 2, 1.

6. Записуються основні для обчислювальної схеми ДП рівняння Беллмана типу (5), (8).

7. Розв'язуються послідовно рівняння Беллмана та отримуються дві послідовності функцій: $Z_n^*(s_{n-1}),\dots,Z_{k+1}^*(s_k),Z_k^*(s_{k-1}),\dots,Z_1^*(s_0)$ та $X_n^*(s_{n-1})$ $,\dots,X_{k+1}^*(s_k),X_k^*(s_{k-1}),\dots,X_1^*(s_0)$.

8. Після виконання умовної оптимізації отримується оптимальний розв'язок для конкретного початкового стану s_0:

$Z_{max} = Z_1^*(s_0)$ − оптимальне значення цільової функції;

за ланцюжком

$$s_0 \Rightarrow X_1^* \to s_1^* \Rightarrow X_2^* \to s_2^* \Rightarrow \dots \Rightarrow X_{n-1}^* \to s_{n-1}^* \Rightarrow X_n^* \to s_n^* = \hat{s}$$

знаходиться оптимальне керування $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$.

Примітка. Альтернативою до динамічного програмування є метод повного перебору. Але на практиці методу ДП віддається перевага, оскільки на етапі умовної оптимізації відкидаються варіанти, які свідомо є неоптимальними. Перевагою методу динамічного програмування є також можливість аналізу розв'язку на чутливість до зміни початкового стану s_0 та кількості кроків n.

Приклад розв'язання задачі про розподіл грошових коштів між підрозділами корпорації

Потрібно розподілити 80 тис. грн. між чотирма підрозділами підприємства таким чином, щоб воно в цілому отримало найбільший прибуток. Залежність одержуваного прибутку від виділених коштів наведена в наступній таблиці

Обсяг коштів	10	20	30	40	50
Підрозділ 1	12	28	32	42	58
Підрозділ 2	15	26	34	41	52
Підрозділ 3	11	23	-	45	56
Підрозділ 4	16	25	33	41	53

Розв'язання.

1 етап. З вихідної таблиці виписуємо дані щодо першого підрозділу:

Виділені кошти / Підрозділ	10	20	30	40	50
1	12	28	32	42	58

2 етап. Будується таблиця розподілу коштів між першими двома підрозділами. У заголовок стовпців записуються дані щодо першого підрозділу, а в заголовок рядків − стосовно другого. Як дані в кожну клітину заголовка заносяться обсяги і після тире − одержуваний при цьому прибуток. Вони вибираються з вихідної таблиці. Решта клітинок заповнюються за допомогою підсумовування відповідних значень заголовків рядків і стовпців. Потім всі вони, включаючи клітинки заголовків, розбиваються на підмножини з однаковими обсягами виділених коштів. У кожній підмножині позначаються «*» клітинки, в яких прибуток є максимальним. Наприклад, в нашій таблиці є три клітини з виділеним обсягом грошових коштів 20 тис. грн. Проте зірочкою помітимо клітинку в заголовку стовпців, оскільки вона має найбільше значення прибутку – 28.

2 \ 1	10-12	20-28*	30-32	40-42	50-58
10–15*	20–27	30-43*	40-47	50-57	60-73*
20–26	30-38	40-54*	50-58	60-68	70–84*
30-34	40-46	50-62*	60-66	70-76	80–92*
40-41	50-53	60-69	70-73	80–83	
50-52	60-64	70-80	80-84		

3 етап. Будуємо таблицю розподілу коштів між першими двома підрозділами і третім. В клітинки заголовка стовпців записуємо значення, помічені зірочками в попередній таблиці. У заголовок рядків − дані щодо третього підрозділу з вихідної таблиці. Решта дій на третьому етапі аналогічні попередньому.

3 \ 1+2	10-15	20-28*	30-43*	40-54*	50-62	60-73	70-78	80–92
10–11	20–26	30-39	40-54*	50-65	60–73	70–84	80–95	
20–23	30-38	40-51	50-66*	60-77*	70–85	80-96		
40-45	50-60	60-73	70-88*	80–99*				
50-56	60-71	70-84	80-99					

4 етап. Він є останнім, тому з попередньої таблиці виписуємо клітинки, помічені зірочками з обсягами коштів, що виділяються не менше 30 (80 − 50 = 30). У внутрішній частині таблиці заповнюємо тільки клітинки з обсягами виділених коштів у розмірі 80 тис. грн.

4 \ 1+2+3	30-43	40-54	50-66	60-77	70-88	80–99
10–16					80–104*	
20–25				80-102		
30-33			80-99			
40-41		80–95				
50-53	80-96					

Отримуємо наступний розв'язок задачі. При виділенні 80 тис. грн чотирьом підрозділам підприємство в цілому одержує максимальний прибуток в розмірі 104 тис. грн. Знайдемо оптимальні обсяги виділених коштів для кожного підрозділу. З останньої таблиці випливає, що четвертому підрозділу необхідно виділити 10 тис. грн (обраній клітині відповідає перший рядок, тому цю величину вибираємо з його заголовка). При цьому він принесе підприємству прибуток в обсязі 16 тис. грн. У попередній таблиці знаходимо клітинку з рештою грошових коштів − 70 тис. грн. Тоді третьому підрозділу необхідно виділити 40 тис. грн (обраній клітинці відповідає третій рядок, тому цю величину вибираємо з його заголовка). Переходячи від таблиці до таблиці, визначаємо оптимальні обсяги виділених коштів для всіх підрозділів. Отже, P_{max} = 104 тис. грн.

Підрозділ	Виділені кошти (тис. грн)	Отриманий прибуток (тис. грн)
4	10	16
3	40	45
2	10	15
1	20	28
Усього	80	104

Вправи

Задача 1. На склад місткістю W м^3 потрібно укласти n типів устаткування. Обсяг однієї одиниці і-того типу ($\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$) дорівнює V_i м^3, а вартість – C_i грн. Визначити, скільки обладнання кожного типу потрібно розмістити на складі, щоб загальна його вартість була максимальною. Задачу розв'язати при W = 120 м^3, V_1 = 32 м^3, V_2 = 24 м^3, V_3 = 16 м^3, C_1 = 560 грн, C_2 = 630 грн, C_3 = 350 грн.

Задача 2. Виробничі об'єднання виготовляють товари народного споживання окремими партіями. Чим більший їх розмір, тим це вигідніше. Тому кожне об'єднання зацікавлене в окремі місяці випускати більше виробів, чим це потрібно для задоволення попиту, а надлишки зберігати на складі для їхньої реалізації в наступному. Однак збереження пов'язане з відповідними витратами.

Будемо вважати, що підприємство прагне знайти оптимальний план виробництва продукції на протязі *N* місяців, під час кожного з яких необхідно a_i ($i = \overline{1, N}$) одиниць продукції. Запаси до початку планованого періоду дорівнюють b виробам, а в кожному із планованих місяців підприємство може виготовити не більш ніж d_i одиниць продукції. Одночасно на складі може зберігатися не більш ніж A виробів. Витрати, що пов'язані з виробництвом a_i ($j = \overline{1, k}$) виробів, складають C_j грн, а обумовлені збереженням протягом місяця одного виробу – β грн.

Знайти такий план випуску продукції, при якому загальна сума витрат на виробництво та збереження була б мінімальною, а попит на необхідні вироби був би вчасно та в повному обсязі задоволений. Задачу розв'язати з такими вихідними даними: N=5, a=(250, 450, 300, 400, 350), b=200, d=(300, 400, 400, 300, 300), A=300, C=(24, 45, 28, 34, 18), β=3.

Задача 3. Знайти оптимальний план виробництва продукції підприємством протягом чотирьох місяців з огляду на умови попереднього варіанта, якщо потреби в кожному з місяців відповідно складають 2000, 3000, 3000 і 2000 виробів, а запити до початку планованого періоду дорівнюють 2000 виробів. Варто враховувати, що підприємство щомісяця може робити не більш 4000 виробів. Одночасно воно може зберігати також не більш 4000 виробів. Витрати, пов'язані з виробництвом 1000, 2000, 3000 і 4000 виробів, складають відповідно 13, 14, 17 і 19 грн, а обумовлені збереженням 1000 виробів – 1 грн.

Задача 4. Планується діяльність двох галузей виробництва на n років. Початкові ресурси – S_0. Кошти x, вкладені в I галузь на початку року, наприкінці цього періоду дають прибуток $f_1(x)$ і повертаються в розмірі $q_1(x) < x$; аналогічно для галузі II функція прибутку дорівнює $f_2(x)$, а повернення – $q_2(x)$ ($q_2(x) < x$). Наприкінці року всі повернуті кошти заново перерозподіляються між I й II галузями, нові кошти не надходять, прибуток у виробництво не вкладається.

Знайти оптимальний розподіл ресурсів S_0 між двома галузями виробництв I й II протягом n років, при якому сумарний прибуток за n років був би максимальним. Функції доходів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ для кожної галузі, функції повернення ϕ_1(x) і $\phi_2(x)$ задані. Після закінчення року тільки всі повернуті засоби перерозподіляються, прибуток у виробництво не вкладається.

Вихідні дані S_0 = 40000 од.; n = 4; $f_1(x) = 0,4x$; $f_2(x) = 0,3x$; $\phi_1(x) = 0,5x$; $\phi_2(x) = 0,8x$.

Задача 5. Скласти математичну модель, записати рівняння Беллмана і графічно розв'язати задачі на визначення оптимальних термінів заміни устаткування. Дані: первісна вартість обладнання p_o, його ліквідна вартість – $\boldsymbol{\phi(t)}$, вартість зберігання протягом року – r(t), t – вік устаткування, n – термін експлуатації, наприкінці якого воно продається. Критерій оптимальності – сумарні витрати на експлуатацію устаткування протягом n років з урахуванням первісної купівлі і наступного продажу.

Вихідні дані:

варіант 1: p_o= 4000; $\phi(t) = p_o 2^{-t}$; $r(t) = 0,1p_o (t+1)$; n = 5;

варіант 2: n=5. Вартість нового обладнання залежить від року придбання $P_k=5000+500(k+1)$; (k=1, 2, …, 5); $\phi(t) = p_k 2^{-t}$; $r_k(t)=0,1\, p_k\, (t+1)$.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

2. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И.Савельева. – М.: Экономика, 1987. – 240 с.

3. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

4. Ржевський С.В. Дослідження операцій / С.В. Ржевський, В.М.Александрова. − К.: Академвидав, 2006. − 560 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

Потрібно розподілити V тис. грн між чотирма підрозділами підприємства таким чином, щоб воно в цілому отримало найбільший прибуток. Залежність одержуваної величини від об’ємів виділених грошових коштів наведена в таблиці.

1. V= 90 тис. грн

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	25	33	35	46	70	75	82	98
підрозділ 2	38	42	43	57	73	86	87	101
підрозділ 3	39	45	49	59	67	80	86	104
підрозділ 4	39	49	57	67	73	83	95	105

2. V= 90 тис. грн

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	22	24	41	64	74	82	97	101
підрозділ 2	39	42	58	69	79	83	93	100
підрозділ 3	33	44	46	49	79	83	84	95
підрозділ 4	38	49	55	60	68	87	92	109

3.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	32	43	50	54	74	74	90
підрозділ 2	15	39	39	56	62	66	86	82
підрозділ 3	29	30	42	56	54	64	85	85
підрозділ 4	26	26	39	55	61	61	80	84

V= 80 тис. грн

4.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	18	33	42	55	59	61	84	84
підрозділ 2	19	29	41	62	54	67	78	79
підрозділ 3	26	35	50	59	64	66	83	76
підрозділ 4	29	34	49	64	59	64	73	77

V= 110 тис. грн

5.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	23	26	38	63	53	60	83	87
підрозділ 2	20	33	40	56	66	72	88	86
підрозділ 3	26	31	40	63	64	65	77	87
підрозділ 4	22	35	50	63	61	73	86	78

V= 80 тис. грн

6.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	27	50	60	67	71	73	89
підрозділ 2	22	32	47	51	55	74	82	88
підрозділ 3	22	31	48	56	62	66	74	83
підрозділ 4	19	36	45	62	56	62	80	86

V= 100 тис. грн

7.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	24	33	38	51	59	72	82	76
підрозділ 2	20	26	41	52	57	72	77	80
підрозділ 3	28	35	47	61	56	65	87	87
підрозділ 4	15	25	36	60	67	73	82	78

V= 90 тис. грн

8.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	23	31	36	60	66	63	80	79
підрозділ 2	22	28	47	53	68	74	84	84
підрозділ 3	27	30	40	58	61	68	75	75
підрозділ 4	15	26	38	59	59	67	84	76

V= 90 тис. грн

9.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	15	37	46	55	65	67	76	78
підрозділ 2	30	36	40	52	66	68	86	76
підрозділ 3	25	30	43	63	63	71	80	78
підрозділ 4	17	29	50	52	59	70	79	83

V= 90 тис. грн

10.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	25	35	37	56	67	73	82	79
підрозділ 2	24	35	43	64	65	62	74	86
підрозділ 3	21	38	40	52	68	65	73	78
підрозділ 4	15	27	39	51	65	73	85	84

V= 90 тис. грн

11.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	29	29	39	52	56	73	74	88
підрозділ 2	26	40	43	52	66	74	75	82
підрозділ 3	27	40	45	62	66	64	78	87
підрозділ 4	28	27	47	55	64	61	78	88

V= 110 тис. грн

12.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	27	35	49	56	61	72	79	75
підрозділ 2	23	36	45	55	57	69	78	88
підрозділ 3	19	38	39	62	67	60	77	81
підрозділ 4	25	37	37	56	61	70	73	89

V= 90 тис. грн

13.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	29	40	48	52	56	64	82	83
підрозділ 2	24	38	48	58	57	65	77	80
підрозділ 3	26	35	49	55	68	67	77	78
підрозділ 4	28	35	49	62	62	70	75	76

V= 90 тис. грн

14.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	27	33	47	61	61	68	77	76
підрозділ 2	22	34	39	50	60	73	87	77
підрозділ 3	29	35	38	62	66	62	74	79
підрозділ 4	27	31	44	56	61	68	78	81

V= 100 тис. грн

15.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	20	32	38	60	67	65	78	75
підрозділ 2	16	40	45	54	60	67	84	77
підрозділ 3	17	26	43	64	64	62	85	80
підрозділ 4	19	35	42	56	53	64	86	86

V= 90 тис. грн

16.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	18	26	43	64	56	61	76	83
підрозділ 2	18	27	50	51	54	75	80	78
підрозділ 3	21	27	41	61	64	74	87	75
підрозділ 4	27	25	47	54	67	69	76	87

V= 80 тис. грн

17.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	26	34	38	59	53	66	82	85
підрозділ 2	17	29	48	59	58	71	81	87
підрозділ 3	21	28	37	59	57	70	81	85
підрозділ 4	24	28	47	61	59	67	77	89

V= 90 тис. грн

18.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	29	32	42	52	59	73	84	75
підрозділ 2	29	34	50	53	57	69	79	78
підрозділ 3	20	34	49	64	67	74	73	80
підрозділ 4	22	39	44	62	62	68	79	81

V= 100 тис. грн

19.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	20	39	43	53	59	63	75	79
підрозділ 2	19	31	47	58	56	74	76	84
підрозділ 3	19	35	49	60	58	74	74	76
підрозділ 4	30	39	36	62	66	61	80	77

V= 90 тис. грн

20.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	20	32	41	63	59	75	85	84
підрозділ 2	21	38	48	57	62	71	79	88
підрозділ 3	26	38	37	64	60	65	86	83
підрозділ 4	19	26	37	54	64	70	80	89

V= 90 тис. грн

21.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	27	31	38	54	65	60	74	77
підрозділ 2	21	29	41	54	54	66	86	83
підрозділ 3	15	35	44	52	56	66	73	77
підрозділ 4	16	27	45	50	67	69	74	81

V= 100 тис. грн

22.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	20	29	45	52	55	74	86	87
підрозділ 2	28	26	46	57	58	74	86	78
підрозділ 3	16	32	36	65	64	72	82	78
підрозділ 4	29	39	39	54	55	69	77	86

V= 90 тис. грн

23.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
19	33	46	52	55	69	76	78	19
17	33	50	63	57	74	88	75	17
23	36	40	56	60	73	86	86	23
30	31	44	56	61	75	78	78	30

V= 80 тис. грн

24.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	21	35	36	58	65	70	86	87
підрозділ 2	16	27	39	56	68	65	79	90
підрозділ 3	23	26	36	61	65	66	85	84
підрозділ 4	29	30	38	53	54	69	75	84

V= 90 тис. грн

25.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	21	29	40	59	56	63	84	87
підрозділ 2	20	28	42	58	63	73	82	89
підрозділ 3	15	40	48	57	59	71	80	81
підрозділ 4	20	38	42	58	56	70	86	84

V= 110 тис. грн

26.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	22	38	49	52	59	71	78	77
підрозділ 2	18	29	43	63	64	68	80	80
підрозділ 3	23	26	37	56	53	71	81	82
підрозділ 4	17	37	46	60	58	64	75	85

V= 90 тис. грн

27.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	22	26	41	64	66	68	79	85
підрозділ 2	24	37	38	53	64	75	77	84
підрозділ 3	20	25	40	60	62	73	74	75
підрозділ 4	17	28	38	54	53	70	86	76

V= 100 тис. грн

28.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	29	33	36	56	55	63	75	89
підрозділ 2	16	30	38	63	58	67	84	88
підрозділ 3	18	31	46	60	58	61	80	90
підрозділ 4	27	27	35	51	55	73	81	88

V= 80 тис. грн

29.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	40	37	50	65	74	78	79
підрозділ 2	28	30	36	54	58	70	87	75
підрозділ 3	26	39	42	65	60	71	82	77
підрозділ 4	17	35	39	53	60	64	87	86

V= 100 тис. грн

30.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	26	25	47	58	66	67	87	86
підрозділ 2	28	33	40	53	64	73	81	86
підрозділ 3	16	30	45	60	58	74	83	88
підрозділ 4	28	38	48	50	56	61	77	81

V= 90 тис. грн

31.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	21	31	36	51	55	62	78	80
підрозділ 2	24	32	42	59	65	71	77	83
підрозділ 3	16	31	41	63	61	62	79	84
підрозділ 4	20	37	46	54	62	69	76	76

V= 110 тис. грн

32.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	19	39	48	65	66	70	80	85
підрозділ 2	19	36	45	62	64	70	82	84
підрозділ 3	18	37	43	51	66	67	84	81
підрозділ 4	25	37	44	63	67	61	85	75

V= 80 тис. грн

33.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	17	31	38	64	59	66	82	79
підрозділ 2	27	26	39	57	54	67	76	76
підрозділ 3	24	31	48	53	54	68	77	75
підрозділ 4	22	39	36	50	66	60	79	77

V= 100 тис. грн

34.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	22	33	46	63	55	63	79	79
підрозділ 2	25	28	39	57	60	68	77	85
підрозділ 3	17	26	38	53	58	66	84	78
підрозділ 4	16	31	47	54	53	69	88	76

V= 100 тис. грн

35.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	22	30	37	64	63	67	87	88
підрозділ 2	30	38	47	63	62	71	78	75
підрозділ 3	18	35	36	56	65	71	81	79
підрозділ 4	22	33	39	56	57	67	84	80

V= 80 тис. грн

36.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	27	34	36	61	65	62	82	86
підрозділ 2	24	36	46	53	60	68	78	83
підрозділ 3	28	25	36	58	65	71	78	82
підрозділ 4	21	34	48	57	64	72	77	79

V= 90 тис. грн

37.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	15	29	49	63	60	69	79	82
підрозділ 2	16	36	50	52	55	72	82	80
підрозділ 3	15	28	45	57	67	62	75	87
підрозділ 4	17	38	49	64	60	66	84	88

V= 100 тис. грн

38.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	17	30	38	58	65	74	82	82
підрозділ 2	22	34	39	60	67	63	73	80
підрозділ 3	16	26	37	56	64	63	81	75
підрозділ 4	24	37	43	55	65	67	81	89

V= 80 тис. грн

39.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	30	36	38	51	53	69	85	89
підрозділ 2	24	29	38	51	56	69	83	79
підрозділ 3	30	34	47	62	54	70	79	84
підрозділ 4	22	35	48	59	58	71	82	77

V= 90 тис. грн

40.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	29	32	36	65	60	70	77	86
підрозділ 2	29	35	41	64	61	69	75	86
підрозділ 3	25	39	48	57	68	73	88	90
підрозділ 4	30	38	50	64	62	70	76	87

V= 100 тис. грн

41.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	34	49	54	65	70	79	84
підрозділ 2	24	34	40	51	63	64	80	89
підрозділ 3	20	26	39	55	62	70	74	78
підрозділ 4	17	40	47	63	60	60	73	78

V= 80 тис. грн

42.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	28	48	51	63	72	76	76
підрозділ 2	19	26	40	60	59	65	73	88
підрозділ 3	18	27	36	63	54	67	85	77
підрозділ 4	21	30	36	52	65	63	75	78

V= 90 тис. грн

43.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	21	30	46	63	67	69	86	80
підрозділ 2	22	27	46	51	66	72	82	83
підрозділ 3	29	27	38	58	53	61	82	82
підрозділ 4	17	33	43	62	65	62	75	83

V= 100 тис. грн

44.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	15	29	42	55	62	65	77	83
підрозділ 2	18	36	45	50	56	67	79	82
підрозділ 3	28	31	40	54	68	60	80	84
підрозділ 4	19	25	48	53	64	63	86	87

V= 90 тис. грн

45.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	25	25	45	58	67	70	79	81
підрозділ 2	18	40	40	56	64	67	73	76
підрозділ 3	15	39	39	54	63	63	85	88
підрозділ 4	19	32	45	63	68	67	82	79

V= 80 тис. грн

46.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	25	38	37	63	56	72	88	85
підрозділ 2	29	39	43	58	68	68	81	84
підрозділ 3	16	27	43	64	54	63	77	78
підрозділ 4	20	31	40	61	55	66	75	75

V= 100 тис. грн

47.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	16	26	40	61	67	69	85	86
підрозділ 2	20	36	41	64	63	60	78	89
підрозділ 3	21	26	46	65	57	60	88	81
підрозділ 4	22	32	38	50	67	61	82	88

V= 90 тис. грн

48.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	23	38	46	52	64	64	78	85
підрозділ 2	18	31	44	55	60	70	77	89
підрозділ 3	29	27	37	57	59	63	82	76
підрозділ 4	16	30	44	52	57	60	80	83

V= 1100 тис. грн

49.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	19	32	46	53	61	70	76	83
підрозділ 2	28	29	48	65	61	73	81	75
підрозділ 3	20	34	38	59	67	73	74	83
підрозділ 4	22	35	45	62	55	65	84	80

V= 80 тис. грн

50.

обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
підрозділ 1	21	30	43	55	55	62	84	76
підрозділ 2	19	33	49	52	65	67	85	84
підрозділ 3	30	38	36	51	58	69	83	89
підрозділ 4	20	29	42	50	66	71	84	84

V= 100 тис. грн

Поточні контрольні запитання

1. Як формулюється задача динамічного програмування?
2. Які властивості задачі ДП?
3. Що означає адитивність цільової функції?
4. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана?
5. Запишіть рівняння Беллмана.
6. Що означає відсутність зворотного зв’язку в задачі ДП?
7. Що означає відсутність післядії в задачах ДП?
8. Назвіть приклади задач динамічного програмування.
9. Чи можна вважати задачу про рюкзак прикладом ДП?
10. Що означає багатокроковий процес прийняття рішень?

Практичне заняття № 8. Задачі мережевого планування і управління

Мета: ознайомитися з методами мережевого планування, навчитися розраховувати критичний шлях в мережевому графіку, оптимізувати його за критеріями вартості і використання робочої сили.

План

1. Структурне планування
2. Календарне планування
3. Оптимізація мережевого графіка

Опорні поняття

Методи мережевого планування і управління (СПУ) використовуються під час розробки складних комплексних проєктів, наприклад:

1) будівництво та реконструкція будь-яких об'єктів;
2) виконання науково-дослідних і конструкторських робіт;
3) підготовка виробництва до випуску продукції;
4) переозброєння армії;
5) розгортання системи медичних або профілактичних заходів.

Їх характерна особливість – виконання окремих, елементарних робіт. Причому деякі з них не можна розпочинати раніше, ніж завершити інші. Укладання фундаменту робиться тільки після того, як будуть доставлені необхідні матеріали; ті в свою чергу не можуть транспортуватися без заздалегідь споруджених під'їзних шляхів; а будь-який етап будівництва стартує завдяки складанню відповідної технічної документації тощо.

СПУ складається з трьох основних етапів:

1. Структурне планування.
2. Календарне планування.
3. Оперативне керування.

Структурне планування починається з розбиття проєкту на чіткі операції, для яких визначається тривалість. Потім будується мережевий графік, який характеризує взаємозв'язки робіт. Це дозволяє їх детально аналізувати і вносити поліпшення в структуру проєкту ще до початку його реалізації.

Календарне планування передбачає побудову календарного графіка, що визначає моменти початку і закінчення кожної роботи. Це сприяє, зокрема, виявленню критичних операцій, яким необхідно приділяти особливу увагу, щоб закінчити проєкт в директивний термін. Під час календарного планування визначаються тимчасові характеристики всіх робіт з метою проведення оптимізації мережевої моделі, яка покращує ефективність використання будь-якого ресурсу.

В ході **оперативного керування** використовуються мережевий і календарний графіки для складання періодичних звітів про хід виконання проєкту. При цьому мережева модель може піддаватися оперативному коригуванні, внаслідок чого буде розроблятися новий календарний план решти проєкту.

Структурне планування. Основними поняттями мережевих моделей є подія і робота.

Робота − це певний процес, що приводить до досягнення певного результату і вимагає витрат яких-небудь ресурсів, має протяжність в часі.

За своєю фізичною природою її можна розглядати як:

− **дію**: заливка фундаменту бетоном, складання заявки на матеріали, вивчення кон'юнктури ринку;

− **процес**: старіння виливків, витримування вина, травлення плат;

− **очікування** поставки комплектуючих, або деталі в черзі до верстата.

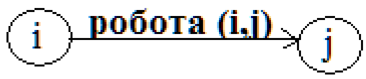
За кількістю затраченого часу робота може бути:

− **дійсною**, тобто що вимагає витрат часу;

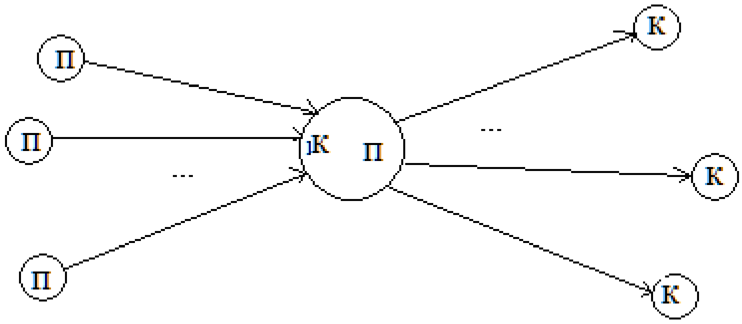
− **фіктивною**, яка не вимагає витрат часу і є зв'язком між будь-якими роботами: передача змінених креслеників від конструкторів до технологів, здача вищестоящому підрозділу звіту про техніко-економічні показники роботи цеху.

Подія – це момент часу, коли завершуються одні операції і починаються інші, а також результат і, на відміну від самих робіт, не має протяжності в часі. Наприклад, фундамент залито бетоном, старіння виливків завершене, комплектуючі поставлено, звіти здані і т.д.

