

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Приведены результаты исследования вопросов использования приближенных решений обратных задач синтеза и обратных задач измерения. Для получения полезной информации о точном решении обратной задачи измерения принимается гипотеза о свойствах этого решения. Рассмотрены две практические задачи измерения, где используется предложенная гипотеза.

Наведено результати дослідження питань застосування наближених розв'язків обернених задач синтезу та обернених задач вимірювання. Для отримання корисної інформації відносно точного розв'язку оберненої задачі приймається гіпотеза про властивостях цього розв'язку. Розглянуто дві практичні обернені задачі вимірювання, де застосовується запропонована гіпотеза.

The investigation of use questions of approximate solutions of inverse problems are given in work. For obtaining of the useful information about the exact solution of an inverse problem of measurement a hypothesis is offered. Two practical problems of measurement are considered where the offered hypothesis are used.

Введение

Многие исследователи при изучении математических дисциплин, которые непосредственно связаны с практическими задачами, поражаются хорошему соответствию выводов математических исследований и свойств реальных физических процессов. При этом одно и то же уравнение может хорошо описывать множество физических явлений, явно между собой не связанных. Например, уравнение Лапласа хорошо описывает физические процессы стационарного распространения тепла, некоторые экономические процессы, стационарное течение жидкости и т.д. [1]. И самое удивительное заключается в том, что математика оперирует вымышленными (абстрактными) объектами в виде точки, линии, прямой, плоскости. Таких объектов в природе не существует. Но выводы, полученные при исследовании этих вымышленных объектов, соответствуют реальности достаточно хорошо.

Указанное качество математики обеспечивает ей привилегированное положение среди остальных наук и она справедливо называется царицей наук.

Однако, совершенно не ясно, – за счет чего она достигает такого положения.

Физическая детерминированность реальных процессов.

Для объяснения такого привилегированного положения математики обратимся к свойству физической детерминированности реальных процессов [2]. Кратко, это свойство можно сформулировать следующим образом: малым изменениям исходных данных в традиционных задачах соответствуют малые изменения физического процесса. На языке математики этот факт устанавливается с помощью соответствующих теорем устойчивости [3]. При

этом математика только закрепляет указанные свойства физических процессов, а не создает их. В дальнейшем будем называть это свойство – свойством А.

Таким образом, проводя исследования нереальных объектов, которые близки к соответствующим характеристикам реальных объектов, можно на основании свойства А, получать результаты, которые хорошо совпадают с практикой.

Пусть математическая задача некоторого физического процесса представлена в форме:

$$\tilde{A}z = u, \quad (1)$$

где $z \in Z, u \in U$ (Z, U – функциональные пространства), \tilde{A} – приближенный оператор процесса; z есть, как правило, внешнее воздействие, функция u_δ является результатом внешнего воздействия на процесс (выходом). Указанное выше свойство А приводит к специфическим свойствам оператора \tilde{A} . Как правило, этот оператор является компактным [2,4]. В этом случае, задача нахождения функции u по исходным данным $\{z, \tilde{A}\}$ будет устойчивой к малым изменениям исходных данных (свойство А).

Требование устойчивости решения математической задачи входит непременным пунктом в определение корректности математической задачи, которые сформулировал Ж.Адамар в начале 20-го века [2]. Отсутствие устойчивости приводит к значительным трудностям при приближенных расчетах.

В дальнейшем будем полагать, что приближенные исходные данные могут быть элементами множеств исходных данных:

$$z \in Z_{in} = \{z\}, \tilde{A} \in K_A = \{\tilde{A}\}. \quad (2)$$

Каждой паре исходных данных соответствует одна или несколько функций u . Для простоты будем полагать, что функция u определяется единственным образом. Множество функций u будет образовывать множество откликов $u \in U_{in}, \tilde{A}z = u$. Двум парам исходных данных $\{z_1, \tilde{A}_1\}, \{z_2, \tilde{A}_2\}$, которые близки между собой, будет соответствовать пара близких откликов u_1, u_2 . Естественно, что понятие близости могут быть разными.

Специфика обратных задач.

Рассмотрим обратную задачу, представленную в виде (1), где функция z является искомой, а исходными данными является пара $\{u, \tilde{A}\}, u \in U_{in}, \tilde{A} \in K_A$.

Если оператор \tilde{A} является компактным, то близким парам исходных данных u_1, u_2 могут соответствовать неблизкие решения обратной задачи $z_1, z_2; \tilde{A}z_1 = u_1, \tilde{A}z_2 = u_2$. Причиной такой особенности обратной задачи является то, что обратный оператор \tilde{A}^{-1} к компактному оператору $\tilde{A} \in K_A$ не является непрерывным [2,4].

