МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.Ф. Сторчай
В.В. Приходько

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ. МНОГОЧЛЕНИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

УДК 512.622(076.2)
С 82

Рекомендовано до видання вченою радою НТУ “Дніпровська політехніка” (протокол № 3 від 11.02.2021) як навчальний посібник для студентів.

Рецензенти: В.І. Олевський, д-р тех. наук, професор, професор кафедри вищої математики Українського державного хіміко-технологічного університету;
О.П. Купенко, д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри системного аналізу і управління Національного технічного університету “Дніпровська політехніка”.

Сторчай В.Ф.
С 82 Готуємося до олімпіади. Многочлени: навч. посіб. / В.Ф. Сторчай, В.В. Приходько ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т “Дніпровська політехніка”. – Дніпро : НТУ “ДП”, 2021. – 135 с.

ISBN 978-966-350-745-3

Навчальний посібник є унікальним (аналогів немає) зібранням задач, які пропонувалися з даної тематики на олімпіадах у різних країнах. Наведено близько 200 цікавих оригінальних задач з повним розв’язанням, а також необхідний теоретичний матеріал та завдання для самостійної роботи.

Мета посібника – познайомити читачів з різноманітними нестандартними методами розв’язання олімпіадних задач.

Рекомендовано студентам, учителям і викладачам різних навчальних закладів, які готують студентів до участі в олімпіадах.

УДК 512.622(076.2)

ISBN 978-966-350-745-3

ЗМІСТ

1. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Функцію $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – деякі дійсні числа $(a \neq 0)$, називають ***квадратним тричленом***, а її графік – ***параболою***.

Квадратний тричлен після виділення повного квадрата зводиться до такого вигляду

$$y(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (1)$$

Властивості квадратного тричлена

1. Область визначення – вся числова пряма.

2. При $b = 0$ квадратний тричлен – функція парна, а при $b \neq 0$ не є парною і не є непарною.

3. Функція $y(x)$ неперервна і диференційовна в усій області визначення.

4. Квадратний тричлен має єдину екстремальну точку $x = -b/2a$. Якщо $a > 0$, у цій точці буде мінімум і вітки параболи направлені вгору. Коли ж $a < 0$, то – максимум, а вітки параболи направлені вниз.

Точку графіка функції $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ називають ***вершиною*** параболи.

5. Область значень функції:

при $a > 0$ – проміжок $\left[-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}; \infty\right)$; при $a < 0$ – $\left(-\infty; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right]$.

6. Графік квадратного тричлена перетинається з віссю Oy в точці $(0;c)$. Якщо $b^2 - 4ac > 0$, парабола перетинає вісь Ox у двох точках (квадратне рівняння має різні дійсні корені); коли $b^2 - 4ac = 0$, квадратне рівняння має один двократний корінь, при цьому парабола дотикається до осі Ox у точці $(-b/2a; 0)$.

Зображення квадратного тричлена у вигляді (1) свідчить про симетрію графіка відносно прямої $x = -b/2a$.

Графік функції (1) можна дістати з графіка $y = x^2$ шляхом таких перетворень:

1) паралельне перенесення $\bar{r} = (-b/2a; 0)$;

2) стиснення (або розтягання) уздовж осі ординат в a раз;

3) паралельне перенесення $\bar{r} = \left(0; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Вираз вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (2)$$

де a, b, c – деякі дійсні числа, називається ***квадратним рівнянням.*** Якщо $a = 1$, квадратне рівняння (2) називають ***зведеним***.

Корені квадратного рівняння обчислюють за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (3)$$

де вираз $D = b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом*** квадратного рівняння.

При цьому можливі такі випадки:

- якщо $D > 0$, рівняння має два дійсних корені;
- коли $D = 0$, рівняння має один дійсний корінь кратності 2;
- при $D < 0$, рівняння дійсних коренів не має, а має два комплексно-спряжених корені

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \cdot i, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \cdot i.$$

Також мають місце ***формули Вієта***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Квадратний тричлен можна розкласти на прості множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Корені зведеного квадратного рівняння, яке зазвичай записують у вигляді $x^2 + px + q = 0$, обчислюють за формулою

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{4}$$

Корені квадратного рівняння з парним другим коефіцієнтом, яке зазвичай записують

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \quad (k \text{ – ціле число}),$$

зручно обчислювати за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \tag{5}$$

Формули (4) і (5) є окремими видами формули (3) обчислення коренів квадратного рівняння.

Корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ пов'язані з його коефіцієнтами ***формулами Вієта***:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Коли зведене квадратне рівняння має дійсні корені, формули Вієта дають змогу робити висновок як про знаки, так і про відносну величину коренів, а саме:

- якщо $q > 0$, $p > 0$, то обидва корені від'ємні;
- коли $q > 0$, $p < 0$, то обидва корені додатні;
- при $q < 0$, $p > 0$ корені мають різні знаки, причому від'ємний корінь за абсолютною величиною більший від додатного;
- якщо $q < 0$, $p < 0$, то корені також мають різні знаки, причому від'ємний корінь за абсолютною величиною менший від додатного.

Розглянемо застосування властивостей квадратного тричлена до розв'язування конкретних задач.

1.1. РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ. ЗАМІНА ЗМІННОЇ

Приклад 1. Розкласти на множники вираз

$$(x^2+2x+4)^2+5x(x^2+2x+4)+6x^2.$$

Розв'язання. Розглянемо заданий вираз, як квадратний тричлен відносно змінної (x^2+2x+4). За теоремою Вієта цей квадратний тричлен має корені $-2x$ і $-3x$. Квадратний тричлен ax^2+bx+c з коренями x_1 та x_2 можна подати у вигляді $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, отже, для заданого виразу отримаємо:

$$(x^2+2x+4)^2+5x(x^2+2x+4)+6x^2=(x^2+2x+4+2x)(x^2+2x+4+3x)=$$

$$=(x+2)^2(x^2+5x+4)=(x+2)^2(x+1)(x+4).$$

Відповідь: $(x+2)^2(x+1)(x+4)$.

Приклад 2. Розкласти многочлен

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$$

на множники з дійсними коефіцієнтами.

Розв'язання. Виконаємо перетворення:

$$P(x)=(x^2+x+1)\Big((x^2+x+1)+1\Big)-12=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12.$$

Після заміни $x^2+x+1=y$ матимемо

$$y^2+y-12=(y+4)(y-3),$$

бо корені тричлена y^2+y-12 дорівнюють -4 і 3. Повернувшись до змінної x, отримаємо

$$P(x)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).$$

Відповідь: $P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$.

Приклад 3. Розкласти на лінійні множники многочлен

$$P(x)=2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2.$$

Розв'язання. Після заміни $x^2+6x+1=y$ отримаємо многочлен

$$P(x,y)=2y^2+5(x^2+1)y+2(x^2+1)^2.$$

Розглядаючи цей многочлен, як квадратний тричлен відносно змінної y, знайдемо його корені

$$y_{1,2}=\frac{-5(x^2+1)\pm\sqrt{25(x^2+1)^2-16(x^2+1)^2}}{4}=\frac{-5(x^2+1)\pm 3(x^2+1)}{4},$$

тобто $y_1=-2(x^2+1)$, $y_2=-\dfrac{(x^2+1)}{2}$.

Тоді $P(x,y)=2(y-y_1)(y-y_2)$, а після переходу до змінної x матимемо

$$P(x)=(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)=9(x+1)^2(x^2+4x+1).$$

Оскільки тричлен x^2+4x+1 має корені $-2\pm\sqrt{3}$, то остаточно одержимо

$$P(x)=9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}).$$

Відповідь: $P(x)=9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{16x^4+1}{16x^3+4x}=\dfrac{7}{4}$.

Розв'язання. Оскільки $x\neq 0$, виконаємо очевидні перетворення

$$\frac{x^2\left((4x)^2+\dfrac{1}{x^2}\right)}{4x^2\left(4x+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{7}{4}\quad\Rightarrow\quad\frac{(4x)^2+\dfrac{1}{x^2}}{4x+\dfrac{1}{x}}=7.$$

Нехай $4x+\dfrac{1}{x}=t$, тоді $(4x)^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-8$, і рівняння набирає вигляду

$$t^2-7t-8=0,\ \text{звідки}\ t_1=8,\ t_2=-1.$$

Отже, маємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} 4x+\dfrac{1}{x}=8, \\ 4x+\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-8x+1=0, \\ 4x^2+x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}, \\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{8}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{8}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$.

Розв'язання. Розділимо обидві частини рівняння на x^2:

$$(x-\frac{9}{x}-6)^2=x-\frac{9}{x}-4.$$

Після заміни $x-\dfrac{9}{x}-6=y$ і очевидних перетворень прийдемо до квадратного рівняння $y^2-5y+4=0$, яке має корені $y_1=1$ і $y_2=4$.

Отже, задане рівняння рівносильне сукупності двох квадратних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-9=0, \\ x^2-8x-9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}, \\ x_3=-1,\ x_4=9. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2},\ x_3=-1,\ x_4=9.$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$.

Розв'язання. Нехай $(x^2-x+1)^2=y$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$y^2-10x^2y+9x^4=0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно змінної y:

$$y=5x^2\pm\sqrt{25x^4-9x^4},\ \ y_1=9x^2,\ y_2=x^2.$$

Отже, задане рівняння звелося до двох рівнянь

$$(x^2-x+1)^2=9x^2 \quad \text{і} \quad (x^2-x+1)^2=x^2,$$

які, у свою чергу, приводять до сукупності чотирьох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - x + 1 = 3x, \\ &x^2 - x + 1 = -3x, \\ &x^2 - x + 1 = x, \\ &x^2 - x + 1 = -x \end{aligned}\right., \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 - 4x + 1 = 0, \\ &x^2 + 2x + 1 = 0, \\ &x^2 - 2x + 1 = 0, \\ &x^2 + 1 = 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}, \\ &x_3 = x_4 = -1, \\ &x_5 = x_6 = 1, \\ &x_{7,8} = \pm i. \end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, $x_3 = x_4 = -1$, $x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = -i$, $x_8 = i$.

Приклад 7. Знайти найменше значення дробу $\dfrac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2}$.

Розв'язання. Позначимо $\dfrac{1}{x^2+1} = y$. Тоді заданий вираз можна звести до вигляду

$$\frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+1) + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + 1 = 5y^2 - y + 1 =$$

$$= 5\left(y^2 - \frac{1}{5}y\right) + 1 = 5\left(\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\right) + 1 = 5\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{19}{20}.$$

Звідси очевидно, що найменше значення дробу буде $\dfrac{19}{20}$.

Відповідь: $\dfrac{19}{20}$.

Приклад 8. Знайти найменше значення виразу

$$A = 5x^2 + 2y^2 - 4xy - 2x - 4y + 15.$$

Розв'язання. Виконаємо очевидні перетворення

$$A = (x-1)^2 + (2x-y)^2 + (y-2)^2 + 10.$$

Звідси випливає, що $A \geq 10$. Найменше значення $A = 10$ має місце при $x = 1$, $y = 2$, отже, число 10 і є найменшим значенням заданого виразу.

Відповідь: 10.

Приклад 9. Знайти множину значень функції $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

Розв'язання. Множина значень функції f збігається з множиною значень параметра a, для яких рівняння $f(x)=a$ має хоча б один розв'язок.

Рівняння $f(x)=a$ рівносильне рівнянню $(a-1)x^2-(a+2)x+a+2=0$. При $a\neq 1$ це рівняння квадратне і має принаймні один розв'язок за умови

$$(a+2)^2-4(a-1)(a+2)\geq 0,$$

звідки знаходимо $-2\leq a\leq 2$. Коли ж $a=1$, маємо лінійне рівняння з коренем $x=1$.

Отже, множина значень заданої функції збігається з проміжком $[-2;2]$.

Відповідь: $[-2;2]$.

Приклад 10. Знайти всі квадратні тричлени, на які ділиться двочлен x^4-1.

Розв'язання. Якщо числа x_1 і x_2 – корені тричлена x^2+px+q, а x^4-1 ділиться без остачі на x^2+px+q, то x_1 і x_2 також є коренями двочлена x^4-1. Корені двочлена x^4-1 дорівнюють числам 1, -1, i, $-i$, тож маємо

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i).$$

Із викладеного вище виходить, що шуканими тричленами x^2+px+q можуть бути тільки ті, які є добутками двох будь-яких співмножників, що стоять у правій частині останньої рівності. Таких пар співмножників буде рівно 6, а саме:

1. $(x-1)(x+1)=x^2-1$;
2. $(x-1)(x-i)=x^2-(1+i)x+i$;
3. $(x-1)(x+i)=x^2-(1-i)x-i$;
4. $(x-i)(x+i)=x^2+1$;
5. $(x+1)(x-i)=x^2+(1-i)x-i$;
6. $(x+1)(x+i)=x^2+(1+i)x+i$.