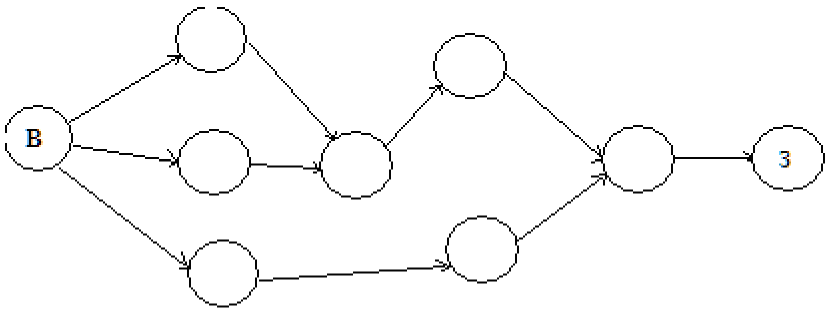
Таким чином, початок і закінчення будь-якої роботи описуються парою подій, які називаються початковою і кінцевою. Тому для ідентифікації конкретної операції використовують код роботи (i, j), що складається з номерів початкової (i-ої) і кінцевої (j-ої) подій, наприклад (2,4); 3-8; 9,10:



На етапі структурного планування взаємозв'язок робіт і подій зображуються за допомогою мережевого графіка, де перші зображаються стрілками, що з'єднують вершини, які виконують роль других. Роботи, що виходять з деякої події, не можуть розпочатися, поки не будуть завершені всі операції, що є в її списку:

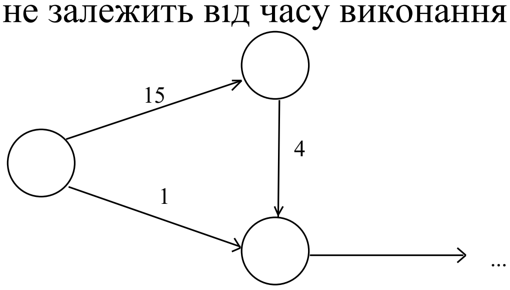


Подію називають **вихідною**, якщо вона не має попереднього етапу. З неї починається проєкт. Подія, яка не має наступниого кроку і відображає кінцеву мету проєкту, називається **завершальною**:

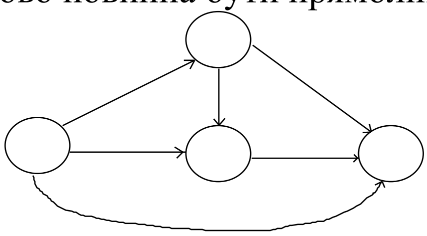


При побудові мережевого графа необхідно дотримуватись наступних правил:

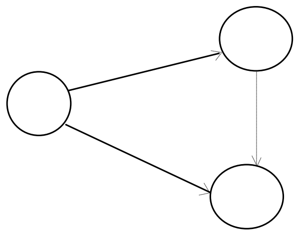
− довжина стрілки не залежить від часу виконання роботи:



− стрілка не обов'язково повинна бути прямолінійним відрізком:

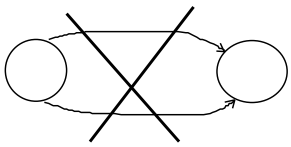
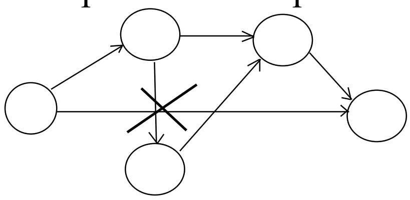
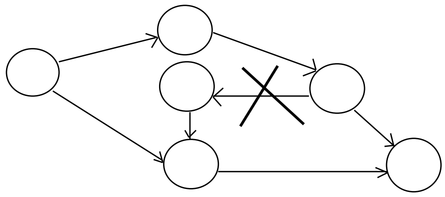


− для дійсних робіт використовуються суцільні, а для фіктивних − пунктирні стрілки:

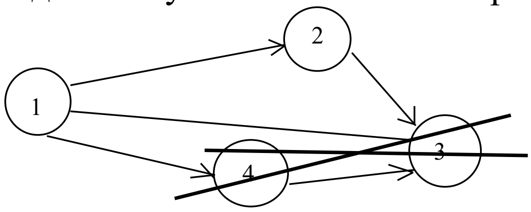


– кожна операція зображується тільки однією стрілкою;

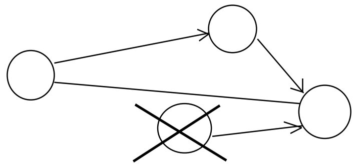
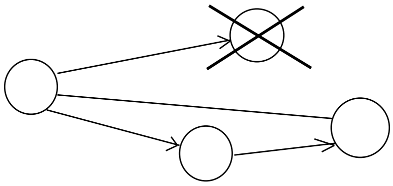
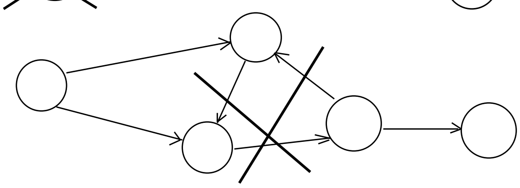
– не повинно бути паралельних робіт між одними і тими самими подіями, для уникнення такої ситуації використовують фіктивні роботи; слід не допускати перетину стрілок; а також креслити їх справа наліво:

– номер початкової події має бути меншим за номер кінцевої:



– не повинно бути висячих подій, крім вихідної; тупикових подій, крім завершальної; циклів:

Оскільки роботи, що є частинами проєкту, можуть бути логічно пов'язані одна з одною, то необхідно завжди перед побудовою мережевого графіка дати відповіді на наступні питання:

– Які операції необхідно завершити безпосередньо перед початком розглянутої роботи?

– Які мають безпосередньо слідувати після завершення даної роботи?

– Які можуть виконуватися одночасно з розглянутою роботою?

Приклад побудови мережевого графіка

Нехай необхідно спроєктувати, виготовити і здати в експлуатацію стенд згідно з отриманим технічним завданням (ТЗ). Відомо, що для цього треба виконати роботи, що наведені в таблиці 1.

Крім того, відомо, що

• інформація про характеристики стенда може бути отримана тільки в процесі створення його електричної і механічної частин і після придбання необхідних елементів;

• робочу документацію з експлуатації стенда є можливість розробляти і без його збирання;

• контрольні випробування повинні проводитися за наявності готової документації з експлуатації.

Таблиця 1

Робота	Зміст роботи	Попередня	Паралельна	Наступна	Код	t_{ij}
A	Розробка технічних умов для стенда	-	-	B,C	1,2	5
B	Загальне компонування стенда	A	C	D,E,F	2,3	5
C	Розробка і видача ТЗ на складання робочої документації з експлуатації стенда	A	B,D,E,F,G,H,I	L	2,8	3
D	Розробка технології виготовлення електричної частини стенда	B	E,F	G	3,4	8
E	Розробка технології виготовлення механічної частини стенда	B	D,F	H	3,5	6
F	Оформлення та розміщення замовлень на елементи, що закуповуються	B	D,E	I	3,6	10
G	Виготовлення електричної частини стенда	D	H,I	J,K	4,7	25
H	Виготовлення механічної частини стенда	E	G,I	J,K	5,7	18
I	Виконання замовлень на закупні елементи	F	H,G	J,K	6,7	15
J	Передача інформації про характеристики стенда для розробки робочої документації з експлуатації стенда	G,H,I	K	L	7,8	0
K	Збирання стенда	G,H,I	J,L	M	7,9	12
L	Розробка робочої документації	J	K	M	8,9	12
M	Контрольні випробування стенда	L,K	-	-	9,10	10

Мережевий графік проєкту зображений на рис. 1.

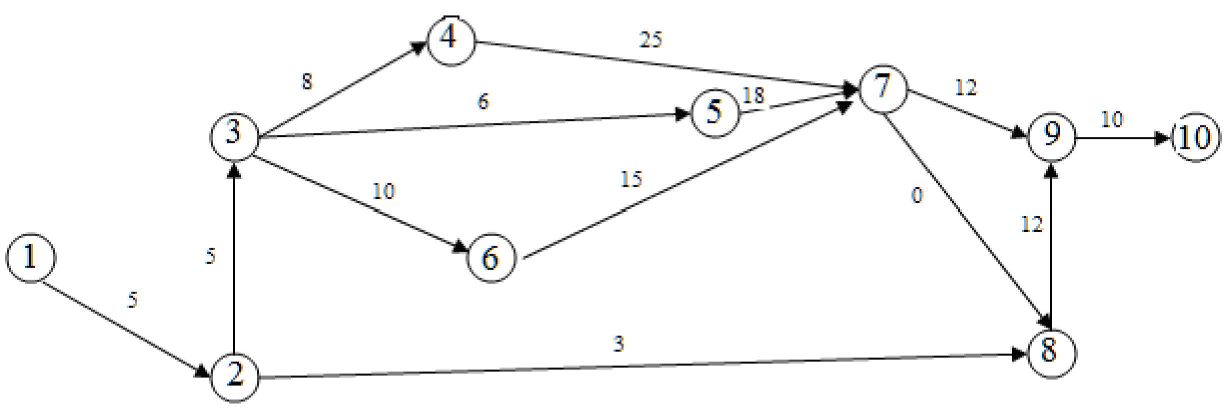


Рис. 1. Мережевий графік

Календарне планування. Застосування методів СПУ має забезпечити одержання календарного плану, що визначає терміни початку і закінчення кожної операції. Побудова мережі являє собою лише перший крок на шляху до досягнення цієї мети. Другим є розрахунок мережевої моделі, який виконують прямо на мережевому графіку, користуючись простими правилами.

До **часових параметрів** подій відносяться:

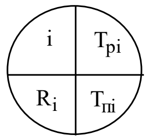
- ранній термін настання події і $- T_p(i)$;
- пізній термін настання події і $- T_n(i)$;
- резерв часу настання події і $- R(i)$.

$T_p(i)$ − це час, необхідний для виконання всіх робіт, що передують даній події і.

$T_n(i)$ − це такий час настання події і, перевищення якого викличе аналогічну затримку настання завершальної події мережі.

$R(i)$ − це такий проміжок часу, на який може бути відстрочено настання цієї події без порушення строків завершення розробки в цілому.

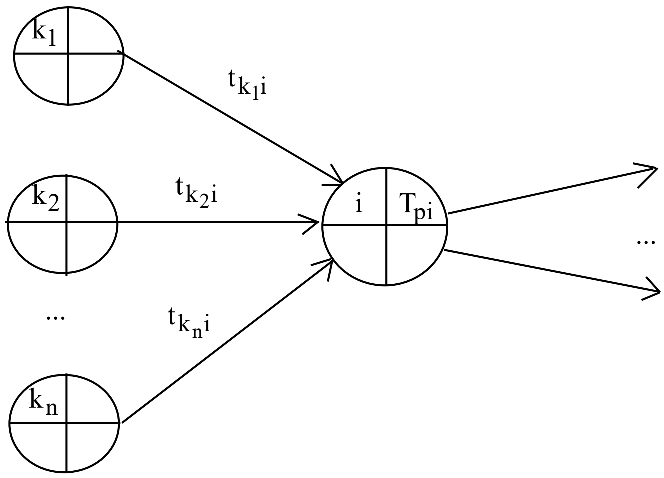
Значення часових параметрів записуються прямо в вершини на мережевому графіку наступним чином:



Розрахунок ранніх термінів звершення подій ведеться від початкової до завершальної.

1) Для вихідної події $T_p(i) = T_n(i) = 0$.

2) Для решти подій $T_\text{p}(i) = \max\limits_{k<i}\left[T_\text{p}(k) + t(k,i)\right]$, де максимум береться по всім роботам (k, i), що входять в подію і:

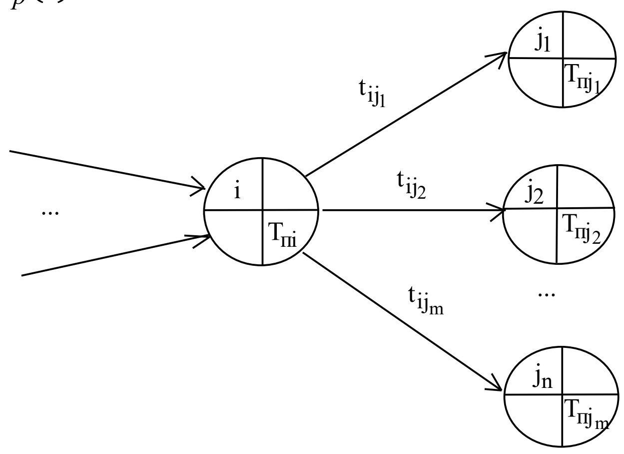


Пізні строки звершення подій розраховуються від завершальної до вихідної.

3) Для завершальної події $T_n(i) = T_p(i)$.

4) $T_n(i) = \min\limits_{j>i}\left[T_n(j) - t(i,j)\right]$, де мінімум береться щодо всіх робіт (i, j), які виходять з події і.

5) $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$:



На основі ранніх і пізніх термінів подій можна визначити часові параметри робіт мережі. При складанні таблиці для запису тимчасових параметрів зазвичай коди робіт записують в певному порядку. Спочатку – всі роботи, що виходять з вихідної, першої події, потім – ті, що з другої, третьої і т.д.

Часовими параметрами роботи є:

- ранній строк початку $T_{pn}(i,j)$;
- пізній строк початку $T_{nn}(i,j)$;
- ранній строк закінчення $T_{pз}(i,j)$;
- пізній строк закінчення $T_{nз}(i,j)$;
- повний резерв $R_n(i,j)$;
- вільний резерв $R_c(i,j)$.

Наведемо методику їх розрахунку:

1) $T_{pn}(i,j) = T_p(i)$;
2) $T_{nn}(i,j) = T_n(j) - t(i,j)$ або $T_{nn}(i,j) = T_{pn}(i,j) - t(i,j)$;
3) $T_{pз}(i,j) = T_{\text{p}}(i) + t(i,j)$ або $T_{pз}(i,j) = T_{pn}(i,j) + t(i,j)$;
4) $T_{nз}(i,j) = T_n(j)$;
5) $R_n(i,j) = T_n(j) - T_p(i) - t(i,j)$;
6) $R_в(i,j) = T_p(j) - T_p(i) - t(i,j)$.

В таблиці 2 наведені параметри робіт з прикладу.

Шлях − це будь-яка послідовність робіт в мережевому графіку, в якій кінцева подія однієї роботи збігається з початковою наступної.

Наприклад, в розглянутому мережевому графіку шляхами є наступні послідовності робіт:

2-3, 3-4, 4-7 або 2,3,4,7;
8-9 або 8,9;
1-2, 2-3, 3-6, 6-7, 7-9, 9-10 або 1,2,3,6,7,9,10.

Повним називається шлях від вихідної до завершальної події, наприклад, 1,2,3,6,7,9,10.

Критичним є максимальний за тривалістю повний шлях.

Таблиця 2

Код роботи	$t(i,j)$	$T_{pn}(i,j)$	$T_{pз}(i,j)$	$T_{nn}(i,j)$	$T_{nз}(i,j)$	$R_n(i,j)$	$R_c(i,j)$
1,2	5	0	5	0	5	0	0
2,3	5	5	10	5	10	0	0
2,8	3	5	8	52	43	35	35
3,4	8	10	18	10	18	0	0
3,5	6	10	16	19	25	9	0
3,6	10	10	20	18	28	8	0
4,7	25	18	43	18	43	0	0
5,7	18	16	34	25	43	9	9
6,7	15	20	35	28	43	8	8
7,8	0	43	43	55	43	0	0
7,9	12	43	55	43	55	0	0
8,9	12	43	55	43	55	0	0
9,10	10	55	65	55	65	0	0

Підкритичним − повний шлях, найближчий за тривалістю до критичного.

Роботи, що лежать на критичному шляху, називають критичними. Вони мають низку особливостей, наприклад, резерви початкових і кінцевих подій критичних робіт дорівнюють нулю.

Першу особливість критичних робіт можна використовувати під час пошуку критичного шляху. Для цього треба виявити всі події, що мають нульовий резерв. У розглянутому прикладі це події 1,2,3,4,7,8,9,10. Але через них проходять три шляхи: а) 1,2,8,9,10; б) 1,2,3,4,7,8,9,10; в) 1,2,3,4,7,9,10.

Безпосереднє підсумовування тривалостей їх робіт показує, що шлях а) не є критичним, незважаючи на те, що події, які лежать на ньому, мають нульовий резерв. Звідси випливає висновок, що вимога нульових резервів подій є необхідною, але недостатньою умовою критичного шляху.

Різниця між тривалостями критичного шляху $T_{кр}$ та будь-якого іншого T_L називається **повним резервом часу** шляху L, тобто $R_L = T_{кр} - T_L$. Він показує, на скільки в сумі може бути збільшена тривалість всіх робіт даного шляху L, щоб при цьому не змінився загальний термін $T_{кр}$ закінчення всіх робіт.

$R_п(i,j)$ демонструє максимальний час, на який може бути збільшена тривалість роботи (i,j) або відстрочено її початок, щоб тривалість максимального шляху не перевищила тривалість критичного. Найважливіша властивість повного резерву роботи (i,j) – це можливість його використовувати частково або повністю, при цьому зменшується повний резерв у операцій, що знаходяться з роботою (i,j) на одних шляхах. Отже, повний резерв часу належить не одній роботі (i,j), а всім, які є на шляхах, що проходять через неї.

$R_в(i,j)$ показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість окремої роботи або відстрочити її початок, не змінюючи ранніх термінів початку наступних робіт, за умови, що подія, яка безпосередньо передує, настала в свій ранній термін. Використання вільного часу на одній з робіт не змінює величини вільних резервів часу інших робіт мережі.

Кінцевим результатом виконуваних на мережевій моделі розрахунків є календарний графік, який іноді називають **графіком прив'язки**. Він відображає взаємозв'язок виконуваних робіт в часі і будується на основі даних про ранні терміни їх початку і закінчення. Для зручності подальшої роботи на ньому можуть бути вказані величини повних і вільних резервів робіт. На вертикальній осі графіка прив'язки відкладаються коди робіт, на горизонтальній − їх тривалості (ранній початок і раннє закінчення робіт).

Графік прив'язки можна побудувати без попереднього розрахунку ранніх термінів початку і закінчення всіх робіт, використовуючи тільки дані про їх тривалість. При цьому необхідно пам'ятати, що робота (i, j) може почати виконуватися тільки після того як будуть виконані всі попередні операції (k, j).

Приклад побудови графіка прив'язки

Побудуємо графік прив'язки для наступних вихідних даних:

(i, j)	$t(i, j)$	Кількість виконавців
1,2	4	5
2,3	5	6
2,4	6	3
2,7	11	4
3,6	10	2
4,5	9	1
5,7	11	3
6,7	9	5
7,8	12	6

Практична цінність графіка прив'язки (рис. 2) полягає в тому, що з його допомогою можна покращувати ефективність використання ресурсу робочої сили, тобто проводити оптимізацію мережевої моделі.

Оптимизація використання ресурсу робочої сили

При оптимізації використання ресурсу робочої сили мережеві роботи найчастіше прагнуть організувати таким чином, щоб:

− кількість одночасно зайнятих виконавців була мінімальною;

− вирівняти потребу в людських ресурсах протягом терміну виконання проєкту.

Для проведення подібних видів оптимізації необхідний **графік завантаження**. На ньому на горизонтальній осі відкладається час, наприклад в днях, на вертикальній − кількість осіб, зайнятих роботою в кожен конкретний день. Для побудови графіка завантаження необхідно:

− на графіку прив'язки над кожною роботою написати кількість її виконавців;

− підрахувати кількість працюючих кожен день виконавців і відкласти на графіку завантаження.

Для зручності побудови і аналізу графіки завантаження і прив'язки слід розташовувати один над іншим.

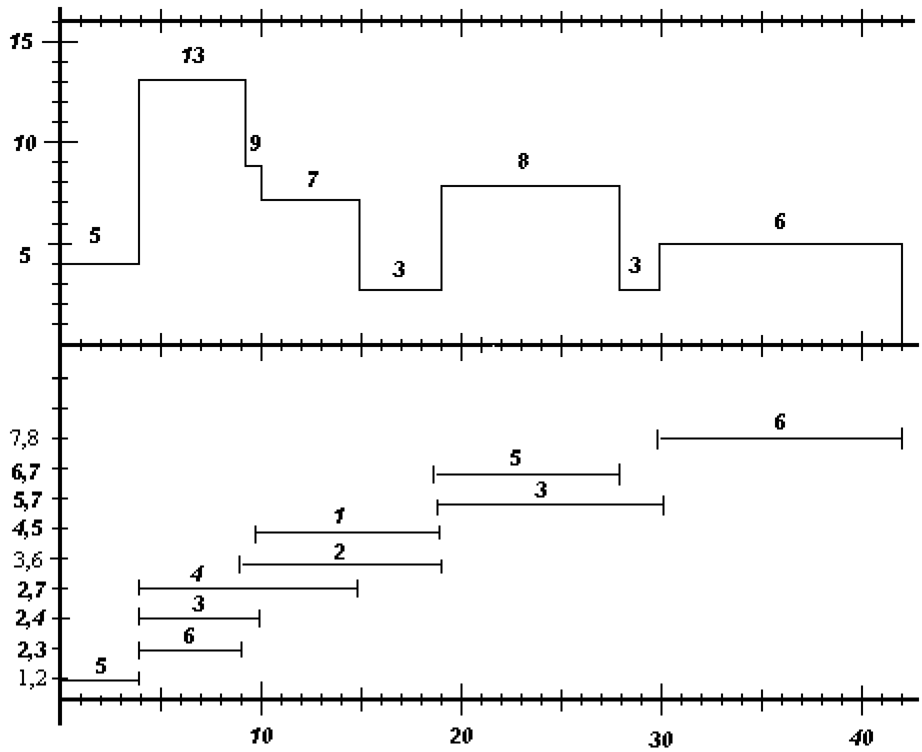


Рис. 2 Графік прив'язки

Приклад побудови графіка завантаження

Описані види оптимізації можуть бути виконані за допомогою зсуву робіт, який здійснюється за рахунок резервів часу: вільного або повного. Після зсуву роботи працівники виконують її вже в інші дні, і тому для кожного з них змінюється кількість виконавців, зайнятих одночасно.

Резерви робіт можна визначити без спеціальних розрахунків, тільки за допомогою графіка прив'язки:

$$R_{\text{в}}(2{,}7) = 15;\ R_{в}(6{,}7) = 2,$$

а повні резерви у рабіт:

$$R_{\text{п}}(2{,}3) = R_{\text{п}}(3{,}6) = R_{\text{п}}(6{,}7) = 2;\ R_{n}(2{,}7) = 15.$$

На рис. 3 показані результати оптимізації за критерієм "min виконавців". З нього видно, що для зниження максимальної кількості одночасно зайнятих виконавців з 13 до 9 осіб достатньо зсунути початок робіт $(2{,}7)$ і $(3{,}6)$ на 5 і 1 день відповідно.

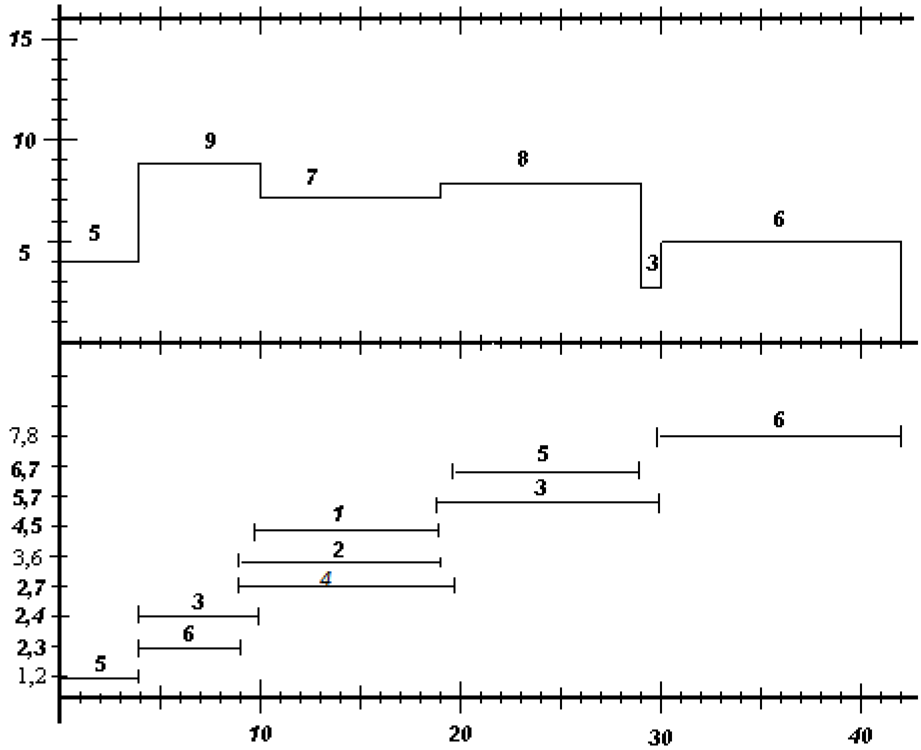


Рис. 3 Оптимізація графіку прив'язки

На рис. 4 продемонстровано результати оптимізації з метою вирівнювання завантаження. Для цього необхідно трохи далі зрушити зазначені роботи, а саме: роботу (2,7) зрушити на 6 днів, а роботу (6,7) − на 2 дні.

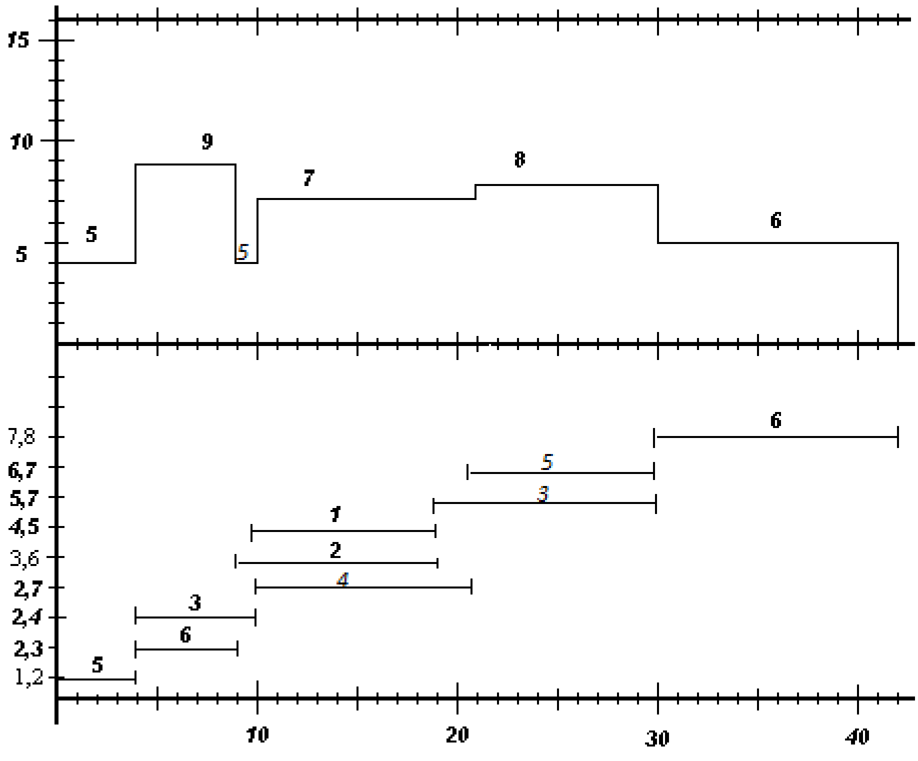


Рис. 4 Вирівнювання завантаження

Проведена оптимізація була заснована на використанні вільних резервів робіт, але застосування і повних резервів також можливе. Різниця між ними полягає в тому, що при зсуві роботи з використанням вільного резерву моменти початку наступних за нею операцій залишаються незмінними (тобто роботи не зрушуються). Під час зсуву з урахуванням повного резерву всі наступні роботи зсуваються (див. рис. 4).

