УДК 371.2

© Г.І. Скороход

ПРИКЛАДИ УКРУПНЕННЯ ДИДАКТИЧНИХ ОДИНИЦЬ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Розвинуті рекомендації методу укрупнення дидактичних одиниць та наведені приклади їх застосування при викладанні вищої математики.

Развиты рекомендации метода укрупнения дидактических единиц и приведены примеры их применения при обучении высшей математике.

The recommendations of the didactic units integration method and examples of their use in teaching higher mathematics are given.

Суть методу укрупнення дидактичних одиниць [1] – в поєднанні у часі та просторі навчальної інформації, тісно пов'язаної між собою, для стиснення та кращого її сприйняття. Поєднання у часі означає вивчення матеріалу на одному або на суміжних заняттях, а поєднання у просторі – розташування матеріалу на одній або на суміжних сторінках, у паралельних стовпцях, у одній таблиці тощо. Завдання, розроблені нами за цими принципами, наведені в роботах [2 – 4]. У цій роботі розвинуті рекомендації цього методу та наведені приклади їх реалізації при викладанні вищої математики.

З погляду укрупнення дидактичних одиниць доцільно:

1. Вивчати сукупно перш за все ті зв'язки між об'єктами, які є найбільш вагомими. Це сприяє одержанню студентом системних знань про такі об'єкти.

2. Вивчати одночасно (на одному чи сумісних заняттях) та порівнювати взаємно обернені дії та операції, протилежні поняття, судження та умовиводи. В математиці такими є прямі та обернені теореми, прямі та протилежні теореми, прямі та обернені задачі, прямі та обернені функції, періодичні та неперіодичні функції, зростаючі та спадаючі функції, сумісні та несумісні системи рівнянь, рівняння та нерівності тощо. Згідно з таким підходом доцільно розглянути сумісно постановку задач обчислення похідної та первісної як взаємно обернених, розглянути основні взаємно пов'язані задачі диференціювання та інтегрування, а вже потім поглиблено вивчати кожну з теорій та їхні застосування.

Треба підкреслити, що порівняння є базовою формою мислення, відповідно, різноманітні завдання на порівняння мають займати вагоме місце в системі навчальних завдань.

3. Порівнювати не лише протилежні, але взагалі споріднені та аналогічні об'єкти. Таке порівняння та відповідні завдання змушують зосередитись на суті кожного з об'єктів та на зв'язках між ними.

1) рівняння та нерівності $a < 0$, $a=0$, $a > 0$; ми завжди розміщаємо їх у такій послідовності і підкреслюємо, що рівність $a=0$ є границею між двома нерівностями $a < 0$, $a > 0$, і саме тому розв'язання нерівностей базується на розв'язанні відповідного рівняння;

2) формули: *Чи можна формулу* $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ *при малих значеннях* $(x - x_0)$ *вважати частинним випадком формули кінцевих приростів* $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ *при* $c = x_0$ *?*
В чому схожість та різниця формули Остроградського та формули методу інтегрування частинами? Схожість: 1) в обох формулах шукана функція є сумою двох доданків, один з яких є суперпозицією елементарних функцій, тобто являє собою частину результату у потрібній формі, в той час, як другий доданок являє собою іншу частину результату у формі, яка ще має бути приведена до потрібної; 2) обидві формули реалізують загальний метод послідовного наближення до всього результату. Різниця: у формулі Остроградського інтеграл завжди обчислюється в елементарних функціях за існуючим алгоритмом, а в методі інтегрування частинами – ні.

3) теореми: *Поділить множину доведених теорем на підмножини за єдністю основного методу доказу.*

4) рівняння кривих. Широкий спектр для порівнянь дають криві другого порядку. Схожість: 1) всі вони є конічними перерізами, 2) вони мають одне й теж означення через фокус та директрису і єдине рівняння в полярній системі координат с одним параметром – ексцентиситетом *е,* при цьому значення e=1, яке відповідає параболі, є граничним між значеннями e<1 (еліпс) та e>1 (гіпербола). Таке поділення ілюструє другий закон діалектики про «перехід кількості в якість», а саме, при неперервному зростанні параметра e від значень e<1 в точці e=1 відбувається якісний перехід від еліпсу до параболи, а при e>1 – ще один перехід до гіперболи. Різниця: 1) в декартовій системі координат канонічні рівняння кривих мають різний вигляд, 2) графіки кривих мають різний вигляд.

