УДК 539.3

© О.В. Бугрим, Е. С. Синайский, А.С. Иванов

КАНОНИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В монографии [1] задача об изгибе круглой пластины переменной толщины подробно изучена и решена в гипергеометрических функциях. В настоящей работе предлагается приближенное решение той же задачи с использованием τ-метода и канонических полиномов Ланцоша.

У монографії [1] задача про вигин круглої пластини змінної товщини докладно вивчена і вирішена в гіпергеометричних функціях. У цій роботі пропонується наближений розв'язок тієї ж задачі з використанням τ-методу і канонічних поліномів Ланцоша.

The problem of bending of a circular plate with variable thickness is carefully studied and solved in hypergeometric functions in monograph [1]. In this paper we present the approximate solution to the same problem using the τ-method and canonical Lanczos polynomials.

Дифференциальное уравнение изгиба (срединной поверхности) поперечно нагруженной круглой пластины для прогиба $w(r,\theta)$ примем в форме {1}:

$$D\nabla^2\nabla^2 w+\frac{dD}{dr}\left(2\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{2+\nu}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{3}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$\frac{d^2 D}{dr^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=q[-(1+\nu)\nabla^2(\chi_T D)], \qquad (1)$$

здесь $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба пластины, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, r и θ – полярные координаты точки, q – интенсивность нормальной к срединной плоскости нагрузки, χ_T - обобщенная тепловая деформация, h - толщина пластины, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

Пусть имеет место осесимметричный случай (тепловые деформации отсутствуют: $\chi_T=0$) и жесткость меняется по закону:

$$D=D_0 x^{\gamma_0}(1-\omega x)^{\beta_0} \qquad (2)$$

где $D_0=\frac{E_0h^3}{12(1-\nu^2)}, x=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_0}$ $(0\le x\le 1)$, r_0 – радиус наружного контура пластины, $\alpha_0>0,\beta_0,\gamma_0,\omega$ – постоянные.

В предположении, что нагрузка q не связана с прогибом и допускает представление

$$q=\sum_{j=0}^{l} q_j r^j \qquad (3)$$

уравнение (1) подстановкой

$$\frac{dw}{dr}=-x^{\alpha}(1-\omega x)^{1-\beta_0}y \qquad (4)$$

преобразуется к виду [1]

$$\mathrm{Ly} \equiv x(1-\omega x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c-\omega(a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - \omega a b y = \sum_{j=0}^{l+1} F_j x^{\lambda_j - 1} \quad (5)$$

Здесь

$$c = 2\alpha + \gamma_0 + 1,\ \alpha = -\frac{\gamma_0}{2} - \frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{(\alpha_0\gamma_0 - 2\nu)^2 + 4(1-\nu^2)},\quad F_0 = \frac{Cr_0}{D_0\alpha_0^2},$$

$$F_j = -\frac{q_{j-1}r_0^{j+2}}{D_0\alpha_0^2(j+1)},\ \lambda_j = \lambda_0 + \frac{j+1}{\alpha_0},\ (j = 1,2,\dots,l+1) \quad (6)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\alpha_0} - \alpha - \gamma_0 > 0;\ a, b = \frac{c-\beta_0+1}{2} \pm \frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{[\alpha_0(\beta_0+\gamma_0) - 2\nu]^2 + 4(1-\nu^2)}$$

Постоянная c определяется из граничных условий для поперечного усилия на внутреннем или наружном контуре пластины [1].

При дробных показателях λ_j точного решения уравнения (5) в полиномах не существует. Однако приближенно такое решение можно получить, используя τ-метод Ланцоша [2].