Вправа. Мінімізувати кількість виконавців під час реалізації проєкту, який включає роботи, наведені в таблиці. На рис. 5 забражений графік завантаження для цієї задачі. Простежити різницю між використанням вільних та повних резервів робіт мережевого графіка.

(i,j)	t(i,j)	Кількість виконавців
1,2	10	2
1,3	0	1
1,5	3	8
2,3	6	2
2,4	4	1
3,6	7	3
4,5	6	1
4,6	1	2
5,6	10	1

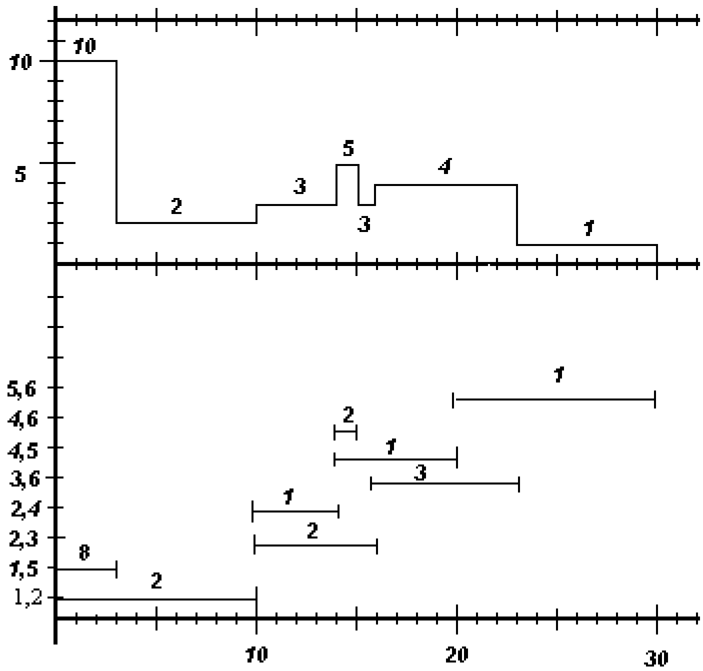


Рис. 4. Мережевий графік для задачі вирівнювання завантаження

Оптимізація типу "час – витрати"

Її мета – скорочення часу виконання проєкту в цілому. Вона має сенс тільки в тому випадку, коли тривалість виконання робіт може бути зменшена за рахунок залучення додаткових ресурсів, що спричиняє підвищення витрат. Для оцінки їх величини використовуються або нормативи, або дані про виконання аналогічних робіт в минулому.

Вихідними даними для проведення оптимізації є:

- $T_н(i,j)$ – нормальна тривалість роботи;
- $T_у(i,j)$ – прискорена тривалість;
- $C_н(i,j)$ – витрати на виконання роботи в нормальний строк;
- $C_у(i,j)$ – витрати на виконання роботи в прискорений строк.

Отже кожна робота має певний максимальний запас часу для скорочення своєї тривалості $Z(i,j)_н(i,j)_у(i,j)_{max}$ (рис. 6).

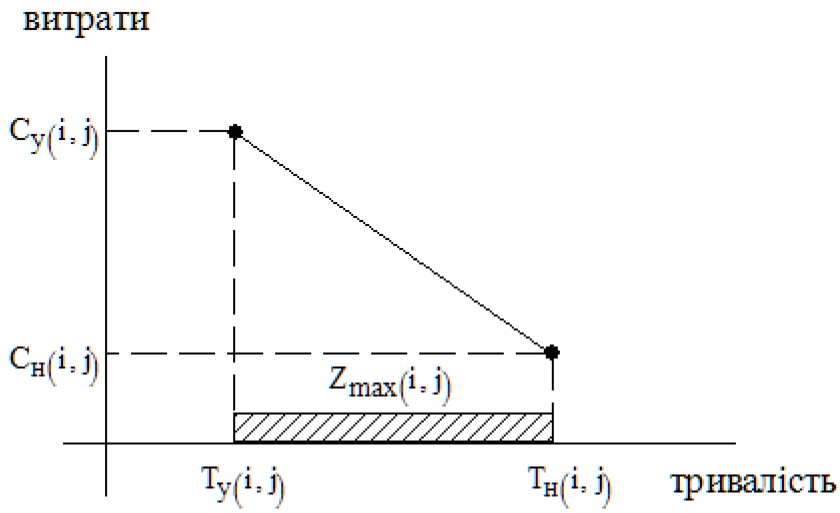


Рис. 6. Графік «тривалість проєкту – витрати»

Для аналіза мережевої моделі в даному вигляді оптимізації використовується коефіцієнт нарощення витрат (коефіцієнт прискорення)

$$k(i,j) = \frac{C_у(i,j) - C_н(i,j)}{T_н(i,j) - T_у(i,j)}.$$

Загальна схема проведення оптимізації

1. Проводиться розрахунок мережі виходячи з нормальних тривалостей робіт.

2. Визначається сума витрат на виконання всього проєкту при нормальній тривалості робіт.

3. Розглядається можливість скорочення тривалості проєкту. Оскільки цього можна досягти за рахунок зменшення тривалості будь-якої критичної роботи, то тільки такі операції піддаються аналізу.

   3.1. Для скорочення вибирається критична робота з min коефіцієнтом наростання витрат $k(i,j)$, у якій є запас скорочення часу.

   3.2. Визначається час $\Delta t(i,j)$, на який необхідно стиснути тривалість роботи (i, j). При цьому керуються такими міркуваннями.

3.3. Максимально можливий запас часу для скорочення роботи на поточний момент $Z(i,j)$ обмежується значенням $T_у(i,j)$, тобто $Z(i,j) = t_{пот}(i,j) - T_у(i,j)$, де $t_{пот}(i,j)$ − поточний час виконання роботи ($t_{пот}(i,j) = T_н(i,j)$ тільки для тих, що ще не зазнали скорочення).

3.4. Крім критичного шляху тривалістю $T_{кр}$, в мережі є **підкритичний** шлях тривалістю $T_{пот}$. Критичний шлях не можна скоротити більше, ніж $\Delta T = T_{кр} - T_{пот}$, оскільки в цьому випадку він перестане бути таким, а **підкритичний** шлях навпаки стане критичним.

3.5. Виходячи з вищезазначеного, час скорочення тривалості обраної роботи (i,j) дорівнює $\Delta t = t_{пот}(i,j) - min[Z(i,j), \Delta T]$. Іншими словами, якщо різниця між тривалістю критичного і підкритичного шляхів ΔT менше поточного запасу часу скорочення роботи $Z(i,j)$, то має сенс скорочувати роботу тільки на ΔT днів. В іншому випадку можна скорочувати роботу повністю на величину $Z(i,j)$.

4. В результаті стиснення критичної операції отримують новий календарний план, можливо з новими критичними і підкритичними шляхами, і обов'язково з новими більш високими витратами на виконання проєкту. Це відбувається внаслідок подорожчання прискореної роботи. Загальна вартість проєкту збільшується на $\Delta C = k(i,j)\Delta t$.

5. Перехід на крок 3, який повторюється доти, доки можливе скорочення часу виконання критичних робіт.

В результаті оптимізації будується графік "Час − витрати" (рис. 5).

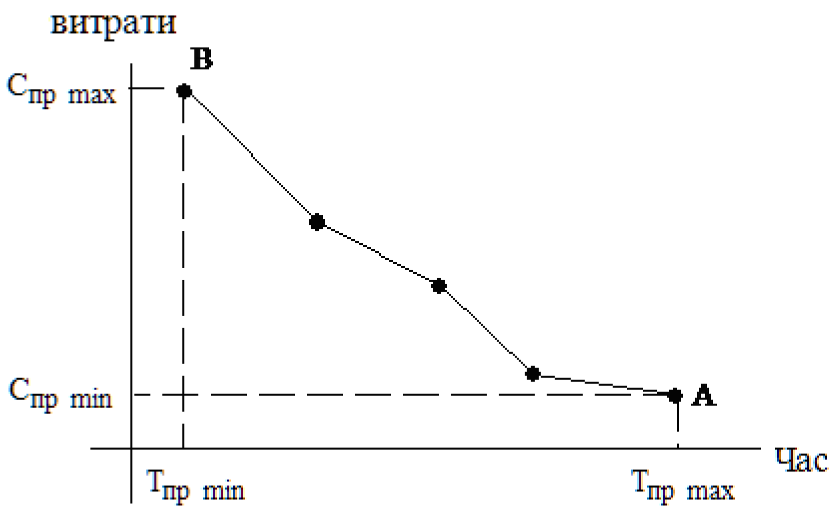


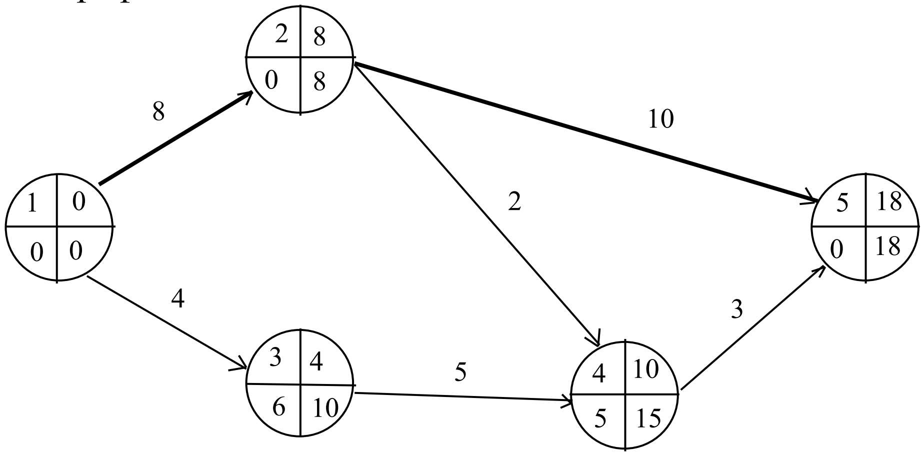
Рис. 5. Графік «Час – Витрати»

Приклад проведення оптимізації

Провести максимально можливе зменшення термінів виконання проєкту при мінімально можливих додаткових витратах (див. таблицю).

(i,j)	Нормальний режим		Прискорений режим		$k(i,j)$
	$T_н(i,j)$	$C_н(i,j)$	$T_у(i,j)$	$C_у(i,j)$	
$(1,2)$	8	100	6	200	50
$(1,3)$	4	150	2	350	100
$(2,4)$	2	50	1	90	40
$(2,5)$	10	100	5	400	60
$(3,4)$	5	100	1	200	25
$(4,5)$	3	80	1	100	10

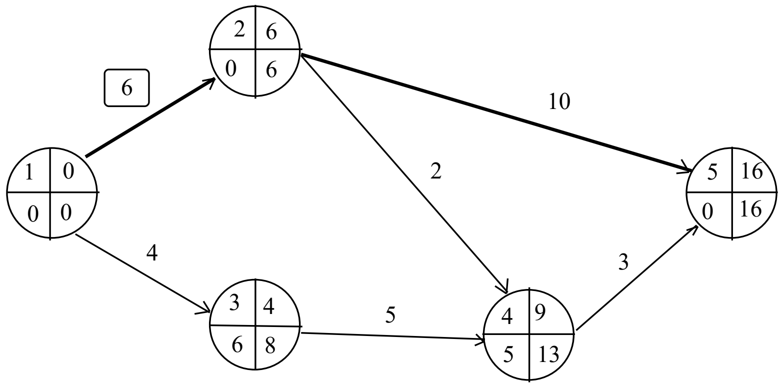
Мережевий графік має вигляд:



1. Виходячи з нормальних тривалостей робіт отримуємо наступні характеристики мережевої моделі.

- Загальні витрати на проєкт $C_{пр}^0 = \sum_{\forall(i,j)} C_н\,(i,j) = 580$ грн
- Тривалість проєкту $T_{кр}^0 = 18$ днів.
- Критичний шлях $L_{кр}^0 = 1{,}2{,}5$ або $L_{кр}^0 = (1{,}2);(2{,}5)$.
- Підкритичний шлях $L_п^0 = 1{,}2{,}4{,}5$ или $L_п^0 = (1{,}2);(2{,}4);(4{,}5)$, $T_п^0 = 13$ днів.

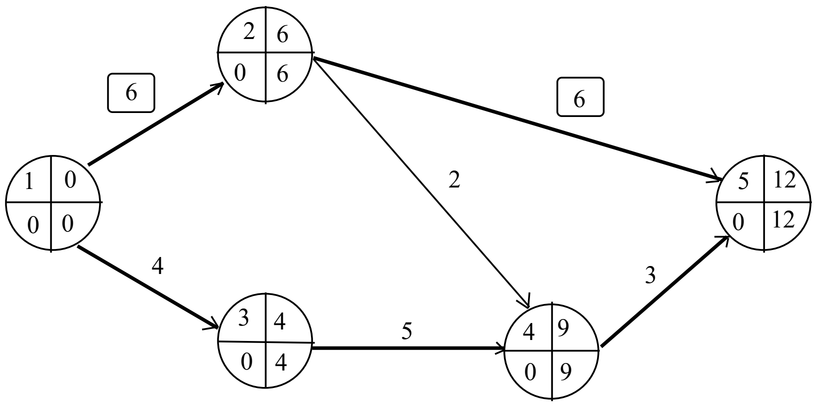
2. Для прискорення вибираємо роботу $(1{,}2)$ с $k(1{,}2) = 50$ грн/день. На даний момент поточний запас скорочення або межа скорочення роботи $(1{,}2)$ $Z^0(1{,}2) = 8 - 6 = 2$. Різниця між тривалістю критичного і підкритичного шляхів $\Delta T = 18 - 13 = 5$ днів. Тому згідно з п.3.2. скорочуємо роботу $(1{,}2)$ на $\Delta t = \min[2{,}5] = 2$ дні. Нове поточне значення $t^1(1{,}2) = 8 - 2 = 6$ днів, а запас її подальшого скорочення повністю вичерпаний,тобто $Z^1(1{,}2) = 0$. Новий мережевий графік має вигляд:



3. Виходячи з нової тривалості роботи $(1,2)$ отримаємо:

- Витрати на роботу $(1,2)$ зросли на $2 \cdot 50 = 100$ грн, тому загальний кошторис проєкту $C_{пр}^{1} = 580 + 100 = 680$ грн.
  - Тривалість проєкту $T_{кр}^{1} = 16$ днів.
  - Критичний шлях $L_{кр}^{1} = (1,2); (2,5)$.
- Підкритичний шлях $L_{п}^{1} = (1,3); (3,4); (4,5)$, $T_{п}^{1} = 12$ днів.

4. Роботу $(1,2)$ не має сенсу розглядати, оскільки $Z^{1}(1,2) = 0$. Для розглядання залишається єдина критична робота $(2,5)$ з $k(2,5) = 60$ грн/день та граничним скороченням $Z^{1}(2,5) = 10 - 5 = 5$ днів. Оскільки $\Delta T = 16 - 12 = 4$ дні, скорочуємо роботу $(2,5)$ на $\Delta t = \min[5,4] = 4$ дні. Нове поточне значення $t^{2}(2,5) = 10 - 4 = 6$ днів, а запас її подальшого скорочення $Z^{2}(2,5) = 1$ день. Новий мережевий графік має вигляд:

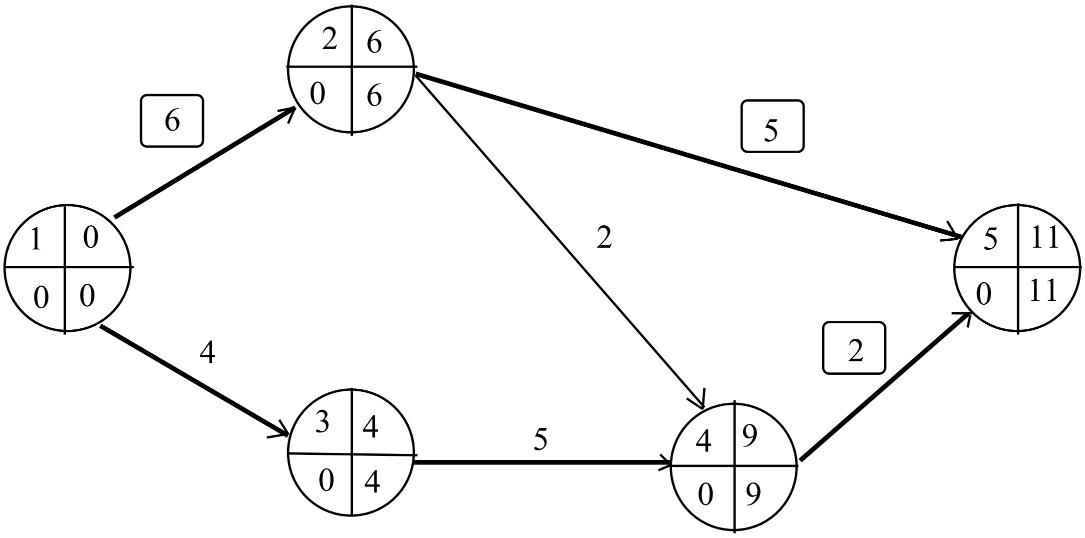


5. Враховуючи нову тривалість роботи $(2,5)$, отримуємо:

- Витрати на роботу $(2,5)$ зросли на $4 \cdot 60 = 240$ грн, тому загальні витрати на проєкт $C_{пр}^{2} = 680 + 240 = 920$ грн.
  - Тривалість проєкту $T_{кр}^{2} = 12$ днів.
  - Два критичних шляхи $L_{кр}^{2} = (1,2); (2,5)$ та $L_{кр}^{2} = (1,3); (3,4); (4,5)$.
- Підкритичний шлях $L_{п}^{2} = (1,2); (2,4); (4,5)$, $T_{п}^{2} = 11$ днів.

6. Поява декількох критичних шляхів говорить про те, що для подальшого скорочення тривалості проєкту необхідно зменшувати довжину всіх критичних шляхів одночасно. З першого кр. шляху $L_{кр}^{2} = (1,2); (2,5)$

можна скоротити тільки роботу $(2{,}5)$ з граничним скороченням $Z^2(2{,}5) = 1$, а з другого − роботу $(4{,}5)$ з $k(4{,}5) = 10$ грн/день і терміном скорочення $Z^2(4{,}5) = 3 - 1 = 2$ дні. Оскільки $\Delta T = 13 - 12 = 1$ день, скорочуємо роботу $(2{,}5)$ і роботу $(4{,}5)$ на $\Delta t = \min[1{,}2{,}1] = 1$ день, де перші два елементи при виборі мінімума − це $Z^2(2{,}5) = 1$ і $Z^2(4{,}5) = 2$. Нове поточне значення $t^3(2{,}5) = 6 - 1 = 5$ днів, і запас його подальшого скорочення вичерпаний: $Z^3(2{,}5) = 0$, для роботы $(4{,}5)$ нове поточне значення $t^3(4{,}5) = 3 - 1 = 2$ дні і $Z^3(4{,}5) = 1$ день. Новий мережевий графік має наступний вигляд:



7. Враховуючи нову тривалість робіт $(2{,}5)$ і $(4{,}5)$, отримуємо:

- Витрати на роботу $(2{,}5)$ зросли на 60 грн, а для роботи $(4{,}5)$ − на 10 грн, тому загальні витрати на проєкт складають 990 грн.
  - Тривалість проєкту $T_{кр}^3 = 11$ днів.
  - Два критичні шляхи $L_{\text{кр}}^3 = (1{,}2); (2{,}5)$ і $L_{кр}^3 = (1{,}3); (3{,}4); (4{,}5)$.
- Підкритичний шлях $L_{\text{п}}^3 = (1{,}2); (2{,}4); (4{,}5)$, $T_n^3 = 10$ днів.

8. Оскільки всі критичні операції шляху $L_{\text{кр}}^3 = (1{,}2); (2{,}5)$ стиснуті до встановленої межі $T_y(i,j)$, то подальше скорочення тривалості проєкту не можливе. Результати проведеної оптимізації ілюструються графіком, наведеним на рис. 7.

Під параметрами робіт $C_{\text{н}}(i,j)$ і $C_y(i,j)$ розуміються так звані прямі витрати, тобто непрямі витрати типу адміністративно – управлінських до уваги не беруться. Однак їх вплив враховується при виборі остаточного календарного плану проєкту. На відміну від прямих непрямі витрати при зменшенні тривалості проєкту зменшуються, що показано на графіку. Оптимальний календарний план відповідає мінімуму загальних витрат (точка А).

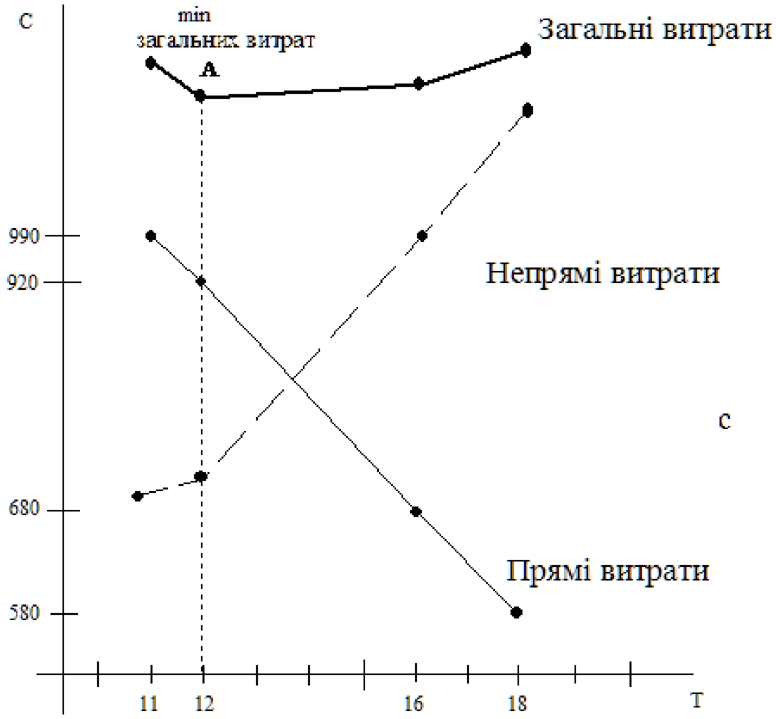


Рис. 7. Залежність прямих витрат на проєкт від його тривалості

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

2. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И.Савельева. – М.: Экономика, 1987. – 240 с.

3. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
n	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	3	3	2	2

варіант	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
задача	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	1	2	5
n	4	4	4	4	1	1	5	5	6	2	1	6	7	7

варіант	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
задача	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	5	6	4	5	7	7	7	6	1	3	1	1	3	4

варіант	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
n	6	7	2	1	3	4	5	6	1	4	3	6	6	6

Задача 1. Розгляньте наступну мережу проєкту з показниками тривалості робіт в днях і інформацією про витрати на скорочення їх тривалості за рахунок залучення додаткових фінансових коштів.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	–	3	2	800	1400
B	–	2	1	1200	1900
C	A	5	3	200n	2800
D	B	5	3	1500	2300
E	C, D	6	4	1800	1800n
F	C, D	2	n+1	600	1000
G	F	2	1	500	1000

Знайдіть критичний шлях, очікуваний час завершення проєкту і витрати на його реалізацію при нормальному часі виконання всіх робіт.

Припустимо, що керівництво хотіло б завершити проєкт в 12-тижневий термін. Сформулюйте модель лінійного програмування, яку можна було б використовувати для визначення мінімальних витрат на скорочення часу виконання проєкту.

Яка тривалість проєкту при нормальному часі виконання робіт?

Які витрати (тис. грн) на виконання проєкту при нормальній тривалості робіт?

Які мінімальні витрати (тис. грн) на виконання проєкту в 10-тижневий термін?

Для якої кількості робіт необхідно скоротити час виконання, щоб виконати проєкт за 10 тижнів?

Задача 2. У наступній таблиці подано інформацію про тривалість робіт проєкту і витратах на їх виконання.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	–	4	2	50	70
B	–	9	n+2	40	55
C	A	2	1	20	24
D	A	8	n	100	130
E	C, B	3	2	50	60
F	C, B	3	3	250	250
G	D, E	5	3	600	760

Знайдіть критичний шлях і тривалість проєкту при нормальному часі виконання робіт. Чи можливо виконати проєкт за рік? За 10 місяців?

Яка тривалість проєкту (місяць) при нормальному часі виконання робіт?

Які витрати на виконання проєкту (тис. грн) при нормальному часі виконання робіт?

Які мінімальні витрати (тис. грн) на виконання проєкту за один рік?

За який мінімальний час може бути виконаний проєкт?

Задача 3. Мінімізація витрат на скорочення часу реалізації проєкту.

Проєкт пусконалагодження комп'ютерної системи складається з восьми робіт. У наступній таблиці вказано їх взаємозв'язок, нормальний час виконання і дані, що характеризують можливість скорочення тривалості.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	–	3	1	900	1700
B	–	7	n	2000	4000
C	A	2	1	500	1000
D	B, C	5	3	1800	2400
E	D	4	3	1500	1850
F	E	3	1	3000	3900
G	B, C	9	n+1	8000	9800
H	F, G	3	2	1000	2000

Визначте мінімальну тривалість проєкту при нормальному часі виконання робіт. Чи можна зменшити тривалість проєкту при додаткових витратах?

1. Яка тривалість проєкту при нормальному часі виконання робіт?

2. Скільки робіт в цьому випадку є критичними?

3. Які витрати на виконання проєкту при нормальному часі виконання робіт?

4. З якими мінімальними додатковими витратами можна виконати цей проєкт за 16 тижнів?

Задача 4. Контроль витрат на виконання проєкту.

Перелік робіт проєкту, час їх виконання та оцінки витрат на виконання робіт відображені в наступній таблиці:

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	2	–	1	90	170
B	10	–	n+3	2000	4000
C	3	A	1	500	1000
D	3	B	3	180	240
E	2	B	3	1500	1850
F	8	C, D	n+1	6000	7800
G	6	E	n	1000	2000

Питомі витрати визначені в припущенні про те, що вони тривають рівномірно протягом терміну виконання роботи.

Потрібно визначити, в якому діапазоні можуть змінюватися фактичні витрати на виконання проєкту за умови, що його буде здійснено за мінімальний час.

1. За який мінімальний час може бути виконаний проєкт?
2. При якому максимальному значенні сукупних витрат, зроблених за перші 3 місяці реалізації проєкту, він може бути виконаний за мінімальний час?
3. При якому мінімальному значенні сукупних витрат, зроблених за перші 3 тижні реалізації проєкту, він може бути виконаний за мінімальний час?
4. При якому максимальному значенні сукупних витрат, зроблених за 6 місяців реалізації проєкту, він може бути виконаний за мінімальний час?
5. При якому мінімальному значенні сукупних витрат, зроблених за 6 місяців реалізації проєкту, він може бути виконаний за мінімальний час?