4. Порівнювати: 1) дві класифікації однієї множини об’єктів за різними основами, 2) різні методи розв’язання однієї задачі або подібних задач, 3) різні методи доказу однієї теореми.

Треба підкреслити, що порівняння є базовою формою мислення, відповідно, різноманітні завдання на порівняння мають займати вагоме місце в системі навчальних завдань. 1) *Чи завжди об’єкти (рівняння, нерівності) А та В еквівалентні (аналогічні, відмінні, протилежні)?* 2) *За яких умов об’єкти (рівняння, нерівності) А та В еквівалентні (аналогічні, відмінні, протилежні)?* 3) *Чим відрізняється об’єкт А від об’єкта В?* 4) *Яких властивостей не має об’єкт А порівняно з об’єктом В?* 5) *Які додаткові властивості має об’єкт А порівняно з об’єктом В?* 6) *У чому перевага об’єкта А порівняно з об’єктом В?* 7) *У чому подібність (відмінність) об’єктів А та В?* 8) *В чому причина подібності (відмінності) А та В?* 9) *Який зв’язок існує між А та В?* 10) *Чи існує між об’єктами А та В відношення типу Р?* 11) *Який тип відношення існує між об’єктами А та В?* 12) *Які ознаки є загальними для об’єктів А та В?* 13) *За якою видовою ознакою поняття А виділяється з свого родового поняття?* 14) *Які висновки можна зробити з порівняння А та В?* 15) *Чи мають множини М1 та М2 загальні елементи?* 16) *Який з елементів є загальним для множин М1 та М2?* 17) *Яка множина є перерізом (об’єднанням) множин М1 та М2*? 18) *Чи можна задачу А вважати більш загальною, ніж В?* 19) *Чому* *задачу В можна вважати окремим випадком задачі А?* 20) *Яку з наведених задач можна вважати окремим випадком задачі А?* 21) *За якими ознаками задачу А можна класифікувати як більш (менш) загальну, ніж В?*

5. Виявляти аналогії в об'єктах з різних тем курсу або різних розділів математики. Раніше мова йшла про об'єкти, схожість яких за деяким критерієм очевидна. Більш креативним завданням є пошук та аналіз аналогій між об'єктами з різних тем або різних розділів математики. Наприклад, повним аналогом класифікації кривих другого порядку на еліпси, параболи, гіперболи є класифікація рівнянь математичної фізики на рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів. *Яка аналогія існує між об'єктами А та В?*

Виявляти зв'язки, які існують між об'єктами (поняттями, теоремами, задачами, формулами, методами тощо). 1) *Які зв'язки існує між об'єктами А та В?* 2) *Наведіть означення кількох понять з різних розділів курсу та вкажіть зв'язки, які існують між цими поняттями.* 3) *Вкажіть, між якими з доведених теорем існують зв'язки та які саме.* 4) *Наведіть формулювання кількох теорем з різних розділів курсу, пов'язаних між собою.* Вкажіть *зв'язки, які існують між цими теоремами.* 5) *Яка ознака є загальною для задач, що можуть бути розв'язані методом М?* 6) *Які ознаки є суттєвими для задач, що можуть бути розв'язані методом М?* 7) *Для розв'язання яких (з наведених) задач застосовується метод М?* 8) *Якими з наведених методів може бути розв'язана задача З?*

7. Встановлювати відповідність між елементами пов'язаних множин та заносити результати аналізу в таблицю з паралельними стовпчиками. 1) *Встановіть відповідність між кожною з теорем початкових розділів математичного аналізу та евристичними прийомами, які були використані для їхнього доказу, тобто вкажіть, які прийоми були застосовані у ході доведення кожної з теорем:*

