УДК 519.5

© Ю.Б. Олевская, В.И. Олевский

О СООТНОШЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ СУММИРОВАНИЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Для кратных рядов Фурье характер сходимости частичных сумм существенно зависит от вида целочисленного множества, которому принадлежат порядковые номера включенных в них коэффициентов. В данной работе представлены некоторые результаты, описывающие соотношение u-сходимости кратных рядов Фурье и сходимости их по системе т.н. правильно пересчитываемых множеств.

Для кратних рядів Фур'є характер збіжності часткових сум істотно залежить від виду цілочисельної множини, якій належать порядкові номери включених до них коефіцієнтів. У даній роботі представлені деякі результати, що описують співвідношення u-збіжності кратних рядів Фур'є та збіжності їх по системі т.зв. правильно перераховуваних множин.

For multiple Fourier series the convergence of the partial sums essentially depends on the type of integer sets, which includes itself the numbers of terms of the series included in the sums. In this paper we present some results that describe the relation u-convergence of multiple Fourier series and their convergence for so called correctly restated sets.

Сходимость частичных сумм кратных рядов Фурье существенно зависит от вида целочисленного множества, которому принадлежат порядковые номера включенных в них коэффициентов. В зависимости от этого различают сходимость по сферам, по прямоугольникам (по Прингсхейму), по треугольникам, по гиперболическим крестам и другие [1]. Вопрос об общей форме таких множеств изучает теория u-сходимости кратных рядов Фурье. Двумерный случай u-сходимости и $u(K)$-сходимости детально изучен М.И. Дьяченко в [1]. Альтернативный метод суммирования, предложенный в работах Б.Д. Котляра [2], основывается на понятии т.н. правильно пересчитываемых множеств. В данной работе представлены некоторые результаты, описывающие соотношение $u(K)$-сходимости и сходимости по системе правильно пересчитываемых множеств.

Основные определения и постановка задачи. Рассмотрим класс периодических функций $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с параллелепипедом периодов $\overline{Q}^m$

$$f\left(y_1,\dots,y_m\right)\subset \widetilde{L}^2\left(\overline{Q}^m\right):\ f\left(y_1+2\pi l_1,\dots,y_m+2\pi l_m\right)=f\left(y_1,\dots,y_m\right),$$

$$l\equiv\left(l_1,\dots,l_m\right)\in\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m,\ \overline{Q}^m=\prod\nolimits_{j=1}^{m}[-\pi,\pi].$$

Коэффициенты кратного ряда Фурье функции f по тригонометрической системе $\left\{e^{2\pi i(l,t)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}\equiv\left\{\exp 2\pi i\sum\nolimits_{j=1}^{m} l_j t_j\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ обозначим $\left\{c_l\left(f\right)\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$. Из [3] известен порядок убывания к нулю переставленной в порядке невозрастания последовательности модулей $\left\{\left|c_l\left(f\right)\right|\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ коэффициентов Фурье $\left\{c_l^*\left(f\right)\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ функции f и условия сходимости кратных рядов вида

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\left|c_{l_j}(f)\right|^{\beta}=\sum_{\substack{l_j\in\mathbb{N},\\ j=1,\dots,m}}\left|c_{l_1\dots l_m}(f)\right|^{\beta} \qquad (1)$$

для функций, принадлежащих различным классам. Эти результаты существенно улучшают традиционные данные, полученные непосредственной оценкой коэффициентов Фурье.

Пусть $\widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}$ означает класс функций $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, заданных и периодических на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m=\prod_{j=1}^m[-\pi,\pi]$, удовлетворяющих условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$, и имеющих ограниченную p-вариацию; $\widetilde{\Lambda}_{\alpha}$ означает класс функций $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, заданных и периодических на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m=\prod_{j=1}^m[-\pi,\pi]$, удовлетворяющих условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$.