Задача 5. Відділ ЕОМ економічного факультету МДУ розробив пропозиції щодо впровадження нової комп'ютерної системи для потреб адміністрації факультету. В них включений перелік робіт, які необхідно виконати, щоб ввести систему в дію. Відповідну інформацію подано в наступній таблиці. Час в тижнях, витрати − в тис. грн

Робота	зміст роботи	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	Визначити попит	–	10	8	30	70
B	Заказати устаткування	A	8	6	120	150
C	Встановити устаткування	B	10	n+1	100	160
D	Створити комп'ютерний клас	A	7	6	40	60 – 2n
E	Провести курс навчання	D	10	n+2	50	94
F	Опробовати систему	C, E	3	3	60	60

Яка тривалість проєкту (у тижнях) при нормальному часі виконання робіт?

Які витрати на виконання проєкту (тис. грн) при нормальному часі виконання робіт?

Які мінімальні витрати (тис. грн) на виконання проєкту за 24 тижні?

За який мінімальний час може бути виконаний проєкт?

Задача 6. Конструкторське бюро Київського годинникового заводу розробило новий настільний радіобудильник. На думку проєктувальників запуск в серію нового продукту дозволить розширити ринок збуту і отримати додатковий прибуток.

Керівництво КГЗ вирішило провести роботу з вивчення можливості реалізації проєкту. Кінцевим результатом цього дослідження повинна стати доповідь з рекомендаціями щодо дій, які треба зробити для організації виробництва і збуту нового продукту. Перелік робіт, час, необхідний для їх виконання (в тижнях) і витрати (в тис. грн) вказані в наступній таблиці.

Робота	зміст роботи	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	Підготувати конструкторський проєкт	–	5	8	30	70
B	Розробити маркетинговий план	–	2	6	120	150
C	Підготувати маршрутні карти	A	11	n+1	100	160
D	Побудувати прототип	A	4	6	40	60 – 2n
E	Підготувати рекламну брошуру	A	13	n+2	50	94
F	Підготувати оцінку витрат	C	10	n+1	100	160
G	Провести попереднє тестування	D	3	6	40	60 – 2n
H	Виконати дослідження ринку	B, E	9	n+2	50	94
I	Підготувати доповіді щодо цін	H	8	n+1	100	160
J	Підготувати заключну доповідь	F,G,I	2	6	40	60 – 2n

Знайдіть критичний шлях для цього проєкту, найбільш ранній і пізній час початку кожної роботи. На основі цих даних визначте динаміку зростання загальних витрат. Використовуйте отримані оцінки кошторису для контролю за фактичним витрачанням коштів. Для кожної з нижченаведених точок у часі визначте перевитрату чи економію.

а) В кінці 5-го тижня фактичні витрати склали 100 тис. грн

б) У кінці 10-го тижня фактичні витрати склали 230 тис. грн

Передбачається, що фінансування всіх робіт здійснюється пропорційно часу їх виконання.

Задача 7. Конструкторське бюро Дніпровського машинобудівного заводу розробило новий роутер. На думку проєктувальників запуск в серію продукту дозволить розширити ринок збуту і отримати додатковий прибуток.

Керівництво ДМЗ вирішило провести роботу з вивчення можливості реалізації проєкту. Кінцевим результатом цього дослідження повинна стати доповідь з рекомендаціями щодо дій, які треба зробити для організації виробництва і збуту нового продукту. Перелік робіт, час, необхідний для їх виконання (в тижнях) і витрати (в тис. грн) вказані в наступній таблиці.

Робота	зміст роботи	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	Підготувати конструкторський проєкт	–	5	1	900	1700
B	Розробити маркетинговий план	–	12	n	200	400
C	Підготувати маршрутні карти	A	3	1	500	1000
D	Побудувати прототип	A	4	3	1800	2400
E	Підготувати рекламну брошуру	A	n+5	n	1500	1850
F	Підготувати оцінку витрат	C	2	1	3000	3900
G	Провести попереднє тестування	D	10	n+1	8000	9800
H	Виконати дослідження ринку	B, E	3	3	1500	1850
I	Підготувати доповіді про ціни	H	2	1	3000	3900
J	Підготувати заключну доповідь	F,G,I	9	n+1	8000	9800

Знайдіть критичний шлях для проєкту, найбільш ранній і пізній час початку кожної роботи. На основі цих даних визначте динаміку зростання загальних витрат. Використовуйте отримані оцінки кошторису для контролю за фактичним витрачанням коштів.

Передбачається, що фінансування всіх робіт здійснюється пропорційно часу їх виконання.

За який мінімальний час може бути виконаний проєкт? Чому дорівнює максимальне значення сукупних витрат не кінець 5-го тижня, при якому проєкт може бути здійснено за час, відповідний довжині критичного шляху?

Яка величина нестачі або перевитрати коштів в кінці 5-го тижня?

Яка величина нестачі коштів в кінці 10-го тижня?

Чому дорівнює мінімальне значення сукупних витрат не кінець 5-го тижня, при якому проєкт може бути виконаний за час, відповідний довжині критичного шляху?

Задача 8. Нижче подано мережу, що відображає проєкт реконструкції складу, в також дані про час в тижнях і витратах в тис. грн.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Прискорений термін виконання роботи	Витрати при нормальному терміні, грн	Витрати при мінімальному терміні, грн
A	-	10	n	2000	4000
B	A	12	n+1	50	100
C	–	3	3	180	240
D	C	4	3	1500	1750
E	B, D	2	1	3000	3600
F	C	9	n+1	8000	9800
G	E, F	10	n+2	1000	2000
H	E, F	5	3	1500	1850
I	G	5	1	3000	3900
J	G	11	n+1	8000	9800
K	H, I	3	2	1000	2000

Знайдіть критичний шлях для проєкту, найбільш ранній і пізній час початку кожної роботи. На основі цих даних визначте динаміку зростання загальних витрат. Використовуйте отримані оцінки кошторису для контролю за фактичним витрачанням коштів. Для кожної з нижченаведених точок у часі визначте перевитрату чи економію.

а) В кінці 4-го тижня фактичні витрати склали 35 тис. грн.

б) У кінці 8-го тижня фактичні витрати склали 90 тис. грн.

Передбачається, що фінансування всіх робіт здійснюється пропорційно часу їх виконання.

За який мінімальний час може бути виконаний проєкт?

Чому дорівнює максимальне значення сукупних витрат на кінець 4-го тижня, при якому проєкт може бути здійснено за час, відповідний довжині критичного шляху?

Задача 9. Нижче подано мережу, що відображає проєкт реконструкції складу, в також дані про час в тижнях і витратах в тис. грн.

Визначте критичний шлях для даного проєкту, найбільш ранній і найбільш пізній час початку кожної роботи. Визначте динаміку зростання загальних витрат на проєкт, засновану на даних про найбільш ранньому і найбільш пізньому часу початку робіт. Використовуйте отримані оцінки кошторису для контролю за фактичним витрачанням коштів. Для кожної з нижченаведених точок у часі визначте перевитрату чи економію.

а) В кінці 4-го тижня фактичні витрати склали 30 тис. грн.

б) У кінці 8-го тижня фактичні витрати склали 100 тис. грн.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Витрати на виконання роботи
A	–	n	6
B	A	2	4
C	–	2	15
D	C	3	10
E	B, D	n	30
F	C	2	20
G	E, F	n	5n
H	E, F	2	6
I	G	2	12
J	G	3	8
K	H, I	3	9

Передбачається, що фінансування всіх робіт здійснюється пропорційно часу їх виконання.

Чому дорівнює мінімальне значення сукупних витрат не кінець 4-го тижня, при якому проєкт може бути виконаний за час, відповідний довжині критичного шляху?

Яка величина нестачі або перевитрати коштів в кінці 4-го тижня?

Задача 10. Нижче подано мережу, що відображає проєкт реконструкції складу, в також дані про час в тижнях і витратах в тис. грн.

Робота	Безпосередньо попередня робота	Термін виконання роботи	Витрати на виконання роботи
A	-	n	6
B	A	2	4n
C	-	3	15
D	C	3	18
E	B, D	2	30
F	C	2	20
G	E, F	n	2
H	E, F	3	6
I	G	2	12
J	G	n	2n
K	H, I	3	9

Знайдіть критичний шлях для цього проєкту, найбільш ранній і пізній час початку кожної роботи. На базі цих даних визначте динаміку зростання загальних витрат. Використовуйте отримані оцінки кошторису для контролю за фактичним витрачанням коштів. Для кожної з нижченаведених точок у часі визначте перевитрату чи економію.

а) В кінці 4-го тижня фактичні витрати склали 35 тис. грн.

б) У кінці 8-го тижня фактичні витрати склали 90 тис. грн.

Передбачається, що фінансування всіх робіт здійснюється пропорційно часу їх виконання.

За який мінімальний час може бути виконаний проєкт?

Чому дорівнює максимальне значення сукупних витрат на кінець 4-го тижня, при якому проєкт може бути виконаний за час, відповідний довжині критичного шляху?

Поточні контрольні запитання

1. Що є об’єктом і предметом вивчення методів мережевого планування і управління?
2. Що розуміють під календарним плануванням?
3. Що розуміють під структурним плануванням?
4. Що розуміють під оперативним плануванням?
5. Назвіть параметри робіт мережевого графіка.
6. Назвіть часові параметри подій мережевого графіка.
7. Який шлях називається критичним, підкритичним?
8. Які є типи оптимізації мережевого графіка?
9. Що показує вільний резерв часу роботи?
10. Який зміст має повний резерв часу роботи?

Практичне заняття № 9. Системи масового обслуговування

Мета: ознайомитися з математичними моделями систем масового обслуговування (СМО), методами розрахунку їх параметрів.

План

1. Основні поняття. Класифікація систем масового обслуговування
2. Потоки подій. СМО без черги. Одноканальні СМО
3. Багатоканальні СМО з обмеженою чергою, з необмеженою чергою
4. Імітаційне моделювання СМО

Опорні поняття

Основні поняття. Класифікація систем масового обслуговування

Під час розгляду операцій дослідники часто мають справу з системами, призначеними для багаторазового використання при розв'язанні однотипових задач − системами масового обслуговування (СМО). Наприклад, перукарні, СТО, квиткові каси, крамниці, обчислювальні комплекси, ремонтні майстерні і т.п.

Кожна СМО містить певну кількість сервісних одиниць (пристроїв, пунктів, станцій), які називаються каналами: лінії зв'язку, робочі точки, обчислювальні машини, продавці та інше. За їх числом СМО розділяють на одноканальні та багатоканальні.

Заявки поступають в таку систему зазвичай нерегулярно, утворюючи так званий випадковий потік. Його випадковість, а також час обслуговування заявок є причиною того, що СМО виявляється завантаженоє нерівномірно.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що пов'язують задані умови роботи СМО (число каналів, їх продуктивність, характер потоку заявок) з показниками ефективності СМО, які описують її здатність обслуговувати потік заявок.

СМО поділяють на два основних класи: з відмовами та з очікуванням (чергою). Другі мають різні типи залежно від організації черги: з обмеженою або необмеженою, а також з обмеженим часом очікування і т.п.

Для класифікації СМО важливу роль відіграє дисципліна обслуговування, що визначає порядок вибора заявок з числа поданих і порядок розподілу їх між вільними каналами. За цією ознакою обслуговування заявки може бути організовано за принципом «перша надійшла – першою обслужено», «остання надійшла – першою обслужено» або обслуговування з пріоритетом.

Поняття марковського випадкового процесу

Процес роботи СМО є випадковим, тобто зі зміною стану будь-якої системи відповідно з імовірнісними закономірностями.

Процес є таким, що має **дискретні стани**, якщо їх усі $(S_1, S_2, \ldots)$ можна заздалегідь перерахувати, а перехід системи з стану в стан відбувається миттєво. Під час **процесів з неперервним часом** моменти можливих переходів системи із стану в стан є не фіксованими, а випадковими.

Процес роботи СМО є випадковим з дискретними станами і неперервним часом.

Математичний аналіз роботи СМО суттєво спрощується, якщо її процес є **марковським**, або **випадковим без післядії**, коли для будь-якого моменту часу t_0 ймовірнісні характеристики в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент t_0 і не залежить від того, коли і як система прийшла у цей стан.

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою − так званим **графом станів**. Стани зображуються прямокутниками (колами), а можливі переходи із стану в стан − стрілками (орієнтованими дугами), що їх з'єднують.

Потоки подій

Під ними розуміється послідовність однорідних подій, що проходять одна за одною в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмов комп'ютера, потік покупців і т.п.).

Потік характеризується **інтенсивністю** Λ – частотою появи подій, що надходять в СМО в одиницю часу.

Потік називається **регулярним**, якщо події відбуваються послідовно через певні рівні проміжки часу. Прикладом є потік виробів на конвеєрі складального цеху (з постійною швидкістю руху).

Потік подій називається **стаціонарним**, якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від часу. Зокрема, інтенсивність стаціонарного потоку є величиною постійною: Χ (t) = Χ. Наприклад, потік автомобілів на міському проспекті не є стаціонарним протягом доби, але його можна вважати таким, скажімо, в години пік. В цьому випадку фактичне число автомобілів в одиницю часу (наприклад, кожну хвилину) може помітно відрізнятися, але середнє буде постійним і не залежатиме від часу.

Потік подій – **без наслідку** – це коли для будь-яких двох непересічних ділянок часу τ_1, і τ_2 число подій, що потрапляють на одну з них, не залежить від числа подій, що потрапляють на інші. Наприклад, потік пасажирів, що входять в метро, практично не продукує наслідку. А, скажімо, потік відвідувачів крамниці, що відходять з покупками від прилавка, вже його має (хоча б тому, що інтервал часу між окремими покупцями не може бути меншим, ніж мінімальний час обслуговування кожного з них).

Потік подій називається **ординарним**, якщо ймовірність потрапляння на елементарну ділянку часу Δt двох і більше подій дуже мала порівняно з імовірністю попадання однієї події. Іншими словами, потік є ординарним, якщо події з'являються поодинці, а не групами. Наприклад, потік поїздів, що під’їжджають до станції, є таким, а потік вагонів – ні.

Потік подій називається **найпростішим** (або **стаціонарним пуассонівським**), якщо він одночасно є стаціонарним, ординарним і не має наслідку. Назва пояснюється тим, що СМО з найпростішими потоками властив найбільш простий математичний опис.

Регулярний потік не є найпростішим, оскільки володіє наслідком: моменти появи подій в такому потоці жорстко зафіксовані.

Твердження. При накладенні (суперпозиції) досить великого числа n незалежних, стаціонарних і ординарних потоків (порівнянних між собою за інтенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) виходить потік, близький до найпростішого з інтенсивністю λ, яка дорівнює сумі інтенсивностей вхідних потоків, тобто

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Розглянемо найпростіший потік подій як необмежену послідовність випадкових точок на осі часу. Число m подій, що попадають на довільний проміжок часу τ, розподілено за **законом Пуассона**

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (1)$$

для якого математичне очікування випадкової величини дорівнює її дисперсії: $a = \sigma^2 = \lambda\tau$.

Зокрема, ймовірність того, що за час τ не відбудеться жодної події, становитиме

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}. \quad (2)$$

Знайдемо розподіл інтервалу часу T між довільними двома сусідніми подіями найпростішого потоку.

Згідно з (2) імовірність того, що на проміжку часу довжини t не відбудеться жодної з наступних подій, становить:

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda\tau}, \quad (3)$$

а ймовірність протилежної події, тобто функція розподілу випадкової величини T, є

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda\tau}, \quad (4)$$

Щільність імовірності випадкової величини є похідною її функції розподілу, тобто

$$\phi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \quad (5)$$

Розподіл, що задається щільністю (5) або функцією розподілу (4), називається **показниковим** (або **експоненціальним**).

Отже, інтервал часу між двома будь-якими сусідніми подіями має показники розподілу, для якого:

$$a = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda}. \quad (6)$$

Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ імовірність попадання на елементарний (малий) проміжок часу Δt хоча б однієї події згідно з (4) становить:

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda\Delta\tau} \approx \lambda\Delta t. \quad (7)$$

Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності подій

Розглянемо математичний опис марковського процесу з дискретними станами і неперервним часом на наступному прикладі.

Нехай пристрій складається з двох вузлів, кожен з яких може в будь-який момент часу вийти з ладу, після чого миттєво починається ремонт, тривалість якого невідома заздалегідь.

Можливі стани системи: S_0 − обидва вузли справні; S_1 − перший вузол ремонтується, другий справний; S_2 − другий вузол ремонтується, перший справний; S_3 − обидва вузли ремонтуються. Граф системи наведений на рис. 1.

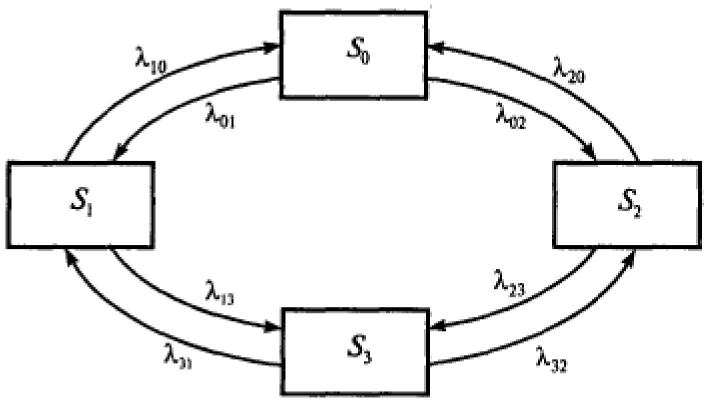


Рис. 1. Граф станів СМО

Тут $\lambda_{ij},\ i,j=0,1,2,3$ − інтенсивності переходів системи із стану S_i в стан S_j.

Імовірністю i -го стану називається ймовірність $p_i(t)$ того, що в момент часу t система буде знаходитися в i -му стані. Вочевидь, для будь-якого моменту часу t

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1. \tag{8}$$

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів записується в такий спосіб:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_2 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3. \end{cases} \tag{9}$$

Правило побудови рівнянь Колмогорова: ліворуч в кожному виразі записується похідна імовірності i-го стану; праворуч − сума добутків ймовірностей всіх станів, які безпосередньо передують йому, на інтенсивності відповідних потоків подій, мінус сумарна інтенсивність всіх потоків, які виходять з i-го стану, помножена на його ймовірність.

Систему (9) доповнюють рівнянням (8), оскільки в ній кількість незалежних рівнянь менше на одиницю за їх загальне число.

Для того, щоб знайти єдиний розв'язок системи (8), (9), потрібно задати так звані початкові умови − імовірності станів в початковий момент часу. Наприклад, якщо вважати, що в момень часу $t = 0$ обидва вузли системи, які розглядається, були справними, то

$$p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$$

Рівняння Колмогорова дають можливість знайти всі ймовірності станів як функції часу. Особливий інтерес становлять імовірності системи $p_i(t)$ в граничному стаціонарному режимі, тобто при $t \to \infty$. Вони називаються граничними або фінальними.

В теорії випадкових процесів доведено, що у разі, коли кількість станів системи обмежена і з кожного з них можна (за скінченне число кроків) перейти в будь-який інший стан, то граничні ймовірності відсутні.

Гранична ймовірність стану S_i має чіткий зміст: вона показує середній відносний час перебування системи в цьому стані.

Оскільки граничні ймовірності незмінні, то зліва в рівняннях (9) слід замінити похідні їх нульовими значеннями і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що описує стаціонарний режим:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_2 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases} \tag{10}$$

Систему (10) можна отримати безпосередньо за графом станів, якщо діяти за наступним правилом: ліворуч в рівняннях знаходиться гранична ймовірність даного стану, помножена на сумарну інтенсивність всіх вихідних з нього потоків, а праворуч − сума добутків інтенсивностей всіх його вхідних потоків на ймовірності тих станів, з яких ці потоки виходять.

Багатоканальні СМО та характеристики їх ефективності

Розглянемо процес надання певної послуги деякою дільницею. Будемо вважати, що потік заявок на обслуговування є стаціонарним, тобто його ймовірнісні характеристики не залежать від часу і λ − інтенсивності вхідного потоку заявок. Звісно, це не означає, що фактичне число заявок в одиницю часу буде незмінним. Потік не є регулярним і містить згущення і розрідження, які в свою чергу не мають закономірного характеру, а середнє число подій, що відбуваються в одиницю часу, є константним. Потік заявок на послугу не має післядії, оскільки події, що його утворюють, з'являються незалежно одна від одної, і кожна має свої причини. Потік заявок є також ординарним, позаяк імовірність попадання на малий проміжок часу двох і більше подій є дуже малою у порівнянні з ймовірністю потрапляння однієї події. Отже, потік заявок на послугу можна вважати пуассоновським. Крім того, будемо припускати, що цей випадковий процес є марковським, тобто таким, для якого передісторією можна знехтувати. Потік обслуговування – потік заявок, що обслуговуються одним неперервно зайнятим каналом – також його будемо вважати найпростішим, причому середній час обслуговування $\bar{t}_{\text{об}}$ обернено до величини інтенсивності обслуговування μ: $\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}$.

Залежно від того, як математично описана система масового обслуговування, будуть сформульовані критерії оптимальності ефективності її роботи.

Спочатку розглянемо дільниці з надання послуги як багатоканальну систему з відмовами (класичну задачу Ерланга), яка містить n постів обслуговування, і знайдемо граничні ймовірності станів системи, а також показники її ефективності, серед яких:

– A – абсолютна пропускна здатність СМО;
– Q – відносна пропускна здатність, тобто середня частка заявок, що надійшли і обслуговуються системою;
– $P_{відм}$ – імовірність відмови, тобто того, що заявка надійде, але покине систему без сервісу;
– $\bar{k}$ – середнє число зайнятих каналів.

Граф станів такої системи наведений на рис. 2.

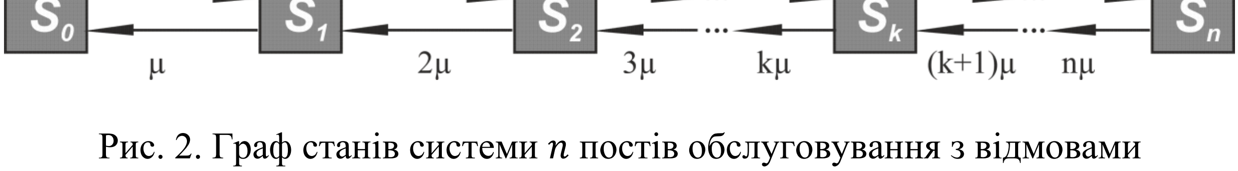


Рис. 2. Граф станів системи n постів обслуговування з відмовами

Середнє число заявок, що надходить за середній час обслуговування одного замовлення, виражає коефіцієнт завантаженості $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. В теорії масового обслуговування величину ρ також називають зведеною інтенсивністю потоку заявок або інтенсивністю навантаження одного каналу.

Граничні ймовірності станів відкритої СМО без черги обчислюються за формулами Ерланга:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0,\ k = \overline{1,n}. \quad (11)$$

Імовірністю відмови системи є гранична ймовірність того, що всі канали системи будуть зайняті:

$$P_{відм} = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (12)$$

Відносна та абсолютна пропускна здатність СМО розраховуються відповідно за формулами:

$$Q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0;\ A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \quad (13)$$

Середнє число зайнятих каналів

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k,$$

де p_k– граничні ймовірності станів, що розраховуються за формулами (11). Оскільки кожен зайнятий пост обслуговує в середньому μ заявок в одиницю часу, то:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \quad (14)$$

Оцінювання ефективності роботи дільниці з надання послуги (за відсутності черги) можна здійснювати за різними критеріями оптимальності. В межах даної роботи поставимо такі дві задачі оптимізації: 1) знайти мінімальне число постів дільниці, які б забезпечували послугою в середньому не менш ніж 90 % від заявок, що надходять; 2) знайти оптимальну кількість постів дільниці, при якій доходи від виконання заявок якомога більше перекривали б втрати від простою постів. Якщо прийняти умову, що у вартісному вираженні дохід від експлуатації одного поста і витрати на його утримання при вимушеному простої майже ті самі, то чистий дохід W дільниці визначиться за наступною формулою:

$$W = Q - M(n), \quad (15)$$

де $M(n)$– число постів, що вимушено простоюють, яке розраховується за наступною формулою:

$$M(n) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k (n - k). \quad (16)$$

Далі припустимо, що дільниця з надання послуги математично може бути представлена як система масового обслуговування з очікуванням, і поряд з введеними показниками ефективності її роботи будемо розглядати наступні характеристики:

– $L_{сист}$ – середнє число заявок в системі;

– $T_{сист}$– середній час перебування клієнта на дільниці;

– $L_{черги}$– середнє число клієнтів в черзі на обслуговування (довжина черги);

– $P_{черги}$– ймовірність того, що клієнт з’явиться в черзі;

– $T_{черги}$– середній час перебування клієнта в черзі;

– $P_{зайн}$– ймовірність того, що пост з надання послуги зайнятий (степінь завантаження посту).

Якщо вважати, що довжина черги необмежена, а постів в системі обслуговування n, інтенсивності потоків заявок та обслуговування відповідно λ та μ (граф станів такої системи показаний на рис. 3), то граничні ймовірності станів n -канальної системи з необмеженою чергою і вказані показники розраховуються відповідно за формулами, наведеними в табл. 1.

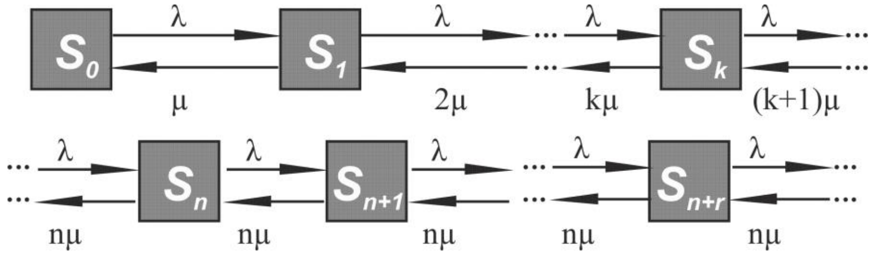


Рис. 3. Граф багатоканальної СМО з необмеженою чергою

В задачі раціональної організації СМО у припущенні, що клієнти можуть очікувати на своє обслуговування досить довго і не залишають чергу, як критерій оптимальності будемо розглядати мінімальну кількість постів з надання послуги, при якій черга не буде зростати нескінченно.

І наприкінці, припустимо, що кількість клієнтів у черзі не може перевищувати заданого числа m, і у випадку, коли всі сервісні пости і місця у черзі зайняті, клієнт залишає дільницю без обслуговування, тобто отримує відмову. Формули, за якими обчислюються параметри системи і показники її ефективності, наведені в останньому стовпчику табл. 1.

Для такої системи обслуговування поставимо задачу пошуку оптимальної кількості місць у черзі на надання послуги, що при фіксованій кількості постів обслуговування забезпечує мінімальні сумарні втрати як від простою незадіяних постів, так і втрат, що виникають за рахунок відмов щодо надання сервісу. Цільова функція задачі може бути записана у такий спосіб:

$$W(m) = c_1 \lambda P_{відм} + c_2\left(n - \bar{k}\right),$$

де c_1, c_2 – втрати, які несе дільниця за рахунок незадіяного посту з технічного обслуговування чи вільного місця в черзі та відмови одному клієнту відповідно.

