УДК 517.518.2:517.537:539.2/.8

М.С. Четверик

О ЗАПОЛНЕНИИ ЭВКЛИДОВОГО МНОЖЕСТВА ФРАКТАЛЬНЫМ. ВЗРЫВНЫЕ РЯДЫ

Приведено определение заполнения исходного объекта в эвклидовой размерности фрактальным множеством (структурой). Обосновывается применение степенно - показательной последовательности в виде «взрывных» рядов для описания дробления частицы породы.

Наведено визначення заповнення вихідного об'єкта в евклідовій розмірності фрактальною множиною (структурою). Обґрунтовується застосування степенно - показової послідовності у вигляді «вибухових» рядів для опису дроблення частинки породи.

The definition of filling the original object in the Euclidean with fractal set (structure) is given. Application of extent-exponential sequence is shown to describe a series of crushing rock particles.

I.Введение

Многие свойства пород геологической среды при их добыче и переработке: пористость, трещинноватость, коэффициенты разрыхления, степень раздробленности при взрывном и механическом разрушении, и др. описывают как функции случайных величин с известным законом распределения. Однако прине учитывается, что при изменении параметров (крупность, суммарная площадь поверхности кусков и др.) частицы породы изменяют свойства. Так, например, при дроблении одной и той же скальной породы получают: бутовый камень, щебень, песок, мелкий песок, пылеватые, глинистые и коллоидные частицы. Физические, механические и химические свойства их различны. Подобные закономерности наблюдаются в иерархии геологических тел [1], при построении инженерных сетей, маркшейдерской опорной сети и др. Некоторые из этих закономерностей описывают методами фрактальной геометрии, которая предусматривает упорядоченное построение дробных объектов, подобных исходному [2]. Причем, известно, что при дроблении пород суммарная поверхность образовавшихся частиц многократно увеличивается [3], что не отображается существующим математическим аппаратом. Установление закономерностей процессов самоподобия горных пород в естественном состоянии, при разрушении, переработке и др. позволит использовать их для совершенствования технологических процессов и разработке новых технологий.

II .Цель работы

1.Поскольку фрактальное множество строится на базе определенного объекта, заданного в евклидовой размерности, то оно на какую-то величину заполняет этот исходный объект подобъектами. Как определить заполнение исходного объекта фрактальным множеством (структурой) или рядом, рассматривается в данной работе.

2.Обосновать применение функционального ряда, членами которого являются степенно – показательные функции , так называемого «взрывного» ряда, для описания дробления частицы породы, при котором с высокой скоростью изменяются параметры раздробленных частиц. При последовательном дроблении одних и тех же пород от макро до микро размеров изменяются свойства дробленых частиц, что требует их определенной характеристики.

III. Изложение основного материала

III.1.О заполнении евклидового множества фрактальным

Размерность фрактального множества d_f в отличие от евклидовой d не является целым числом, т.е. $d › d_f › d-1$.Поскольку фрактальное множество строится на базе определенного объекта, заданного в евклидовой размерности, то оно на какую-то величину заполняет этот исходный объект подобъектами. Определим заполнение исходного эвклидового объекта фрактальным множеством. Для этого будем основываться на результатах работы [2].

Каждый член фрактального множества характеризуется количеством копий N и коэффициентом подобия R, которые связаны соотношением

$$NR^{d_f} = 1$$

Коэффициент подобия R зависит от линейного масштаба r

$$R = \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$N\left(\frac{1}{r}\right)^{d_f} = 1.$$

$$N = r^{d_f} \tag{1}$$

или

$$d_f = \frac{\ln N}{\ln r} \quad , \tag{2}$$

где r – масштаб, представляет величину на сколько частей дробим первоначальный объект, будь-то линия, площадь, объем и т.д. Поэтому при построении дробных объектов в фрактальной последовательности будут такие величины: для линий – r , для площади – r^2, для объема – r^3.

1.Фрактальная размерность ряда. Допустим, что фрактальная последовательность, каждый член которой характеризуется количеством копий и коэффициентом подобия, может быть выражена таким же количеством членов, но отражающими другие свойства объекта и подобъектов, то есть рядом $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$; (числовым или функциональным). Здесь U_n – общий член ряда, который отражает свойства исходного дробимого объекта, отличные от количества копий и коэффициента подобия.

Построение фрактальных множеств производят с повышением или с понижением исходной топологической размерности. Тогда фрактальную функцию можно представить так

$$F(N,r) = 1 \pm \sum_{n=1}^{\infty} U_n .$$

Величину

$$U_3 = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

назовем знаменатель ряда.