Определение 1. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{B}=\{B_j\}_1^\infty$ – система таких конечных подмножеств Λ, что $\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\Lambda$, $B_1\subset B_2\subset\dots$, $|B_j|$ – число элементов в B_j. Асимптотической плотностью множества $\mathrm{N}\subset\Lambda$ по системе B называется предел (если он существует)

$$mes\,\mathrm{N}=(\mathrm{B})mes\,\mathrm{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|B_N|}\sum_{\mathrm{N}\cap B_N}1.$$

Определение 2. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{B}=\{B_j\}_1^\infty$ – система таких конечных подмножеств Λ, что $\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\Lambda$, $B_1\subset B_2\subset\dots$, $|B_j|$ – число элементов в B_j. Пусть система множеств $\mathrm{B}=\{B_j\}_1^\infty$ удовлетворяет следующему требованию: все точки $l=(l_1,\dots,l_m)\in\Lambda$ можно занумеровать натуральными числами $\varphi(l)$ так, чтобы номер точки был не меньше максимума модуля любой ее координаты, причем вначале нумеруются элементы множества B_1, затем – элементы множества $B_2\setminus B_1$ и т.д. Тогда элементы $B_j\setminus B_{j-1}$ имеют номера меньше, чем элементы множества $B_{j+1}\setminus B_j$. Систему B, для которой точки Λ могут быть перенумерованы таким образом, назовем правильно пересчитываемой.

Правильная пересчитываемость означает существование такой функции $\varphi:l\in\Lambda\to\varphi(l)\in\mathbb{N}$, осуществляющей взаимно-однозначное отображение Λ на $\mathbb{N}$, что $\varphi(l)\ge\max_{1\le j\le m}|l_j|$ и, если $l^{(j)}\in B_j\setminus B_{j-1}$, $(B_0\equiv\varnothing)$, то $\varphi\left(l^{(j+1)}\right)>\varphi\left(l^{(j)}\right)$. В [2] при рассмотрении различных систем B показано, что такому ограничению удовлетворяют все естественные системы (параллелотопы с ограниченным отношением длин ребер, гомотеты фиксированного множества и т.п.).

В то же время в [1] дано определение u-сходимости и $u(K)$-сходимости для двумерного случая и сказано, что они могут быть легко распространены на многомерный случай. Сделаем это.

Определение 3. Ограниченное множество $u \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ будем считать принадлежащим множеству U, если $\prod_{j=1}^{m}\left[-\left|l_j\right|,\left|l_j\right|\right] \cap \mathbb{Z}^m \subseteq u$ для любого $l \equiv \left(l_1,\ldots,l_m\right) \in u$.

Определение 4. Пусть задано число $K > 1$. Ограниченное множество $u \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ будем считать принадлежащим множеству $U\left(K\right)$, если $u \in U$ и для любой системы векторов $\left\{\left(L_1,0,\ldots,0\right),\left(0,L_2,\ldots,0\right),\ldots,\left(0,0,\ldots,L_m\right)\right\} \subseteq u$ целочисленные многогранники

$$\left\{ l = \left(l_1,l_1,\ldots,l_m\right) \in \mathbb{Z}^m : K\left|l_j\right| + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{m}\left|l_i\right| \le L_j \right\}_{j=1}^{m} \subseteq u .$$

Определение 5. Будем говорить, что ряд (1) u-сходится ($u(K)$-сходится) к числу α, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для каждого множества $u \in U$ $\left(u \in U\left(K\right)\right)$, содержащего шар $\left\{\left(l_1,\ldots,l_m\right) \in \mathbb{Z}^m : \left|\left(l_1,\ldots,l_m\right)\right| \le N\right\}$

$$\left| \sum_{l \in u} \left| c_{l_1 \ldots l_m}\left(f\right)\right|^{\beta} - \alpha \right| < \varepsilon .$$