Таблиця 1

Показники ефективності систем масового обслуговування

Показник	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і необмеженою чергою	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і кількістю m місць у черзі
1	2	3
Граничні ймовірності	$p_0=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1}$, $p_k=\frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0,\ k=\overline{1,n};$ $p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r}\cdot p_0,$ $r=1,2,\ldots;$	$p_0=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}(1-\rho/n)^m}{n\cdot n!\,(1-\rho/n)}\right)^{-1}$, $p_k=\frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0,\ k=\overline{1,n};$ $p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r}\cdot p_0,\ r=\overline{1,m};$
Імовірність того, що клієнт з'явиться у черзі	$P_{черги}=\frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}p_0$	$P_{черги}=\frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}p_0$
Імовірність відмови	$P_{відм}=0$	$P_{відм}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0.$
Абсолютна пропускна здатність	$A=\lambda Q$	$A=\lambda Q=\lambda\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0\right)$
Відносна пропускна здатність	$Q=1$	$Q=1-P_{відм}=1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0$
Середнє число клієнтів у черзі	$L_{черги}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2};$	$L_{черги}=$ $=\frac{\rho^{n+1}p_0\left[1-\left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$
Середнє число клієнтів, що обслуговуються	$\bar{k}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho.$	$\bar{k}=\rho\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0\right)$
Середнє число клієнтів в системі	$L_{сист}=L_{черги}+\rho;$	$L_{сист}=L_{черги}+\bar{k};$
Середній час перебування клієнтів на дільниці	$T_{сист}=\frac{1}{\lambda}L_{сист};$	$T_{сист}=\frac{1}{\lambda}L_{сист};$
Середній час перебування клієнтів в черзі	$T_{черги}=\frac{1}{\lambda}L_{черги}$	$T_{черги}=\frac{1}{\lambda}L_{черги}$

Задача 1. На підприємстві з капітального ремонту електричних машин працює дві бригади. В середньому протягом робочого дня в майстерню надходить 6 поламаних виробів. Електричні машини на різних об'єктах відмовляють незалежно одна від одної, в різний час, тобто потік заявок можна вважати випадковим, найпростішим і пуассонівським.

Тривалість робіт залежить від характеру ушкоджень, кваліфікації ремонтного персоналу і інших чинників. Нехай протягом робочого дня (8 год) одна бригада виконує в середньому ремонт 4 машин. Невідремонтовані вироби замовнику не повертаються, а знаходяться в черзі. Визначити ймовірності станів і показників ефективності СМО.

Розв'язання. Вже згадана система може бути віднесена до СМО з очікуванням, в якій число місць в черзі не обмежена, тобто $\boldsymbol{m} \rightarrow \infty$.

1. Згідно з умовою задачі маємо такі вихідні дані:

$$\boldsymbol{n = 2,\ \lambda = 6,\ \mu = 4,\ \rho = \lambda/\mu = 1.5,\ \rho/n = 0.75}.$$

2. Оскільки в даній системі заявка не покидає її, поки не буде обслужена, то ймовірність відмови $\boldsymbol{P}_{\text{відм}} = \mathbf{0}$, відносна пропускна здатність $\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}$, а абсолютна пропускна здатність $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda Q} = 6$

3. Знайдемо ймовірності станів:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!\,(2-\rho)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1.5^1}{1!} + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{2!\,(2-1.5)}\right)^{-1} = 0.14;$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} p_0 = 0.14 \cdot 1.5 = 0.21;$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = \frac{1.5^2}{2!} 0.14 = 0.16.$$

Імовірність того, що заявка виявиться в черзі

$P_{черги} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{1.5}{1 \cdot 2 \cdot (2-1.5)} \cdot 0.14 = 0.47.$

Імовірність відсутності черги в майстерні

$p = p_0 + p_1 + p_2 = 0.14 + 0.21 + 0.16 = 0.51.$

4. Визначимо показники ефективності СМО: середня кількість заявок у черзі

$$L_{черги} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{1.5^3 \cdot 0.14}{2 \cdot 2 \left(1 - \frac{1.5}{2}\right)^2} = 1.88;$$

середнє число зайнятих каналів (оскільки кожен канал обслуговує певну кількість заявок в одиницю часу), а вся система обслуговує в середньому А заявок, то середнє число зайнятих каналів

$$L_{сист} = L_{черги} + \rho = 1.88 + 1.5 = 3.38;$$

середній час очікування заявки в черзі

$T_{черги} = \frac{1}{\lambda} L_{черги} = \frac{1.88}{4} = 0.47$ робочої зміни (приблизно 3,8 ч).

Приклад 2. Розглянемо як систему масового обслуговування дільницю з ремонту електромобілів. Будемо вважати, що у середньому час обслуговування однієї машини становить 10.7 годин, а інтенсивність обслуговування $\mu = 1/10.7$ (*1./год.*).

Результати опитувань наявних станцій технічного обслуговування свідчать про те, що в середньому за зміну (10 годин) до СТО звертаються 6 – 8 власників електромобілів. Тому, будемо припускати, що інтенсивність потоку заявок на діагностику та ремонт тягової батареї ЕМ складає $\lambda = 1/(10/7) = 0.7$ *(1/год.)*, а зведена інтенсивність (навантаження одного посту технічного обслуговування) $\rho = = 0.7/(1/10.7) \approx 7.5$.

1. Розрахуємо мінімальну кількість постів, які необхідно організувати на дільниці ремонту електромобілів, яка забезпечила б виконання сподівань в середньому 90 % клієнтів. Будемо поступово збільшувати число постів ремонту ЕМ і обчислимо всі показники ефективності роботи такої системи обслуговування за формулами (1) – (6). Водночас знайдемо і оптимальну кількість постів, за якої досягає максимуму чистий дохід СТО, що розраховується за формулою (5). Результати розрахунків наведені в табл. 2.

Аналіз даних в табл. 2 показує, що чим більше постів на дільниці ремонту, тим більша кількість заявок приймається до виконання ремонтних робіт. Однак із значним зростанням кількості постів збільшується кількість таких, які вимушено простоюють, і отже, зростають непродуктивні витрати на їх утримання. Графік функції $W(n)$ наведений на рис. 4. Оптимальна кількість постів з ремонту батареї ЕМ – 8.

Для того, щоб в середньому 90 % клієнтів, які звертаються за послугою з інтенсивністю $\lambda = 0.7$ в одиницю часу, не отримали відмову, потрібно, щоб дільниця містила 10 постів для діагностування і ремонту.

Таблиця 2

Показники ефективності роботи СМО без черги при $\rho = 7.5$

Кількість постів ремонту	Абсолютна пропускна здатність	Відносна пропускна здатність	Імовірність відмови	Середня кількість ЕМ, що ремонтуються	Середня кількість незадіяних постів	Значення критерію ефективності (дохід)	Дохід на одиницю посту ремонту
n	**A**	**Q**	**P_no**	**K_aver**	**Free_Canal**	**W**	**W/N**
1	0,0824	0,118	0,882	0,882	0,118	0,764	0,764
2	0,163	0,232	0,768	1,74	0,26	1,48	0,74
3	0,24	0,343	0,657	2,57	0,432	2,14	0,712
4	0,314	0,448	0,552	3,36	0,642	2,72	0,679
5	0,383	0,548	0,452	4,1	0,899	3,2	0,64
6	0,447	0,639	0,361	4,79	1,21	3,57	0,595
7	0,505	0,721	0,279	5,4	1,6	3,81	0,544
8	0,555	0,793	0,207	5,94	2,06	3,88	0,485
9	0,597	0,853	0,147	6,39	2,61	3,78	0,42
10	0,631	0,901	0,0991	6,75	3,25	3,5	0,35
11	0,656	0,937	0,0632	7,02	3,98	3,03	0,276
12	0,673	0,962	0,038	7,21	4,79	2,41	0,201
13	0,685	0,979	0,0214	7,33	5,67	1,66	0,128
14	0,692	0,989	0,0113	7,41	6,59	0,81	0,0579
15	0,696	0,994	0,00562	7,45	7,55	-0,104	-0,007
16	0,698	0,997	0,00262	7,47	8,53	-1,06	-0,0662
17	0,699	0,999	0,00116	7,48	9,52	-2,04	-0,12

Можна також визначити прийнятний інтервал зміни кількості постів ремонту батареї ЕМ на дільниці шляхом пошуку розумних меж для таких конкуруючих економічних показників, що характеризують процес обслуговування, як імовірність відмови і частка постів, що простоюють. Останню можна знайти за формулою:

$$X(n) = (n - \bar{k})/n.$$

Поставимо задачу визначити таку кількість постів обслуговування на дільниці, за якої ймовірність відмови клієнту не перевищує величини α, а частка постів, яка простоює, не більша за величину β. Рівні обслуговування α та β задаються з практичних міркувань. На рис. 5 побудовані графіки двох функцій $y = P\_no(n)$ та $y = X(n)$ і встановлені рівні переважного обслуговування $\alpha = 0{,}15$ і $\beta = 0{,}33$.

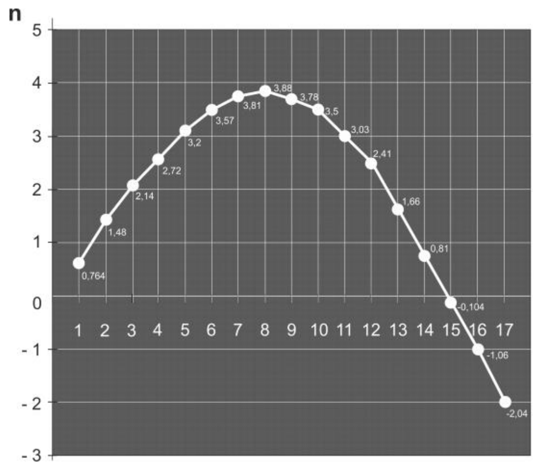


Рис. 4. Залежність доходу дільниці (W) від кількості наявних постів обслуговування (n)

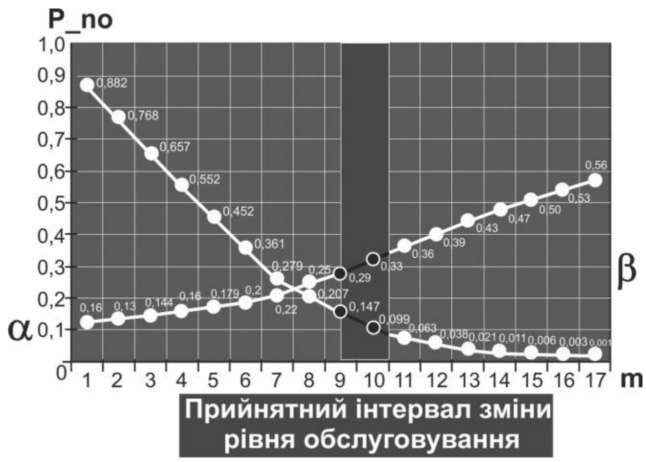


Рис. 5. Визначення прийнятного інтервалу зміни рівня обслуговування

Очевидно, інтервал зміни кількості постів n має границі від 8,5 до 10, отже, достатньо організувати 9 постів для того, щоб досягти компромісного рішення в поставленій задачі.

2. Обчислимо тепер показники ефективності роботи дільниці ремонту батареї ЕМ за умови, що вона є СМО з необмеженою чергою. Параметри потоків заявок на обслуговування і його інтенсивність такі самі. Аналізуючи відповідні формули, наведені в табл. 1, можна зробити висновок, що черга не буде зростати нескінченно за умови $\rho/n < 1$, тобто $n > \rho = 7{,}5$. Отже, мінімальна кількість постів технічного обслуговування на ділянці n_{min}. В табл. 2 наведені результати обчислень характеристик СМО з урахуванням, що кількість постів технічного обслуговування дільниці $n_{serv} = 4$, а кількість місць на стоянці біля дільниці mпоступово змінюється від 4 до 15. Зазвичай місце для стоянки розглядають як сервіс, оскільки тут ЕМ можуть очікувати звільнення постів обслуговування. Тоді, загальна кількість каналів обслуговування в системі $N = n_{serv} + m$. Остання колонка табл. 3 містить значення критерію ефективності роботи системи, який враховує втрати на утримання постів ремонту та перебування у черзі клієнтів, і задається формулою [1]:

$$C_{relativ} = \frac{1}{\lambda}(n_{min} + m) + 3T_{черги}.$$

Отже, результати розрахунків свідчать про те, що ймовірність простою постів майже нульова навіть при $m = 4$. При $m = 7$ суттєво зменшується ймовірність виникнення черги P_que. До того ж і значення критерію оптимальності при такому m є найменшим. Графік функції $y = C\_relativ(m)$ подано на рис. 6. При збільшенні місць очікування на стоянці від 4 до 7 ймовірність потрапити до черги у клієнта зменшується від 0,752 до 0,37. А при наявності 8 місць на стоянці дільниці до черги потрапляє близько 10 % клієнтів. При цьому середній час знаходження електромобілів в черзі дорівнює лише 0,225 (13 – 14 хвилин).

Таблиця 3

Показники ефективності роботи СМО з необмеженою чергою при $\rho = 7{,}5$

Кількість місць на стоянці	Загальна кількість каналів сервісу	Середня кількість ЕМ, що ремонтуються	Імовірність того, що дільниця простоює	Імовірність для ЕМ потрапити до черги	Середня кількість ЕМ в черзі	Середній час очікування в черзі	Втрати на утримання постів та перебування в черзі
m	**N**	**K_aver**	**p0**	**P_que**	**L_que**	**T_que**	**C_relativ**
4	8	7,49	0,000209	0,752	11,8	16,9	62
5	9	7,49	0,000416	0,421	2,51	3,59	23,6
6	10	7,49	0,0005	0,228	0,909	1,3	18,2
7	11	7,49	0,000534	0,119	0,373	0,532	17,3
8	12	7,49	0,000549	0,0593	0,158	0,225	17,8
9	13	7,49	0,000555	0,0283	0,0667	0,0953	18,9
10	14	7,49	0,000557	0,0129	0,0277	0,0395	20,1
11	15	7,49	0,000558	0,00558	0,0111	0,0159	21,5
12	16	7,49	0,000558	0,0023	0,00433	0,00619	22,9
13	17	7,49	0,000559	0,000909	0,00162	0,00232	24,3
14	18	7,49	0,000559	0,000342	0,000586	0,000837	25,7
15	19	7,49	0,000559	0,000123	0,000203	0,000291	27,1

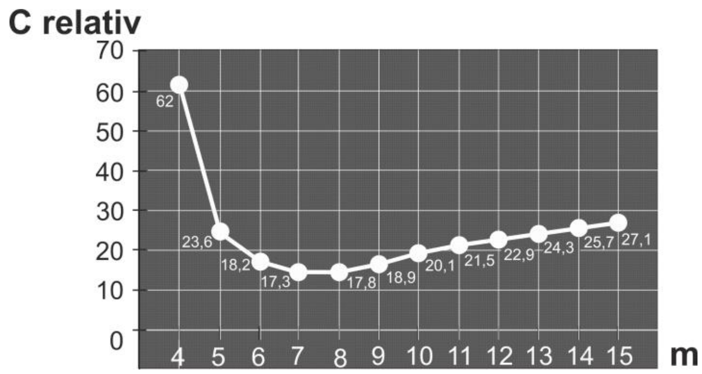


Рис. 6. Графік залежності втрат на утримання постів
і перебування ЕМ в черзі від кількості місць на стоянці ($n = 4$)

Результати розрахунків показників ефективності роботи дільниці за умови розглядання її як багатоканальної ($n = 4$) системи обслуговування з очікуванням при різній довжині черги наведені в табл. 4. За цими даними можна зробити такі висновки. У випадку, коли інтенсивність потоку заявок на ремонт батареї ЕМ майже вдвічі перевищує кількість постів обслуговування да дільниці, а сама послуга триває близько 10 годин, ймовірність простою дільниці майже нульова, а ймовірність потрапити до черги у клієнта становить майже 0.5, тобто кожен другий клієнт буде очікувати на своє обслуговування. Час очікування в черзі залежить від кількості m місць в черзі і зростає із зростанням m. Оскільки ємність системи обмежена кількістю $N=m+n$, то й ефективна інтенсивність заявок на ремонт батареї ЕМ виявилася нижчою за задану і зростає зі зростанням m від 0,314 до 0,374. Вибрати оптимальну кількість місць в черзі можна з міркувань розумного (допустимого) часу очікування у черзі. Наприклад, якщо обмежити такий час величиною в 5 – 6 годин, то достатньо обмежити довжину черги в 5 місць.

Таблиця 4

Показники ефективності роботи СМО з обмеженою чергою при $\rho = 7{,}5$

Кількість місць на стоянці	Загальна кількість каналів сервісу	Середня кількість ЕМ, що ремонтуються	Ймовірність того, що дільниця простоює	Ймовірність для ЕМ потрапити до черги	Середня кількість ЕМ в черзі	Середній час очікування в черзі	Середнє число ЕМ в системі	Середній час перебування ЕМ в системі	Ефективна інтенсивність потоку ЕМ
m	N	K_aver	p0	P_no	L_que	T_que	L_sys	T_sys	lamda_eff
0	4	3,36	0,00421	0,552	0	0	3,36	4,8	0,314
1	5	3,68	0,00207	0,508	0,508	0,726	4,19	5,99	0,344
2	6	3,84	0,00106	0,488	1,24	1,76	5,07	7,25	0,359
3	7	3,92	0,000554	0,477	2,08	2,97	5,99	8,56	0,366
4	8	3,96	0,000293	0,472	2,98	4,26	6,94	9,91	0,37
5	9	3,98	0,000155	0,469	3,93	5,61	7,91	11,3	0,372
6	10	3,99	8,27e-05	0,468	4,9	7	8,89	12,7	0,373
7	11	3,99	4,41e-05	0,467	5,88	8,4	9,87	14,1	0,373
8	12	4	2,35e-05	0,466	6,87	9,81	10,9	15,5	0,373
9	13	4	1,26e-05	0,466	7,86	11,2	11,9	16,9	0,374
10	14	4	6,71e-06	0,466	8,86	12,7	12,9	18,4	0,374
11	15	4	3,58e-06	0,466	9,86	14,1	13,9	19,8	0,374
12	16	4	1,91e-06	0,466	10,9	15,5	14,9	21,2	0,374
13	17	4	1,02e-06	0,466	11,9	16,9	15,9	22,6	0,374
14	18	4	5,45e-07	0,466	12,9	18,4	16,9	24,1	0,374
15	19	4	2,91e-07	0,466	13,9	19,8	17,9	25,5	0,374

Моделювання систем масового обслуговування

Розглянемо приклад, пов'язаний з моделюванням методом Монте-Карло системи масового обслуговування. Є одноканальна СМО $(n = 1)$ з чергою, число місць m в ній становить 1. Потік заявок − пальмівський, тобто сусідні інтервали часу між заявками є незалежними випадковими величинами з однаковою щільністю ймовірності $f(\tau)$. Час обслуговування однієї заявки − випадкова величина з щільністю ймовірності $\phi(\tau)$.

Потрібно, моделюючи роботу СМО методом Монте-Карло і маючи в своєму розпорядженні одну довгу реалізацію подій вхідного потоку тривалістю T, знайти оцінки:

– P_0 і P_1, – імовірностей того, що канал не буде і буде зайнятий;

– величини середнього часу очікування в черзі $\widehat{m}_1(t_{оч})$ і дисперсії часу очікування $\widehat{D}(t_{оч})$;

– імовірності відмови в обслуговуванні $P_{відм}$.

Розв'язання. Граф станів системи показаний на рис. 7.

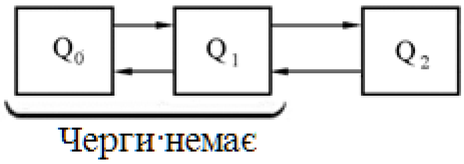


Рис. 7. Граф станів СМО

Будемо вважати, що в початковий момент часу система знаходиться в стані Q_0. Розіграємо моменти часу $t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots$ приходу заявок. Для цього визначимо функцію розподілу ймовірностей інтервалів часу між заявками:

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} f(x)dx$$

і, використовуючи метод зворотної функції, послідовно розіграємо інтервали часу $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3, \ldots$, приклад реалізації яких показаний на рис. 11.

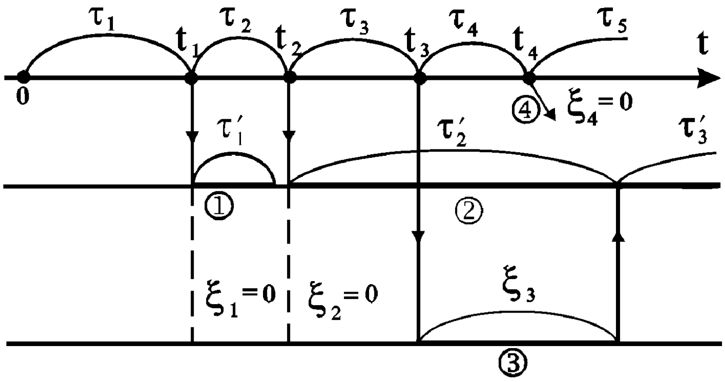


Рис. 8. Приклад реалізації розіграшу інтервалів часу

На другій осі (рис. 11) зобразимо стан каналу (жирна риса − «зайнято», тонка − «вільно»). На третій осі – стан місця в черзі. Заявка, що прийшла в момент часу t_1, займає канал. Час її обслуговування τ_1' розігрується за допомогою методу зворотних функцій. Друга заявка, що прийшла в момент t_2, також займає канал після його звільнення першою заявкою. Третя знаходиться в черзі, а четверта залишає СМО. Позначимо T_0 – час, протягом якого канал вільний, $T_1 = \sum \tau_i'$– сумарний час обслуговування (для четвертої заявки час обслуговування $\tau_4' = 0$). При достатньо великому значенні T оцінки ймовірностей відповідно

$$\widehat{P}_0 = \frac{T_0}{T} \text{ і } \widehat{P}_1 = \frac{T_1}{T}.$$

Оцінка середнього часу очікування $t_{оч}$ в черзі

$$\hat{m}_1(t_{оч}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\zeta_i,$$

де ξ_i– час очікування в черзі i -ї заявки (перша і друга заявки одночас прийняті до обслуговування, а четверта отримала відмову, тому для цих заявок $\xi_i = 0$), N – загальне число заявок. Дисперсія часу очікування в черзі

$$D(t_{оч}) \approx \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[\xi_i - \hat{m}_1(t_{оч})]^2.$$

Оцінка ймовірності відмови $\hat{P}_{відм} = \frac{N^*}{N}$, де N^* – число заявок, що отримали відмову.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие / Е.С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2013. – 448 с.

2 .Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания – Изд. 2-е,перераб. и доп. - СПб.: Наука, 2007. – 175 с.

3. Таха Х.А. Введение в исследование. 6-е издание. Пер. С англ. / Хєдми А. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания./ Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Изд-во «КомКнига», 2005.

5. Беспятых Е.А. Системы массового обслуживания. Решение типичных задач / Е.А. Беспятых // Молодежный научный форум: Техн. и матем. науки: электр. сб. ст. по мат. XLI междунар. студ. науч.-практ. конф. № 1(41). – URL: https://nauchforum.ru/archive/MNF_tech/1(41).pdf

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

Варіант 1 – 3 Задача 1
Варіант 4 – 6 Задача 2
Варіант 7 – 10 Задача 3
Варіант 11 – 13 Задача 4
Варіант 14 – 16 Задача 5
Варіант 17 – 20 Задача 6
Варіант 21 – 23 Задача 7
Варіант 24 – 27 Задача 8
Варіант 28 – 30 Задача 9
Варіант 31 – 34 Задача 10
Варіант 35 – 37 Задача 11
Варіант 38 – 40 Задача 12
Варіант 41 – 43 Задача 13
Варіант 44 – 46 Задача 14
Варіант 47 – 49 Задача 15
Варіант 50 – 53 Задача 16
Варіант 54 – 56 Задача 17

Задача 1. Одноканальна СМО з відмовами є ще однією телефонною лінією. Заявка (виклик), яка прийшла в момент, коли лінія зайнята, отримує відмову. Всі потоки подій найпростіші. Інтенсивність потоку $\lambda = 0{,}95$ виклику в хвилину. Середня тривалість розмови t = 1 хв. Визначте ймовірні характеристики СМО в сталому режимі роботи. Скільки телефонів має працювати паралельно, щоб імовірність відмови була менше 1/10?

Задача 2. В обчислювальному центрі працює 5 персональних комп'ютерів (ПК). Найпростіший потік завдань, що надходять на ОЦ, має інтенсивність λ = 10 завдань на годину. Середній час розв'язання задачі дорівнює 12 хв. Заявка отримує відмову, якщо все ПК зайняті. Знайдіть імовірнісні характеристики системи обслуговування (ОЦ).

Задача 3. На пункт техогляду надходить найпростіший потік заявок (автомобілів) інтенсивностю 4 машини в годину. Час огляду розподілено за показовомим законом і так само в середньому 17 хв. В черзі може перебувати не більше 5 автомобілів. Визначте ймовірні характеристики пункту техогляду в сталому режимі.

Задача 4. На промисловому підприємстві вирішується питання про те, скільки буде потрібно механіків для роботи в ремонтному цеху. Нехай підприємство має 10 машин, що вимагають ремонту. Відмови машин відбуваються з частотою λ = 10 ВТК / год. Для усунення несправності механіку потрібно в середньому t = 3 хв. Розподіл моментів виникнення відмов є пуассонівським, а тривалість виконання ремонтних робіт розподілена експоненціально. Можливо організувати 4 або 6 робочих місць в цеху для механіків підприємства. Необхідно вибрати найбільш ефективний варіант забезпечення ремонтного цеху робочими місцями для механіків.

Задача 5. Інтенсивність потоку телефонних дзвінків в агентство щодо замовлення залізничних квитків, яке має один телефон, становить 16 викликів на годину. Тривалість оформлення замовлення дорівнює 2,4 хвилини. Визначити відносну і абсолютну пропускну здатність цієї СМО і ймовірність відмови (зайнятості телефону). Скільки телефонів має бути в агентстві, щоб відносна пропускна здатність була не менше 0,75.

Задача 6. Система масового обслуговування − квиткова каса з одним віконцем і необмеженою чергою, що продає квитки в пункти А і В. Людей, які бажають поїхати в пункт А, приходить в середньому троє за 20 хв, в пункт В – двоє за 20 хв. Потік осіб найпростіший. Касир в середньому обслуговує трьох пасажирів за 10 хв. Час обслуговування − показниковий. Обчислити фінальні ймовірності P_0, P_2, P_3, середнє число заявок в системі і черзі, середній час перебування заявки в системі та черзі.

Задача 7. Міжміський переговорний пункт має чотири телефонні апарати. В середньому за добу надходить 320 заявок на телефонне спілкування. Середня тривалість переговорів становить 5 хв. Довжина черги не повинна перевищувати 6 абонентів. Потоки заявок і обслуговувань найпростіші. Визначити характеристики обслуговування переговорного пункту в стаціонарному режимі (імовірність простою каналів, імовірність відмови, імовірність обслуговування, середнє число зайнятих каналів, середнє число заявок в черзі, середнє число заявок в системі, абсолютну пропускну здатність, відносну пропускну здатність, середній час заявки в черзі, середній час заявки в системі, середній час заявки при обслуговуванні).