Обратные задачи можно условно разделить на два класса: задачи синтеза и задачи измерения (задачи интерпретации) [5,6]. В задачах синтеза полученное решение используется в дальнейшем для построения прогноза, т.е. для задачи получения функции \tilde{u} , которая будет близка к заданной ранее $u_{зад}$ [6]. При этом в задачах синтеза несущественным является величина погрешности полученного решения, так как благодаря свойству компактности функция \tilde{u} будет близка к нужной функции $u_{зад}$. По этой причине приближенные решения обратных задач синтеза являются пригодными для дальнейшего использования, несмотря на их различие между собой в силу неустойчивости.

В задачах измерения конечной целью является получение функции $\tilde{z}_{точ}$, которая близка к функции $z_{точ}$, $u_{точ} = A_{точ}z_{точ}$. И в данном случае погрешность решения обратной задачи $\tilde{z}_{точ}$ по отношению к точной функции $z_{точ}$ имеет существенное значение [5,7].

В работах [8,9] предложен алгоритм построения приближенного решения, основанного на методе регуляризации А.Н.Тихонова.

Пусть функции z, u принадлежат Банаховым функциональным пространствам $z \in Z, u \in U$. Далее предположим, что точный оператор $A_{точ}$ является линейным. Пусть далее заданы величины отклонений исходных данных обратной задачи $\{u, \tilde{A}\}$ по отношению к точным данным $\{u_{точ}, A_{точ}\}$:

$$\|\tilde{A} - A_{точ}\|_{Z \rightarrow U} \leq h, \quad \|\tilde{u} - u_{точ}\|_U \leq \delta. \quad (3)$$

Решение обратной задачи сводится при этом к решению экстремальной задачи:

$$\inf_{z \in Z_1} M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \inf_{z \in Z_1} \left\{ \|\tilde{A}z - \tilde{u}\|_U^2 + \alpha \Omega[z] \right\} = M^\alpha[z_\alpha, \tilde{u}, \tilde{A}], \quad (4)$$

где $\Omega[z]$ есть стабилизирующий функционал [2,8].

Параметр регуляризации α можно определять по методу обобщенной невязки:

$$\|\tilde{A}z_\alpha - \tilde{u}\|_U^2 = (\delta + h\|z_\alpha\|)^2 + \mu^2(\tilde{u}, \tilde{A}), \quad (5)$$

где $\mu(\tilde{u}, \tilde{A})$ есть мера несоответствия.

Однако, не существует путей для определения погрешности h , поскольку точный оператор $A_{точ}$ неизвестен. Конечно, при определенных предположениях относительно точного оператора $A_{точ}$ возможно получить некоторую оценку погрешности, однако такая оценка будет нереальной.

На основании приведенных рассуждений можно сделать вывод о невозможности получения решения обратной задачи измерения, которое было бы близко к точному решению. Другими словами, приближенные решения

обратных задач измерения не представляют интереса для практического использования в силу неустойчивости решений.

Выход из этой тупиковой ситуации существует, если при исследовании обратной задачи измерения ограничиться только некоторой оценкой точного решения.

Основная гипотеза

Для получения полезной информации о точном решении обратной задачи измерения принимается следующая гипотеза: для точного решения обратной задачи выполняется неравенство

$$\Omega[z_{точ}] \geq \Omega[z_{\alpha}] \quad (6)$$

для любого приближенного оператора \tilde{A} в уравнении обратной задачи (1), где $z_{точ}$ есть точное решение обратной задачи измерения, z_{α} – регуляризованное решение обратной задачи с оператором \tilde{A} . Если точный оператор является линейным, тогда выполнение неравенства (6) очевидно.

Для иллюстрации использования предлагаемой гипотезы рассмотрены две практические задачи измерения: обратная задача А.Н.Крылова, задача идентификации момента технологического сопротивления на листовом прокатном стане [10,11].

Обратная задача А.Н.Крылова.

В 1914 году при испытаниях партии готовых корабельных орудий было обнаружено значительное превышение давления в компрессорах орудий [10]. Измерения проводились индикатором Викакса. График перемещения поршня индикатора представлен на Рис.1.