В [1] М.И. Дьяченко отмечает следующее: «Разные частичные суммы рядов Фурье вообще ведут себя совершенно непохожим образом (например кубические и сферические частичные суммы), особенно сильно их свойства меняются тогда, когда мы разрешаем множествам, по которым берутся суммы, вытягиваться вдоль координатных осей. Классическим примером здесь является ситуация с кубическими и прямоугольными суммами кратных рядов Фурье непрерывных функций, первые из которых сходятся почти всюду, а вторые могут расходиться в каждой точке. … В связи с этим представляется интересным выявить закономерности поведения частичных сумм, взятых по множествам, которым запрещено «расползаться» вдоль осей координат. На наш взгляд, $u(K)$-сходимость является одним из наиболее широких обобщений такого рода способов задания сходимости, хотя, разумеется, возможно, это определение не является оптимальным для описания поведения кратных рядов Фурье».

Таким образом, $u(K)$-сходимость и правильная пересчитываемость представляют собой два различных, но достаточно общих подхода к суммированию кратных рядов. Поскольку с их помощью описываются различные свойства рядов, то установление связи между этими подходами позволяет расширить описание изучаемого объекта.

Определение 5 обладает некоторой неопределенностью в смысле указания последовательного набора точек целочисленной решетки, включаемых в частичные суммы. Переформулируем его следующим образом.

Определение 6. Будем говорить, что ряд (1) u-сходится ($u(K)$-сходится) к числу α, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, начиная с которого для каждого $M \geq N$ и для каждого множества $u \in U$ ($u \in U(K)$ для некоторого фиксированного конечного значения K), содержащего шар $\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \leq M\}$

$$\left|\sum_{l \in u} \left|c_{l_1 ... l_m}(f)\right|^{\beta} - \alpha\right| < \varepsilon .$$

Поскольку $u(K)$-сходимость не описывает суммирование по прямоугольникам (по Прингсхейму), составляющим в то же время правильно пересчитываемую систему множеств, то понятно, что правильная пересчитываемость не является частным случаем $u(K)$-сходимости. Покажем, что используемая в определении 6 система $U(K)$-множеств является правильно пересчитываемой, и рассмотрим вытекающие из этого факта свойства коэффициентов кратных рядов.

Определение соотношения между системами суммирования.

Теорема 1. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{B} = \{B_j\}_1^{\infty}$ – система конечных подмножеств Λ при некотором фиксированном конечном значении K, такая, что для любого значения j $B_j \in U(K)$ и содержит шар $\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \leq j\}$. Тогда B является системой правильно пересчитываемых множеств.

Доказательство. Поскольку система $U(K)$ является достаточно определенной – это совокупность вложенных друг в друга многомерных «звездоподобных» многогранников с сужающимися к концу шипами (сужение определено принадлежностью к множеству U), то доказательство можно построить конструктивно, путем конкретного пересчета элементов.

Рассмотрим часть многомерного пространства, имеющего положительные значения всех координат. Нумерацию начнем в положительном направлении по оси, содержащей наиболее удаленную точку начиная с начала координат. В этой части $\varphi(l) = \max\limits_{1 \leq j \leq m} |l_j| + 1$. По достижению наиболее удаленной точки переходим к первой от начала координат точке на оси, содержащей следующую по удаленности точку, и снова продолжаем нумерацию вдоль первой оси. Перебрав все линии в этой плоскости, сдвигаем ее на единицу по следующей по длине оси и возобновляем нумерацию. Процедуру повторяем до пересчета всех точек множества.

Для остальных $2^m - 1$ областей пересчет производится аналогично, но с учетом направления роста модулей координат по осям. Поскольку области являются симметричными, а нумерация начинается с запаздыванием на число точек в первой подобласти, то условие $\varphi(l) \geq \max\limits_{1 \leq j \leq m} |l_j|$ выполняется автоматически.

Полнота системы B в Λ, определяемая равенством $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \Lambda$, вытекает из вложенности в B_j шара, радиус которого стремится к бесконечности. Последовательная вложенность множеств B_j $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ вытекает из их построения.