Задача 8. На диспетчерський пульт надходить потік заявок Ерланга другого порядку. Його інтенсивність дорівнює 6 заявок на годину. Якщо диспетчер випадково залишає пульт, то при першій черговій заявці він зобов'язаний повернутися. Знайти щільність розподілу часу очікування чергової заявки і побудувати її графік. Обчислити ймовірність того, що диспетчер зможе бути відсутнім від 10 до 20 хвилин.

Задача 9. Дісплейний зал має 5 дісплеїв. Потік користувачів найпростіший. Середнє число відвідувачів за добу складає 140. Час обробки інформації одним користувачем на одному дисплеї розподілено за показовим законом і становить в середньому 40 хвилин. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи залу; імовірність того, що відвідувач застане всі дісплеї зайнятими; середнє число користувачів в дісплейному залі; середнє число користувачів в черзі; середній час очікування вільного дісплея; середній час перебування користувача в дісплейному залі.

Задача 10. До двоканальної системи масового обслуговування (СМО) з відмовами надходить стаціонарний пуассонівський потік заявок. Час між надходженнями двох послідовних заявок розподілено за показовим законом з параметром $\lambda = 5$ заявок на хвилину. Тривалість обслуговування кожної заявки дорівнює 0,5 хв. Методом Монте-Карло знайти середнє число заявок, що виконано, за час 4 хв. Вказівка: провести три випробування.

Задача 11. Багатоканальна СМО з відмовами

Кількість каналів: 7

Інтенсивність потоку заявок: 3

Середній час обслуговування: 1,5

Постановка завдання: є 7 каналів (ліній зв'язку), на які надходить потік заявок з інтенсивністю 3. Середній час обслуговування заявки 1.5

За характеристиками СМО потрібно визначити:

1) Фінальні ймовірності станів;

2) Імовірність того, що заявка отримає відмову;

3) Відносну пропускну здатність СМО;

4) Абсолютну пропускну здатність СМО;

5) Середнє число зайнятих каналів;

Задача 12. Одноканальна СМО з необмеженою чергою

Інтенсивність надходження заявок: 7

Інтенсивність обслуговування заявок: 8

Постановка задачі: Є одноканальна СМО з чергою, на яку не накладено ніяких обмежень. На цю СМО надходить потік заявок з інтенсивністю 7, потік обслуговування має інтенсивність 8.

За характеристиками СМО потрібно визначити:

1) Фінальні ймовірності станів;

2) Середнє число заявок в системі;

3) Середній час перебування заявки в системі;
4) Середнє число заявок в черзі;
5) Середній час перебування заявки в черзі;
6) Ступінь завантаження каналу.

Задача 13. *багатоканальна СМО з необмеженою чергою*. Оцінити доцільність заміни однієї n-канальної СМО з необмеженою чергою, призначеної для обслуговування потоку різнорідних заявок, на сукупність n одноканальних СМО з необмеженою чергою, призначених для обслуговування однотипних заявок, при заданих характеристиках потоків заявок (інтенсивності заявок різних типів хі (і = 1; m) вважаються однаковими).

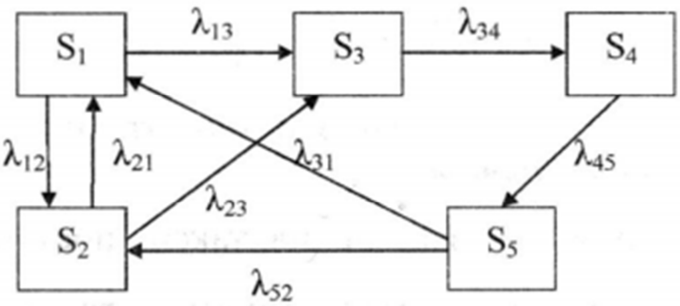
Кількість каналів: 4
Кількість заявок М: 4
Інтенсивність заявок різних типів хі: 0,25
Середній час обслуговування заявки будь-якого типу (хв.): 3

Задача 14. До комп'ютера надходять завдання з інтенсивністю 1,5 завдань в секунду (потік завдань найпростіший). Знайти ймовірність того, що за дві секунди: а) не зробить ні одного завдання; б) обов’язково надійде одне завдання і не більше; в) надійде хоча б одне завдання.

Задача 15. До ательє надходить в середньому 3 заявки на день. Вважаючи потік найпростішим, знайти ймовірність того, що протягом двох найближчих днів число заявок буде не менше 5.

Задача 16. Знайти граничні ймовірності для системи, граф станів якої наведений нижче при

.



Задача 17. В умовах підвищеної ожеледиці та вітрового навантаження в регіоні відбувається масове відключення фідерів повітряних ліній електропередачі. Потік аварійних відключень в районі електричних мереж досяг 11 за зміну (8 год). Середня тривалість усунення пошкодження – 2 год. Необхідно визначити: 1) кількість ремонтних бригад, при яких черга не буде рости до нескінеченності, і характеристики СМО; 2) оптимальне число ремонтних бригад і характеристики СМО в цьому випадку; 3) провести порівняння

Лабораторне завдання

1. Реалізувати на ЕОМ алгоритм методу Монте-Карло моделювання СМО, що дозволяє обчислювати: відносну q і абсолютну A пропускну здатність СМО, середню інтенсивність потоку заявок, які залишили СМО без обслуговування, середній час очікування в черзі, середній інтервал часу між подіями вихідного потоку. Вхідний потік заявок − Ерланга порядку k з параметром λ (20). Час обслуговування має експонентну щільність імовірності (13) з параметром μ. Число місць в черзі m, число сервісних пристроїв n і порядок потоку Ерланга k наведені в таблиці. Значення параметрів λ і μ треба обрати самостійно.

2. Обчислити оцінки зазначених в завданні характеристик СМО і визначити величину їх відносної середньоквадратичної похибки.

3. Побудувати гістограму величини інтервалу часу між подіями вихідного потоку.

4. Провести дослідження отриманих результатів на стійкість до моделі, змінивши вид функції щільності ймовірності інтервалів часу між сусідніми заявками $f(\tau)$ вхідного потоку. При цьому параметри нової $f^*(\tau)$ підібрати так, щоб величина середнього інтервалу $m_1(\tau)$ залишилась незмінною.

5. За результатами лабораторної роботи оформити звіт, який повинен містити: мету роботи, характеристики заданої СМО, її статистичну модель, опис алгоритму чисельного моделювання, результати розрахунків, їх обговорення та основні висновки.

№	q	k	m	n	№	q	k	m	n	№	q	k	m	n
1.	3	7	2	7	**2.**	3	7	2	7	**3.**	5	2	6	7
4.	7	5	3	7	**5.**	7	5	3	7	**6.**	3	5	4	3
7.	6	3	6	3	**8.**	6	3	6	3	**9.**	5	5	7	2
10.	3	7	3	4	**11.**	3	7	3	4	**12.**	6	8	3	5
13.	8	6	8	8	**14.**	8	6	8	8	**15.**	8	3	5	6
16.	6	7	8	6	**17.**	6	7	8	6	**18.**	7	7	2	5
19.	7	7	5	5	**20.**	7	7	5	5	**21.**	4	5	5	7
22.	5	8	3	6	**23.**	5	8	3	6	**24.**	4	4	6	4
25.	5	4	4	6	**26.**	5	4	4	6	**27.**	5	8	7	4
28.	7	6	4	5	**29.**	7	6	4	5	**30.**	2	6	7	7
31.	6	6	4	8	**32.**	6	6	4	8	**33.**	7	5	4	3
34.	8	8	4	3	**35.**	8	8	4	3	**36.**	7	5	4	5
37.	3	5	5	4	**38.**	3	5	5	4	**39.**	7	4	2	6
40.	6	8	6	6	**41.**	6	8	6	6	**42.**	7	7	6	3
43.	4	3	7	5	**44.**	4	3	7	5	**45.**	3	6	3	6
46.	6	5	4	3	**47.**	6	5	4	3	**48.**	4	4	5	7
49.	4	5	3	5	**50.**	4	5	3	5	**51.**	2	7	7	2
52.	5	5	7	2	**53.**	5	5	7	2	**54.**	6	7	5	6
55.	8	7	4	5	**56.**	8	7	4	5	**57.**	5	2	4	4

Поточні контрольні запитання

1. Які є типи СМО?
2. Назвіть оснвні характеристики СМО.
3. Що таке інтенсивність потоку заявок? В яких одиницях вона вимірюється?
4. Який потік називається пуассоновським?
5. Який потік називається марковським?
6. Опишіть процес моделювання СМО.
7. Яка основна ідея методу Монте-Карло і де він використовується?

Практичне заняття № 10. Задачі управління запасами

Мета: ознайомитися з задачами і методами управління запасами (УЗ), навчитися розраховувати оптимальні строки поповнення запасів.

План

1. Загальна постановка задачі управління запасами
2. Типи моделей управління запасами
3. Оптимізація величини запасів
4. Прості моделі управління запасами
5. Статична детермінована модель без дефіциту
6. Використання моделі Вілсона. Розрахунки в Microsoft Excel
7. Системи КЗ
8. Додаткові методи КЗ

Опорні поняття

1. Загальна постановка задачі

Для забезпечення безперервного і ефективного функціонування практично будь-якої організації необхідне створення запасів, наприклад, в виробничому процесі, торгівлі, медичному обслуговуванні і т.д. Залежно від ситуації під запасами можуть матися на увазі: готова продукція, сировина, напівфабрикати, верстати, інструмент, транспортні засоби, готівка та ін. Неправильний розрахунок необхідних запасів може призвести як до незначного збитку (втрата частини доходу від дефіциту товару), так і до катастрофічних наслідків (при помилковій оцінці запасів палива на літаку).

Економічний збиток обумовлюють і надмірна наявність запасів, і їх недостатність. Так, якщо деяка компанія має товарні запаси, то капітал, матеріалізований у них, заморожується. Якщо його не можна використовувати, то це для компанії втрачена вартість у формі невиплачених відсотків або невикористовуваних можливостей інвестування. Крім того, запаси, особливо продукти, які швидко псуються, вимагають створення спеціальних умов для зберігання, що спричиняє певні витрати.

З іншого боку, чим меншим є рівень запасу, тим більша ймовірність виникнення дефіциту, а отже й збитків внаслідок втрати клієнтів, зупинок виробничого процесу і т.д.

Мета будь-якого підприємства − розробити таку программу роботи, при якій загальна сума витрат на виробництво продукції і утримання запасів мінімізується за умови повного і своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Докладніше задача полягає в наступному. Необхідно скласти план випуску деякого виду виробів на період, що складається з N часових відрізків. Передбачається, що для кожного з них є точний прогноз попиту на продукцію, що випускається. Для різних відрізків попит неоднаковий. Причому, продукція, що виготовляється протягом відрізку часу t, може бути використана для повного або часткового покриття попиту протягом цього періоду. Оскільки розміри виготовлених партій продукції впливають на економічні показники виробництва, доцільно виробляти протягом деякого періоду обсяг продукції, що перевищує його попит в цих межах і зберігати надлишки до задоволення подальших потреб, хоча зберігання запасів й передбачає витрати (плата за складські приміщення, страхові внески і витрати на утримання запасів тощо).

Для прийняття обґрунтованих рішень, пов’язаних з управлінням запасами, важливим етапом є розробка та використання математичних моделей, що дозволяють знайти оптимальний рівень запасів, мінімізуючи суму всіх описаних видів витрат.

Розглянемо основні характеристики моделей управління запасами.

Попит. Попит на продукт, що запасається, може бути *детермінованим* (в найпростішому випадку – постійним в часі) або *випадковим*. Випадковість описується або випадковим моментом попиту, або випадковим об’ємом попиту в детерміновані або випадкові моменти часу.

Поповнення складу. Поповнення складу може відбуватися або періодично через конкретні інтервали часу, або по мірі вичерпаності запасів, тобто зниження їх до деякого рівня.

Об’єм замовлення. При періодичному поповненні та випадковому вичерпанні запасів об’єм заказу може залежати від того стану, який спостерігається в момент подачі замовлення. Воно, здебільшого, подається на одну і ту саму величину для досягнення заданого рівня запасів – так званої *точки замовлення*.

Час доставки. В ідеалізованих моделях управління запасами передбачається, що замовлене поповнення поставляється на склад миттєво. В інших – розглядається затримка поставок на фіксований або випадковий інтервал часу.

Вартість поставки. Як правило, передбачається, що вартість кожної поставки складається з двох компонент – разових витрат, незалежних від об'єму партії, що замовляється, та витрат, що залежать (зазвичай лінійно) від об'єму партії.

Витрати на зберігання. В моделях управління запасами вважають об'єм складу практично необмеженим, а контролюючою величиною є об'єм запасів, що зберігаються.

Штраф за дефіцит. Будь-який склад створюється для того, щоб попередити дефіцит конкретного виду виробів в системі, що обслуговується. Відсутність запасів в потрібний момент призводить до збитків, пов'язаних з простоєм обладнання, неритмічністю виробництва і т.п. Їх в подальшому будемо називати *штрафом за дефіцит.*

Номенклатура запасу. В самих простих випадках передбачається, що на складі зберігається запас однотипних виробів або однотипної продукції. В більш складних випадках розглядається *багатономенклатурний запас*.

Критерій ефективності прийнятої стратегії управління запасами − *функція затрат (витрат)*, яка описує сумарні витрати на зберігання та поставку продукту, що запасається (в тому числі втрати від псування продукту при його зберіганні і його морального старіння, втрати прибутку від омертвіння капіталу и т. п.) та витрати на штрафи.

Управління запасами − складова частина єдиної системи поточного управління оборотним капіталом, від ефективності цього процесу залежить можливість підтримки ліквідності та платоздатності компанії. Загальним критерієм оцінки ефективності даної системи і одночасно цільовою установкою визнана мінімізація розміру витрат, пов'язаних з формуванням і використанням запасів. Ключовою задачею, яку вирішують фінансові менеджери, є скорочення наднормативних запасів матеріальних цінностей, що втрачають свою вартість і фактично являють собою скарбничку "заморожених" коштів.

Під **управлінням запасами** розуміють контроль за їх рухом і прийняття рішень, спрямованих на економію часу і коштів за рахунок мінімізації витрат на утримання запасів, необхідних для забезпечення безперебійного процесу операційної діяльності компанії.

Ефективне управління товарно-матеріальними запасами (ТМЗ) дозволяє:
− зменшити виробничі втрати через дефіцит сировини і матеріалів;
− прискорити оборотність цієї категорії оборотних активів;
− звести до мінімуму надлишки ТМЗ, які збільшують вартість операцій і заморожують дефіцитні кошти;
− знизити ризик старіння та псування товарів;
− знизити витрати на зберігання ТМЗ.

Поняття "запаси" є досить містким. Цей термін застосовується як до вироблених об'єктів, так і для природних. Загальноприйнято його застосування в таких поняттях як запаси корисних копалин, лісові запаси, запаси водних ресурсів, запаси біоресурсів та ін.

Економічна трактування поняття "запаси" більш вузьке: під ними розуміється сукупність товарно-матеріальних цінностей (предмети праці, частина засобів праці, кінцева продукція), що знаходяться в стадії очікування вступу в процес виробничого споживання, транспортування або продажу. З точки зору бухгалтера запаси − це частина оборотних активів, що перебувають у матеріальній формі, яким може бути дана вартісна оцінка.

Основні етапи управління запасами:

1. Аналіз складу, структури, динаміки загальної величини запасів за підсумками попередніх періодів.
2. Оптимізація загальної суми запасів і розміру їх основних груп, що включаються до складу поточних активів.
3. Побудова ефективних систем контролю за рухом запасів в компанії.

Поточний аналіз загальної величини запасів проводиться на базі фінансової та управлінської звітності, а також даних складського обліку.

Структура запасів аналізується в розрізі основних видів і груп з урахуванням впливу сезонних коливань на загальну величину запасів.

Ретельному аналізу піддаються обсяг і структура витрат на обслуговування запасів з метою їх мінімізації. В даному випадку мова йде про вартість виконання замовлення (адміністративні, транспортні, вантажно-розвантажувальні витрати) і витрати на зберігання запасів (витрати на складування, страхування, пов'язані із спадом і старінням, податок на майно). Крім того, компанія може понести збитки, пов'язані з нестачею запасів (перебої у виробництві, втрати в обсязі реалізації продукції).

Далі триває аналіз і дається оцінка ефективності використання запасів. До основних показників відносяться рентабельність запасів і тривалість обігу, яка розраховується в днях. Основна мета аналізу − пошук шляхів прискорення оборотності запасів за рахунок управління собівартістю реалізованої продукції (робіт, послуг) та вартістю запасів як елемента поточних активів.

2. Типи моделей управління запасами

Різноманітність моделей управління запасами й методів розв'язування відповідних задач, які базуються на різному математичному апараті − від простих схем диференціального і інтегрального числення до складних алгоритмів динамічного і інших видів математичного програмування, − визначається характером попиту, який може бути детермінованим або стохастичним. На рис. 2 наведена схема класифікації попиту, який, зазвичай, використовується в моделях управління запасами.

Детермінований попит може бути статичним, в тому сенсі, що інтенсивність споживання залишається незмінною з часом, або динамічним, коли попит відомий достовірно, але змінюється в залежності від часу.

Стохастичний попит є стаціонарним, якщо функція щільності ймовірності попиту незмінна в часі, і нестаціонарним, коли функція щільності попиту змінюється в часі.

В реальних умовах випадок детермінованого статичного попиту трапляється доволі рідко. Він є найпростішим. Так, наприклад, хоча попит на деякі продукти масового споживання, такі як хліб, може бути кожен день різним, зміни при цьому настільки незначні, що припущення про статичність попиту несуттєво спотворює дійсність.

Найточніше характер попиту може бути описаний за допомогою нестаціонарних розподілів імовірностей. Однак з математичної точки зору модель значно ускладнюється, особливо при збільшенні періоду, що розглядається. На рис. 1 ілюструється зростання математичної складності моделі управління запасами при переході від детермінованого статичного до ймовірнісного нестаціонарного попиту. По суті, цю класифікацію можна вважати уявленням рівнів абстрагування при описанні попиту.

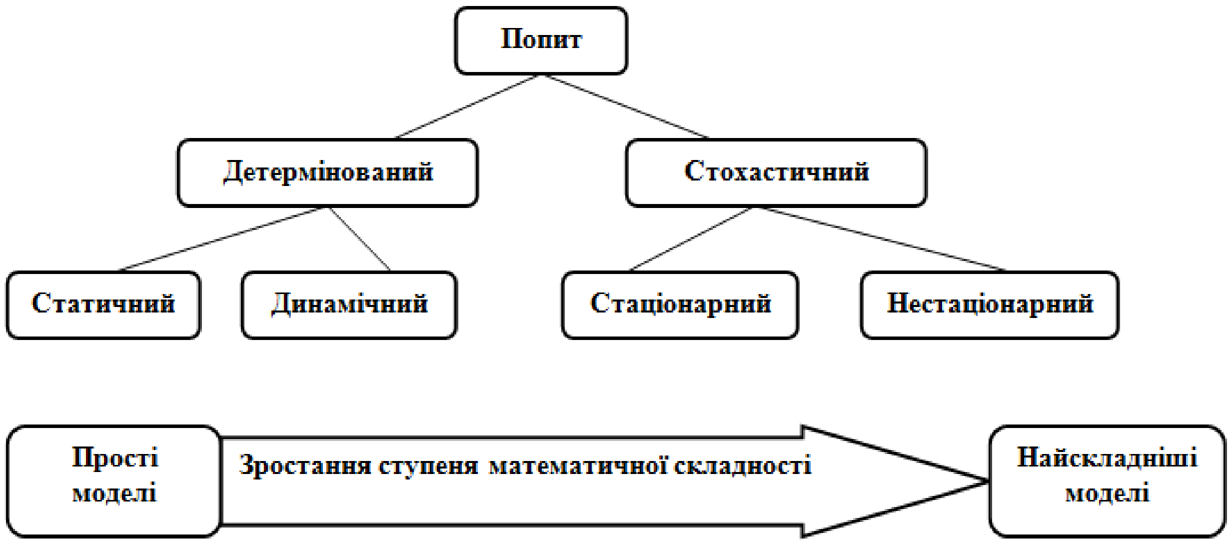


Рис. 1. Класифікація задач управління запасами за видом попиту

На першому рівні абстрагування припускається, що розподіл імовірності попиту стаціонарний у часі. Це означає, що для описання попиту протягом усіх періодів, що досліджуються, використовується одна й та сама функція розподілу ймовірностей. При такому припущенні вплив квартальних коливань попиту в моделі не враховується.

На другому рівні абстракції враховуються зміни попиту від одного періоду до іншого. Однак при цьому функції розподілу не застосовуються, а потреби в кожному періоді описуються середньою величиною попиту. Це спрощення означає, що елемент ризику в управлінні запасами не враховується. Однак це дозволяє досліджувати квартальні коливання попиту, які внаслідок аналітичних і обчислювальних труднощів не можна врахувати у ймовірнісній моделі.

Іншими словами, тут виникає певний компроміс: можна використовувати з одного боку стаціонарні розподіли ймовірностей, а з іншого − змінну, але відому функцію попиту у припущенні "визначеності".

На третьому рівні спрощення виключаються як елементи ризику, так і зміни попиту. Тим самим попит протягом будь-якого періоду вважається таким, що дорівнює середньому значенню відомого (за припущенням) попиту для всіх періодів, що розглядаються. В результаті цього спрощення попит можна оцінити його сталою інтенсивністю.

Хоча характер попиту є одним з основних факторів при побудові моделі управління запасами, є й інші фактори, що впливають на вибір типу моделі, а саме:

− **запізнення надходжень виконання замовлень**. Після розміщення замовлення воно може бути поставлене відразу або потрібен деякий час на його виконання. Інтервал часу між моментом розміщення замовлення і його надходженням називається запізненням замовлення або терміном його виконання. Ця величина може бути детермінованою або стохастичною;

− **поповнення замовлення**. Хоча система управління запасами може функціонувати при запізненні надходжень, процес збільшення запасу може здійснюватися миттєво або рівномірно в часі. Миттєве збільшення запасу може бути реалізоване за умови, коли замовлення надходять від зовнішнього джерела. Рівномірне збільшення може бути тоді, коли продукція, що запасається, виробляється самою організацією. В загальному випадку система може функціонувати при позитивному запізненні надходження і рівномірному збільшенні запасу;

− **період часу** визначає інтервал, протягом якого здійснюється зміна рівня запасу;

− **кількість пунктів накопичення запасу**. До складу системи управління запасами може входити декілька пунктів зберігання запасу. В деяких випадках вони організовані таким чином, що один є постачальником для іншого. Ця схема інколи реалізується на різноманітних рівнях, наприклад, пункт-споживач одного рівня може стати пунктом-постачальником на іншому. В такому разі це є система управління запасами з розгалуженою структурою;.

− **кількість видів продукції**. В системі управління запасами може фігурувати більше ніж один вид продукції. Цей фактор враховується за умови наявності деякої залежності між різними видами продукції. Так, для різних виробів може використовуватися одне і те саме складське приміщення або ж виробництво може здійснюватися при обмеженнях на загальні виробничі фонди.

3. Оптимізація величини запасів

У практиці управління запасами використовується достатній арсенал методів планування та оптимізації їх величини.

Відомо, що проблема планування може вирішуватися двома базовими способами організації закупівель: "зі складу" (push) і "продажу" (pull).

Система "від складу" ґрунтується на розрахунку нормативних розмірів запасів щодо кожного їх виду, виходячи з характеристики швидкості обігу, враховуючи досвід минулих років. При значних коливаннях попиту система нормативів регулярно переглядається.

При використанні системи "від продажу" виробнича програма формується в залежності від величини та структури цільового обсягу продажів, що, у свою чергу, визначає бюджет закупівель. У цьому випадку компанія орієнтована на ринковий попит і керується динамікою таких показників, як частка ринку, еластичність попиту за ціною та ін. Основні методи оптимізації товарно-матеріальних запасів наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Методи оптимізації запасів

Види запасів	**Методи оптимізації**
Запаси сировини і матеріалів	Нормування запасів Визначення оптимального розміру замовлення (модель ***EOQ)*** Контроль запасів методом ***ABC***
Незавершене виробництво	Нормування незавершеного виробництва Бюджетування виробництва
Запаси готової продукції	Нормування запасів готової продукції Визначення оптимальної партії замовлення готової продукції (модель ***EPR)***

Нормування запасів. Сьогодні фахівцями в галузі економіки та фінансів розроблені уніфіковані методи нормування збутових запасів (сировини, матеріалів, моторного палива, машинобудівної продукції) і оборотних коштів, вкладених у них. Запропоновані методичні підходи дозволяють визначити мінімально необхідний і достатній рівень запасів для підприємства, що забезпечує стійкий процес реалізації в сформованих ринкових умовах постачання, збуту та організації виробництва. Норми запасів, норми та нормативи обігових коштів рекомендовано обчислювати, користуючись єдиною методичною основою, в один прийом, а також однією і тією самою вихідною інформацією, пов'язуючи їх між собою та рівнем надійності забезпечення запасом (тобто з оцінкою ступеня ризику). При цьому відповідно враховується специфіка визначення самих норм запасів, норм і нормативів оборотних коштів. Аналогічні уніфіковані методичні підходи закладені в нормування виробничих запасів і вкладених у них обігових коштів.

Нормою запасу називається розрахункова мінімальна кількість предметів праці, яка має знаходитися у виробничих або торговельних підприємств для забезпечення безперебійного постачання процесів виготовлення продукції та її реалізації.

Норма обігових коштів − відносна величина, що виражає мінімальний економічно обґрунтований обсяг запасів матеріальних цінностей і залежить від умов постачання та збуту, особливостей виробничого процесу, його тривалості, вдосконалення технологічних процесів і норм витрачання матеріалів і т. д. На підставі економічно обґрунтованих норм встановлюється норматив обігових коштів, що являє собою мінімально необхідну суму грошових коштів, які забезпечують формування запасів у відповідності з розрахованою нормою.

При відомій нормі запасу норматив обігових коштів визначається як добуток одноденної витрати (собівартості одноденного випуску) і норми в днях (або інших відносних одиницях) з відповідного виду нормованих активів. Одноденні витрати можуть бути обчислені як частка від ділення суми за відповідною статтею кошторису витрат у звітний період (місяць, квартал, рік) на кількість днів в ньому.

При обчисленні норм запасів ресурсів використовують три групи методів:

− евристичні (або дослідно-статистичні);

− техніко-економічні;

− економіко-математичні.

Евристичні методи припускають використання досвіду фахівців, які вивчають звітність за попередній період, аналізують ринок і приймають рішення про розмір необхідних запасів. Фахівцем виступає працівник підприємства, який постійно вирішує завдання нормування запасів. Такий метод називається дослідно-статистичним. Він відтворює підхід, що використовує експертні оцінки декількох професіоналів.

Сутність методу **техніко-економічних** розрахунків полягає в розчленуванні сукупного запасу залежно від цільового призначення на окремі групи, наприклад, номенклатурні позиції. Далі для виділених груп окремо розраховується страховий, поточний і сезонний запаси, кожен з яких в свою чергу може бути розділений на деякі елементи. Цей метод дозволяє досить точно визначити необхідний розмір запасів, однак трудомісткість його велика.

Попит на товари або продукцію найчастіше є випадковим процесом, який може бути описаний методами математичної статистики. Одним з найбільш простих **економіко-математичних** методів визначення розміру запасу є екстраполяція.

Розробка норм запасу − найбільш складна частина роботи визначення потреби підприємства в обігових коштах, тому норми можуть зберігатися кілька років, до зміни умов виробництва, постачання і збуту.