Для каждого члена вида $x^{\lambda+m}(m = 0,1,2,\dots)$, помещенного в правую часть уравнения Ly=0, применяя метод неопределенных коэффициентов, найдем канонический полином

$$Q_m(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, x^{\lambda+j}, \quad (7)$$

который удовлетворяет уравнению Ly=$x^{\lambda+m}$ с точностью до слагаемого, содержащего наименьшую степень x, т.е.

$$LQ_m(x,\lambda) = x^{m+\lambda} + R_m(\lambda)x^{\lambda-1} \quad (8)$$

В случае оператора L , определенного уравнением (5), получаем

$$Q_m(x,\lambda) = -\frac{1}{(\lambda+C+m)(\lambda+1+m)}\sum_{p=0}^{m}\prod_{j=p}^{m}\frac{(\lambda+c+j)(\lambda+1+j)}{(\lambda+a+j)(\lambda+b+j)}\omega^{p-m-1}x^{p+\lambda}$$

$$(m=0,1,2,\dots) \quad (9)$$

$$R_m(\lambda) = -\omega^{-(m+1)}\prod_{j=0}^{m}\frac{(\lambda+c+j-1)(\lambda+j)}{(\lambda+a+j)(\lambda+b+j)};\ (m = 0,1,2,\dots) \quad (10)$$

В правую часть уравнения (5) введем невязку в форме

$$T_k^*(x)\sum_{j=0}^{l+1}\tau_j\, x^{\lambda_j} + T_n^*(x)(\tau_1^0 + \tau_2^0 x), \quad (11)$$

где τ_j, τ_1^0, τ_2^0 – пока неизвестные параметры, $T_i^*(x)$ (i=k,n) – смещенные полиномы Чебышева

$$T_i^*(x) = \sum_{m=0}^{i} C_i^m\, x^m. \quad (12)$$

При условии

$$\tau_j = \frac{F_j}{\sum_{m=0}^{k} C_k^m\, R_m(\lambda_j)}\ . \quad (13)$$

точным решением «исправленного» уравнения (5) будет

$$y^* = \sum_{j=0}^{l+1} \tau_j \sum_{m=0}^{k} C_k^m Q_m(x, \lambda_j) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m [\tau_1^0 Q_m(x, 0) + \tau_2^0 Q_{m+1}(x, 0)] \quad (14)$$

Параметры τ_1^0 и τ_2^0 определяются из граничных условий задачи.

Ввиду того, что $|x| < 1$; $\lambda_j > 0$; $|T_i^*(x)| < 1$, абсолютная величина невязки (11) не превосходит суммы

$$\sum_{j=0}^{l+1} |\tau_j| + |\tau_1^0| + |\tau_2^0|,$$

которая с увеличением порядка полиномов (12) может быть сделана весьма малой [2]. Таким образом, невязку (11) естественно рассматривать как малое возмущение нагрузочной функции в правой части уравнения (5), а выражение (14) считать приближенным решением этого уравнения.

Если некоторые или даже все λ_j – целые положительные числа, то соответствующие τ_j в невязке (11) целесообразно положить равными нулю. При этом в решении (14) взамен должны быть введены слагаемые вида $F_j Q_{\lambda_j - 1}(x, 0)$ – частные решения уравнения $L_y = F_j x^{\lambda_j - 1}$. Количество τ- членов можно также уменьшить, если для всех j $\lambda_j = \lambda + s$, где $\lambda = const$, $s = s\ (j)$ целые положительные числа или ноль. В частности это имеет место при $\lambda_0 = {}^1/_N$ (N - целое). В этом случае, выбирая невязку в форме

$$\tau x^\lambda T_k^*(x) + T_n^*(x)(\tau_1^0 + \tau_2^0 x) \quad (15)$$

находим

$$y^* = \tau \sum_{m=0}^{k} C_k^m\, Q_m(x, \lambda) + \sum_{j=0}^{l+1} A_j Q_{s-1}(x, \lambda) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m [\tau_1^0 Q_m(x, 0) + \tau_2^0 Q_{m+1}(x, 0)]$$

$$\tau = -\left[\sum_{m=0}^{k} C_k^m R_m(\lambda)\right]^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{l+1} F_j R_{s-1}(\lambda) \quad (16)$$

При $\chi_T = 0,\ q = 0,\ c = 0$ и остальных условиях тех же, что и выше, уравнение (1) с помощью подстановки $\frac{dw}{dr} = -x^\alpha y$ преобразуется [1] к уравнению вида (5) и может быть решено аналогично.