Сделаем одно очень важное допущение. Оно заключается в том, что хотя каждый член ряда и отражает какие-то свойства объекта и подобъектов, но он пропорционален соотношению количества копий и коэффициенту подобия этого же члена ряда. Эта пропорциональность составит: для линии $U_3 = \frac{N}{r}$; для площади $U_3 = \frac{N}{r^2}$; для объема $U_3 = \frac{N}{r^3}$ или

$$U_3 = \frac{N}{r^d} \tag{3}$$

Определим фрактальную размерность заданного ряда. В выражение (3) подставим количество копий из (1). Тогда

$$U_3 = \frac{r^{d_f}}{r^d}; \qquad U_3 r^d = r^{d_f}; \tag{4}$$

$$d_f \ln r = \ln U_3 + d \ln r$$

$$d_f = \frac{\ln U_3}{\ln r} + d\,. \tag{5}$$

Таким образом, если задаться масштабом r, полагая известным знаменатель ряда и евклидову размерность, то можно определить фрактальную размерность ряда по выражению (5). Из (4) следует

$$r = \frac{1}{U_3^{(d-d_f)}} \tag{6}$$

Чем больше знаменатель ряда, тем меньше может быть масштаб r.

2.О параметре, отражающем свойства исходного объекта.

Исходный объект $П_e$, который подвергается дробному излому, определяется линейным параметром А и может быть представлен линией длиной А, площадью $А^2$, объемом $А^3$, т.е.

$$П_e = A^d \quad . \tag{7}$$

Во фрактальном объекте $П_f$ (не точка, но и не линия; не линия, но и не площадь; не площадь, но и не объем) параметр А будет уменьшен в r раз, т.е.

$$П_f = \left(\tfrac{A}{r}\right)^{d_f} \quad . \tag{8}$$

Значение параметра А ограничено сверху как величина исходного объекта. Точность его определения (граница снизу) может быть установлена исходя из следующего. Если изменение параметра А во фрактальной последовательности представить как степенной ряд Тейлора, то можно установить количество членов ряда, которые могут обеспечить необходимую точность. Или перейти на новую ступень дробного объекта.

3.Мера заполнения фракталом объекта, на котором он построен.

Полнотой (мерой) заполнения фракталом объекта, на котором он построен, будем считать отношение уменьшенного в r раз исходного параметра в размерности фрактала к этому же параметру, но в евклидовой размерности, т.е.

$$M = \frac{П_f}{П_e} = \frac{\left(\frac{A}{r}\right)^{d_f}}{A^d}; \tag{9}$$

или

$$M=\frac{1}{rA^{(d-d_f)}}; \qquad \delta=d-d_f;$$

$$M=\frac{1}{rA^{\delta}}; \tag{10}$$

Значение параметра А при известной мере М заполнения фракталом объекта можно определить так

$$A=(Mr)^{-\frac{1}{\delta}} \tag{11}$$

4.Влияние параметра и размерности на меру заполнения исходного объекта.

Из выражения (10) следует, что чем на большее количество частей дробим исходный объект (значения r), тем мера заполнения его фракталом меньше. Тоже самое относится и к параметру А: чем больше величина А, тем меньше исходный объект заполняется фрактальным множеством.

Мера заполнения всегда меньше единицы, если евклидова размерность будет больше фрактальной. Но если $d_f \rangle d$, то мера заполнения фракталом евклидового множества будет больше. То есть фрактал будет размножаться (как китайцы) и заполнит все евклидово множество полностью и еще и сверху.

III.2. Взрывные ряды

Для описания процессов, при которых происходят изменения параметров объекта с высокой скоростью, рассмотрим степенно-показательную последовательность, члены которой образуют так называемый «взрывной» ряд.

Известно, что степенно-показательная функция $y = x^x$ обладает высокой скоростью изменения. Но еще более высокой скоростью изменения обладает функциональный ряд:

$$x+x^x+x^{x*x}+x^{(x*x)(x*x)}+\ \dots$$

Степень каждого последующего члена ряда равна произведению степеней предыдущего члена. Такие ряды могут быть как числовыми:

$$5^2+6^4+7^{16}+8^{256}+9^{256*256}+\dots+\ , \tag{12}$$

так и функциональными:

$$x^5+x^{25}+x^{625}+x^{625*625}+\dots+. \tag{13}$$

Степень, в которую возводится каждый последующий член ряда, может быть различной. Например, для пятой степени

$$x^2+x^{2*2*2*2*2}+x^{32*32*32*32*32}+$$

Пусть символ »« означает умножение степеней предыдущего члена ряда (попытки использовать существующие математические символы для описания взрывных рядов оказались безрезультатными или приводили к громоздкости выражений).

Тогда общий член такого ряда имеет вид

$$u_n(x)=x^{n\,[\kappa\,»«]}, \tag{14}$$

где *к* – степень ряда, т.е. количество умножений степени предыдущего ряда.

Например, при $k = 3$, начиная с при $n = 2$ имеем: первый член- x^2; второй –$x^{2*2*2}=x^8$; третий – $x^{8*8*8}=x^{512}$; четвертый – $X^{512*512*512}$.

III.3. Понятия о дрибязках и промежностях

Многим явлениям присуща закономерность, которая проявляется в том, что изменение количественных соотношений в объекте обуславливает его переход в новое качество. В горном деле эта закономерность проявляется при дроблении пород. Переход в новое качество при увеличении количественных составляющих объекта можно характеризовать следующими параметрами.