Таблиця 1

Теореми	Евристичні прийоми
Теореми Дедекінда. Лема Больцано-Вейєрштрасса. Лема Бореля. Перша теорема Больцано-Вейєрштрасса. Друга теорема Больцано-Вейєрштрасса. Перша теорема Больцано-Коші. Друга теорема Больцано-Коші, Теореми Ферма, Дарбу. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Теорема про зворотню функцію.	Дедукція Індукція Доказ від супротивного Зведення до вже розв'язанної задачі Послідовне звуження області пошуку розв'язку Введення допоміжної функції Перебір варіантів Переформулювання задачі Аналогія Розв'язання від кінця до початку Перехід до більш загальної задачі

2) *Встановіть відповідність між основними задачами, котрі треба розв'язати під час дослідження функції y = f(x) та побудови її графіка і методами розв'язання цих задач. Занесіть результати в таблицю 2, початок якої показано нижче.*

Таблиця 2

Задача	**Метод розв'язання задачі**
Обчислити точку перетину з віссю ординат	Обчислити $y_0 = f(0)$

3) *Створіть таблицю відповідності між назвою і змістом кожної з теорем про властивості функцій, неперервних на замкненому відрізку, та методами доказу цих теорем.*

У формі таблиці з паралельними стовбцями доцільно подавати також: 1) умови та хід розв'язання прямої й оберненої задач 2) формулювання та доведення прямої та оберненої теорем, 3) перелік ознак та малюнки аналогічних об'єктів та протилежних об'єктів, 4) різні форми представлення об'єктів, 5) ознаки родового та видового понять, 6) іншу відповідну інформацію (див. табл. 3, 4).

8. Виявляти схожість різних задач, які розв'язуються одним методом. В табл. 3 показана відповідна форма таблиці результатів аналізу.

Таблиця 3

Метод	**Задачі**

9. Виявляти схожість чи тотожність методів, якими розв'язуються задачі з різних розділів курсу, і які мають різні назви. Наприклад, метод Больцано тотожен методу половинного ділення.

10. Подавати інформацію про об'єкти, які характеризуються двома параметрами, у вигляді таблиці зі строками та стовбцями. Зазначимо, що у стислій формі таблиці доцільно подавати все, що може бути так подане.

11. Зіставляти різні форми представлення об'єктів: текстове та графічне. *Наведіть геометричну інтерпретацію понять (теорем).* З урахуванням попередньої рекомендації це доцільно робити у вигляді таблиці з паралельними стовбцями (табл. 4)

Таблиця 4

Назва поняття	**Текстове означення поняття**	**Геометрична інтерпретація поняття**

12. Поєднувати у часі та просторі подання матеріалу в різних кодах: графічному, символьному, словесному, або у різних формах одного коду. *Проведіть деяку пряму на площині та запишіть її рівняння у різних формах.*

13. Розміщати задачі, одна з яких дає підказку для розв'язання іншої,

поблизу в тексті посібника або в часі розв'язування;

14. Записувати твердження відносно схожих або протилежних об'єктів у вигляді так званого «подвійного речення». В такому реченні слова, що відображають цю схожість або протилежність, записуються один над одним у вигляді дробу, таким чином одне речення містить два схожих висловлювання. Наприклад: 1) *Задайте рівняння двох* $\frac{\text{прямих на площині}}{\text{площин}}$*, які є: а) перпендикулярними б;) паралельними; в) такими, що перетинаються; г) такими, що збігаються .* 2) *Чи* $\frac{\text{необхідно}}{\text{достатньо}}$ *для доказу збіжності послідовності обчислити її границю*?

Таким способом доцільно поєднувати 1) означення протилежних понять: $\frac{\text{максимум}}{\text{мінімум}}$, *точна* $\frac{\text{верхня}}{\text{нижня}}$*межа* тощо, 2) формуліровки двох споріднених теорем: *Якщо функція f(x) монотонно* $\frac{\text{зростає}}{\text{спадає}}$ *... та обмежена* $\frac{\text{сверху}}{\text{знизу}}$ … .

Наш досвід показує високу ефективність такої форми запису: після формулювання однієї з теорем іншу студенти записують вже самі.

15. Розміщати графіки споріднених функцій на одному малюнку.