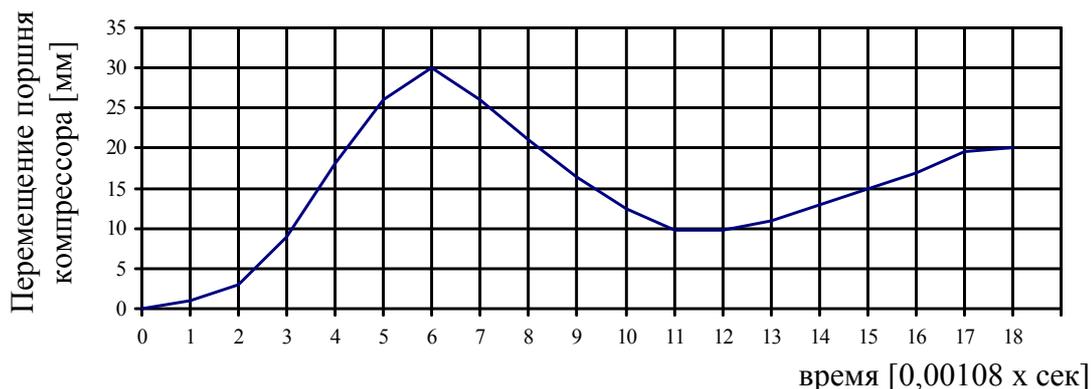


Рис.1. График перемещения поршня индикатора Викакса во время испытаний.

Согласно показаниям индикатора максимальное давление в компрессоре равно 45 атм., вместо нормального давления в 30 атм. Если показания индикатора соответствует реальности, тогда орудия необходимо заменить на

новые. Такая замена стоила бы два миллиона золотых рублей. Кроме того, такая замена значительно продлила бы срок готовности корабельных орудий.

А.Н.Крыловым была выдвинута гипотеза, что показания прибора не соответствуют реальности по причине дефекта в его конструкции.

Для подтверждения такого предположения А.Н. Крылов рассмотрел обратную задачу для динамической модели индикатора Викакса [10].

Математическая модель движения поршня индикатора на пружине была выбрана в форме:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{G(t)}{M} = \frac{S P(t)}{M}, \quad (7)$$

где $P(t)$ – давление на поршень, S – площадь поверхности поршня, M – приведенная масса поршня, $M = 0.472$ кг, $x(t)$ – движение поршня во время испытаний, ω – частота собственных колебаний поршня на пружине, $\omega^2 = 3.18 \cdot 10^6 \text{с}^{-2}$.

Далее, кривая перемещения поршня компрессора аппроксимировалась тремя зависимостями. При этом погрешность аппроксимации не превышала толщины карандашной линии на Рис.1.

После подстановки этих зависимостей в уравнение движения (7) А.Н.Крыловым были получена разрывная функция давления $P(t)$, которая не соответствовала физическому смыслу процесса. Результаты такого решения обратной задачи были неустойчивы к малым изменениям исходных данных и поэтому А.Н.Крылов отказался от такого способа доказательства своего предположения. Подтверждение о неправильных показаниях индикатора Викакса он получил иным способом.

В современном изложении обратная задача А.Н.Крылова сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода с приближенным оператором \tilde{A} [11]:

$$\int_0^t \sin \omega_1 (t - \tau) \exp(-0.5 b(t - \tau)) z(\tau) d\tau = \tilde{A} z = u(t), \quad (8)$$

где $u(t) = \omega_1 M S^{-1} \{x(t) - \exp(-0.5 b t)[x(0) \cos \omega_1 t + \omega_1^{-1}(-0.5 b x(0) + \dot{x}(0)) \sin \omega_1 t]\}$,

$x(t)$ есть известная из эксперимента функция, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - 0.25 b^2}$,

\tilde{A} есть линейный интегральный оператор.

Для решения неустойчивой задачи (8) был использован метод регуляризации А.Н.Тихонова и исходная задача была заменена на решение следующей экстремальной задачи [10]:

$$\Omega[z_0] = \inf_{\tilde{A}} \inf_{z \in Q_\delta \cap Z_1} \Omega[z], \quad (9)$$

где $Q_\delta = \{z : z \in Z_1, \|\tilde{A} z - u\|_U \leq \delta\}$, $\|u_T - u\|_U \leq \delta$, δ – погрешность исходных данных, u_T – точные исходные данные.

Решение экстремальной задачи (9) дано на рис.2. (нижняя линия).

Однако физический смысл этой задачи диктует постановку следующей экстремальной задачи:

$$\Omega[z_1] = \sup_{\tilde{A}} \inf_{z \in Q_s \cap Z_1} \Omega[z], \quad (10)$$

Решение z_1 экстремальной задачи (10) дано на рис.2. (верхняя линия).