Відповідь: x^2-1; x^2+1; $x^2-(1+i)x+i$; $x^2+(1+i)x+i$; $x^2-(1-i)x-i$; $(x+1)(x-i)=x^2+(1-i)x-i$.

САМОСТІЙНА РОБОТА 1.1

1. Розв'язати рівняння:

а) $(x^2-2x-4)(x^2-2x-3)=2$; **б)** $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

в) $\dfrac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}=\dfrac{128}{15}$; **г)** $(3x^2+7x-2)^2+5x^2(3x^2+7x-24)=24x^4$.

2. Знайти область значень функції $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

Відповіді: 1а) $1\pm\sqrt{3}$; $1\pm\sqrt{6}$. **1б)** $2;\ 4;\ -1;\ -1/2$. **1в)** $3;\ 1/3;\ (3\pm 4i)/5$.

1г) $\dfrac{-7-\sqrt{137}}{22}$; $\dfrac{-7+\sqrt{137}}{22}$; $\dfrac{2}{7}$. **2)** $[1/2\,;3/2]$.

1.2. Корені, коефіцієнти квадратних тричленів. Теорема Вієта

Приклад 1. Спростити вираз

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3),$$

де a і b – корені рівняння $x^2-x+q=0$.

Розв'язання. За теремою Вієта корені даного рівняння задовольняють такі рівності:

$$a+b=1,\quad ab=q. \tag{1}$$

Після піднесення до квадрата і до куба обох частин першої з рівностей (1) дістанемо відповідно

$$a^2+b^2=1-2ab=1-2q,\quad a^3+b^3=1-3ab(a+b)=1-3q. \tag{2}$$

Отже, враховуючи (1) і (2), одержимо

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)=a^3+b^3+3ab(a^2+b^2)+$$

$$+6a^2b^2(a+b)=1-3q+3q(1-2q)+6q^2=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2. Не обчислюючи коренів x_1 і x_2 рівняння $2x^2-5x-4=0$, знайти значення виразу $x_1^5+x_2^5$.

Розв'язання. Враховуючи рівності

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4),$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

отримаємо

$$x_1^5+x_2^5=(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+x_2^4)=$$
$$=(x_1+x_2)\Big((x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2-x_1x_2(x_1^2+x_2^2)\Big)=$$
$$=(x_1+x_2)\left(\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-x_1^2x_2^2-x_1x_2\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)\right).$$

За теоремою Вієта $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$, $x_1\cdot x_2=-2$, отже, маємо

$$x_1^5+x_2^5=\frac{5}{2}\left(\left(\frac{25}{4}+4\right)^2-4+2\left(\frac{25}{4}+4\right)\right)=303\frac{29}{32}.$$

Відповідь: $303\dfrac{29}{32}$.

Приклад 3. Задано три числа a, b і c такі, що $a<b<c$. Довести, що рівняння

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

має два корені x_1 і x_2, причому $a<x_1<b<x_2<c$.

Доведення. Введемо позначення

$$P(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a).$$

Оскільки функція $P(x)$ на відрізку $[a;b]$ неперервна і, крім того, $P(a)=(a-b)(a-c)>0$, а $P(b)=(b-a)(b-c)<0$, то існує точка $x_1\in(a;b)$, у якій $P(x_1)=0$.

Аналогічно на відрізку $[b;c]$ існує точка x_2, у якій $P(x_2)=0$, бо $P(x)$ – неперервна і $P(b)=(b-a)(b-c)<0$, а $P(c)=(c-a)(c-b)>0$.

Таким чином, задане рівняння має два корені x_1 і x_2, які задовольняють нерівність $a<x_1<b<x_2<c$, що й треба було довести.

Приклад 4. Довести, що рівняння $x^2+px+q=0$ не може мати раціональних коренів, коли p і q – непарні числа.

Доведення. Нехай раціональне число $\dfrac{m}{n}$ є коренем даного рівняння. Дріб $\dfrac{m}{n}$ вважаємо нескорочуваним, тобто числа m і n не мають спільних дільників.

Підставивши $\dfrac{m}{n}$ замість x в задане рівняння, отримаємо

$$m^2 + pmn + qn^2 = 0. \qquad (1)$$

Із цієї рівності виходить, що q ділиться на m, тому що $m(m+pn) = -qn^2$.

Оскільки за умовою $q-$ непарне, то m має бути теж непарним. Непарним числом є і число n, бо інакше із попередньої рівності вийшло б, що сума парного і непарного чисел дорівнює нулю, що неможливо. Але при непарних m, n, p, q будуть непарними всі три доданки в рівності (1), отже, їх сума не може дорівнювати нулю. Таким чином, приходимо до висновку, що задане рівняння не має раціональних коренів.

Приклад 5. Знайти всі пари чисел a і b, при яких всі дійсні корені рівняння $x^2 - ax + a = 0$ є також коренями рівняння $x^2 + b^2x - 8b = 0$.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант першого рівняння:

$$D = a^2 - 4a = a(a-4).$$

Очевидно, що при $a \in (0;4)$ $D < 0$, тому множина розв'язків першого рівняння буде порожньою, отже, її можна вважати частиною множини розв'язків другого рівняння незалежно від значення параметра b.

Якщо $a \in (-\infty;0) \cup (4;\infty)$, то $D > 0$, і перше рівняння матиме два різних корені. Вони будуть також і коренями другого рівняння тільки тоді, коли $-a = b^2$ і $a = -8b$, звідки знаходимо $a = -64$, $b = 8$.

У випадках $a = 0$ і $a = 4$ отримаємо $b = 0$ і $b = 2 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь: $a = 0$, $b = 0$; $a = 4$, $b = 2 \pm \sqrt{2}$; $a = -64$, $b = 8$; $a \in (0;4)$, $b \in R$.

Приклад 6. Дійсний корінь рівняння $ax^2 + bx + b = 0$ помножили на дійсний корінь рівняння $ax^2 + ax + b = 0$ і в добутку одержали 1. Знайдіть ці корені.

Розв'язання. Нехай p – корінь першого рівняння, а q – корінь другого рівняння. Тоді маємо:

1) $ap^2+bp+b=0$, звідки $\dfrac{p^2}{p+1}=-\dfrac{b}{a}$;

2) $aq^2+aq+b=0$, отже, $q^2+q=-\dfrac{b}{a}$.

Таким чином, $q^2+q=\dfrac{p^2}{p+1}$. Оскільки за умовою $pq=1$, одержимо

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{p^2}{p+1} \;\Rightarrow\; \frac{p^4-(p+1)^2}{p^2(p+1)}=0 \;\Rightarrow\; (p^2-p-1)(p^2+p+1)=0.$$

Рівняння $p^2-p-1=0$ має корені $p_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, тоді $q_1=\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ і $q_2=\dfrac{1}{p_2}=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}=\dfrac{2(1+\sqrt{5})}{1-5}=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Рівняння $p^2+p+1=0$ дійсних коренів не має.

Відповідь: $p_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; $p_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $q_2=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Приклад 7.1. Знайти необхідні й достатні умови того, що квадратні рівняння

$$x^2+p_1x+q_1=0 \;\text{ і }\; x^2+p_2x+q_2=0 \tag{1}$$

матимуть спільний корінь.

Розв'язання. Нехай деяке число x задовольняє обидва рівняння (1):

$$\begin{cases} x^2+p_1x+q_1=0, \\ x^2+p_2x+q_2=0. \end{cases}$$

Необхідні й достатні умови знайдемо, коли виключимо x із цих рівнянь. Зробити це можна, наприклад, так: якщо $p_1\neq p_2$, то рівняння можна розв'язати відносно x і x^2:

$$x=-\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1}; \qquad x^2=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_2-p_1}. \tag{2}$$

Отже, має виконуватися рівність

$$\frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_2 - p_1} = \left(\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\right)^2, \qquad (3)$$

яка зводиться до вигляду

$$(p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) + (q_2 - q_1)^2 = 0. \qquad (4)$$

Коли ж $p_1 = p_2$, то, віднімаючи від першого рівняння (1) друге, отримаємо рівність вільних членів, тобто $q_2 - q_1 = 0$. Отже, рівність (4) виконується і в цьому випадку.

Таким чином, співвідношення (4) – необхідна умова того, що рівняння (1) мають спільний корінь.

Ця умова є і достатньою. Дійсно, якщо $p_1 \neq p_2$, то з (4) випливає (3), звідки одержимо, що

$$x = \frac{q_1 - q_2}{p_2 - p_1} \qquad (5)$$

є спільним коренем рівнянь (2), а значить, і рівнянь (1). Коли ж $p_1 = p_2$, то із співвідношення (4) отримуємо рівність $q_2 - q_1 = 0$. В цьому випадку рівняння (1) тотожні.

Коли коефіцієнти p_1, p_2, q_1, q_2 заданих рівнянь дійсні та задовольняють умову (4), то при $p_1 \neq p_2$ спільний корінь рівнянь (1), який визначається співвідношенням (5), дійсний. При $p_1 = p_2$ рівняння (1) мають одні й ті самі корені, але не обов'язково дійсні.

Приклад 7.2. Довести, що коли квадратні рівняння (1) мають спільний корінь, але не збігаються тотожно і при цьому p_1, p_2, q_1 і q_2 – раціональні числа, то корені цих рівнянь раціональні.

Розв'язання. Якщо p_1, p_2, q_1, q_2 – раціональні числа і рівняння (1) мають спільний корінь x_1, але вони не тотожні, то $p_1 \neq p_2$ і x_1 визначається виразом (5), тому є раціональним. Корені x_2 і x_3 рівнянь (1) також раціональні, оскільки $x_2 = -p_1 - x_1$, $x_3 = -p_2 - x_1$. Твердження доведено.

Приклад 8. Нехай a, b, c – різні числа, причому $c \neq 0$. Довести, що коли рівняння $x^2 + ax + bc = 0$ та $x^2 + bx + ca = 0$ мають один спільний корінь, то інші корені цих рівнянь задовольняють рівняння $x^2 + cx + ab = 0$.

Доведення. Нехай x_0 – спільний корінь, x_1 і x_2 – інші корені першого та другого рівнянь, причому $x_1 \neq x_2$. Тоді

$$x_0{}^2 + ax_0 + bc = 0 \quad \text{і} \quad x_0{}^2 + bx_0 + ca = 0,$$

звідки отримуємо $(a-b)x_0 + c(b-a) = 0$, або $(a-b)(x_0 - c) = 0$. Але $a \neq b$, отже, $x_0 = c$. Крім того, $x_0 x_1 = bc$, $x_0 x_2 = ac$, тобто $x_1 = b$, $x_2 = a$, оскільки $c \neq 0$.

За умовою x_0, x_1 та x_0, x_2 – корені першого та другого рівнянь відповідно. Тому $x_0 + x_1 = -a$, $x_0 + x_2 = -b$, звідки маємо $2x_0 + x_1 + x_2 = -a - b$. Враховуючи, що $x_0 = c$, $x_1 + x_2 = a + b$, одержимо $2c + a + b = -a - b$ або $c = -a - b$.

Таким чином, $x_1 + x_2 = -c$, $x_1 \cdot x_2 = ab$, а це означає, що x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 + cx + ab = 0$, що й потрібно було довести.

Приклад 9. Дано два рівняння $ax^2 + x + 1 = 0$ і $x^2 + ax + 1 = 0$. Знайти всі значення *a*, при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

Розв'язання. Якщо x_0 – спільний корінь заданих рівнянь, то

$$ax_0{}^2 + x_0 + 1 = 0 \quad \text{і} \quad x_0{}^2 + ax_0 + 1 = 0,$$

звідки отримуємо

$$(a-1)x_0{}^2 = (a-1)x_0.$$

При $a = 1$ обидва рівняння однакові. Якщо $a \neq 1$, то $x_0 = 1$, бо $x_0 = 0$ не задовольняє дані рівняння. З першого рівняння $a + 2 = 0$, $a = -2$. Отже, шукані значення $a = -2$, $a = 1$.

Відповідь: $a = -2$, $a = 1$.