Объект, раздробленный на части, обладающими определенными свойствами (качеством) назовем дрибязком. Пусть А и В соответственно наименьший и наибольший параметры частей дрибязка[1], в пределах которых не изменяются свойства раздробленного объекта,

Примем, что каждый член ряда отображает свойства однородности по известному параметру, а сумма членов ряда – свойства дрибязка по этому параметру. Пусть достаточно пяти членов взрывного ряда для описания свойства дрибязка

$$c_0 + x_n + x^{n^{k_2}} + x^{n^{(k_2)^{k_3}}} + x^{\left[\left(n^{k_2}\right)^{k_3}\right]^{k_4}} = \sum_{i=0}^{i=4} D(A,B) \quad . \tag{15}$$

Если дрибязок однородности состоит из частиц, объемы которых составляют V_1, V_2, V_3, V_4 ,V_5 , то количество частиц N_d в дрибязке при известном их удельном соотношении в объекте, составит:

$$N_d = \frac{c_0}{V_1} + \frac{c_d^n}{V_2} + \frac{c_d^{n^{k2}}}{V_3} + \frac{c_d^{(n^{k_2})^{k_3}}}{V_4} + \frac{c_d^{((n^{k_2})^{k_3})^{k_4}}}{V_5}. \tag{16}$$

Поверхность частицы дрибязка пусть составляет S_1, S_2 , S_3 , S_4 , S_5. Тогда суммарная поверхность частиц S_d в единичном объеме дрибязка составит

$$N_d = \frac{c_0}{V_1}S_1 + \frac{c_d^n}{V_2}S_2 + \frac{c_d^{n^{k2}}}{V_3}S_3 + \frac{c_d^{(n^{k_2})^{k_3}}}{V_4}S_4 + \frac{c_d^{((n^{k_2})^{k_3})^{k_4}}}{V_5}S_5. \tag{17}$$

Пример. Допустим, что 1см^3 глинистого сланца состоит исключительно из глинистых частиц (что в природе бывает редко) с диаметром от 0,0001 до 0,00001см. Доля частиц в дрибязке может быть описана равенством

$$C + PX + X^2 = 1$$

В соответствии с выражениями (16) и (17) определено количество частиц, их поверхность и суммарная (рис.1).

Если количество частиц разных диаметров изменяется соответственно значений членов кубического взрывного ряда, то суммарное количество частиц в дрибязке может быть выражено так

$$N_d = c + x^2 + x^8 + x^{512} \quad . \tag{18}$$

Если $C=X=10$, то

$$N_d = 10 + 10^2 + 10^8 + 10^{512} \quad . \tag{19}$$

При известных или заданных параметрах А и В суммарная поверхность частиц в 1см^3 глинистого сланца составит

$$S_d = 6*10^{-11} + 2{,}7*10^{-10} + 6{,}7*10^{-5} + 6*10^{498}, \text{ м}^2. \tag{20}$$

Из приведенного выражения следует, что главную часть поверхности в дрибязке представляют мелкие частицы. Они то и влияют на свойства дрибязка.

1.Дрибязок (укр.) – небольшие части целого. От готского-«draben» - вырезать.

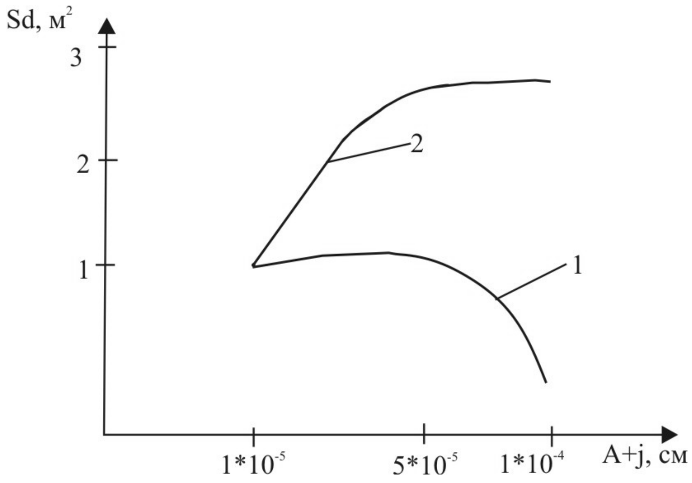

Рис.1–Поверхность частиц. представленных членами взрывного ряда (1) и суммарная (2)

Изложенное, свидетельствует о целесообразности развития и применения взрывных рядов для описания процессов, при которых в результате дробления и увеличения количества самоподобных однородностей происходят существенные качественные изменения.

Список литературы

1.Горяйнов С.В. Иерархия редкостных геологических тел. – Харьков: УкрНИИГаз, 2001. – 564 с.

2.Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. – Киев: Наукова думка, 2005. – 358 с.

3.Бабков В.Ф., Безрук В.М. Основы грунтоведения и механики грунтов. – М.: Высш. школа, 1976.

4.Макаров П.В., Трубицын А.А., Ворошилов С.П. Самодобие разрушения углей и эволюция нагружаемых твердых тел // Уголь. – 2006. №10. – С.55-58.

5.Голоудин Р.И. К оценке потенциальной геодинамической опасности разрывных нарушений // Маркшейдерский вестник. – 2006. №1. – С. 59-63.