16. З невеликої кількості носіїв інформації створювати якомога більше взаємопов'язаних завдань. 1) *Складіть перелік властивостей функцій (зростаюча - спадна, періодична - неперіодична, парна - непарна і т.д.). Для кожної пари властивостей (наприклад, зростаюча, неперіодична) намалюйте графік (або запишіть рівняння) функції, яка має ці властивості. Якщо Ви не можете знайти рішення, спробуйте довести, що функції, яка володіє таким набором властивостей, не існує. Спробуйте виконати аналогічне завдання для наборів з трьох, чотирьох, п'яти властивостей.* 2) *Задайте аналітично або графічно декілька функції, кожна з яких відрізнялася б від всіх інших за деяким критерієм.*

17. Створювати комплексні завдання. Кожне з таких завдань може включати: 1) розв'язання заданої задачі або складання задачі за заданими умовами та її розв'язання; 2) складання та розв'язання оберненої задачі; 3) складання та розв'язання аналогічної задачі; 4) складання та розв'язання задачі, узагальненої за тим чи іншим параметром вихідної задачі.

Нижче наведені приклади завдань з лінійного програмування [2–4], в яких ідеї укрупнення дидактичних одиниць реалізовані наступним чином:
- у завданні 1.1 зведені в одну таблицю 4 варіанти поєднання різних за характером обмежень та цільової функції;
- у завданні 1.2 усі можливі варіанти поєднання різних за характером обмежень та цільової функції зведені в одну таблицю, до неї ж заносяться результати розв'язання задач. Вимога розглянути всі варіанти на одному й тому ж кресленні також спрямована на поєднання подібної інформації у просторі;

- у завданні 1.3 декілька задач розв’язуються на одному кресленні шляхом зміни нахилу лінії рівня цільової функції або границі області допустимих розв’язків;
- у завданні 1.4 поєднуються три мови формулювання задачі: економічна, геометрична та алгебрична;
- у завданні 1.6 зіставляються методи розв’язання подібних задач, у завданні 2.1 – однієї задачі;
- завдання 1.6 – 1.9 являють собою комплекс задач, що базуються на одній з них: завдання 1.7 пропонує узагальнити задачу із завдання 1.6, завдання 1.8 – сформулювати та розв’язати задачу, зворотню до задачі із завдання 1.7, завдання 1.9 пропонує узагальнити задачу з завдання 1.7;
- у завданні 2.1 задача розв’язується трьома методами;
- завдання 2.2 є системою завдань, в якій кожне наступне основується на попередньому, при цьому задачі складаються студентом за даними умовами;
- завдання 2.4 – на узагальнення твердження, наведеного у завданні 2.3;
- завдання 2.5 є по суті відповіддю на завдання 2.4, але поданою в іншій формі, таким чином виконання одного з цих завдань може сприяти виконанню іншого, і більш стійкому запам’ятовуванню відповідного твердження;
- у завданнях 3.1, 3.2 задача з неправильним балансом основується на задачі з правильним балансом, при цьому задачі складаються студентом за даними умовами і розв’язуються різними методами;
- у завданні 3.3 пропонується навести різні задачі, що мають загальну математичную модель;
- у завданні 3.4 пропонується зіставити поняття, які характеризують загальну та окрему задачі.

Завдання 1.1. У табл. 5 позначені 4 типи задач, які різняться характером екстремуму цільової функції і характером обмежень. Для тих типів задач, які мають нетривіальний розв’язок, наведіть приклади відповідних економічних задач.

Таблиця 5

Характер екстремуму	**Характер обмежень**	
	зверху	**знизу**
максимум	Задача 1	Задача 3
мінімум	Задача 2	Задача 4

Завдання 1.2. Запишіть математичну модель задачі ЛП з двома змінними та двома обмеженнями-нерівностями. Розв’яжіть геометрично задачі, які одержуються за усіх комбінацій знаків нерівностей та характеру екстремуму цільової функції. Результати розв’язання занесіть у табл. 6.

Завдання 1.3. Накресліть геометричну модель деякої задачі ЛП (область припустимих розв’язків, лінію рівня та вектор-градієнт цільової функції).

Для цієї задачі:

1) отримайте розв’язок графічним методом;
2) змініть цільову функцію так, щоб задача мала інший єдиний розв’язок;

3) змініть цільову функцію так, щоб задача мала нескінчену множину розв’язків;

4) змініть обмеження так, щоб задача мала нескінчену множину розв’язків.