Приклад 10. Рівняння $x^2 + ax + b = 0$ і $x^2 + px + q = 0$ мають спільний корінь. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є інші корені цих рівнянь.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $p \neq a$. Нехай x_1, x_2 – корені першого рівняння; x_1, x_3 – корені другого рівняння. Тоді, скориставшись теоремою Вієта та умовою задачі, отримаємо

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad (1) \qquad\qquad x_1 x_2 = b, \qquad (2)$$

$$x_1 + x_3 = -p, \qquad (3) \qquad\qquad x_1 x_3 = q, \qquad (4)$$

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0, \qquad (5) \qquad\qquad x_1^2 + px_1 + q = 0. \qquad (6)$$

Щоб знайти x_1, віднімемо рівність (6) від рівності (5). Матимемо:

$$x_1 = \frac{b-q}{p-a}.$$

Складаючи (1) і (3) та перемножуючи (2) і (4), дістанемо суму коренів

$$x_2 + x_3 = -(a+p) - 2x_1 = -(a+p) - \frac{2(b-q)}{p-a}, \quad x_1^2 x_2 x_3 = bq.$$

Якщо $b \neq q$, то й $x_1 \neq 0$. Тоді добуток коренів $x_2 x_3 = \dfrac{bq}{x_1^2} = \dfrac{(p-a)^2 bq}{(b-q)^2}$.

Отже, за умови $p \neq a$, $b \neq q$ квадратне рівняння з коренями x_2 і x_3 матиме вигляд

$$x^2 + \left(a + p + \frac{2(b-q)}{p-a}\right)x + \left(\frac{p-a}{b-q}\right)^2 bq = 0.$$

Якщо $b = q$, то $x_1 = 0$. Тоді $b = 0$, $q = 0$ і задані рівняння набувають вигляду $x^2 + ax = 0$ і $x^2 + px = 0$. Звідси випливає, що $x_2 = -a$, $x_3 = -p$. Тоді квадратне рівняння з коренями x_2 і x_3 матиме вигляд

$$x^2 + (a+p)x + ap = 0.$$

Коли $p = a$ і задані рівняння мають спільний корінь, то й $q = b$, тобто маємо тільки одне квадратне рівняння. В цьому випадку шукані рівняння матимуть такий вигляд: $(x - x_1)^2 = 0$, $(x - x_2)^2 = 0$.

Відповідь: $x^2 + \left(a + p + \dfrac{2(b-q)}{p-a}\right)x + \left(\dfrac{p-a}{b-q}\right)^2 bq = 0$, якщо $p \neq a$, $b \neq q$;

$$x^2 + (a+p)x + ap = 0, \ b = q; \ (x - x_1)^2 = 0, \ (x - x_2)^2 = 0, \ p = a.$$

Приклад 11. Довести, що коли $2a + 3b + 6c = 0$, то квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має принаймні один корінь на інтервалі $(0;1)$.

Доведення. Враховуючи рівність $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$, функція $f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx$ на кінцях відрізка $[0;1]$ набуває рівних значень $f(0)=f(1)=0$. Тоді за теоремою Ролля існує точка $x_0 \in (0;1)$, для якої

$$f'(x_0)=ax_0{}^2+bx_0+c=0,$$

що і треба було довести.

Приклад 12. Довести, що для будь-яких дійсних *a* і *b*, не рівних одночасно нулю, рівняння $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1$ має дійсні корені.

Доведення. Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$x^2-x-a^2x+a^2-b^2x=0, \quad \text{або} \quad x^2-(1+a^2+b^2)x+a^2=0. \qquad (1)$$

Дослідимо дискримінант цього рівняння $D=(1+a^2+b^2)^2-4a^2=$

$$=(1+a^2+b^2+2a)(1+a^2+b^2-2a)=(b^2+(1+a)^2)(b^2+(1-a)^2)\geq 0.$$

А це й означає, що квадратне рівняння (1) при будь-яких *a* і *b* має дійсні корені. Розглянемо три випадки:

1) $a\neq 0$, $b=0$ – рівняння набуває вигляду $\frac{a^2}{x}=1$, звідки $x=a^2$ – його корінь;

2) $a=0$, $b\neq 0$ – тоді маємо $\frac{b^2}{x-1}=1$, звідки дістаємо $x=1+b^2$;

3) $a\neq 0$, $b\neq 0$ – у цьому випадку задане рівняння зводиться до квадратного рівняння (1), дискримінант якого $D\geq 0$, тому корені дійсні, різні та не можуть одночасно набувати недопустимих значень, бо коли $x_1=0$, $x_2=1$, то одержимо $a^2=0$ і $b^2=0$.

Отже, рівняння (1) має різні дійсні корені при будь-яких допустимих *a* і *b*, що й треба було довести.

Приклад 13. Довести, що коли a , b , c – дійсні числа, то рівняння $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ має дійсні корені.

Доведення. Оскільки $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$,

$$(x-b)(x-c)=x^2-(b+c)x+bc,$$

$$(x-c)(x-a)=x^2-(c+a)x+ca,$$

то задане рівняння можна записати у вигляді

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0.$$

Покажемо, що дискримінант цього рівняння $D \geq 0$. Справді, маємо $\frac{D}{4} = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 3ab - 3bc - 3ca =$
$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - ab - bc - ca \geq$
$\geq ab + bc + ca - ab - bc - ca = 0$.

Отже, рівняння має дійсні корені.

Приклад 14. Рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q – будь-які цілі числа, має раціональні корені. Довести, що ці корені – обов'язково цілі числа.

Доведення. Нехай раціональний корінь заданого рівняння $x = \frac{m}{n}$, де m і n – цілі взаємно прості числа. Тоді $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + p\left(\frac{m}{n}\right) + q = 0$, або $m(m + pn) = -qn^2$. Ліва і права частини останньої рівності – цілі числа, причому права частина кратна n, а ліва може бути кратною n лише при $n = 1$, оскільки m за припущенням не ділиться на n, а сума $(m + pn)$ також не ділиться на n, бо один з доданків кратний n, а інший – ні. Отже, корінь рівняння $x = m$ – ціле число, що й треба було довести.

Приклад 15. Довести, що коли x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + px - 1 = 0$, де p – непарне число, то при будь-якому цілому $n \geq 0$ числа $x_1^n + x_2^n$ і $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ – цілі та взаємно прості.

Доведення. Доведемо твердження задачі методом математичної індукції. Оскільки за умовою p – непарне число, то при $n = 0$ маємо: числа $x_1^0 + x_2^0 = 2$ і $x_1 + x_2 = -p$ є цілими і взаємно простими, тобто твердження справджується.

Припустимо, що при деякому цілому $n > 0$ числа $x_1^n + x_2^n$ і $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ – цілі та взаємно прості. Доведемо, що тоді число $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ – ціле і взаємно просте з числом $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$. Дійсно,

$$(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n),$$

звідки, враховуючи, що $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = -1$, одержимо

$$x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = -p(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + (x_1^n + x_2^n).$$

Отже, число $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$, як сума двох цілих чисел, є цілим числом. Кожен дільник чисел $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ і $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ є дільником числа $x_1^n + x_2^n$, а тим самим спільним дільником взаємно простих чисел $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ і $x_1^n + x_2^n$.

Таким чином, числа $x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ і $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ – взаємно прості. Звідси за індукцією виходить, що твердження задачі справджується при будь-якому цілому $n \geq 0$.

Приклад 16. Довести, що принаймні одне з рівнянь $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ має дійсні корені, якщо p_1, p_2, q_1, q_2 – дійсні числа, які задовольняють рівність $p_1 \cdot p_2 = 2(q_1 + q_2)$.

Доведення. Перший спосіб. Якщо $D_1 = p_1^2 - 4q_1$, $D_2 = p_2^2 - 4q_2$ – дискримінанти квадратних рівнянь, то

$$D_1 + D_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0.$$

Оскільки сума $D_1 + D_2$ невід'ємна, то принаймні одне з чисел D_1 чи D_2 невід'ємне. Отже, хоча б один з квадратних тричленів має дійсні корені.

Другий спосіб. Нехай обидва рівняння не мають дійсних коренів. Тоді

$$p_1^2 - 4q_1 < 0 \text{ і } p_2^2 - 4q_2 < 0,$$

звідки

$$p_1^2 + p_2^2 < 4(q_1 + q_2). \tag{1}$$

Але $p_1^2 + p_2^2 > 2p_1 p_2$, тому з нерівності (1) матимемо

$$2(q_1 + q_2) > p_1 p_2,$$

що суперечить умові задачі. Отже, припущення неправильне, що й доводить правильність заданого твердження.

Приклад 17. Про цілі числа a, b, c відомо, що $a > 0$, а тричлен $ax^2 + bx + c$ має два різних корені на інтервалі $(0;1)$. Довести, що $a \geq 5$. Знайти хоча б одну пару коефіцієнтів b і c при $a = 5$.

Доведення. За умовою задачі тричлен $y(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ має два різних корені x_1 і x_2 (будемо вважати, що $0 < x_1 < x_2 < 1$). В цьому випадку $b^2 - 4ac > 0$, а згідно з теоремою Вієта $0 < \frac{c}{a} < 1$, $\frac{b}{a} < 0$, тобто $a > c > 0$, $b < 0$. Оскільки $y(1) = a + b + c$, то $a + c > -b$.

Після піднесення до квадрата обох частин нерівності одержимо $a^2 + 2ac + c^2 > b^2$, або $(a - c)^2 > b^2 - 4ac > 0$, звідки випливає, що $a - c \geq 2$. Якщо припустити, що $a \leq 4$, то можливі лише три варіанти для цілих коефіцієнтів *a*, *c*:

$$a_1 = 4,\ c_1 = 2; \qquad a_2 = 3,\ c_2 = 1; \qquad a_3 = 4,\ c_3 = 1.$$

При цьому коефіцієнт *b* має задовольняти відповідно одну з трьох умов:

$$0 < b_1^2 - 32 < 4, \qquad 0 < b_2^2 - 12 < 4 \qquad \text{чи} \qquad 0 < b_3^2 - 16 < 9.$$

Але жодне число не задовольняє ні одну з цих трьох нерівностей. Отже, $a \geq 5$, що й треба було довести.

При $a = 5$ матимемо рівняння $5x^2 - 5x + 1 = 0$, корені якого $x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ і $x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$ належать інтервалу $(0;1)$.

Відповідь: при $a = 5$ коефіцієнти $b = 5$, $c = 1$.

Приклад 18. Довести, що коли рівняння $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$ має корінь, більший за 1, то рівняння $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ матиме принаймні один дійсний корінь.

Доведення. Нехай $x = t^2$ $(t > 1)$ – корінь рівняння $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$. Тоді це рівняння набуває вигляду

$$at^4 + ct^2 + e = bt^2 + d. \tag{1}$$

Позначимо $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Тоді, враховуючи (1), виходить, що числа

$$f(t) = (at^4 + ct^2 + e) + t(bt^2 + d) \quad \text{і} \quad f(-t) = (at^4 + ct^2 + e) - t(bt^2 + d)$$

мають різні знаки, оскільки $t > 1$. Знак виразу визначається другим доданком, більшим за модулем. Тому на відрізку $[-t;t]$ згідно з першою теоремою Больцано – Коші рівняння $f(x) = 0$ матиме корінь, що й треба було довести.

Приклад 19. Нехай p_1, p_2, q_1, q_2 – дійсні числа, які задовольняють рівність $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Тоді принаймні одне з рівнянь $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ або $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ має дійсні корені. Довести це твердження.

Доведення. Позначимо дискримінанти квадратних тричленів відповідно $D_1 = p_1^2 - 4q_1$ і $D_2 = p_2^2 - 4q_2$.

Скориставшись умовою задачі, отримаємо

$$D_1 + D_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 = (p_1 - p_2)^2 \ge 0.$$

Звідси випливає, що принаймні одне з чисел D_1 чи D_2 невід'ємне, бо сума $D_1 + D_2$ невід'ємна. Отже, хоча б один з квадратних тричленів має дійсні корені.

Приклад 20. Коефіцієнти двох квадратних тричленів $a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1$ і $a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2$ задовольняють умову $a_1 a_2 - 2b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$. Відомо, що один з цих квадратних тричленів не має дійсних коренів. Довести, що тоді другий тричлен має два дійсних різних корені.