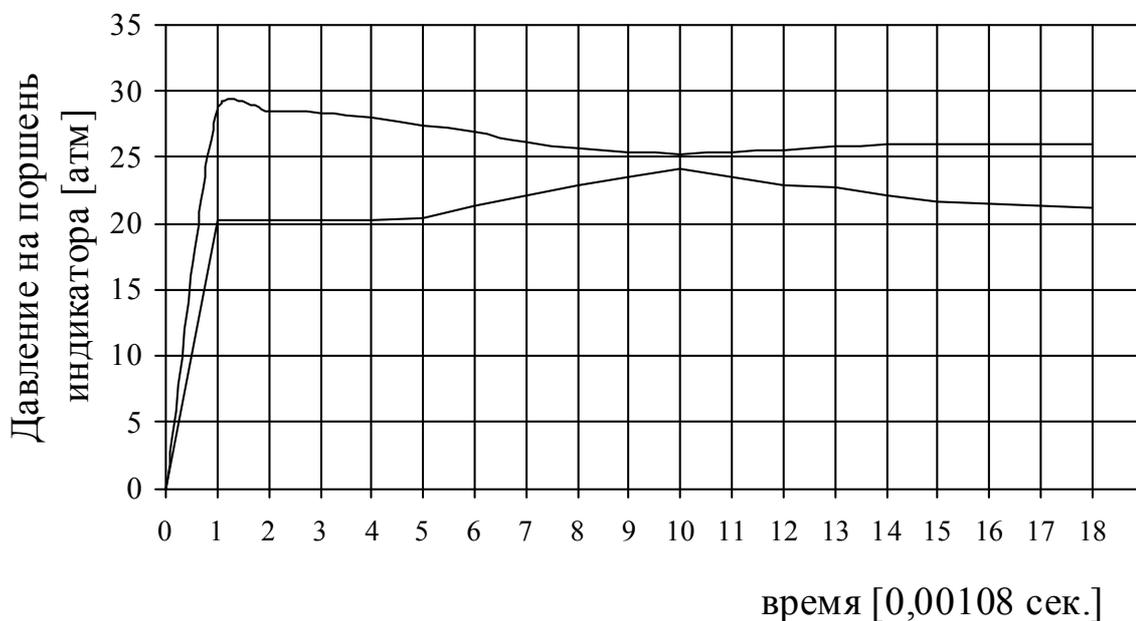


Рис.2. Графики изменения давлений на поршень индикатора во время испытаний, полученные методом регуляризации.

Функция z_1 имеет максимальную амплитуду равную 29 атм. С учетом неравенства (6) точное решение может иметь максимальную амплитуду меньшую 30 атм. Следовательно, для замены готовых орудий нет объективных оснований.

Идентификация момента технологического сопротивления на прокатном стане.

В качестве второй обратной задачи измерения рассмотрена задача идентификации момента технологического сопротивления на листовом прокатном стане [11].

Методом решения задачи о пластическом деформировании металла была получена кривая изменения момента технологического сопротивления, которая показана на рис.3. пунктирной линией.