Визначення найбільш економічного (оптимального) розміру замовлення. Оптимізація основних груп запасів здійснюється за допомогою моделювання. Це стосується як виробничих, так і запасів готової продукції.

Найбільш поширеною моделлю є економічне обгрунтування розміру замовлення (Economic Ordering Quantity, ***EOQ).*** Розрахунок ***EOQ*** проводиться на основі загальних сумарних витрат Q, які можна подати у вигляді функции:

$$C_z = C_k + C_s + C_x + C_l + C_d$$

Витрати на придбання (C_k) визначаються вартістю одиниці продукції; в свою чергу, вартість може бути постійною або змінною при обліку оптових знижок, які залежать від обсягу замовлення.

Витрати на оформлення замовлення (C_s) − постійні, вони пов'язані з розміщенням замовлення у постачальників та його транспортуванням.

Витрати на зберігання запасу (C_x) відображають кошти на утримання на складі та переробку; витрати включають як відсоток на інвестований капітал, так і вартість зберігання, утримання і догляду.

Витрати від дефіциту запасу включають, по-перше, потенційні втрати (C_l) прибутку через відсутність запасу, по-друге, можливі втрати у зв’язку з браком (C_d) довіри покупців.

Рис. 2 ілюструє залежність чотирьох компонент витрат узагальненої моделі управління запасами від рівня запасу протягом рівних інтервалів часу.

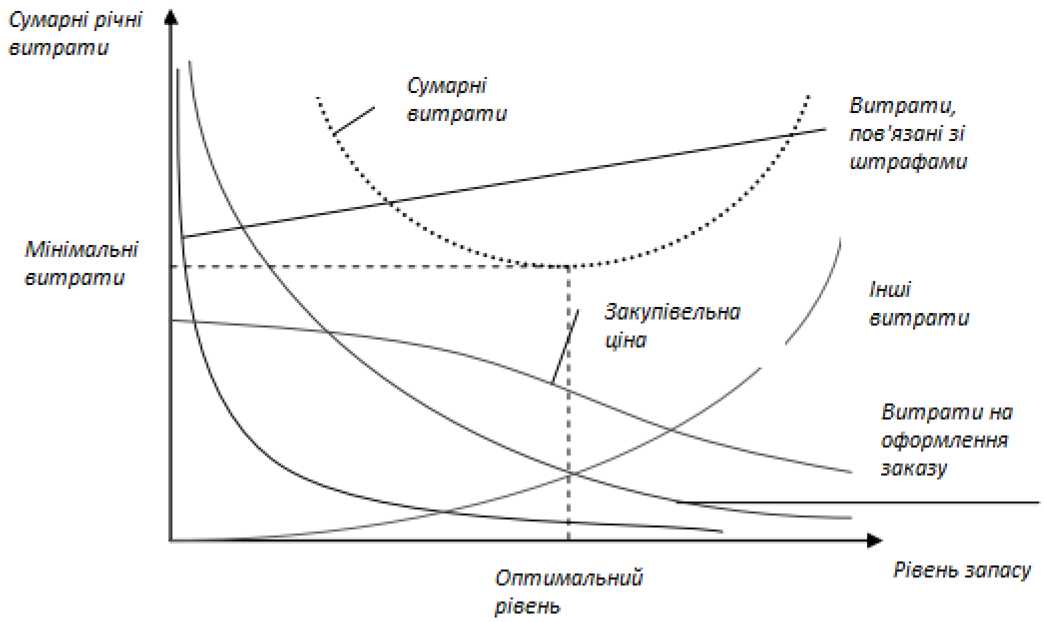


Рис. 2. Оптимальний обсяг запасу

Отже, модель управління запасами в кінцевому рахунку повинна дати відповідь на два питання: Яку кількість продукції замовляти? Коли це робити?

Відповідь на перше питання виражається розміром замовлення, який визначає оптимальну кількість ресурсів, що необхідно постачати кожен раз, коли відбувається його розміщення. Залежно від ситуації, що розглядається, розмір замовлення може змінюватися в часі. Відповідь на друге питання залежить від типу **системи управління запасами**. Якщо система передбачає періодичний контроль стану запасу протягом рівних проміжків часу (наприклад, щотижня або щомісяця), момент надходження нового замовлення зазвичай збігається з початком кожного інтервалу часу. Якщо ж в системі передбачений безперервний контроль стан запасу, точка замовлення зазвичай визначається рівнем запасу, при якому необхідно розміщувати нове замовлення.

Отже, розв'язок узагальненої задачі управління запасами визначається в такий спосіб. У разі періодичного контролю стану запасу слід забезпечувати поставку нової кількості ресурсів в обсязі розміру замовлення. У випадку безперервного контролю стану запасу необхідно розміщувати нове замовлення в розмірі обсягу запасу, коли його рівень досягає точки замовлення. Оптимальний рівень запасу відповідає мінімуму сумарних витрат. Відзначимо, що модель управління запасами не обов'язково повинна включати всі чотири види витрат, оскільки деякі з них можуть бути незначними, а іноді облік всіх видів витрат надмірно ускладнює функцію сумарних витрат. На практиці будь-яку компоненту витрат можна не враховувати за умови, що вона не становить істотну частину загальних витрат.

4. Прості моделі управління запасами

Нехай функції *A(t), B(t),* та *R(t)* виражають відповідно поповнення запасів, їх витрати та попит на продукт, що запасається, на проміжку часу [0, t]. В моделях управління запасами використовуються похідні цих функцій за часом *a(t), b(t), r(t)*, що називаються відповідно **інтенсивностями поповнення, витрат та попиту.**

Якщо функції *a(t), b(t), r(t)* не є випадковими величинами, то модель управління запасами вважається **детермінованою,** коли хоча б одна із них носить випадковий характер – **стохастичною.** В разі, коли всі параметри моделі не змінюються в часі, вона називається **статичною**, в протилежному випадку – **динамічною**. Статичні моделі використовуються, коли приймається разове рішення про рівень запасів на певний період, а динамічні – у випадку прийняття послідовних рішень про рівні запасу чи корегування раніше прийнятих рішень з врахуванням змін, що відбуваються.

Рівень запасу в момент *t* визначається основним рівнянням запасів:

$$J(t) = J_0 + A(t) - B(t), \qquad (1)$$

де J_0 − початковий запас.

Рівняння (1) частіше використовують в інтегральній формі:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt. \qquad (2)$$

Приклад 1. Інтенсивність надходження деталей на склад готової продукції цеха складає на початку зміни 5 дет./хв., на протязі першої години лінійно росте, досягаючи до кінця її 10 дет./хв., а потім залишається постійною. Припускаючи, що надходження деталей на склад відбувається безперервно на протязі всіх семи годин зміни, а їх вивіз зі складу виконується лише в кінці роботи, записати вираз для рівня запасу в довільний момент часу та, використовуючи його, знайти кількість деталей на складі: а) через 30 хв. після початку роботи; б) в кінці зміни.

Розв'язання. За умовою протягом зміни не відбувається видача деталей зі складу, тобто *b(t)*=0. Інтенсивність поповнення запасу на протязі першої години лінійно зростає, тобто *a(t)=kt+b*. Враховуючи, що *a(0)*=5, отримуємо *b*=5. Оскільки в кінці першої години, тобто при *t*=60 *a*(60)=10, тоді 10=*k*·60+5,звідки *k*=1/12. Таким чином, для першої години зміни *a*(*t*)=(1/12)*t*+ , а тоді $a(t)$=10. Враховуючи тривалість зміни (7 год. = 420 хв.) та співвідношення (2), отримаємо:

$$J(t)=\int_0^t (t/12+5)dt = t^2/24+5t, \text{ якщо } 0\le t\le 60,$$

і

$$J(t)=\int_0^{60}(t/12+5)dt+\int_{60}^{t}10dt = t^2/24+5t|_0^{60}+10t|_{60}^{t} = 10t-150,$$

якщо $60\le t\le 420$.

Кількість деталей на складі через 30 хв. після початку роботи: J(30)=900/24+5·30=187,5, а в кінці зміни: J(420)=10·420−150=4050.

5. Статична детермінована модель без дефіциту

Припущення про те, що дефіцит не допускається, означає повне задоволення попиту на продукт, що запасається, тобто збігання функцій $r(t)$ та $b(t)$. Нехай загальне споживання продукту, що запасається, за розглянутий інтервал часу θ дорівнює N. Розглянемо просту модель, в якій передбачається, що витрати запасу відбуваються безперервно з постійною інтенсивністю, тобто $b(t)=b$. Цю інтенсивність можна знайти, розділивши загальне споживання продукту на час, на протязі якого він витрачається:

$$b=\frac{N}{\theta}. \tag{3}$$

Поповнення заказу відбувається партіями однакового об'єму, тобто функція $a(t)$ не є безперервною: $a(t)$=0 при всіх t, крім моментів поставки продукту, коли $a(t)=n$, де n – об'єм партії. Оскільки інтенсивність витрат дорівнює b, то вся партія буде використана за час

$$T=\frac{n}{b}. \tag{4}$$

Якщо відлік часу почати з моменту надходження першої партії, то рівень запасу в початковий момент дорівнює об'єму цієї партії n, тобто $J(0)=n$. Графічно рівень запасу в залежності від часу зображено на рис. 2.

На протязі часового інтервалу $[0,T]$ рівень запасу зменшується по прямій $J(t)=n-bt$ від значення n до нуля. Оскільки дефіцит не допускається, то в момент T рівень запасу миттєво поповнюється до попереднього значення n за рахунок надходження партії заказу. Таким чином процес зміни $J(t)$ повторюється на кожному часовому інтервалі тривалістю T (див. рис. 2).

При формуванні основної моделі розрахунку ***EOQ*** критерієм оптимізації приймається мінімум загальних витрат, що включають кошти на виконання замовлень і витрати на зберігання запасу на складі протягом певного періоду (рік, квартал тощо).

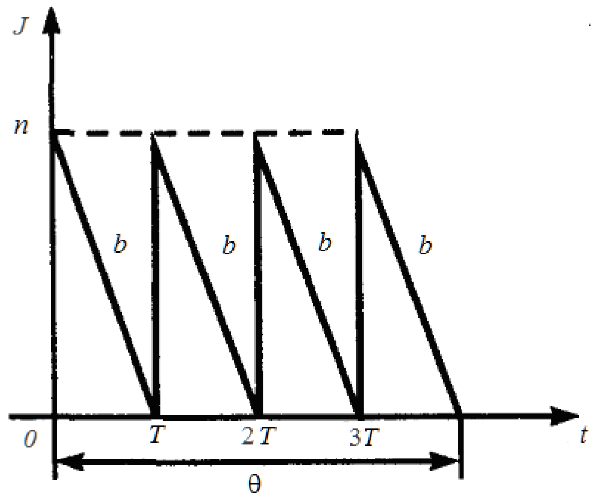


Рис. 2. Залежність рівня запасу від часу

Постановка задачі: визначити такий об’єм партії n, при якому сумарні витрати на створення та зберігання запасу були б мінімальними.

Позначимо сумарні витрати через C, витрати на створення запасу C_1, а на зберігання запасу C_2 та знайдемо ці величини за весь проміжок часу T.

Нехай витрати на доставку однієї партії продукту, незалежно від об’єму партії, дорівнюють c_1, а витрати на зберігання однієї одиниці продукції за одиницю часу – c_2. Позаяк за час θ необхідно запастись N одиницями продукту, який поставляється партіями об’єму n, то число таких партій:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}. \tag{5}$$

Звідси отримуємо

$$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n}. \tag{6}$$

Моментальні витрати зберігання запасу в момент часу t дорівнюють $c_2 J(t)$. Отже, за проміжок часу $[0,T]$ вони складуть:

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T (n - bt)dt$$

або, враховуючи (4)

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T \left(n - \frac{n}{T}t\right)dt = c_2 \left(nt - \frac{nt^2}{2T}\right)\Big|_0^T = \frac{c_2 nT}{2}.$$

Середній запас за проміжок $[0,T]$ дорівнює $nT/2$, тобто витрати на зберігання всього запасу при лінійних (за часом) його витратах дорівнюють витратам на зберігання середнього запасу.

Враховуючи періодичність функції $J(t)$ (всього за проміжок часу θ буде $k=N/n$ «зубців», аналогічних тим, що розглядалися на відрізку $[0,T]$) та формулу (5), отримуємо, що затрати зберігання запасу за проміжок часу θ складають:

$$C_2 = \frac{c_2 nT}{2} k = \frac{c_2 nT}{2} \cdot \frac{N}{n} = \frac{c_2 TN}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2}. \tag{7}$$

Не важко помітити, що витрати C_1 обернено пропорційні, а затрати C_2 прямо пропорціональні об’єму партії n. Графіки функцій $C_1(n)$ та $C_2(n)$, а також функції сумарних витрат

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta n}{2} \qquad (8)$$

подано на рис. 3. В точці мінімуму функції $C(n)$ її похідна $C'(n) = -\frac{c_1 N}{n^2} + \frac{c_2 \theta}{2} = 0$, звідки отримуємо

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}}, \qquad (9)$$

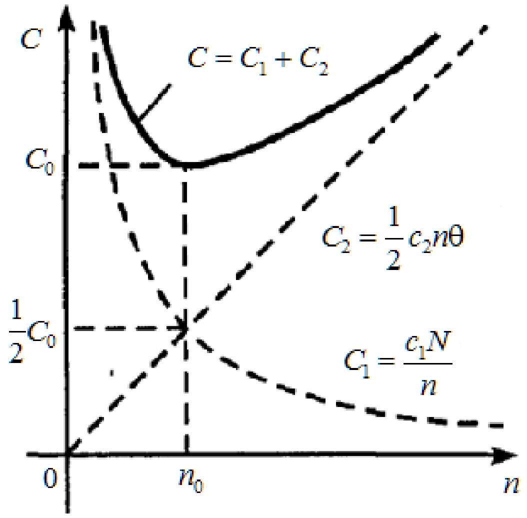


Рис. 3. Функція сумарних витрат

або, враховуючи (3)

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}. \qquad (10)$$

Вираз (10) називається **формулою Вілсона** або **формулою найбільш економічного об’єму партії**. Вона може бути отримана в інший спосіб, якщо врахувати, що добуток $C_1C_2=0{,}5c_1c_2N\theta$ є величиною постійною, незалежною від n. В цьому випадку, як відомо, сума двох величин приймає найменше значення, коли вони дорівнюють одне одному, тобто $C_1=C_2$ або

$$\frac{c_1 N}{n} = \frac{c_2 n \theta}{2}, \qquad (11)$$

звідки отримаємо (9).

Із (11) випливає, що мінімум загальних витрат задачі управління запасами досягається тоді, коли затрати на створення запасу дорівнюють коштам на збереження. При цьому мінімальні сумарні затрати

$$C_0 = C(n_0) = \frac{2c_1 N}{n}, \qquad (12)$$

Звідки, враховуючи (9) та (3), отримаємо $C_0 = \sqrt{2c_1c_2\theta N}$ або

$$C_0 = \theta\sqrt{2c_1c_2 b}. \qquad (13)$$

Число оптимальних партій за час θ з урахуванням (5), (9) і (3) складає:

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2 N \theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2 b}{2c_1}}.$$

Час витрати оптимальної партії на основі (4) з урахуванням (9) та (3)

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0 \frac{\theta}{N}, \qquad (14)$$

або

$$T_0 = \sqrt{\frac{2c_1\theta}{c_2N}} = \theta\sqrt{\frac{2c_1}{bc_2}}. \qquad (15)$$

Приклад 2. Потреба складального підприємства в деталях певного типу складає 120000 деталей на рік, причому ці деталі витрачаються в процесі виробництва рівномірно та безперервно. Деталі замовляються раз на рік та поставляються партіями однакового об'єму, вказаного в замовлені. Зберігання деталі на складі коштує 0,35 грошових одиниць на добу, а поставка партії – 10000 грош. одиниць. Затримка виробництва через відсутність деталей неприпустима. Встановити найбільш економічний об'єм партії та інтервал між поставками, які необхідно вказати в замовлені (постачальник не припускає затримки поставок).

Розв'язння. За умовою витрати на одну партію складають c_1=10000 грош.од., загальний проміжок часу θ=1 рік =365 днів, а загальний об'єм запасу за цей період N=120000 деталей. За формулою (9)

$$n_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 10000\cdot 120000}{0{,}35\cdot 365}} \approx 4335 \text{ дет.},$$

а за формулою (14):

$$T_0 = n_0\frac{\theta}{N} \approx 13 \text{ днів}.$$

Отже, найбільш економічний об'єм партії дорівнює 4335 деталей, а інтервал між поставками − приблизно 13 днів.

На практиці ж об'єм партії може відрізнятися від отриманого n_0, розрахованого за формулою (9). Так, в попередній задачі може виявитися зручним замовити партії кількістю 4500 або навіть 5000 деталей. Виникає питання, як при цьому змінюються сумарні витрати.

Для відповіді на це запитання виконаємо розкладання функції $C(n)$ в ряд Тейлора навколо точки n_0, обмежившись першими трьома членами при достатньо малих змінах об'єму партії Δn:

$$C(n) = C(n_0) + C'(n_0)\Delta n + \frac{C''(n_0)}{2!}\Delta n^2 + \ldots$$

Враховуючи, що при $n = n_0$ $C'(n_0) = 0$, $C''(n_0) = \frac{2c_1N}{n_0^3}$, а $C_0 = C(n_0)$, отримаємо:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C(n) - C(n_0)}{C(n_0)} \approx \frac{C''(n_0)\Delta n^2}{2C(n_0)} = \frac{2c_1N\Delta n^2}{n_0^3\left(\frac{2c_1N}{n_0}\right)}$$

або

$$\frac{\Delta C}{C_0} \approx \frac{\Delta n^2}{n_0^2}. \qquad (16)$$

Формула (16) свідчить про певну стійкість сумарних затрат у відношенні до найбільш економічного об'єму партії, оскільки при малих Δn відносні зміни витрат приблизно на порядок менші відносної зміни об'єму партії в порівнянні з оптимальним.

Приклад 3. За умовою прикладу 2 визначити, на скільки процентів збільшаться витрати на створення та зберігання запасу в порівнянні з мінімальними затратами при об'ємі партії 5000 деталей.

Розв'язання. Відносна зміна об'єму партії в порівнянні з оптимальним n_0=4335 складає $\Delta n/n_0$=(5000−4335)/4335=0,153. У відповідності до (2.16) відносна зміна сумарних затрат складе $\Delta C/C_0=0{,}153^2/2\approx0{,}012$, або лише 1,2 %.

Приклад 4. В умові прикладу 3 припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому строк виконання замовлення дорівнює 16 днів. Визначити точки замовлення, тобто при якому рівні запасу слід замовляти наступну партію.

Розв'язання. Позаяк за результатами розв'язання задачі 2 довжина інтервалу між поставками дорівнює 13,2 днів, то замовлення в умовах неналежного виробництва потрібно відновити, коли рівень запасу достатній для задоволення потреби на 16−13,2=2,8 дні. Через те, що щоденна необхідність (інтенсивність витрат запасу) за формулою (2.3) b=120000/365=329 деталей, то замовлення повинні робитися регулярно при досягненні рівня запасу $329\cdot2{,}8\approx922$ деталі.

6. Використання моделі Вілсона. Розрахунки в Microsoft Excel

Модель Вілсона є найпростішою для задачі управління запасами. Вона передбачає відсутність невизначеностей та лежить в основі більш складних і розвинених моделей управління запасами.

У простій моделі все цілком передбачувано, інтенсивність попиту відома і постійна. Запас на складі поповнюється періодично і однаковими поставками (партіями).

Вхідні параметри:

v − інтенсивність споживання запасу [один. товару/один. часу]

s − витрати на зберігання запасу [грош. один./(один. часу·один. часу]

K − витрати на здійснення замовлення [грош. один.]

Вихідні параметри:

Q − розмір замовлення [один. товару]

τ − період поставки [один. часу]

L − загальні витрати на управління запасами в одиницю часу [грош. один. /один. часу]

h_0 − точка замовлення [один. товару]

Допущення моделі Вілсона:

1) $v = const$,

2) $\tau = const$,

3) кожне замовлення поставляється однією партією,

4) витрати на здійснення замовлення K не залежать від його розміру,

5) відсутність запасу неприпустима,

6) чергова партія замовлення має надходити в момент, коли запас на складі знижується в точності до нуля,

7) розмір партії та довжина циклу пов'язані співвідношенням:

$$Q = vT. \tag{17}$$

Типова динаміка величини складського запасу за часом зображена на графіку (рис. 3)

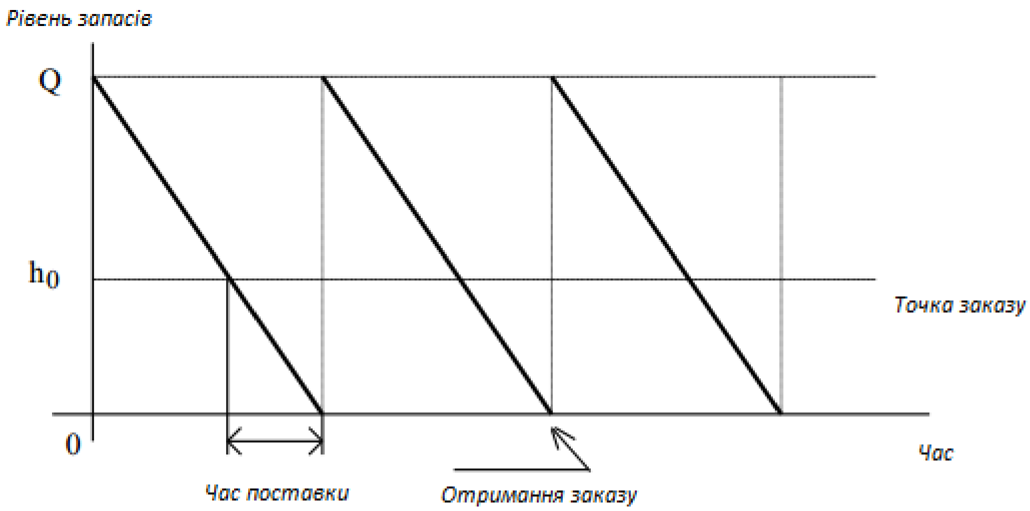


Рис. 3. Графік циклів зміни запасів в моделі Вілсона

Є можливість поповнювати запас великими партіями через довгі проміжки часу, а можна малими партіями і через короткі проміжки. Задача − визначити оптимальний розмір партії і, відповідно, оптимальну довжину циклу.

Формули моделі Вілсона

$$Q *= \sqrt{\frac{2Kv}{s}}, \tag{18}$$

$$L = K\frac{v}{Q} + s\frac{Q}{2}. \tag{19}$$

При коротких циклах (часті поставки невеликими партіями) витрати будуть значними за рахунок першого доданка. При довгих циклах (рідкісні поставки великими партіями) − за рахунок другого.

Поставка партії на склад вимагає певного часу. Позначимо термін поставки (період попередження) T_d. Для того, щоб замовлена партія надійшла точно в необхідний момент, замовлення слід подавати заздалегідь, за час T_d до цього моменту. У момент надходження обсяг запасу має дорівнювати 0. Отже, в момент подачі замовлення обсяг запасу на складі повинен складати величину h_0:

$$h_0 = vT_d, \tag{20}$$

$$\tau = \frac{Q}{v}. \tag{21}$$

Розглянемо приклад розрахунку за моделлю Вілсона. Оскільки розмір реального замовлення Q може не збігатися з $Q *$, розрахованого за формулою (17), то в блок вхідних даних необхідно ввести **прийнятий розмір** замовлення, який буде використовуватися при обчисленні розрахункових параметрів.

Форма розрахунку наведена на рис. 4.

	A	B	C
1	**Вихідні дані**		
2	**параметри**	**значення**	**одиниці вимірювання**
3	інтенсивність споживання	5	шт./дн.
4	витрати на оформлення заказу	2	грн
5	витрати на доставку заказу	15	грн
6	витрати на зберігання заказу	0,84	грн/(шт.*дн)
7	Час доставки	2	дн.
8	**Прийнятий розмір заказу**	**13**	**шт.**
9			
10			
11	**Розрахункові параметри**		
12	**параметри**	**значення**	**одиниці вимірювання**
13	Розмір заказу	=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(2*(B4+B5)*B3/B6);0)	шт.
14	витрати на управління запасами	**=ОКРУГЛ(((B4+B5)*B3/B8+B6*B8/2);2)**	грн/дн.
15	Період доставки	=ОКРУГЛ(B8/B3;1)	дн.
16	Точка заказу	=ОКРУГЛ(B3*B7;0)	шт.
17			

Рис. 4. Формули розрахунків

Визначимо стратегію управління запасами для наступного прикладу. При будівництві необхідно поповнити запас залізобетонних виробів Ж/Б ВВП 9-28-3т. Вага одного виробу p = 693 кг. Витрати на зберігання виробів на складі будівництва на добу s = 29 гривень за тонну. Витрати на оформлення одного замовлення $K_{оф}$ = 34,9 грн. Доставка вантажів на склад може здійснюватися залізничним вагоном, що вміщує в себе до m_1 = 40 т вантажу, або вантажними машинами, кожна з яких розрахована максимально на m_2 = 3 т вантажу. Витрати на використання одного рейсу вагона K_1 = 1408 грн, а вартість одної машино-години вантажної машини K_2 = 262 грн.

Доставка вагоном T_{d1} = 1,5 дні, а доставка вантажними машинами T_{d2} = 0,5 дні. Робота з даними залізобетонними виробами має бути закінчена не пізніше, ніж за T_{max} = 19 днів.

Якщо в транспортний засіб (вагон або машину) не вміщується обсяг замовлення, знайдений за формулою Вілсона, то необхідно розглянути наступні варіанти доставки:

– доставляти таку кількість виробів, яка вміщується в транспортний засіб;

– використовувати для доставки не один, а кілька транспортних засобів (наприклад, два), але при цьому змінитися витрати на доставку (збільшаться в 2 рази), а отже зміниться Q^*.

Основна ідея полягає в розгляді декількох варіантів доставки і вибору мінімального за витратами на управління запасами. Витрати на здійснення замовлення включають витрати на оформлення замовлення і на доставку. Розрахунок при доставці автотранспортом (на 1 автомобіль) наведено на рис. 5.

Вихідні дані		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
інтенсивність споживання	9	шт./дн.
витрати на оформлення заказу	34,9	грн
витрати на доставку заказу	131	грн
витрати на зберігання заказу	29	грн/(шт.*дн)
Час доставки	0,5	дн.
Прийнятий розмір заказу	**13**	**шт.**
Розрахункові параметри		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
Розмір заказу	10	шт.
витрати на управління запасами	**303,35**	грн/дн.
Період доставки	1,4	дн.
Точка заказу	5	шт.

Рис. 5. Визначення обсягу поставки

Вихідні дані		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
інтенсивність споживання	9	шт./дн.
витрати на оформлення заказу	34,9	грн
витрати на доставку заказу	262	грн
витрати на зберігання заказу	29	грн/(шт.*дн)
Час доставки	0,5	дн.
Прийнятий розмір заказу	**13**	**шт.**
Розрахункові параметри		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
Розмір заказу	14	шт.
витрати на управління запасами	**394,05**	грн/дн.
Період доставки	1,4	дн.
Точка заказу	5	шт.