Розв'язання. Нехай тричлен $a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1$ не має дійсних коренів. Це означає, що

$$b_1^2 \le a_1 c_1. \tag{1}$$

Зазначимо, що добуток $a_1 c_1$ повинен бути додатним. Із умови для коефіцієнтів квадратних тричленів маємо

$$4b_1^2 b_2^2 = a_1^2 a_2^2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 + c_1^2 c_2^2.$$

Звідси, враховуючи (1), отримаємо

$$0 \le (a_1 a_2 - c_1 c_2)^2 = 4b_1^2 b_2^2 - 4a_1 a_2 c_1 c_2 <$$

$$< 4a_1 c_1 b_2^2 - 4a_1 a_2 c_1 c_2 = 4a_1 c_1 (b_2^2 - a_2 c_2).$$

Отримали $b_2^2 - a_2 c_2 > 0$, а це означає, що тричлен $a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2$ має два дійсних різних корені.

Приклад 21. Нехай $P(x) = 2x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ і виконується нерівність $a^2 + c^2 + 4d \le 2ac + 4b$ ($a,\ b,\ c,\ d$ – дійсні числа). Довести, що коли $P(x)$ має дійсні корені, то $Q(x)$ також має дійсні корені.

Доведення. Припустимо що $P(x)$ має дійсні корені, тоді $a^2 - 8b \ge 0$. Доведемо, що система нерівностей

$$\begin{cases} a^2 - 8b \ge 0, \\ a^2 + c^2 + 4d \le 2ac + 4b \end{cases}$$

рівносильна нерівності $D = c^2 - 4d \ge 0$, де D – дискримінант тричлена $Q(x)$.

Помножимо другу нерівність на -2 і додамо до першої, отримаємо

$$-a^2 + 4ac \ge 2c^2 + 8d \ \Rightarrow \ -a^2 + 4ac - 4c^2 \ge -2c^2 + 8d \ \Rightarrow \ 2(c^2 - 4d) \ge \frac{(a-c)^2}{2}.$$

Звідси маємо, що $c^2 - 4d \ge 0$, отже, $Q(x)$ має дійсні корені.

Приклад 22. Визначити, яку умову мають задовольняти коефіцієнти квадратних тричленів $x^2 + mx + n = 0$ і $x^2 + px + q = 0$, аби між коренями кожного з них уміщувався корінь іншого.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – корені тричлена $x^2 + mx + n = 0$, а x_3 і x_4 – корені тричлена $x^2 + px + q = 0$.

Припустимо, що всі корені дійсні й пари коренів розмежовують одна одну, тобто одне з чисел x_3, x_4 лежить усередині інтервала $(x_1; x_2)$, а інше – поза цим інтервалом. Тоді можливий один з випадків: або $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, або $x_1 < x_4 < x_2 < x_3$. В обох випадках

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) < 0. \qquad (1)$$

Оскільки $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = n$, то

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_1 x_2 = x_3^2 + m x_3 + n,$$

$$(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) = x_4^2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_1 x_2 = x_4^2 + m x_4 + n,$$

і нерівність (1) набуває вигляду

$$(x_3^2 + m x_3 + n)(x_4^2 + m x_4 + n) < 0. \qquad (2)$$

Після розкриття дужок, враховуючи, що

$$x_3 + x_4 = -p\,, \quad x_3 x_4 = q\,, \quad {x_3}^2 + {x_4}^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = p^2 - 2q\,,$$

отримаємо

$$({x_3}^2 + mx_3 + n)({x_4}^2 + mx_4 + n) = {x_3}^2{x_4}^2 + mx_3x_4(x_3 + x_4) +$$

$$+m^2x_3x_4 + n({x_3}^2 + {x_4}^2) + mn(x_3 + x_4) + n^2 =$$

$$= q^2 - mpq + m^2q + n(p^2 - 2q) - mnp + n^2 =$$

$$= (n-q)^2 + mq(m-p) + np(p-m) = (n-q)^2 + (m-p)(mq - np)\,.$$

Таким чином, після перетворення нерівність (2) має вигляд

$$(n-q)^2 + (m-p)(mq-np) < 0\,. \qquad (3)$$

Отже, доведено твердження: якщо пари коренів квадратних тричленів $x^2 + mx + n = 0$ і $x^2 + px + q = 0$ розмежовують одна одну, то коефіцієнти цих тричленів задовольняють умову (3).

Доведемо тепер, що справедливе й обернене твердження: якщо виконується умова (3), то квадратні тричлени $x^2 + mx + n = 0$ і $x^2 + px + q = 0$ мають дійсні корені, причому корені одного тричлена розмежовують корені іншого.

Позначимо $f(x) = x^2 + mx + n$ і перепишемо нерівність (2) у вигляді

$$f(x_3)f(x_4) < 0\,. \qquad (4)$$

Припустимо, що корені другого тричлена x_3 і x_4 – комплексні спряжені, тобто $x_3 = \alpha + i\beta$, $x_4 = \alpha - i\beta$. Обчислимо значення функції $f(x)$ у точках x_3 і x_4:

$$f(x_3) = (\alpha + i\beta)^2 + m(\alpha + i\beta) + n = \alpha^2 - \beta^2 + m\alpha + n + i(2\alpha\beta + m\beta)\,,$$

$$f(x_4) = (\alpha - i\beta)^2 + m(\alpha - i\beta) + n = \alpha^2 - \beta^2 + m\alpha + n - i(2\alpha\beta + m\beta)\,.$$

Звідси виходить, що значення $f(x_3)$ і $f(x_4)$ – комплексні спряжені. Добуток таких чисел має бути дійсним невід'ємним числом, тобто

$$f(x_3)f(x_4) > 0\,. \qquad (5)$$

Таким чином, припущення, що корені x_3 і x_4 – комплексні, приводить до суперечності. Отже, x_3 і x_4 – дійсні числа, а внаслідок (4) і $f(x_3)$ і $f(x_4)$ – теж дійсні числа протилежних знаків. Але тоді тричлен $f(x)=x^2+mx+n$ має дійсні корені x_1 і x_2, один з яких лежить між числами x_3 і x_4, а інший – поза інтервалом $(x_3;x_4)$, що й треба було довести.

Відповідь: $(n-q)^2+(m-p)(mq-np)<0$.

Приклад 23. Довести справедливість рівності

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2,$$

якщо числа α і β – корені квадратного тричлена x^2+px+1; γ і δ – корені квадратного тричлена x^2+qx+1.

Доведення. Згідно з теоремою Вієта отримаємо такі рівності:

$$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\cdot\beta=1;\quad \gamma+\delta=-q,\ \gamma\cdot\delta=1.$$

Звідси виходить, що

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\left(\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\right)\left(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2\right)=$$

$$=\left(1+p\gamma+\gamma^2\right)\left(1-p\delta+\delta^2\right)=\left(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2\right)+p\left(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2\right)-$$

$$-p^2\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2+p\left((\gamma-\delta)-\gamma\delta(\gamma-\delta)\right)-p^2=(\gamma+\delta)^2+$$

$$+p(\gamma-\delta)(1-\gamma\delta)-p^2=q^2-p^2,$$ що й треба було довести.

Самостійна робота 1.2

1. Визначити, чи може квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант $D=23$.

2. Відомо, що рівняння $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів і $a+b+c<0$. Визначити знак коефіцієнта c.

3. Знайти корені рівняння $y=x^2+px+q$, якщо вони цілі та $p+q=198$.

4. Довести, що рівняння $x^2 + 2px + 2q = 0$, де p і q – цілі непарні числа, не може мати раціональних коренів.

5. Довести, що рівняння $x^2 + (2m+1)x + (2n+1) = 0$, де m і n – цілі числа, не має раціональних коренів.

6. Квадратні рівняння $x^2 + ax + b = 0$ і $x^2 + cx + d = 0$ мають додатні дискримінанти, причому $(b-d)^2 - (a-c)(bc-ad) < 0$. Довести, що між коренями кожного з рівнянь міститься рівно один корінь іншого рівняння.

7. Довести, що коли квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (c \neq 0)$$

має раціональний корінь, то принаймні одне з чисел a, b або c – парне.

Відповіді: **1.** Ні; **2.** $c < 0$; **3.** $x_1 = 2, x_2 = 200$; $x_1 = 0$, $x_2 = -198$.

1.3. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Приклад 1. Дослідити корені рівняння $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ залежно від допустимих дійсних значень параметра a.

Розв'язання. У цьому рівнянні параметр a може бути будь-яким дійсним числом. Дискримінант заданого рівняння

$$D = 4a^2 - 4(a-2)(2a-3) = 4(-a^2 + 7a - 6) = -4(a-1)(a-6).$$

Скориставшись формулами Вієта, введемо величини

$$P = x_1 x_2 = \frac{2a-3}{a-2} = \frac{2(a-3/2)}{a-2}, \quad S = x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2} \ \ (a \neq 2).$$

Для проведення досліджень визначимо на числовій осі Oa інтервали знакосталості величин D, P і S (рис. 1).

Проаналізуємо отримані результати на кожному з інтервалів $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;3/2)$, $(3/2;2)$, $(2;6)$, $(6;\infty)$ та на їх межах.

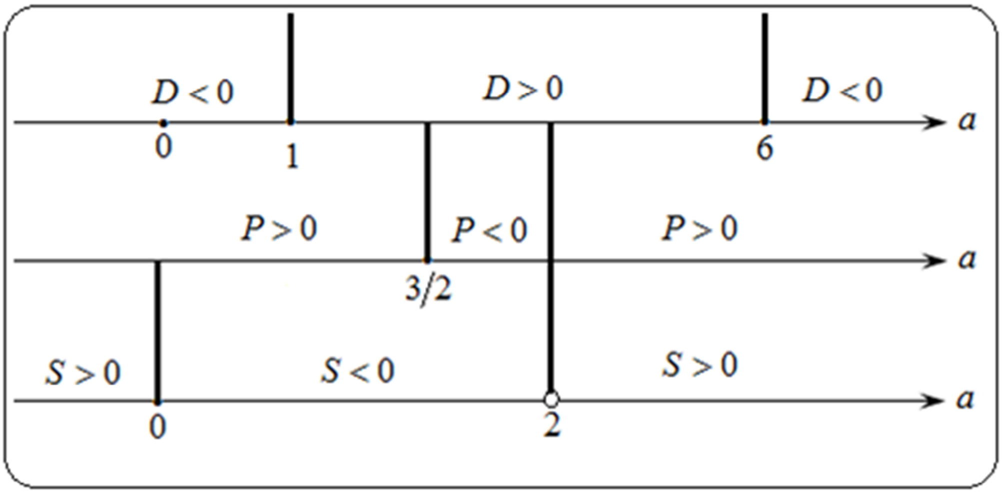

Рис. 1

При $a \in (-\infty;0)$ маємо $D<0$, $S>0$, отже, корені квадратного рівняння комплексні спряжені $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, причому $\alpha > 0$.

У точці $a=0$ величина $D<0$, а $S=0$, тому корені суто уявні $x_{1,2} = \pm i\beta$.

На інтервалі $a \in (0;1)$ $D<0$, $S<0$, тобто корені комплексні спряжені $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, причому $\alpha < 0$.

У точці $a=1$ маємо $D=0$, $S<0$, $P>0$, отже, корені від'ємні, рівні між собою.

При $a \in (1;3/2)$ дискримінант $D>0$, а величини $S<0$, $P>0$, тому корені дійсні різні і обидва від'ємні.

У точці $a=3/2$ $D>0$, а величини $S<0$, $P=0$, отже, корені дійсні, один дорівнює нулю, а другий від'ємний.

На інтервалі $a \in (3/2;2)$ дискримінант $D>0$, $P<0$(корені різних знаків), $S<0$ (більший за абсолютною величиною корінь від'ємний).

При $a=2$ величини P і S не мають сенсу, а рівняння перетворюється на лінійне $-4x+1=0$, воно має єдиний корінь $x=1/4$.

Коли $a \in (2;6)$, $D > 0$, $S > 0$, $P > 0$, отже, корені дійсні, різні, обидва додатні.

У точці $a = 6$ маємо $D = 0$, $S > 0$, $P > 0$, тобто корені рівні між собою, додатні.

На інтервалі $a \in (6;\infty)$, як і при $a \in (-\infty;0)$, дискримінант $D < 0$, а $S > 0$, отже, корені комплексні спряжені $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, причому $\alpha > 0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^4 - 2x^2 + 4(a+1)x - a(a+2) = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння є квадратним відносно параметра a:

$$a^2 - 2(2x-1)a - (x^4 - 2x^2 + 4x) = 0,$$

його корені $a_{1,2} = (2x-1) \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + (x^4 - 2x^2 + 4x)} = (2x-1) \pm (x^2 + 1)$.