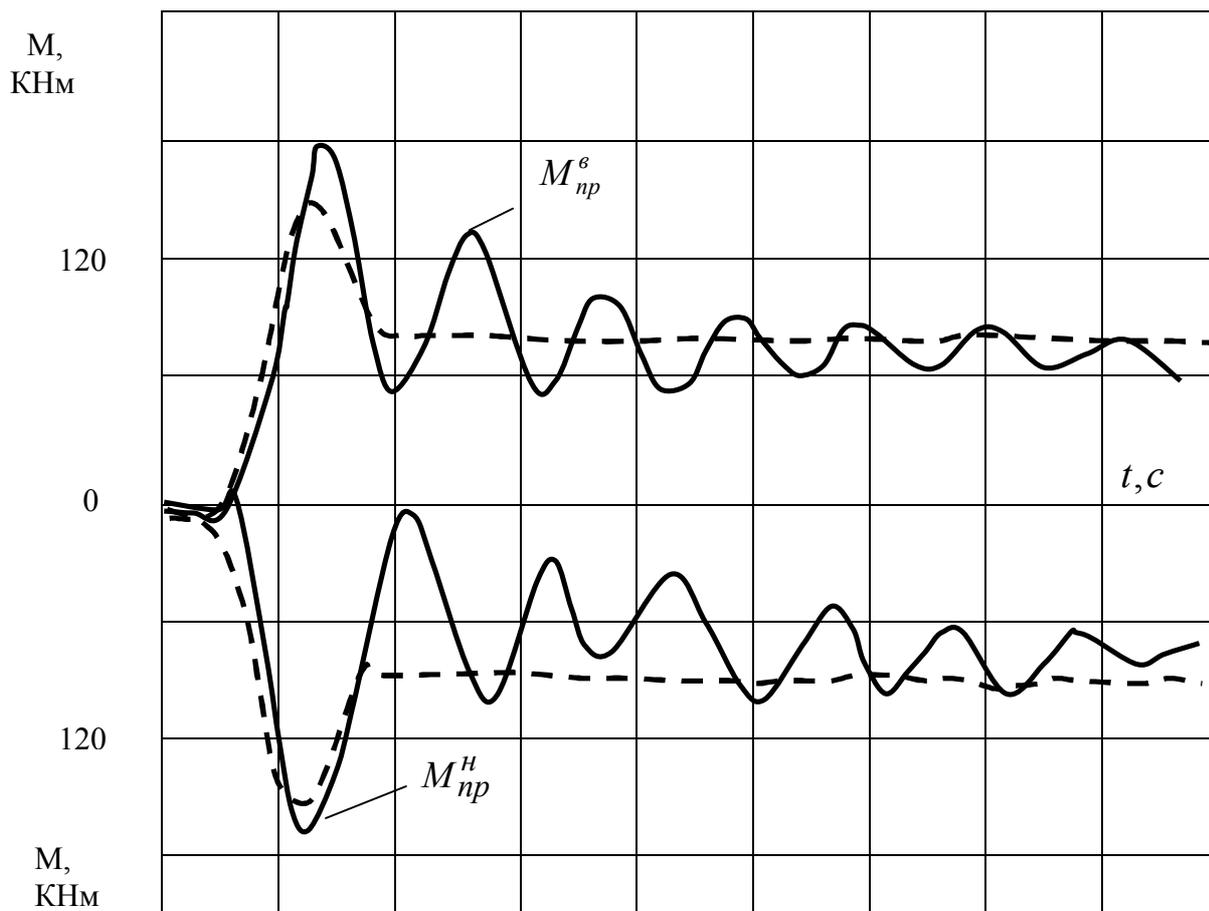


Рис.3. Графики моментов, действующих на рабочие валки листового стана при прокатке.

Для решения обратной задачи идентификации момента технологического сопротивления использовался метод регуляризации А.Н.Тихонова [2]. В качестве стабилизирующего функционала был выбран следующий:

$$\Omega[z] = \int_0^T \dot{z}^2 dt.$$

В результате решения обратной задачи измерения с приближенным оператором M_{np}^e , M_{np}^H (сплошные линии). Использовании основной гипотезы показывает, что точное решение обратной задачи имеет такой же осцилляционный характер изменения или еще более осциллирующим. Таким образом, в результате оценки точного решения была получена полезная информация относительно реальных моментов технологического сопротивления, которые не могут иметь характер изменения как показано на Рис.3 (пунктирная линия).

Выводы.

Рассмотрены некоторые вопросы использования приближенных решений обратных задач различного типа. Показано, что приближенные решения обратных задач синтеза пригодны для дальнейшего использования, несмотря на их значительные различия между собой. Приближенные решения обратных задач измерения не могут быть использованы в силу их неустойчивости. Однако, полезную информацию о точных решениях обратных задач измерения можно получить, заменив задачу нахождения приближенных решений на задачу приближенных оценок решений обратных задач.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 680 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М., Наука. 1979. – 288с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М., ГИТТЛ, 1951. – 804 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., Наука. 1972. – 496с.
5. Меньшиков Ю.Л. Ідентифікація зовнішніх впливів при мінімумі апіорної інформації: постановка, класифікація та інтерпретація. Вісник КНУ. Математика. вип.2. Київ. 2004. – С. 310-315.
6. Menshikov Yu.L. Identification of External Load Models to Systems with Inexact Description // Proc. 6th EUROSIM Congress on Modeling and Simulation, September 9-13, 2007. Ljubljana. Slovenia. 2007. – 6p.
7. Menshikov Yu.L. Inverse Problems in Non-classical Statements // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. v. 67. №1, 2011. – p. 79-96.
8. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректных задач с приближенным оператором, Журнал вычислительной математики и математической физики. М., 1972. **12**. 6. – С. 1592-1594.
9. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы розв'язку обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
10. Menshikov Yu.L. The Inverse Krylov Problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics, USA. – 2003. **43**. № 5. – p. 633 – 640.
11. Меньшиков Ю.Л., Ях Г.И. Идентификация момента технологического сопротивления на листовом стане // Известия вузов. Черная металлургия. М., – 1977. № 9.– С. 69-73.