Для использования τ-метода существенным является полиноминальная форма переменных коэффициентов определяющего дифференциального уравнения. То обстоятельство, что уравнение (5) допускает решение в гипергеометрических функциях, в данном случае значения не имеет. Канонические полиномы в общем виде или численно, определенные соотношением типа (8), могут быть построены и в других подобных задачах. В качестве иллюстрации рассмотрим пример, приведенный в работе [1].

Пример 1. Круглая пластина толщины $h = h_0(1 - \omega x)$ $(x = {}^r/_{r_0})$ с жестко заделанным внутренним контуром $(x = x_1)$ нагружена равномерно распределенными по её поверхности поперечными силами интенсивности q_0 и равномерно распределенными по её наружному контуру ($x = x_2$) поперечной силой интенсивности Q и изгибающим моментом интенсивности M.

Постоянная C в (6) имеет значение:

$$\mathrm{C} = \mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^2}{2} + \mathrm{Q}\mathrm{r}_0;\quad \alpha_0 = 1;\quad \beta_0 = 3;\quad \gamma = 0.$$

Положим также $\chi_\mathrm{T} = 0$; $\nu = 0{,}3$; $\omega = 0{,}5$; $\mathrm{x}_1 = 0{,}2$; $\mathrm{x}_2 = 1$. В соответствии с (6) получаем:

$$\alpha = -1; a\mathrm{b} = -0{,}1;\quad a + \mathrm{b} = -3;\quad \mathrm{c} = -1;\quad \lambda_0 = 2;\quad \lambda_1 = 4;$$

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^3}{2\mathrm{D}_0} + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{r}_0^2}{\mathrm{D}_0};\ \mathrm{F}_1 = -\mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^3}{2\mathrm{D}_0}.$$

Правая часть уравнения (5) в данном случае содержит целые степени x. Поэтому в невязке (11) достаточно удержать лишь -члены, ответственные за выполнение граничных условий задачи. После введения невязки уравнение (5) принимает форму

$$\mathrm{Ly} = \mathrm{F}_0\mathrm{x} + \mathrm{F}_1\mathrm{x}^3 + \mathrm{T}_\mathrm{n}^*(\mathrm{x})(\tau_1^0 + \tau_2^0\mathrm{x}) \tag{17}$$

Решением этого уравнения будет

$$\mathrm{y}^* = \mathrm{F}_0\mathrm{Q}_1(\mathrm{x},0) + \mathrm{F}_1\mathrm{Q}_3(\mathrm{x},0) + \sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{m}\,[\tau_1^0\mathrm{Q}_\mathrm{m}(\mathrm{x},0) + \tau_2^0\mathrm{Q}_{\mathrm{m}+1}(\mathrm{x},0) \tag{18}$$

Граничные условия задачи

$$\mathrm{M}_\mathrm{r}|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_2} = \mathrm{M} \quad \text{и} \quad (\mathrm{M}_\theta - \nu\mathrm{M}_\mathrm{r})|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_1} = 0 \tag{19}$$

С учетом представления (4) и выражений для моментов

$$\mathrm{M}_\mathrm{r} = -\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{\nu}{\mathrm{r}}\cdot\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}\right);\ \mathrm{M}_\theta = -\mathrm{D}(\nu\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\cdot\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}) \tag{20}$$

приводят к следующим соотношениям, из которых определяются параметры τ_1^0 и τ_2^0.

$$\mathrm{y}^*|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_1} = 0;\ \mathrm{D}_0\left\{\left[\frac{2\omega}{\mathrm{r}_0\mathrm{x}} - \frac{(1-\nu)(1-\omega\mathrm{x})}{\mathrm{r}_0\mathrm{x}^2}\right]\mathrm{y}^* + \frac{1-\omega\mathrm{x}}{\mathrm{r}_0\mathrm{x}}\frac{\mathrm{dy}^*}{\mathrm{dx}}\right\}\bigg|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_2} = \mathrm{M} \tag{21}$$