Поскольку для многомерных областей количество точек в первом множестве B_1 всегда будет больше максимального значения их координат (даже при вырождении в одномерный случай их число будет больше на точку начала координат), то нумерация B_2 заведомо начинается с номера, превышающего минимальные значения координат включенных в него точек. Пересчет B_2 и последующих множеств надо начинать, таким образом, с точки с минимальными значениями координат и двигаться последовательно по мере их возрастания. Такой алгоритм обеспечивает превышение номера точки над значениями ее координат. Понятно также, что при такой системе пересчета все номера точек из множеств с большим индексом будут больше номеров точек из множеств с меньшим индексом.

Таким образом, используемая в определении 6 система множеств является правильно пересчитываемой.

Теорема доказана.

Хорошо известна связь между гладкостью ядра интегрального оператора Фредгольма и порядком стремления к нулю собственных и сингулярных чисел этого оператора [2]. Распространению этих результатов на функции многих переменных посвящена работа [4]. В ней установлена оценка сверху для сингулярных чисел оператора, основанная на свойствах ядра, – ограниченности его вариации и поведении модуля непрерывности. В этой работе введено и использовано понятие $p-k$-вариации функции многих переменных (для одномерного случая эквивалентные определения даны в [2]). Стандартным приемом из результатов про порядок убывания сингулярных чисел получаются [4] результаты о порядке убывания коэффициентов Фурье функции многих переменных, если функция имеет заданный модуль непрерывности и заданное поведение $p-k$-вариации. В [3] показано, что точная оценка коэффициентов Фурье функции многих переменных достигается на очень «бедном» множестве элементов целочисленной решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^m$. В работе [4] устанавливается, что для функции, удовлетворяющей условию $Lip\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, и имеющей определенный рост $p-k$-вариации, коэффициенты Фурье также в среднем убывают быстрее, чем это диктуется их обычными оценками.

Таким образом, с учетом результатов [4] могут быть сформулированы и доказаны следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 2. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{B} = \{B_j\}_1^{\infty}$ – система конечных подмножеств Λ при некотором фиксированном конечном значении K, такая, что для любого значения j множество $B_j \in U(K)$ и содержит шар $\left\{(l_1,...,l_m)\in\mathbb{Z}^m:\left|(l_1,...,l_m)\right|\le j\right\}$. Пусть функция $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ задана и периодична на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m=\prod_{j=1}^m[-\pi,\pi]$, удовлетворяет условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le1$, и имеет ограниченную p-вариацию $\left(f\in\widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}\right)$, $q>0$, $0<\beta<1+\alpha(2-q)/2m$, $C>0$ и множество точек целочисленной решетки M определяется следующим образом:

$$\mathsf{M}\equiv\mathsf{M}(f;C,\beta)=\left\{l\in\Lambda\left|\left|c_l\right|\ge C\left(\max_{1\le j\le m}\left|l_j\right|\right)^{-\beta}\right.\right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{\mathsf{M}\cap B_N}1=\mathrm{O}\left(\left|B_N\right|^{\varepsilon+\beta\left(1+\alpha(2-q)/2m\right)^{-1}}\right).$$

Следствие. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{B}=\left\{B_j\right\}_1^\infty$ – система конечных подмножеств Λ при некотором фиксированном конечном значении K, такая, что для любого значения j множество $B_j\in U(K)$ и содержит шар $\left\{(l_1,...,l_m)\in\mathbb{Z}^m:\left|(l_1,...,l_m)\right|\le j\right\}$. Пусть функция $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ задана и периодична на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m=\prod_{j=1}^m[-\pi,\pi]$, удовлетворяет условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le1$, и имеет ограниченную p-вариацию $\left(f\in\widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}\right)$, $q>0$, $0<\beta<1+\alpha(2-q)/2m$, $C>0$ и множество точек целочисленной решетки M определяется следующим образом:

$$\mathsf{M}\equiv\mathsf{M}(f;C,\beta)=\left\{l\in\Lambda\left|\left|c_l\right|\ge C\left(\max_{1\le j\le m}\left|l_j\right|\right)^{-\beta}\right.\right\}.$$