Таблиця 6

№ задачі	Умови задачі			Результат розв’язку	
	Знаки нерівностей		Характер екстремуму		
	перша нерівність	друга нерівність		Область допустимих розв’язків	Точки екстремуму
1	≤	≤	max		
2	≤	≥	max		
3	≥	≤	max		
4	≥	≥	max		
5	≤	≤	min		
6	≤	≥	min		
7	≥	≤	min		
8	≥	≥	min		

Завдання 1.4. Запропонуйте економічну задачу, якій відповідає геометрична модель завдання 1.3. Для цього попередньо перекладіть модель с геометричної мови на алгебричну.

Завдання 1.6. Накресліть геометричну модель задачі ЛП, в якій треба знайти максимум цільової функції $L= x1+ x2$, а область допустимих розв’язків є замкнений п’ятикутник *OABCD* (*O* – початок координат, *A* лежить на осі $x2$, *D* лежить на осі $x1$). Побудуйте 5 ліній рівня цільової функції $L = c{\cdot}Lmax$ для $c = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

За допомогою цих ліній рівня оцініть значення цільової функції у всіх вершинах області допустимих розв’язків, а потім порівняйте з точними значеннями.

Завдання 1.7. Узагальніть задачу із завдання 1.6, зобразивши лінію рівня цільової функції $L = 0$ у вигляді $x2= k\,x1$. Поділіть область змінювання значень кутового коефіцієнта k є $[\,-(N + 10)\;,\; -1\,/\,(N + 10)]$ на області, яким відповідають різні розв’язки задачи ЛП, що розглядається (*N* – Ваш номер в групі).

Завдання 1.8. Сформулюйте и розв’яжіть задачу, обернену до задачі, наведеної у завданні 1.7. Чи має обернена задача єдиний розв’язок?

Завдання 1.9. Узагальніть задачу із завдання 1.7 на *n*-кутову замкнену область допустимих розв’язків.

Завдання 1.10. Для кожної з наведених нижчє умов, які накладені на цільову функцію *L*, накресліть геометричну модель відповідної задачі ЛП, яка містить у собі чотирикутну область допустимих розв’язків *OABC*, лінію рівня та вектор-градієнт цільової функції.

Умови, накладеніна цільову функцію *L*:

1) $L(A) = L(B) = Lmax$ 2) $L(A) = L(C) < Lmax$ 3) $L(C) >> L(O)$
4) $L(O) = Lmax$, $L(C) = Lmin$
5) $L(C) - L(B) >> L(B) – L(A)$, $L(B) - L(A) = L(A) – L(O)$.

Придумайте інші умови й накресліть відповідні їм геометричні моделі. Для кожної задачі оцініть, чи достатньо задано умов, щоб задача мала єдиний розв'язок, і чи не має надлишку умов.

Скорегуйте умови тих задач, котрі мають недостачу чи надлишок даних так, щоб нова задача мала єдиний розв'язок.

Завдання 2.1. Придумайте задачу лінійного програмування з двома змінними та розв'яжіть її трьома методами: графічно, методом перебору (повної індукції) та аналітично (симплекс-методом).

Завдання 2.2. 1. Придумайте систему (1) обмежень-рівностей з двома вільними та трьома базисними змінними, яка задовольняє умови:

1) базісні змінні явно виражені через вільні;
2) модулі вільних членів дорівнюють a, b, N (N - Ваш номер у списку групи, a, b – цифри десятків та одиниць в числі N);
3) нульові значення вільних змінних призводять до розв'язку системи (1), який не належить ОДР.

2. Шляхом симплекс-перетворень системи (1) одержіть опорний розв'язок.
3. Одержіть нову систему (2), здійснивши в системі (1) мінімальну кількість змін таким чином, щоб система (2) за нульових значень вільних змінних мала опорний розв'язок.
4. На основі системи (2) сформулюйте задачу ЛП, доповнивши цю систему цільовою функцією (3), такою, щоб одержаний опорний розв'язок не був оптимальним у разі пошуку як максимуму, так і мінімуму, і необхідні нерівності (4).
5. Для сформульованної задачі ЛП (2), (3), (4) зробіть один крок перетворення симплекс-таблиці та оцініть оптимальність одержаного плану.
6. Перетворіть систему (2) в еквівалентні системи обмежень-нерівностей, одна з яких має знак $\leq$ (назвемо її системою (5)), інша – знак $\geq$ (назвемо її системою (6)).
7. Замініть у системі (6) числові коефіцієнти буквеними та для одержаної системи (7) зробіть один крок перетворення симплекс-таблиці.