Таким чином, отримане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$a = x^2 + 2x \quad \text{і} \quad a = -x^2 + 2x - 2.$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - a = 0, \\ x^2 - 2x + a + 2 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+a} \ \ (a \ge -1), \\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{-1-a} \ \ (a \le -1). \end{array}\right.$$

Відповідь: $1 \pm \sqrt{-1-a}$ при $a < -1$; ± 1 при $a = -1$; $-1 \pm \sqrt{1+a}$ при $a > -1$.

Приклад 3. При яких значеннях a рівняння $\left| x^2 - 2ax \right| = 1$ має три різних кореня?

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2ax - 1 = 0, \\ x^2 - 2ax + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Оскільки дискримінант першого рівняння додатний $(4a^2 + 4 > 0)$, то воно має два різних дійсних кореня при будь-якому $a \in R$.

Задане рівняння матиме три дійсних кореня, коли дискримінант другого рівняння буде дорівнювати нулю, тобто $4a^2 - 4 = 0$. Звідси маємо $a = \pm 1$.

Відповідь: $a_1 = 1$; $a_2 = -1$.

Приклад 4. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

має рівно два корені.

Розв'язання. Після очевидних перетворень отримаємо рівносильне рівняння

$$\left(x^2 - 6|x| - a + 6\right)^2 + 1 = \cos\frac{18\pi}{a}.$$

Оскільки ліва частина рівняння не менша за 1, а права – не більша за 1, то рівність можлива тільки за умови, що і ліва, і права частини рівняння дорівнюють 1. Таким чином, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ \cos\dfrac{18\pi}{a} = 1. \end{cases}$$

Із графіка функції $f(x) = x^2 - 6|x| + 6$ (рис. 2) видно, що рівняння $f(x) = a$, де $\dfrac{18}{a} = 2n$, тобто $a = \dfrac{9}{n}$, $n \in Z$, матиме рівно два розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a} = n, \\ \left[\begin{array}{l} a = -3, \\ a > 6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9}{n}, \\ \left[\begin{array}{l} 9/n = -3, \\ 9/n > 6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} n = -3, & n = 1 \\ a = -3, & a = 9. \end{array}$$

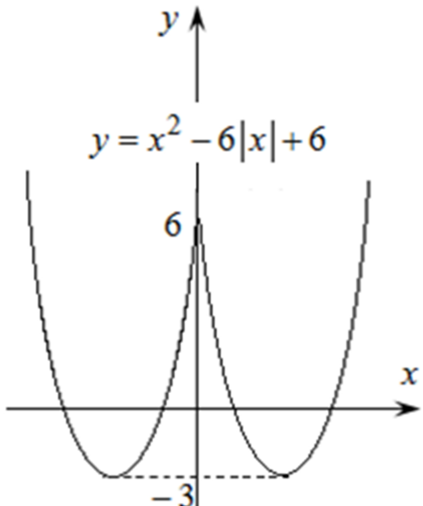

Рис. 2

Відповідь: -3; 9.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a чотири корені рівняння $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ є послідовними членами арифметичної прогресії ?

Розв'язання. Чотири корені біквадратного рівняння утворюють у деякому порядку арифметичну прогресію, коли вони дорівнюють $\pm z$ та $\pm 3z$ для деякого числа z. Отже, квадратне рівняння

$$y^2+(a-5)y+(a+2)^2=0$$

матиме корені z^2 і $9z^2$. Застосувавши теорему Вієта, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} z^2+9z^2=5-a, \\ z^2\cdot 9z^2=(a+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\dfrac{5-a}{10}, \\ 9\left(\dfrac{5-a}{10}\right)^2=(a+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-a\ge 0, \\ 9(5-a)^2=100(a+2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\le 5, \\ (a+5)(a+5/13)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-5, \\ a_2=-5/13. \end{cases}$$

Відповідь: $a_1=-5;\ a_2=-5/13.$

Приклад 6. Визначити, при яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $ax^2+x+1=0$ більший за 2, а інший – менший за 2.

Розв'язання. Нехай $f(x)=ax^2+bx+c$, x_1 і x_2 – корені рівняння $f(x)=0$, а число M таке, що $x_1<M<x_2$. Тоді, якщо $a>0$, то $f(M)<0$, а коли $a<0$, то $f(M)>0$ (рис. 3), тобто завжди $a\cdot f(M)<0$.

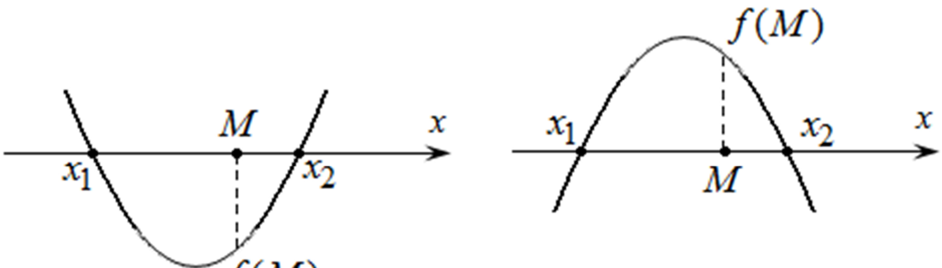

Рис. 3

У нашому випадку для $f(x)=ax^2+x+1$ маємо $a\cdot f(2)<0$, тобто $a(4a+3)<0$, звідки одержимо $a\in(-3/4;0)$.

Відповідь: $a\in(-3/4;0)$.

Приклад 7. Визначити, при яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ лежать в інтервалі $(0;3)$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, x_1 і x_2 – корені рівняння $f(x) = 0$. Обидва корені x_1 і x_2 квадратного тричлена лежать на інтервалі $(M;N)$ (рис. 4) тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 \in (M;N), \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 \in (M;N), \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

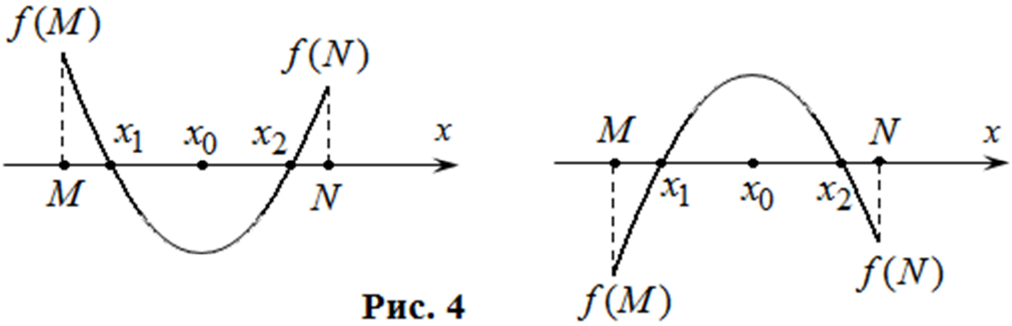

Рис. 4

Оскільки за умовою коефіцієнт при x^2 додатний, скористаємося першою системою

$$\begin{cases} a^2 - 8 \ge 0, \\ 0 < \dfrac{a}{2} < 3, \\ 9 - 3a + 2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| \ge 2\sqrt{2}, \\ 0 < a < 6, \\ a < \dfrac{11}{3}, \end{cases} \text{звідки одержимо } 2\sqrt{2} \le a < \frac{11}{3}.$$

Відповідь: $2\sqrt{2} \le a < \dfrac{11}{3}$.

Приклад 8. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + 2(k-3)x + 9 = 0$ $(x_1 \ne x_2)$. При яких значеннях k виконується нерівність $-6 < x_1, x_2 < 1$?

Розв'язання. Корені x_1 і x_2 квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ знаходяться між числами α і β тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(\alpha) > 0, \\ f(\beta) > 0, \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(k-3)^2 - 36 > 0, \\ 36 - 12(k-3) + 9 > 0, \\ 1 + 2(k-3) + 9 > 0, \\ -6 < -(k-3) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k(k-6) > 0, \\ 12k < 81, \\ 2k + 4 > 0, \\ 2 < k < 9 \end{cases} \Rightarrow 6 < k < 6{,}75.$$

Відповідь: $k \in (6; 6{,}75)$.

Приклад 9. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких тільки один корінь рівняння $x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$ задовольняє нерівність $x < 2$.

Розв'язання. Позначимо квадратний тричлен $f(x) = x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a$, $D -$ його дискримінант, $x_0 -$ абсциса вершини параболи.

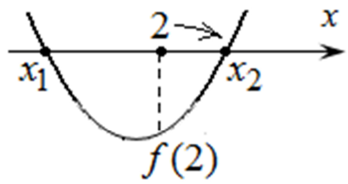

Рис. 5

Для $D > 0$ вимога задачі виконується, якщо число 2 знаходиться між коренями квадратного тричлена або збігається з більшим з них (рис. 5).

У цьому випадку $f(2) < 0$, тобто $2a + 1 < 0$, звідки $a < -1/2$, або ж

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ x_0 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2, \\ 3 - a < 2 \end{cases}$$

що неможливо, бо система не має розв'язків. Отже, для $D > 0$ одержали $a < -1/2$.

Розглянемо тепер випадок $D = 0$. Маємо

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 9 + 2a = a^2 - 4a = 0,$$

звідки знаходимо $a_1 = 0$, $a_2 = 4$. Коли $a = 0$, задане рівняння має один двократний корінь $x = 3$, який не підходить за умовою. При $a = 4$ отримуємо $x = -1$.

Відповідь: $a < -1/2$, $a = 4$.

Приклад 10. Визначити, при яких значеннях параметра *a* множина значень функції

$$f(x)=8\cdot 2^{\frac{x^2-ax+1}{x^2-x+1}}-1$$

належить відрізку $[0;63]$ при будь-яких значеннях x.

Розв'язання. Оскільки область визначення заданої функції – всі числа, то для будь-якого $x\in R$ маємо

$$0\le 2^{\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}+3}-1\le 63 \quad\Rightarrow\quad 1\le 2^{\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}+3}\le 64,$$

звідки одержимо $0\le \dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}+3\le 6 \quad\Rightarrow\quad -3\le \dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\le 3.$

Остання нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\le 3,\\ \dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\ge -3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2x^2-(a+3)x-2}{x^2+x+1}\le 0,\\ \dfrac{4x^2-(a-3)x+4}{x^2+x+1}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+(a+3)x+2\ge 0,\\ 4x^2-(a-3)x+4\ge 0.\end{cases}$$

Аби остання система нерівностей справджувалася при будь-яких значеннях x, мають виконуватись умови

$$\begin{cases}(a+3)^2-16\le 0,\\ (a-3)^2-64\le 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a+3|\le 4,\\ |a-3|\le 8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\le a+3\le 4,\\ -8\le a-3\le 8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7\le a\le 1,\\ -5\le a\le 11.\end{cases}$$

Розв'язком останньої системи є проміжок $a\in[-5;1]$.

Відповідь: при $a\in[-5;1]$.

Приклад 11. Визначити, при яких значеннях параметра *a* мають більше одного кореня такі рівняння:

1) $(a+6)x^2-8x+a=0$;

2) $a(2a+4)x^2-(a+2)x-5a-10=0$.

Розв'язання. 1). При $a=-6$ рівняння має один корінь, що не задовольняє умову. Коли ж $a\ne -6$, рівняння буде квадратним і матиме два корені тільки тоді, коли його дискримінант додатний, тобто $16-a^2-6a>0$, або

$a^2+6a-16<0$. Звідси отримаємо $-8<a<2$, але, оскільки проміжок $(-8;2)$ містить у собі число -6, яке не підходить, остаточно одержимо $a\in(-8;-6)\cup(-6;2)$.

2). При $a=0$ рівняння має єдиний розв'язок, а при $a=-2$ розв'язком буде будь-яке дійсне число. Коли $a\neq 0$ і $a\neq -2$, задане рівняння буде квадратним і матиме більше одного кореня за умови, що його дискримінант додатний, тобто

$$(a+2)^2+40a(a+2)^2>0, \text{ або } (a+2)^2(40a+1)>0,$$

звідки одержимо $a>-1/40$. Виключаючи з проміжку $(-1/40;\infty)$ точку $a=0$, матимемо $a\in(-1/40;0)\cup(0;\infty)$. Враховуючи значення $a=-2$, остаточно отримаємо $a\in(-1/40;0)\cup(0;\infty)\cup\{-2\}$.