Полагая $n=5$, находим

$$\tau_1^0 = -0{,}0202077\mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^3}{2\mathrm{D}_0} + 0{,}0201939\mathrm{Q}\frac{\mathrm{r}_0^2}{\mathrm{D}_0} - 0{,}0000445314\mathrm{M}\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{D}_0}$$

$$\tau_2^0 = 0{,}00865521\mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^3}{2\mathrm{D}_0} - 0{,}00846398\mathrm{Q}\frac{\mathrm{r}_0^2}{\mathrm{D}_0} + 0{,}0000149408\mathrm{M}\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{D}_0}$$

$$|\tau_1^0| + |\tau_2^0| \le 0{,}0289\mathrm{q}_0\frac{\mathrm{r}_0^3}{2\mathrm{D}_0} + 0{,}0287\mathrm{Q}\frac{\mathrm{r}_0^2}{\mathrm{D}_0} + 0{,}0000595\mathrm{M}\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{D}_0}$$

Таким образом, введение невязки в уравнение (17) равносильно тому, что в каждую из заданных величин q_0, Q и M внесена погрешность. Наибольшая из этих погрешностей не составляет и 3%.

Для изгибающих моментов на внутреннем контуре получаем

$$\mathrm{M}_\mathrm{r}|_{\mathrm{x}=0{,}2} = \nu^{-1}\mathrm{M}_\theta|_{\mathrm{x}=0{,}2} = -1{,}383\mathrm{q}_0\,{}^{\mathrm{r}_0^3}\!/_{(2\mathrm{D}_0)} - 2{,}093\mathrm{Q}\,{}^{\mathrm{r}_0^2}\!/_{\mathrm{D}_0} + 1{,}820\mathrm{M}\,{}^{\mathrm{r}_0}\!/_{\mathrm{D}_0} \tag{22}$$

Отличие слагаемых приближенного решения (22) от соответствующих слагаемых решения, приведенного в работе [1], составляет не более 2 %.

Отметим, что в случае жесткости, меняющейся по закону

$$D = D_0 x^{\gamma_0} e^{-\omega x} \tag{23}$$

при $\chi_T = 0$, уравнение (1) подстановкой $\frac{dw}{dr} = -x^{\alpha} e^{\omega x} y$ приводится к виду

$$Ly \equiv x\frac{d^2y}{dx^2} + (c + \omega x)\frac{dy}{dx} + a\omega y = \sum_{j=0}^{l+1} F_j x^{\lambda_j - 1} \tag{24}$$

Здесь $a = \alpha + \gamma_0 + 1 - {}^{\nu}/_{\alpha_0}$, остальные обозначения прежние.

Канонические полиномы $Q_m(x, \lambda)$ и коэффициенты $R_m(\lambda)$ имеют теперь форму

$$Q_m(x, \lambda) = -\frac{1}{(\lambda + c + m)(\lambda + 1 + m)} \sum_{p=0}^{m} \prod_{j=p}^{m} \frac{(\lambda + C + j)(\lambda + 1 + j)}{(\lambda + a + j)} (-\omega)^{p-m-1} x^{p+\lambda} \tag{25}$$

$$R_m(\lambda) = (-1)^m \omega^{-(m+1)} \prod_{j=0}^{m} \frac{(\lambda + j)(\lambda + C - 1 + j)}{(\lambda + a + j)}; (m = 0,1,2, \dots) \tag{26}$$

Приближенное решение уравнения (24) конструируется с помощью полиномов (25) описанным выше способом.

Пример 2. Рассмотрим случай циклически-симметричного изгиба пластины, вызванного нагрузкой вида

$$q(r, \theta) = q_k(r) \cos k\theta; Q(\theta) = Q_k \cos k\theta; M(\theta) = M_k \cos k\theta; (k = 1,2,3, \dots) \tag{27}$$

Здесь $Q(\theta)$ и $M(\theta)$ – интенсивности контурной поперечной силы и контурного изгибающего момента (Q_k и M_k – постоянные), $q(r, \theta)$ – интенсивность поперечных сил, распределенных по срединной поверхности.