Рис. 6. Стратегія управління запасами при автомобільних перевезеннях

Розмір замовлення становить 10 штук, для транспортування яких потрібно 2 автомобілі. Отже, зміняться витрати на доставку.

Якщо використовувати дві машини більшої вантажопідйомності (рис. 6), то оптимальним обсягом замовлення буде 14 виробів, період поставки складе 1,4 дня, замовляти потрібно в момент, коли на складі залишається 5 одиниць запасу.

Стратегія управління запасами при залізничних перевезеннях наведена на рис. 7.

Вихідні дані		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
інтенсивність споживання	9	шт./дн.
витрати на оформлення заказу	34,9	грн
витрати на доставку заказу	1408	грн
витрати на зберігання заказу	29	грн/(шт.*дн)
Час доставки	1,5	дн.
Прийнятий розмір заказу	**30**	**шт.**

Розрахункові параметри		
параметри	**значення**	**одиниці вимірювання**
Розмір заказу	30	шт.
витрати на управління запасами	**867,87**	грн/дн.
Період доставки	3,3	дн.
Точка заказу	14	шт.

Рис. 7. Стратегія управління запасами при залізничних перевезеннях

Як видно з даних розрахунку, при залізничних перевезеннях зростає період поставки і точка замовлення, але значно збільшуються витрати на запаси. Таким чином, для даного виду виробів вигідніше автомобільні перевезення.

Системи контролю за станом запасів

Управління запасами передбачає організацію контролю за їх фактичним станом. Необхідність організації відповідної спеціалізованої служби обумовлена підвищенням витрат у разі виходу фактичного розміру запасу за рамки, передбачені нормами запасу.

В цілому можна виділити наступні системи контролю за станом запасів:

– з фіксованою періодичністю замовлення;

– з фіксованим розміром замовлення.

Решта системи – їх різновиди.

Контроль стану запасів у системі з фіксованою періодичністю замовлення здійснюється через рівні проміжки часу за допомогою проведення інвентаризації залишків. За результатами перевірки здійснюється замовлення на поставку нової партії товарів. Її розмір визначається різницею передбаченого нормою максимального товарного і фактичного запасів. Оскільки для виконання замовлення потрібен певний період часу, то величина замовленої партії збільшується на розмір очікуваного витрати на цей відрізок часу. Розмір партії (Р) визначається за такою формулою:

$$Р=З_{макс} - (З_{ф} - З_{т}), \tag{22}$$

де $З_{макс}$ − передбачений нормою максимальний запас; $З_{ф}$ − фактичний запас на момент перевірки; $З_{т}$ − запас, який буде витрачений протягом розміщення та виконання замовлення.

Графічно модель системи контролю за станом запасу з фіксованою періодичність замовлення зображена на рис. 8.

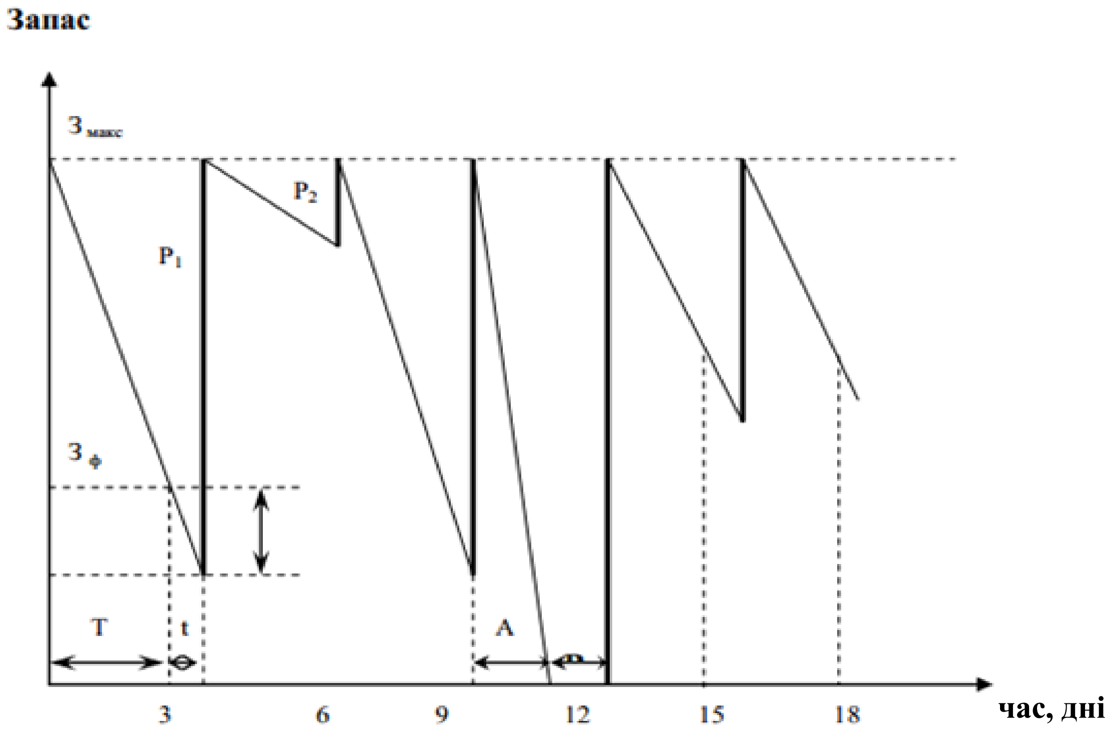


Рис. 8. Система контролю за станом запасів з фіксованою періодичністю замовлення

Тут використані такі умовні позначення:

Т − інтервал часу, після якого повторюється замовлення (в нашому випадку − 3 дні) − для даної системи величина постійна;

t − час, необхідний на розміщення та виконання замовлення (в наведеному прикладі − 1 день);

$Р_1$, $Р_2$, ..., $Р_i$ − величина окремого, і-го замовлення;

$З_t$ − запас, що витрачається за час t, необхідний для розміщення та виконання замовлення;

А − відрізок часу з інтенсивним попитом;

В − відрізок часу з нульовим запасом.

Інтенсівність попиту, яка характеризується кутом нахилу ділянок лінії, описує зміну запасів і є величиною змінною, позаяк кут нахилу на різних ділянках ламаної є різним. А оскільки замовлення здійснюється через рівні проміжки часу, то величина замовленої партії в різних періодах також буде різною. Природно, що застосовувати цю систему можна тоді, коли є можливість замовляти партії, різні за величиною (наприклад, в разі застосування контейнерної доставки товару ця система не може бути використана). Крім того, її не використовують, якщо доставка або розміщення замовлення є занадто коштовним.

Особливістю описуваної системи є також і те, що вона допускає виникнення дефіциту. Як видно з графіка, якщо попит різко посилиться (тобто графік круто піде вниз − ділянка А), то запас закінчиться до настання терміну подання замовлення. Це означає, що система може бути застосована, коли можливі втрати від дефіциту для підприємства також несуттєві.

Система контролю з фіксованою періодичністю замовлення застосовується в наступних випадках:

− умови поставки дозволяють отримувати замовлення різними за величиною партіями;

− витрати з розміщення замовлення та доставки порівняно невеликі;

− втрати від можливого дефіциту порівняно невеликі.

На практиці за даною системою можна замовляти один з багатьох товарів, що закуповується у одного і того самого постачальника, а також продукти, на які рівень попиту відносно постійний, малоцінний крам і т.д.

В системі контролю за станом запасів **з фіксованим розміром замовлення** останній є величиною незмінною. Інтервали часу, після яких здійснюється розміщення замовлення, в цьому випадку можуть бути різними (див. рис. 9).

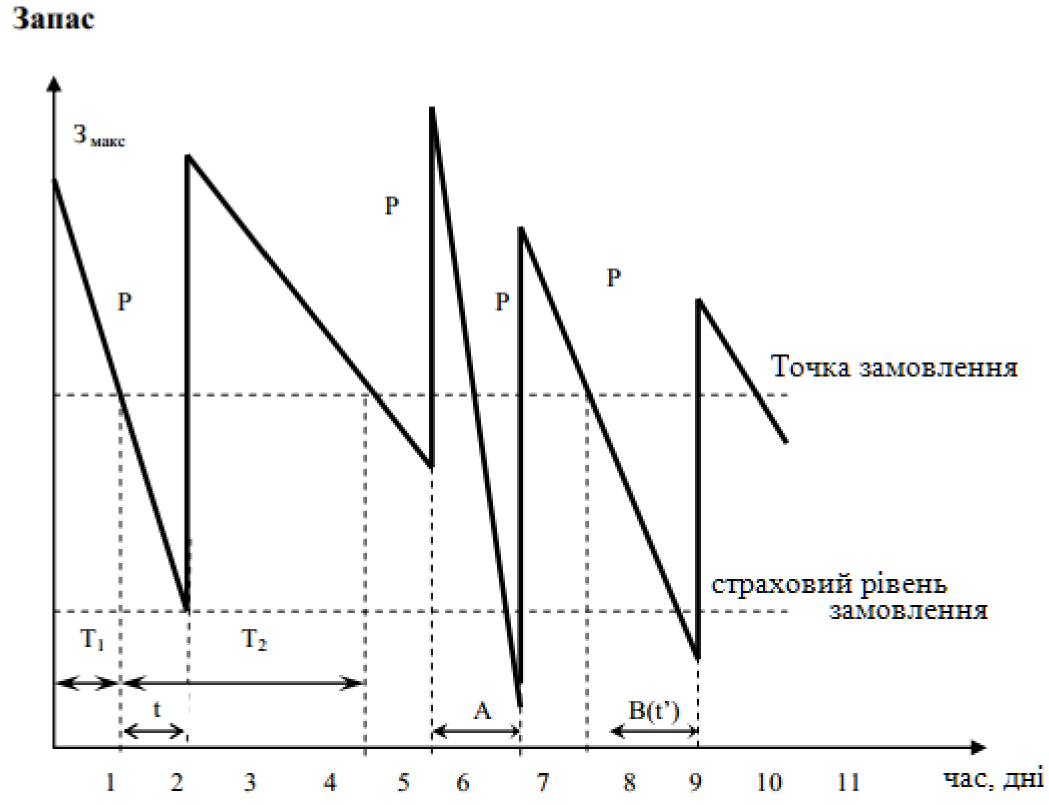


Рис. 9. Система контролю за станом запасів з фіксованим розміром замовлення

Умовні позначення:

T_1, T_2, ..., T_i − величина окремого і-го відрізку часу, після якого повторюється замовлення;

t − час, необхідний на розміщення та виконання замовлення (в наведеному прикладі − 1 день);

Р − розмір замовлення для даної системи контролю величина постійна;

А − період непередбаченого посилення попиту;

В − період, в якому було допущено порушення встановленого терміну поставки;

t ' − фактичний термін поставки в період В.

Величинами, що нормуються, в цій системі є замовлення, розмір запасу в момент розміщення замовлення (так звана точка замовлення) і страховий запас. Замовлення на поставку розміщується при зменшенні наявного запасу до точки замовлення. Як випливає з даних рис. 9, після розміщення замовлення запас продовжує зменшуватися, оскільки замовлений товар привозять не відразу, а через якийсь проміжок часу t. Величина запасу в точці замовлення вибирається такою, щоб в нормальній, робочій ситуації за час t запас не опустився нижче за страховий. Якщо ж попит непередбачено збільшиться, лінія графіка різко піде вниз (ділянку А), або ж буде порушений термін поставки (t' > t − ділянка В на рис. 8), то почне працювати страховий запас. Комерційна служба підприємства в цьому випадку повинна вжити заходів, що забезпечують додаткову поставку. Дана система контролю передбачає захист підприємства від утворення дефіциту.

На практиці система контролю за станом запасу з фіксованою кількістю замовлення застосовується переважно в наступних випадках:

− великі втрати внаслідок відсутності запасу;

− високі витрати в період зберігання запасів;

− висока вартість товару, що замовляється;

− високий ступінь невизначеності попиту;

− наявність знижки ціни залежно від замовленої кількості.

Система з фіксованим розміром замовлення передбачає безперервний облік залишків для визначення точки замовлення. Після того як зроблений вибір системи поповнення запасів, необхідно кількісно визначити величину замовленої партії, а також інтервал часу, через який повторюється замовлення.

Додаткові методи управління запасами

Найбільш поширеними додатковими системами управління запасами є:

♦ система з встановленою періодичністю поповнення запасів до певного рівня;

♦ система "мінімум-максимум".

В системі з встановленою періодичністю поповнення запасів до певного рівня, як і в системі з фіксованим інтервалом часу між замовленнями, вхідним параметром є проміжок часу між замовленнями. На відміну від основної системи вона зорієнтована на роботу при значних коливаннях споживання. Щоб запобігти завищення обсягів запасів, які знаходяться на складі, або їх дефіциту, замовлення робляться не тільки у встановлені моменти часу, але і після досягнення запасом граничного рівня. Система включає в себе елемент Р-моделі, себто встановлену періодичність оформлення замовлення, і елемент Q-моделі, тобто відстеження граничного рівня замовлення.

Відмінною особливістю системи є те, що замовлення поділяються на дві категорії − планові і додаткові. Перші робляться через задані інтервали часу, другі – в моменти відхилення темпів споживання від запланованих.

Система "мінімум-максимум" також містить у собі елементи основних систем управління. Система орієнтована на ситуацію, коли витрати на облік запасів і оформлення замовлення настільки значні, що їх можна порівняти з втратами від дефіциту запасів. Тому в даній системі замовлення виробляються не через кожен заданий інтервал часу, а тільки за умови, що запаси на складі в цей момент виявилися однаковими або меншими встановленого мінімального рівня. У цьому випадку розмір розраховується так, щоб постачання забезпечувало запасів на максимально бажаному рівні. Таким чином, система працює лише з двома рівнями запасів − мінімальним і максимальним.

Рекомендована література, інформаційні ресурси

1. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
2. Таха Х. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1985. – 320 с.
4. Математичне програмування: Навч. Посібник. / Т.П. Романюк, Т.О. Терещенко, Г.В. Присенко, І.М. Городкова. − К.: ІЗМН, 1996.

Варіанти завдань для самостійної та індивідуальної роботи

Задача1. Страхова фірма протягом року розміщує замовлення та поповнює запаси різноманітних офісних товарів і канцелярського приладдя, необхідних для забезпечення її діяльності. Відомо, що: річний обсяг використання паперу − 6000 пачок; вартість однієї пачки − 2.5 грн; середня вартість виконання замовлення (незалежно від його обсягу) − 15 грн; витрати на зберігання однієї пачки паперу на складі фірми − 20 % від витрат на її придбання.

Розрахувати обсяг замовлення, витрати фірми на його виконання, зберігання запасу паперу та сукупні витрати для кількості замовлень на рік від 8 до 12. Результати обчислень занести в таблицю (нижче наведено форму); за отриманими даними побудувати графік; у розрахунковий та графічний способи визначити оптимальний розмір замовлення та оптимальну кількість замовлень на рік.

Таблиця. Підсумкові дані

Показник	Кількість замовлень на рік
Обсяг замовлення, пачок	
Вартість збереження запасу, грн	
Вартість виконання замовлення, грн	
Сукупні витрати, грн	

Задача 2. Фірма виробляє радіоприймачі. Щорічно вона купує 120000 друкарських плат для використання їх при монтажі продукції. Вартість однієї плати – 0,33 у.о./шт., вартість зберігання – 0,12 у.о./шт. за рік, витрати замовлення − 150 у.о. за одне замовлення. Робочий період – 350 днів. Завдання. Розрахувати оптимальний розмір замовлення, точку відновлення замовлення.

Задача 3. Менеджер магазину роздрібної торгівлі оцінює річний попит на молочну продукцію фірми «Баланс» у 100000 шт. Витрати на замовлення становлять 50 грн. Витрати зберігання – 0,10 грн/рік (шт.). Розрахувати: оптимальне замовлення; кількість замовлень і денну кількість продажу, якщо магазин працює 360 днів на рік; якщо термін виконання замовлення 5 днів, обчислити точку відновлення замовлення.

Задача 4. Магазин-салон, що продає мобільні телефони, прогнозує стійкий попит на продукцію бренда «NOKIA» у розмірі 10 тел/ тиждень. У зв'язку з тим, що попит на телефони постійно зростає, фірма-постачальник пропонує зарезервувати певну кількість апаратів. Витрати на зберігання – 12 грн/рік, витрати на резервування – 10 грн/шт.(за рік), витрати на оформлення замовлення – 150 грн. Усього протягом року магазин працює 48 тижнів. Розрахувати: оптимальне замовлення; оптимальну кількість зарезервованих одиниць; кількість замовлень.

Задача 5. Підприємство виготовляє велосипеди. Виробництво рівномірне і щоденна потреба в рамах для них становить 25 шт. Як правило, постачальник виконує замовлення протягом двох тижнів. Підприємство працює протягом 280 днів на рік. Кількість замовлень (на рік) становить 12. Розрахувати: розмір оптимального замовлення; час між замовленнями; точку відновлення замовлення.

Задача 6. Випуск товарної продукції запланований в обсязі 8 млн грн. На початок року залишок товарної продукції на складі становив 0,5 млн грн. Вартість відвантаженої, але неоплаченої продукції – 0,3 млн грн. Залишок товарної продукції, що планується на кінець року, має становити 0,2 млн грн. Визначте обсяг запланованої реалізованої продукції.

Задача 7. У звітному періоді підприємство виготовило виробів А − 300 од., Б − 180 од. Вартість виробу А − 1530 грн, Б − 2350 грн. Вартість послуг промислового характеру, наданих стороннім підприємствам − 21 тис. 600 грн. Залишок спеціалізованого технологічного оснащення на початок року − 25 тис. грн, на кінець року −12 тис. грн. Визначте обсяг валової продукції.

Задача 8. Обчисліть величину валової продукції та її зміну в плановому році, якщо у звітному році обсяг валової продукції становив 750 тис. грн. У плановому році підприємство передбачає виготовити продукції на суму 720 тис. грн. Частина її на суму 40 тис. грн піде на внутрішні потреби. Незавершене виробництво за плановий рік зміниться на 10 тис. грн. Додатково підприємством буде виготовлено напівфабрикатів для реалізації на сторону на 20 тис. грн.

Задача 9. Потрібно розрахувати обсяг незавершеного виробництва на кінець планового періоду у вартісному виразі та трудовому вимірі, виходячи з таких даних: за рік завод виготовляє 320 виробів. Трудомісткість виробу становить 840 нормо-год., тривалість циклу виготовлення виробу − 25 днів, планова собівартість − 1250 грн, матеріальні витрати в ній становлять 70 %. У незавершеному виробництві знаходиться в середньому 62 вироби.

Задача 10. Замовлення на виробництво партії двигунів в обсязі 20 од. має бути виконане до 01.08. Вироби виготовляють у заготівельному, механічному і складальному цехах. Тривалість циклів виробництва (в змінах) за стадіями – $T_{ц.збір}$ = 13, $T_{ц.\cdot мех}$ = 21, $T_{ц.заг}$ = 16. Визначте можливу дату початку виробництва двигунів і значення резервних випереджень між цехами. Найбільша можливість зриву терміну виконання замовлення існує в заготівельному цеху. Режим роботи заводу − без вихідних днів у дві зміни, тривалістю 8 год.

Задача 11. В деякій фірмі працюватимуть 1000 інженерів. Плинність в середньому становить 50 осіб на рік. Перед тим як приступити до роботи, новачки проходять в фірмі стажування, яке обходиться в 25000 грн на людину. Якщо немає можливості надати місце потенційному інженеру після закінчення стажування, то фірма втрачає 500 грн на людину в місяць. Визначити, скільки інженерів слід приймати на стажування, з якою частотою слід її організовувати.

Задача 12. Певна компанія виробляє товар, річний попит на який дорівнює 5000 одиниць. Витрати зберігання складають 20 у.о. за одиницю товару в рік, а подача одного замовлення незалежно від розміру обходиться компанії в 30 у.о. Величину попиту можна вважати постійною. Втрати від браку запасів становлять 10 у.о. на одиницю товару.

Задача 13. Обсяг продажу деякого магазину b = 500 упаковок пакетного супу на рік. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна купівлі одного пакета дорівнює 2 у.о., за одне замовлення власник магазину повинен заплатити c_1 = 10 у.о. Час доставки замовлення від постачальника становить 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінками фахівців витрати зберігання складають 20 % середньорічної вартості запасів. Скільки пакетів повинен замовляти власник магазину кожен раз, якщо його мета полягає в мінімізації загальної вартості запасів?

Задача 14. На нафтобазу бензин привозять на танкері. Накладні витрати g в розрахунку на партію бензину складають 50000 грн. Щорічно база відпускає μ = 4000 т бензину. Витрати на зберігання h приймемо 0,5 грн за 1 т бензину на добу. Поставка здійснюється на першу вимогу − миттєво, і дефіцит бензину на базі не допускається. Знайдіть оптимальні: обсяг продукції, що замовляється партії q, тривалість циклу T * роботи системи і загальні середньодобові витрати L_1^* .

Задача 15. Завод радіоелектронної апаратури виробляє x_1 радіоприймачів на добу. Мікросхеми для апаратів (по 1 шт. на приймач) виробляється на цьому ж заводі з інтенсивністю x_2 тис. шт. на добу. Витрати на підготовку виробництва партії мікросхем складають x_3 грн, собівартість виробництва 1 тис. шт. мікросхем дорівнює x_4 грн. Зберігання мікросхем на складі обходиться заводу в x_5 грн за кожну тисячу на добу. У підприємства з'явилась можливість закуповувати мікросхеми в іншому місці за ціною x_6 грн за 1 тис. шт. Вартість доставки дорівнює x_7 грн. З'ясуйте, чи варто заводу закуповувати мікросхеми замість того, щоб їх виробляти. Для більш вигідного режиму роботи заводу (виробництво або закупівля) визначте періодичність подання замовлення і витрати на управління запасами в місяць (22 робочих дня) (*при різних значеннях змінних*).

Задача 16. Річний попит D = 400 одиниць, вартість подачі замовлення C_0 = 40 грн/замовлення, витрати зберігання однієї одиниці C_h = 250 грн/рік, час доставки – 6 днів, 1 рік = 250 робочих днів. Знайти оптимальний розмір замовлення, витрати, рівень повторного замовлення, число циклів за рік, відстань між циклами.

Задача 17. Річний попит D = 1500 одиниць, вартість подачі замовлення C_0 = 150 грн/замовлення, витрати зберігання однієї одиниці C_h = 45 грн/рік, час доставки 6 днів, 1 рік = 300 робочих днів. Знайдемо оптимальний розмір замовлення, витрати, рівень повторного замовлення.

Задача 18. Річний попит D = 8000 одиниць, вартість організації виробничого циклу C_s = 200 грн, витрати зберігання однієї одиниці C_h = 15 грн/рік. Знайти економічний розмір партії, витрати, число циклів за рік, відстань між циклами.

Задача 19. План річного випуску продукції виробничого підприємства становить 800 одиниць, при цьому на кожну одиницю готової продукції потрібно 2 одиниці комплектуючого виробу КІ-1. Відомо, що вартість подачі одного замовлення складає 200 грн. Ціна одиниці комплектуючого виробу – 480 грн. Вартість утримання комплектуючого виробу на складі становить 15 % його ціни. Визначити оптимальний розмір замовлення на комплектуючий виріб КІ-1.

Задача 20. Розрахувати параметри системи управління запасами з фіксованим розміром замовлення для виробничого підприємства. План річного випуску продукції виробничого підприємства становить 800 одиниць, при цьому на кожну одиницю готової продукції потрібно 2 одиниці комплектуючого виробу КІ-1. Відомо, що вартість подачі одного замовлення складає 200 грн. Ціна одиниці комплектуючого виробу – 480 грн, а вартість утримання комплектуючого виробу на складі становить 15 % його ціни. Час поставки, вказаний в договорі, становить 10 днів, можлива затримка поставки – 2 дня. Кількість робочих днів у році – 226. Необхідно розрахувати параметри системи управління запасами з фіксованим розміром замовлення.

Задача 21. Потреба верстатоскладального цеху в заготовках деякого типу становить 36 тис. шт. на рік. Дефіцит заготовок не допускається. Витрати розміщення замовлення − 50 грош. од., витрати утримання однієї заготовки на рік – 5 грош. од. Середній час реалізації замовлення − 10 днів. Визначити: оптимальну партію поставки; періодичність відновлення поставок; точку розміщення замовлення; сумарні річні витрати.

Задача 22. Підприємство-посередник, що займається продажем автівок, реалізує в середньому 150 автомобілів на рік. Вартість доставки кожного замовлення від виробника оцінюється в 1500 у.о., а середньорічна вартість зберігання однієї машини становить 30 % від закупівельної ціни. Якщо розмір замовлення менше, ніж 50 автомобілів, то ціна закупівлі складає 6000 у.о. Для замовлень, що мають розмір від 50 до 99 автомашин, надається знижка 3 %, 100 і більше автомобілів – 5 %. Визначити оптимальний розмір замовлення і вартість логістичної системи.

Задача 23. Магазин закуповує певний товар за ціною 2 у.о.. Попит на нього рівномірно розподілений протягом року і становить 500 упаковок на рік. Доставка одного замовлення – 10 у.о., її час – 12 робочих днів. Передбачається, що рік містить 300 робочих днів. Середньорічна вартість зберігання однієї упаковки складає 20 % від її закупівельної ціни. Постачальник надає наступні знижки на закупівельні ціни: для замовлень, що мають розмір від 30 до 99 упаковок, надається знижка на закупівельну ціну в 5 %, від 100 і більше – 10 %. Чи слід адміністрації магазину скористатися однією із знижок?

Задача 24. Підприємство-посередник, що займається продажем автомобілів, реалізує в середньому 200 машин на рік. Вартість доставки кожного замовлення від виробника оцінюється в 1000 у.о., а середньорічна вартість зберігання одного автомобіля становить 25 % від закупівельної ціни. Якщо розмір замовлення менше, ніж 50 автівок, то ціна закупівлі складає 7000 у.о. Для замовлень, що мають розмір від 50 до 99 автомашин, надається знижка на закупівельну ціну в 5 %, більше 120 – 8 %. Визначити оптимальний розмір замовлення і вартість логістичної системи.

Задача 25. Магазин закуповує товар за ціною 5 у.о. за одну упаковку. Попит на товар становить 1000 упаковок в рік. Його величина рівномірно розподіляється протягом року. Доставка одного замовлення складає 20 у.о., її час – 7 робочих днів. Передбачається, що в році 300 робочих днів. Середньорічна вартість зберігання однієї упаковки оцінюється в 20 % від її закупівельної ціни. Постачальник надає наступні знижки на закупівельні ціни: для замовлень, що мають розмір від 50 до 150 упаковок, надається знижка на закупівельну ціну в 5 %, більше 150 – 10 %. Чи слід адміністрації магазину скористатися якоюсь із знижок?

Поточні контрольні запитання

1. Розкрийте сутність виробничого планування.
2. Розкрийте ключові аспекти системи управління запасами.
3. Яка основна мета управління запасами?
4. Види запасів, назвіть їх та охарактеризуйте.
5. Які бувають форми структурної побудови відділів збуту?
6. В чому сутність збуту продукції?
7. Яку задачу описує модель Вілсона?
8. Охарактеризуйте основні шляхи економії матеріалів.
9. Розкрийте транзитну і складську форму постачання.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Ус Світлана Альбертівна

Практикум за курсом
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ» ЧАСТИНА І. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Редактор Є.М. Ільченко

Підп. до друку 21.09.2020. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 10,6.
Обл.-вид. арк. 13,7. Тираж 100 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.