Відповідь: 1) $a\in(-8;-6)\cup(-6;2)$; **2)** $a\in(-1/40;0)\cup(0;\infty)\cup\{-2\}$.

Приклад 12. Визначити, при яких значеннях параметра k рівняння $x^2+2(k-1)x+k+5=0$ має хоча б один додатний корінь.

Розв'язання. Квадратне рівняння має дійсні корені, якщо дискримінант $D\geq 0$, тобто

$$D=4(k-1)^2-4(k+5)\geq 0 \;\Rightarrow\; k^2-3k-4\geq 0 \;\Rightarrow\; k\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty).$$

При цьому обидва корені можуть бути як додатними, так і від'ємними, або ж мати різні знаки. Діючи від супротивного, знайдемо ті значення k, при яких обидва корені будуть від'ємними. За теоремою Вієта маємо умови $x_1+x_2<0$ і $x_1\cdot x_2>0$, отже, приходимо до системи нерівностей

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2(k-1)<0, \\ x_1\cdot x_2=k+5>0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} k>1, \\ k>-5 \end{cases} \Rightarrow \quad k\in(1;\infty).$$

Враховуючи, що $k\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty)$, одержимо $k\in[4;\infty)$. Тоді при всіх $k\in(-\infty;-1]$ хоча б один корінь заданого рівняння буде додатним.

Відповідь: $k\in(-\infty;-1]$.

Приклад 13. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ невід'ємні.

Розв'язання. Корені квадратного рівняння невід'ємні, якщо одночасно виконуються умови: дискримінант рівняння, сума коренів і їх добуток невід'ємні. Отже, маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 4(a+3)^2 - 4a(a+2) \ge 0, \\ -\dfrac{2(a+3)}{a} \ge 0, \\ \dfrac{a+2}{a} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -2{,}25, \\ -3 \le a < 0, \\ a \le -2,\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow -2{,}25 \le a < -2.$$

Відповідь: $-2{,}25 \le a < -2$.

Приклад 14. Визначити, при яких дійсних значеннях параметра p рівняння $x^2 + px + 3p = 0$ має цілі корені.

Розв'язання. Корені заданого квадратного рівняння x_1 і x_2 будуть цілими, коли його дискримінант буде квадратом цілого числа, тобто $p^2 - 12p = k^2$, де k – ціле. Звідси маємо

$$(p-6)^2 - k^2 = 36, \text{ або } (p-6-k)(p-6+k) = 36.$$

Запишемо останню рівність у вигляді $t \cdot s = 36$, де $t = p - 6 - k$, $s = p - 6 + k$.

Враховуючи, що $s - t = 2k$, розглянемо всі можливі цілі значення множників t і s, добуток яких дорівнює 36.

1. $t = 2,\ s = 18$ $\quad \begin{cases} p-6-k = 2, \\ p-6+k = 18 \end{cases} \Rightarrow k = 8,\ p = 16.$

2. $t = -2,\ s = -18$ $\quad \begin{cases} p-6-k = -2, \\ p-6+k = -18 \end{cases} \Rightarrow k = -8,\ p = -4.$

3. $t = 6,\ s = 6$ $\quad \begin{cases} p-6-k = 6, \\ p-6+k = 6 \end{cases} \Rightarrow k = 0,\ p = 12.$

4. $t = -6,\ s = -6$ $\quad \begin{cases} p-6-k = -6, \\ p-6+k = -6 \end{cases} \Rightarrow k = 0,\ p = 0.$

5. $t = 18,\ s = 2$ $\quad \begin{cases} p-6-k = 18, \\ p-6+k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = -8,\ p = 16.$

$$6.\quad t=-18,\ s=-2 \qquad \begin{cases} p-6-k=-18, \\ p-6+k=-2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad k=8,\ p=-4.$$

Таким чином, рівняння має цілі корені, коли параметр p набуває значень 16, 12, 0 та -4.

Відповідь: 16; 12; 0; -4.

Приклад 15. При якому значенні параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ набуває найбільшого значення ?

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у канонічному вигляді

$$(x-3)^2+(a-2)^2=1$$

та побудуємо його геометричний образ у системі координат xOa (рис. 6).

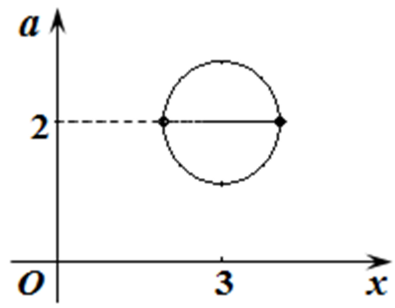

Рис. 6

Очевидно, що модуль різниці коренів матиме найбільше значення в тому випадку, коли точки перетину кола з прямою, паралельною осі абсцис, будуть найбільш віддалені одна від одної. Зрозуміло, що це пряма $a=2$.

Відповідь: $a=2$.

Приклад 16. При яких дійсних значеннях параметра a корені рівняння

$$(a+1)x^2-3ax+4a=0 \quad (\ a\neq -1)$$

дійсні та більші за 1 ?

Розв'язання. Нехай D – дискримінант заданого рівняння, x_1, x_2 – його корені. Тоді згідно з умовою має виконуватися система нерівностей

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ x_1-1>0, \\ x_2-1>0, \end{cases} \quad \text{яка рівносильна такій} \quad \begin{cases} D\geq 0, \\ x_1+x_2-2>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0, \end{cases}$$

бо сума і добуток дійсних чисел будуть додатними, коли самі числа додатні. Після перетворень третьої нерівності отримаємо

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 2 > 0, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $D = 9a^2 - 16a(a+1)$, $x_1 + x_2 = \dfrac{3a}{a+1}$ і $x_1 x_2 = \dfrac{4a}{a+1}$, приходимо до системи нерівностей

$$\begin{cases} 9a^2 - 16a(a+1) \ge 0, \\ \dfrac{3a}{a+1} - 2 > 0, \\ \dfrac{4a}{a+1} - \dfrac{3a}{a+1} + 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(7a+16) \le 0, \\ (a-2)(a+1) > 0, \\ (2a+1)(a+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in [-16/7; 0], \\ a \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty), \\ a \in (-\infty; -1) \cup (-1/2; \infty), \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $a \in [-16/7; -1)$.

Відповідь: $a \in [-16/7; -1)$.

Приклад 17. При якому значенні параметра a різниця коренів рівняння $2x^2 - (a+2)x + 2a - 1 = 0$ дорівнює їх добутку ?

Розв'язання. Скориставшись теоремою Вієта, знайдемо

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2a-1}{2} = \frac{a^2 - 12a + 12}{4}.$$

Оскільки $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2a-1}{2}$, то за умовою $\dfrac{a^2 - 12a + 12}{4} = \left(\dfrac{2a-1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 12a + 12 = 4a^2 - 4a = 1 \Rightarrow 3a^2 + 8a - 11 = 0$, звідки $a_1 = 1$, $a_2 = -3\dfrac{2}{3}$.

Відповідь: $a_1 = 1$; $a_2 = -3\dfrac{2}{3}$.

Приклад 18. Для кожного $a > 0$ знайти найменше значення величини $x^2 - |x + a| + x - a$ на відрізку $[-3;3]$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=x^2-|x+a|+x-a=\begin{cases} x^2+2x, & x\le -a,\\ x^2-2a, & x\ge -a.\end{cases}$$

Із графіка функції (рис. 7) видно, що її найменше значення дорівнює -1 для лівої вітки або $-2a$ для правої залежно від того, яке з цих значень менше.

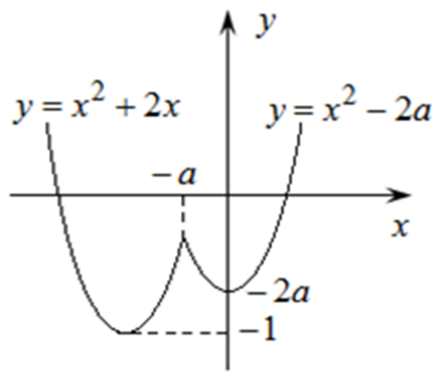

Рис. 7

Відповідь: $\min(-1;-2a)$.

Приклад 19. Не розв'язуючи рівняння $x^2-(2a+1)x-1=0$, визначити, при якому значенні параметра a різниця кубів коренів цього рівняння буде мати найменший модуль.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – корені заданого рівняння. За теоремою Вієта маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+x_2=2a+1,\\ x_1\cdot x_2=-1.\end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо вираз

$$\left|x_1^3-x_2^3\right|=|x_1-x_2|\left|x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right|=|x_1-x_2|\left|(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right|. \tag{2}$$

Після піднесення до квадрата першого рівняння системи (1) та елементарних перетворень знайдемо:

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=(2a+1)^2 \quad\Rightarrow\quad (x_1-x_2)^2=(2a+1)^2+4.$$

Таким чином, $|x_1-x_2|=\sqrt{(2a+1)^2+4}$. Підставляючи значення $|x_1-x_2|$, (x_1+x_2) і x_1x_2 у рівність (2), отримаємо

$$\left|x_1^3-x_2^3\right|=\sqrt{(2a+1)^2+4}\left((2a+1)^2+1\right).$$

Очевидно, найменше значення цього виразу дорівнює 2 при $a=-1/2$.

Відповідь: при $a=-1/2$.

Приклад 20. Знайти найбільше значення параметра a, для якого існують числа x і y, що задовольняють рівняння $x^2+2y^2+a^2+xy-ax+ay=3$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння як квадратне відносно змінної x:

$$x^2+(y-a)x+2y^2+a^2+ay-3=0.$$

Оскільки число x має задовольняти це рівняння, то його дискримінант повинен набувати тільки невід'ємних значень, тобто

$$(y-a)^2-4(2y^2+a^2+ay-3)\geq 0,$$

$$\text{або}\quad 7y^2+6ay+(3a^2-12)\leq 0.$$

Одержана квадратна нерівність відносно змінної y повинна мати хоча б один розв'язок, а це можливо за умови, що дискримінант одержаного квадратного тричлена, у свою чергу, набуватиме тільки невід'ємних значень, а саме:

$$-12a^2+84\geq 0,\quad \text{або } a^2\leq 7,\quad \text{звідки } |a|\leq\sqrt{7}.$$

Отже, найбільше значення параметра a дорівнює $\sqrt{7}$.

Відповідь: $\sqrt{7}$.

Приклад 21. Знайти всі значення x, при яких нерівність

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

виконується для всіх $1<a<3$.

Розв'язання. Задана нерівність є лінійною відносно параметра a:

$$p(x)a+q(x)>0,$$

де $p(x)=-2x^2+13x-13$, $q(x)=4x^2-27x+33$. Тому її виконання при всіх $a\in(1;3)$ рівносильне системі нерівностей

$$\begin{cases} p(x)\cdot 1+q(x)>0, \\ p(x)\cdot 3+q(x)>0. \end{cases}$$

До цієї системи треба включити випадок одночасних рівностей. Таким чином, одержимо

$$\begin{cases}(-2x^2+13x-13)\cdot 1+(4x^2-27x+33)\ge 0,\\(-2x^2+13x-13)\cdot 3+(4x^2-27x+33)\ge 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-7x+10\ge 0,\\x^2-6x+3\ge 0,\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x\in(-\infty;2]\cup[5;\infty),\\x\in[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}],\end{cases}\ \Rightarrow\ x\in[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}].$$

Відповідь: $[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}]$.

Самостійна робота 1.3

1. Визначити, при яких значеннях параметра a нерівність $ax^2+(2-a)x+(3-2a)\le 0$ виконується тільки для одного значення x.

2. Знайти всі значення параметра a, для яких різниця коренів рівняння $2x^2-(a+1)x+a+3=0$ дорівнює 1.

3. Знайти всі дійсні значення k, при яких корені рівняння $(k-3)x^2-2kx+6k=0$ додатні.

4. Не обчислюючи коренів рівняння $2x^2-5x+1=0$, знайти різницю квадратів його коренів.

5. Визначити, при яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ більші за 3.

6. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ задовольняють умови $x_1<2$, $x_2>3$.

Відповіді: **1.** $a_{1,2}=\dfrac{8\pm 2\sqrt{7}}{9}$; **2.** $a_1=9$; $a_2=-3$; **3.** $3\le k\le 3{,}6$; **4.** $\pm\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$;

5. $a>11/9$; **6.** $2<a<5$.