В предположении, что тепловые деформации отсутствуют *(χ_T=0)*, $q_k(r)$ допускает представление (3), жесткость меняется по закону:

$$D = D_0(1 - \omega x); \quad x = ({}^{r}/_{r_0})^{\alpha_0} \tag{28}$$

подстановкой

$$w = x^{\gamma} y \cos k\theta \tag{29}$$

уравнение (1) преобразуется к виду [1]

$$Ly \equiv x^3(1 - \omega x)\frac{d^4y}{dx^4} + x^2[(B_1 + 3) - (A_1 + 6)\omega x]\frac{d^3y}{dx^3} + x[(B_1 + B_2 + 1) -$$
$$-(3A_1 + A_2 + 7)\omega x]\frac{d^2y}{dx^2} + [B_3 - (A_1 + A_2 + A_3 + 1)\omega x]\frac{dy}{dx} - A_4\omega y = \sum_{j=0}^{l} F_j x^{\lambda_j - 1} \tag{30}$$

Здесь

$$\gamma = -\frac{k}{\alpha_0};\ F_j = \frac{q_{kj} r_0^{j+4}}{\alpha_0^4 D_0};\ \lambda_j = \frac{j + 4}{\alpha_0} - \gamma > 0;\ A_1 = \alpha_0^{-1}(2\alpha_0 - 4k - 4),$$
$$A_2 = \alpha_0^{-2}(\alpha_0^2 - 5\alpha_0 + 4k^2 + 12k + 4 - 6\alpha_0 k + \nu\alpha_0),$$
$$A_3 = \alpha_0^{-3}[4k^2(\alpha_0 - 2) - 2k(\alpha_0^2 - 5\alpha_0 + 4 + \nu\alpha_0) - \alpha_0^2(1 - \nu) - 2\alpha_0(3 + \nu)],$$
$$A_4 = \alpha_0^{-3}k(k + 1)(\alpha_0 - 2)(1 - \nu);\ B_1 = \alpha_0^{-1}(3\alpha_0 - 4k - 4), \tag{31}$$
$$B_2 = \alpha_0^{-2}[4k^2 - 4k(\alpha_0 - 3) + 3\alpha_0^2 - 8\alpha_0 + 4],$$
$$B_3 = \alpha_0^{-3}[4k^2 - 4k(\alpha_0 - 1) + \alpha_0(\alpha_0 - 2)].$$

Пусть так же, как в работе [1] $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - соответственно корни уравнений

$$\alpha^4 - A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2 - A_3\alpha + A_4 = 0;\ \beta^3 - B_1\beta^2 + B_2\beta - B_3 = 0$$

В этих обозначениях определенные соотношением (8) канонические полиномы, построенные для уравнения (30), имеют вид

$$Q_m(x,\lambda) = \sum_{p=0}^{m} \frac{\prod_{j=p}^{m-1}(\lambda+1+j)(\lambda+\beta_1+j)(\lambda+\beta_2+j)(\lambda+\beta_3+j)}{\prod_{j=p}^{m}(\lambda+\alpha_1+j)(\lambda+\alpha_2+j)(\lambda+\alpha_3+j)(\lambda+\alpha_4+j)} \cdot \frac{x^{p+\lambda}}{\omega^{m-p+1}} \quad (32)$$

Для коэффициентов $R_m(\lambda)$ получаем

$$R_m(\lambda) = -\frac{1}{\omega^{m+1}} \prod_{j=0}^{m} \frac{(\lambda+j)(\lambda+\beta_1-1+j)(\lambda+\beta_2-1+j)(\lambda+\beta_3-1+j)}{(\lambda+\alpha_1+j)(\lambda+\alpha_2+j)(\lambda+\alpha_3+j)(\lambda+\alpha_4+j)} \quad (33)$$

Вводя в уравнение (30) невязку (11) и подчиняя параметр τ_j условию (13), находим приближенное решение уравнения в форме (14).

Список литературы

1. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. М., Физматгиз, 1959.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.