Тогда

$$(\mathsf{B})mes\,\mathsf{M}=0.$$

Теорема 3. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{B}=\left\{B_j\right\}_1^\infty$ – система конечных подмножеств Λ при некотором фиксированном конечном значении K, такая, что для любого значения j множество $B_j\in U(K)$ и содержит шар $\left\{(l_1,...,l_m)\in\mathbb{Z}^m:\left|(l_1,...,l_m)\right|\le j\right\}$. Пусть функция $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ задана и периодична на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m=\prod_{j=1}^m[-\pi,\pi]$, удовлетворяет условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le1$ $\left(f\in\widetilde{\Lambda}_\alpha\right)$, $0<\beta<0{,}5+\alpha/2m$, $C>0$ и множество точек целочисленной решетки M определяется следующим образом:

$$\mathsf{M}\equiv\mathsf{M}(f;C,\beta)=\left\{l\in\Lambda\left|\left|c_l\right|\ge C\left(\max_{1\le j\le m}\left|l_j\right|\right)^{-\beta}\right.\right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{\mathrm{M}\cap B_N} 1 = \mathrm{O}\left(\left|B_N\right|^{\varepsilon+\beta(0,5+\alpha/2m)^{-1}}\right).$$

Следствие. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{B} = \left\{B_j\right\}_1^\infty$ – система конечных подмножеств Λ при некотором фиксированном конечном значении K, такая, что для любого значения j $B_j \in U(K)$ и содержит шар $\left\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : \left|(l_1,...,l_m)\right| \le j\right\}$. Пусть функция задана и периодична на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, удовлетворяет условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$ $\left(f \in \widetilde{\Lambda}_\alpha\right)$, $0<\beta<0,5+\alpha/2m$, $C>0$ и множество точек целочисленной решетки M определяется следующим образом:

$$\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}(f;C,\beta) = \left\{ l \in \Lambda \left| \left|c_l\right| \ge C\left(\max_{1\le j\le m}\left|l_j\right|\right)^{-\beta} \right. \right\}.$$

Тогда

$$(\mathrm{B})\, mes\, \mathrm{M} = 0.$$

Доказательство теорем 2-3 и следствий из них производится прямым применением теоремы 1 к результатам [4].

Выводы. Показано, что система $U(K)$-множеств, содержащая шар увеличивающегося до бесконечности радиуса, при фиксированном K является правильно пересчитываемой. Устанавливается, что для функции, удовлетворяющей условию $Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$, и имеющей определенный рост $p-k$-вариации, коэффициенты кратных рядов Фурье также в среднем убывают быстрее на системе $U(K)$-множеств, чем это диктуется их обычными оценками. Показано, что точная оценка коэффициентов Фурье функции многих переменных достигается на очень «бедном» множестве элементов целочисленной решетки.

Список литературы

1. Дьяченко, М.И. Двумерные классы Ватермана и u-сходимость рядов Фурье / М.И. Дьяченко // Матем. сборник. – 1999. – 190(7). – С. 23–40.

2. Котляр, Б.Д. Коэффициенты Фурье гладких функций и плотности упаковок : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Борис Давидович Котляр ; ГНИПКТИ МТЧМ. – Харьков, 1994. – 24 с.

3. Олевская, Ю.Б. О скорости убывания коэффициентов Фурье функций многих переменных / Ю.Б. Олевская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетровського ун-та. – 1999. – С. 54-60.

4. Олевська, Ю.Б. Сингулярні числа інтегральних операторів та багатовимірні варіації // Ю.Б. Олевська / Доповіді Національної академії наук України. – 1999, № 12. – С. 17–21.