1.4. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Приклад 1. Яка частина координатної площини xOy покрита всіма можливими кругами вигляду $(x-a)^2+(y-a)^2 \le 2+a^2$?

Розв'язання. Після очевидних перетворень маємо

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2 \le 2+a^2,$$

$$a^2-2a(x+y)+x^2+y^2-2 \le 0.$$

Остання нерівність, квадратна відносно параметра a, повинна мати принаймні один розв'язок, отже, її дискримінант має бути невід'ємним, тобто

$$\frac{1}{4}D=(x+y)^2-(x^2+y^2-2) \ge 0,$$

звідки одержимо $xy \ge -1$, або $\begin{cases} y \ge -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x>0; \\ y \le -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x<0. \end{cases}$

Таким чином, шукана частина координатної площини розташована між вітками гіперболи $y=-1/x$.

Відповідь: частина координатної площини між вітками гіперболи $y=-1/x$.

Приклад 2. Знайти значення параметрів p і q у рівнянні параболи $y=x^2+px+q$, при яких вона проходить через точку $A(-1;0)$ та дотикається до прямої $y=x$.

Розв'язання. Оскільки парабола проходить через точку $A(-1;0)$, то $1-p+q=0$, звідки $q=p-1$.

Нехай $M(x_0;y_0)$ – точка дотику параболи і прямої $y=x$, тоді маємо $y'(x_0)=2x_0+p=1$, звідки $x_0=\dfrac{1-p}{2}$.

За умовою задачі $y_0=x_0$, тож $x_0=x_0{}^2+px_0+q=0$ і, враховуючи, що $x_0=\dfrac{1-p}{2}$, $q=p-1$, отримаємо

$$\frac{(1-p)^2}{4} - \frac{(1-p)^2}{2} + p - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-p)(p-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1, \; p_2 = 5.$$

Тоді $q_1 = 0$, $q_2 = 4$, а рівняння парабол, які задовольняють умовам задачі, будуть такими: $y = x^2 + x$, $y = x^2 + 5x + 4$. Абсциси точок дотику цих парабол до прямої $y = x$ будуть $(x_0)_1 = 0$, $(x_0)_2 = -2$.

Відповідь: $p = 1$, $q = 0$; $p = 5$, $q = 4$.

Приклад 3. Записати рівняння кола, радіус якого дорівнює 2, якщо відомо, що коло проходить через вершину кривої $x^2 - 2x - y + 2 = 0$, а центр кола лежить на прямій $x + y = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння кривої у вигляді $y = (x-1)^2 + 1$, це парабола з вершиною в точці $(1;1)$. Центр шуканого кола матиме координати $(a;-a)$, оскільки лежить на прямій $y = -x$. Отже, рівняння кола матиме вигляд $(x-a)^2 + (y+a)^2 = 4$. Враховуючи, що коло проходить через точку $(1;1)$, одержимо $(1-a)^2 + (1+a)^2 = 4$, звідки $a = \pm 1$.

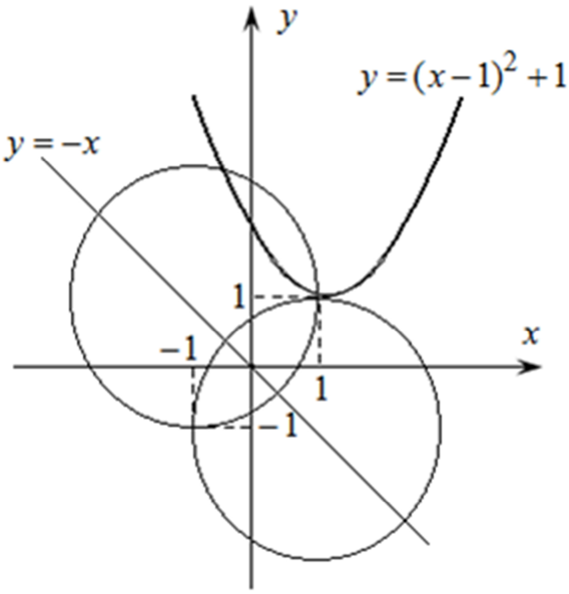

Рис. 8

Таким чином, знайшли два кола з центрами в точках $(1;-1)$ і $(-1;1)$ відповідно (рис. 8), рівняння яких $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ і $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Приклад 4. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, які проходять через точку $A(2;-5)$.

Розв'язання. Складемо рівняння дотичної до заданої кривої в точці $M(x_0; y_0)$, яка проходить через точку $A(2;-5)$:

$$k = y'(x_0) = 2x_0 - 4, \quad y_{дот} = (2x_0 - 4)(x - 2) - 5.$$

Оскільки точка $M(x_0; y_0)$ належить і кривій $y(x)$, і дотичній $y_{дот}(x)$, то

$$y_{дот}(x_0) = (2x_0 - 4)(x_0 - 2) - 5 = x_0^2 - 8x_0 + 3, \quad \text{а} \quad y(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3.$$

Прирівнюючи праві частини цих співвідношень, знаходимо

$$x_0^2 - 4x_0 = 0, \text{ звідки } (x_0)_1 = 0, \ (x_0)_2 = 4.$$

Отже, отримаємо дві точки дотику $M_1(0;3)$ і $M_2(4;3)$, у яких дотичні мають кутові коефіцієнти $k_1 = -4$ та $k_2 = 4$ і рівняння $y = -4x + 3$ та $y = 4x - 13$ відповідно.

Відповідь: $y = -4x + 3$; $y = 4x - 13$.

Приклад 5. Задано дві прямі $y = -x$ і $y = 5x - 6$. Знайти значення параметрів *a* і *b*, при яких обидві прямі дотикаються до параболи $f(x) = x^2 + ax + b$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до заданої параболи в точці $(c; c^2 + ac + b)$ матиме вигляд

$$y = f'(c)(x - c) + c^2 + ac + b,$$

причому $f'(x) = 2x + a$, отже, $f'(c) = 2c + a$. Таким чином, рівняння дотичної набуває вигляду

$$y = (a + 2c)x + b - c^2.$$

Коли дотичною є пряма $y = -x$, то отримуємо

$$\begin{cases} a + 2c = -1, \\ b - c^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{a+1}{2}, \\ c^2 = b \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2 = b \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 4b.$$

У другому випадку дотична – це пряма $y = 5x - 6$, тому одержимо

$$\begin{cases} a + 2c = 5, \\ b - c^2 = -6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{5-a}{2}, \\ c^2 = b + 6 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{5-a}{2}\right)^2 = b + 6 \Rightarrow a^2 - 10a + 1 = 4b.$$

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 = 4b, \\ a^2 - 10a + 1 = 4b. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, одержимо $a = 0$, $b = 1/4$.

Відповідь: $a = 0$, $b = 1/4$.

Приклад 6. Знайти рівняння спільної дотичної до парабол $y = x^2 + 4x + 8$ і $y = x^2 + 8x + 4$.

Розв'язання. Застосуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Запишемо рівняння дотичних до першої та другої парабол у точках з абсцисами x_1 та x_2 відповідно:

$$y = (2x_1 + 4)(x - x_1) + x_1^2 + 4x_1 + 8 \quad \text{та} \quad y = (2x_2 + 8)(x - x_2) + x_2^2 + 8x_2 + 4.$$

Після перетворень матимемо

$$y = (2x_1 + 4)x - x_1^2 + 8 \quad \text{та} \quad y = (2x_2 + 8)x - x_2^2 + 4.$$

Одержані дотичні збігатимуться за умови $\begin{cases} 2x_1 + 4 = 2x_2 + 8, \\ -x_1^2 + 8 = -x_2^2 + 4. \end{cases}$

Звідси маємо $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, а рівняння спільної дотичної буде $y = 8x + 4$.

Відповідь: $y = 8x + 4$.

Приклад 7. Знайти найкоротшу відстань між точками параболи $y = x^2 - 8x + 16$ і прямої $y = -2x + 1$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо пряму $y = -2x + c$, паралельну заданій, і знайдемо число c таке, щоб парабола $y = x^2 - 8x + 16$ і пряма $y = -2x + c$ дотикались. Для цього треба знайти дискримінант квадратного рівняння

$$x^2 - 8x + 16 = -2x + c$$

і прирівняти його до нуля. Маємо

$$x^2 - 6x + 16 - c = 0, \quad D = 36 - 4(16 - c) = 0, \quad \text{звідки } c = 7.$$

Тоді $x^2 - 6x + 16 - 7 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$; $y = -2 \cdot 3 + 7$, $y = 1$.
Отже, $M(3;1)$ – точка дотику графіків функцій $y = x^2 - 8x + 16$ і $y = -2x + 7$.

Найкоротша відстань між точками параболи $y = x^2 - 8x + 16$ і прямої $y = -2x + 1$ – це відстань між паралельними прямими $y = -2x + 7$ і $y = -2x + 1$, яка дорівнює відстані від точки $M(3;1)$ до прямої $y = -2x + 1$.

Відстань від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + D = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тому шукана відстань від точки $M(3;1)$ до прямої $2x + y - 1 = 0$ буде $d = \dfrac{|2 \cdot 3 + 1 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Відповідь: $6/\sqrt{5}$.

Приклад 8. Задано параболи $y = x^2$ і $y = x^2 + m$ $(m > 0)$. Визначити, у якому відношенні будь-яка хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику.

Розв'язання. Нехай хорда першої параболи дотикається до другої параболи в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = x_0^2 + m$. Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + m, \quad \text{або} \quad y = 2x_0 x - x_0^2 + m.$$

Точки перетину дотичної з першою параболою (кінці хорди) визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x_0 x - x_0^2 + m, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Виключивши з цієї системи y, дістанемо квадратне рівняння $x^2 - 2x_0 x + x_0^2 - m = 0$, коренями якого є абсциси x_1 і x_2 кінців хорди першої параболи. Розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо

$$x_1 = x_0 - \sqrt{m}, \quad x_2 = x_0 + \sqrt{m} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

а це й означає, що хорда першої параболи в точці дотику до другої параболи поділяється навпіл, тобто у відношенні $1:1$.

Відповідь: у відношенні $1:1$.

Приклад 9. Розглядаються всі можливі параболи, вітки яких направлені вниз, симетричні відносно прямої $x = -1$ і дотичні до прямої $6x - y + 3 = 0$. Знайти рівняння тієї з них, яка перетинає вісь Oy в точці з найбільшою ординатою.

Розв'язання. Шукана парабола задається рівнянням вигляду $y = a(x+1)^2 + b$, або $y = ax^2 + 2ax + a + b$, де $a < 0$. Нехай $(x_0; y_0)$ – точка дотику параболи і заданої прямої, тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = a(x_0+1)^2 + b, \\ 2a(x_0+1) = 6, \\ 6x_0 - y_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Із двох останніх рівнянь системи отримаємо $x_0 = \dfrac{3}{a} - 1$, $y_0 = 6x_0 + 3 = \dfrac{18}{a} - 3$, а з першого рівняння $b = y_0 - a(x_0+1)^2 = \dfrac{9}{a} - 3$.

Ордината точки перетину параболи $y = ax^2 + 2ax + a + b$ з віссю Oy дорівнює $a + b = a + \dfrac{9}{a} - 3$. Розглянемо функцію $f(a) = a + \dfrac{9}{a} - 3$, $a \neq 0$. Вона має похідну $f'(a) = 1 - \dfrac{9}{a^2} = \dfrac{a^2 - 9}{a^2}$, причому $f'(a) > 0$ при $a < -3$, $f'(a) < 0$ при $-3 < a < 0$.

Отже, найбільшого значення функція досягає при $a = -3$, при цьому ордината точки перетину параболи з віссю Oy буде $b = \dfrac{9}{a} - 3 = -6$. Отже, шукана парабола має рівняння $y = -3(x+1)^2 - 6$.

Відповідь: $y = -3(x+1)^2 - 6$.

Приклад 10. Для кожного $a > 0$ знайти рівняння всіх прямих, які проходять через початок координат і мають рівно дві спільні точки з графіком функції

$$f(x) = x|x + 2a| + a^2.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = x|x + 2a| + a^2 = \begin{cases} (x+a)^2, & x \geq -2a, \\ -x^2 - 2ax + a^2, & x \leq -a. \end{cases}$$

З графіка функції $f(x)$ (рис. 9) видно, що шукана пряма задається або рівнянням $y = \frac{a}{2}x$, або рівнянням $y = kx$, у якому коефіцієнт k визначається з умови єдиного кореня рівняння $(x+a)^2 = kx$, або $x^2 + (2a-k)x + a^2 = 0$, дискримінант якого $D = (2a-k)^2 - 4a^2 = k^2 - 4ak = k(k-4a)$ дорівнює нулю при $k = 0$ або $k = 4a$.