Завдання 2.3. Заповніть пропуски так, щоб одержати правильне твердження: „ Якщо коефіцієнти p_1 и ____ у виразі цільової функції $L = p_1\ x_1 + p_2\ x_2 + L_0$ є такими, що ___________ , то точка (0,0) не є _____________ ні в разі пошукі максимуму, ні ___________________" .

Завдання 2.4. Узагальніть твердження, наведене у завданні 2.3, на випадок лінійної цільової функції n змінних ($n > 2$).

Завдання 3.1. Сформулюйте транспортну задачу с правильним балансом для 4 постачальників і 4 споживачів. Значення запасів a_i, заявок b_j обчисліть за формулами $a_i = N+i$, $b_j = N – j + 5$ (i = 2,3,4, j = 1, 2 3, 4) (N – Ваш номер у списку групи). Значення вартостей c_{ij}, а також a_1 виберіть із діапазонів: $4<c_{ij}<20$, $5<a_1<20$ так, щоб початкові плани, обчислені як за методом північно-західного кута, так і за методом мінімальної вартості, не були оптимальними. Розв'яжіть задачу для кожного з цих початкових планів та порівняйте кількість перетворень транспортної таблиці, необхідних для одержання оптимального плану.

Завдання 3.2. Сформулюйте транспортну задачу с правильним балансом для 4 постачальників і 4 споживачі, яка відрізняється від задачі із завдання 3.1 лише значенням a_1 так, що сума запасів перевищує суму заявок на N одиниц (N – Ваш номер у списку групи). Розв'яжіть задачу для початкових планів, обчислених як за методом північно-західного кута, так і за методом мінімальной вартості, та порівняйте кількість перетворень транспортної таблиці, необхідних для одержання оптимального плану.

Завдання 3.3. Наведіть приклади задач, не пов'язаних з перевезеннями, але таких, що мають ту ж математичну модель, що і транспортна задача за критерієм вартості перевозок.

Завдання 3.4. Оскільки математична модель транспортної задачі (ТЗ) є окремим випадком математичної моделі задачі лінійного програмування (ЗЛП), між поняттями, що характеризують ці моделі, існує взаємно однозначна відповідність. Занесіть до таблиці назви пар понять, що відповідають одне одному, одне з яких характеризує математичну модель ТЗ, а друге – математичну модель ЗЛП, а також відповідні одне одному поняття, що описують методи розв'язання цих задач.

Характеристики ЗЛП	**Характеристики ТЗ**
Характеристики математичної моделі	
Характеристики методів розв'язування задач	

Укрупнення дидактичних одиниць доцільно застосовувати не тільки у ході викладання нового матеріалу, але й при повторенні, слідуючи принципу: «Повторення – через перетворення знання, через його укрупнення» [1, с. 201].

Список літератури

1. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике [Текст]: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 256 с.
2. Скороход Г.І. Укрупнення дидактичних одиниць у завданнях з курсу лінійного програмування (постановка задачі та графічне розв'язування) [Текст] / Материалы V-й Междунар. конф.«Стратегия качества в промышленности и образовании», Варна, 6-13 июня 2009 г. Т. 2, с. 648 –650.
3. Скороход Г.І. Укрупнення дидактичних одиниць у завданнях з курсу лінійного програмування (симплекс-метод та транспортна задача) [Текст] / Материалы V-й Междунар. конф.«Стратегия качества в промышленности и образовании», Варна, 6-13 июня 2009 г. Т. 2, с. 650 – 653.
4. Скороход, Г. І. Методика викладання фахових дисциплін у вищій школі. [Текст]: навч. посіб. для магістрів за спеціальністю «Прикладна математика» / Г. І. Скороход, В. Д. Ламзюк. – Д.: РВВ ДНУ, 2009. – 64 с.