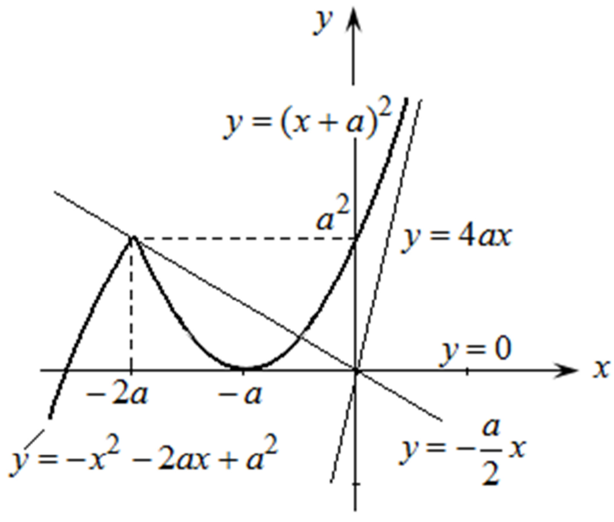

Рис. 9

Отже, шукані прямі мають рівняння
$y = 0$, $y = 4ax$, $y = -\frac{a}{2}x$.

Відповідь: $y = 0$, $y = 4ax$, $y = -\frac{a}{2}x$.

Приклад 11. На площині дві параболи розташовані так, що їхні осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

Доведення. Виберемо прямокутну декартову систему координат xOy так, щоб осі Ox і Oy збігалися з осями парабол, а вітки парабол були спрямовані в додатних напрямках координатних осей (рис. 10). Тоді рівняння парабол матимуть вигляд $y = a_1x^2 - c_1$ і $x = a_2y^2 - c_2$, де $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Оскільки за умовою параболи перетинаються в чотирьох точках, то $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Нехай $M(x_0; y_0)$ – будь-яка з чотирьох точок перетину парабол. Тоді координати цієї точки задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = a_1{x_0}^2 - c_1, \\ x_0 = a_2{y_0}^2 - c_2. \end{cases}$$

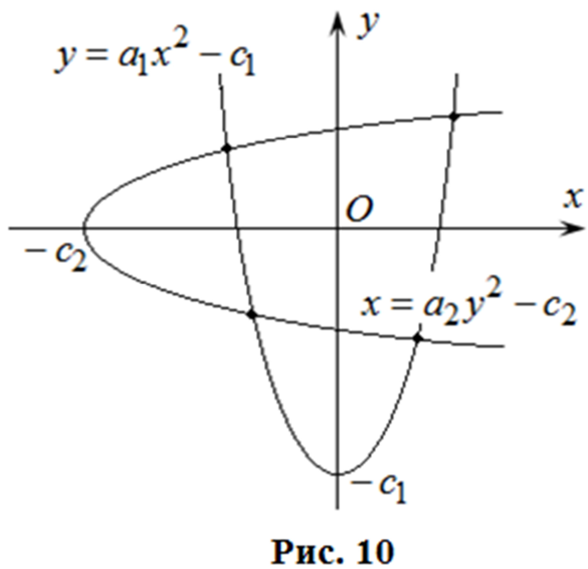

Рис. 10

Поділимо обидві частини першого рівняння на $a_1 \neq 0$, а обидві частини другого рівняння на $a_2 \neq 0$, після чого додамо перше рівняння до другого

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 - \frac{y_0}{a_1} - \frac{x_0}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2} = 0\,.$$

Виділяючи повні квадрати, дістанемо

$$\left(x_0 - \frac{1}{2a_2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2a_1}\right)^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{(2a_1)^2} + \frac{1}{(2a_2)^2}\,.$$

Отже, точка $M(x_0; y_0)$, а значить, й інші три точки перетину лежать на колі з центром у точці $\left(\frac{1}{2a_2}; \frac{1}{2a_1}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{4a_1{}^2} + \frac{1}{4a_2{}^2}}$, що й треба було довести.

Приклад 12. Знайти рівняння параболи, яка дотикається еліпса $8x^2 + y^2 = 9$ у двох точках $A(-1;-1)$ і $B(1;-1)$.

Розв'язання. Маємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, його півосі $a = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $b = 3$, тобто еліпс витягнутий уздовж осі *Oy* (рис. 11). З умови випливає, що парабола буде симетрична відносно осі *Oy*, її вітки будуть направлені вгору.

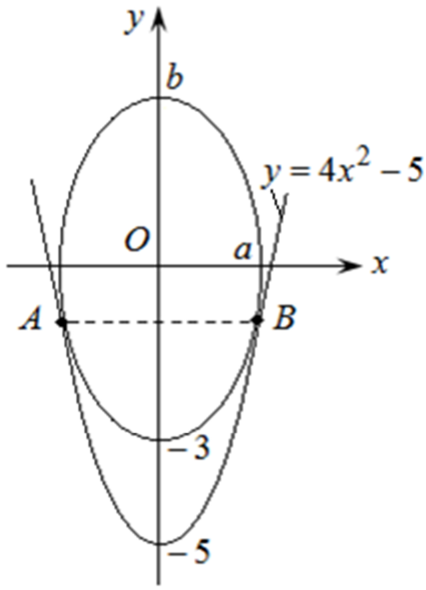

Рис. 11

Рівняння параболи будемо шукати у вигляді $y = kx^2 - c$. В точках *A* і *B* парабола та еліпс матимуть спільні дотичні. З рівняння параболи знайдемо $y' = 2kx\big|_{x=1} = 2k$.

Продиференціюємо рівняння еліпса $8x^2 + y^2 = 9$ за змінною *x*:

$$16x + 2y \cdot y' = 0\,,\ \text{звідки}\ \ y' = -\frac{8x}{y}\Big|_{(1;-1)} = 8\,.$$

Тоді $k = 4$ і рівняння параболи набуває вигляду $y = 4x^2 - c$. Підставивши в це рівняння координати точки *B*, одержимо $-1 = 4 - c$, $c = 5$. Отже, шукане рівняння параболи $y = 4x^2 - 5$.

Відповідь: $y = 4x^2 - 5$.

Приклад 13. Знайти геометричне місце точок, координати яких $(x;y)$ задовольняють рівняння

$$\left(1-x^2-y^2-\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+(y-x^2)^2(y+|x|)^2}\right)^2+$$

$$+\left(x^2+y^2-1/4-\sqrt{(x^2+y^2-1/4)^2+(y-x^2)^2(y+|x|)^2}\right)^2=0.$$

Розв'язання. Оскільки обидва доданки в лівій частині рівняння – невід'ємні числа, то їх сума може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, маємо

$$1-x^2-y^2=\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+(y-x^2)^2(y+|x|)^2}\,, \tag{1}$$

$$x^2+y^2-1/4=\sqrt{(x^2+y^2-1/4)^2+(y-x^2)^2(y+|x|)^2}\,. \tag{2}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases}1-x^2-y^2\ge 0,\\ x^2+y^2-1/4\ge 0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x^2+y^2\le 1, & (3)\\ x^2+y^2\ge 1/4. & (4)\end{cases}$$

Крім того, рівність у виразах (1) і (2) справджується за умови, що

$$(y-x^2)^2(y+|x|)^2=0, \tag{5}$$

тобто коли один із співмножників дорівнює нулю:

$$\left[\begin{array}{l}y-x^2=0,\\ y+|x|=0\end{array}\right.\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{ll}y=x^2, & (6)\\ y=-|x|. & (7)\end{array}\right.$$

Співвідношення (3) – (4) і (6) – (7) повністю визначають шукане геометричне місце точок, координати яких $(x;y)$ задовольняють задане рівняння. Сукупність нерівностей (3) – (4) задає область між двома концентричними колами, а рівняння (6) – (7) визначають розташовані в цій області відрізки двох графіків – параболи $y=x^2$ та ламаної $y=-|x|$, зображені на рис. 12.

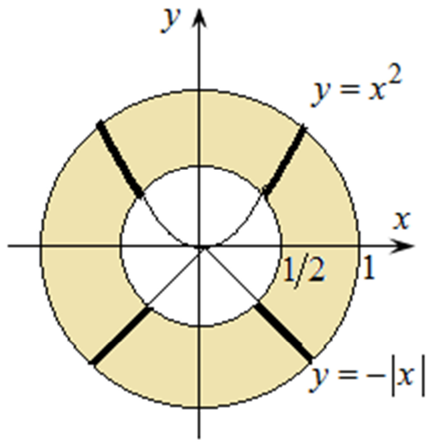

Рис. 12

Приклад 14. Визначити, на яке найбільше число частин можуть розбити площину xOy графіки n квадратних тричленів вигляду $y = ax^2 + bx + c$ $(n = 1, 2, ...)$.

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що число частин не перевищує $n^2 + 1$.

Так для $n = 1$ це очевидно – парабола ділить площину на дві частини. Нехай доведено, що $n - 1$ графіків ділять площину не більше, ніж на $(n-1)^2 + 1$ частин. Побудуємо останній, n -ий графік. Він перетне кожен з $n - 1$ попередніх графіків максимум у двох точках, тобто останній графік буде розбитий не більше, ніж на $2(n-1) + 1 = 2n + 1$ частин, включаючи два крайніх, які ідуть у нескінченність. Кожна з цих частин параболи ділить одну попередню частину площини на дві. Таким чином, при побудові останньої параболи число частин збільшиться не більше, ніж на $2n + 1$, тобто їх стане $(n-1)^2 + 1 + 2n + 1 = n^2 + 1$.

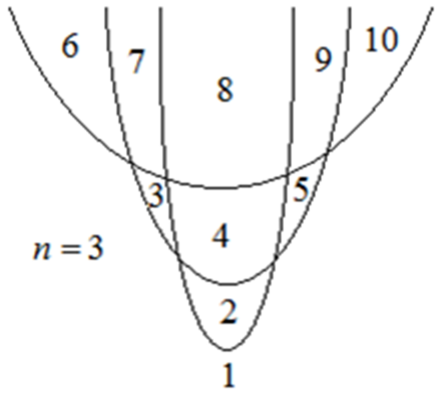

Рис. 13

Наведемо приклад, коли всі графіки попарно перетинаються в двох точках для $n = 3$, при цьому отримаємо максимальне число частин $n^2 + 1 = 10$ (рис. 13).

Відповідь: на $n^2 + 1$ частин.

Приклад 15. Параметри a і b змінюються таким чином, що система рівнянь $y = x^2 + a$ і $x = y^2 + b$ має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$. Яку криву описує точка $M(x_0; y_0)$ при змінюванні a і b ?

Розв'язання. З графічних міркувань очевидно, що точка M лежить у першій чверті. При цьому задані параболи дотикаються одна до однієї в точці $M(x_0; y_0)$, тобто мають спільну дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $2x_0$. З іншого боку, розглядаючи в другому рівнянні x як функцію від y, знайдемо $x'(y_0) = 2y_0$. Величина $2y_0$ – це тангенс кута нахилу зазначеної дотичної до осі Oy. Тоді тангенс кута її нахилу до осі Ox дорівнює $\frac{1}{2y_0}$. Маємо $2x_0 = \frac{1}{2y_0}$, тобто $x_0 y_0 = \frac{1}{4}$. Отже, точка $M(x_0; y_0)$ лежить на правій вітці гіперболи $4xy = 1$.

Доведемо обернене твердження. Нехай $M(x_0; y_0)$ – довільна точка, для якої $x_0 y_0 = \frac{1}{4}$. Проведемо через неї дві параболи заданого вигляду:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2 \quad \text{і} \quad x = y^2 + x_0 - y_0^2.$$

Доведемо, що система цих рівнянь має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$. Те, що $(x_0; y_0)$ задовольняє обидва рівняння, очевидно. А єдиність цього розв'язку випливає з того, що обидві параболи мають у цій точці спільну дотичну і розташовані по різні боки від неї.

Відповідь: точка описує вітку гіперболи $4xy = 1$, розташовану в першій чверті.

Приклад 16. Для кожної параболи $y = x^2 + px + q$, графік якої перетинає осі координат у трьох різних точках, проведено коло через ці три точки. Довести, що існує точка, через яку проходить кожне з таких кіл.

Доведення. Нехай A, B і C – точки, у яких парабола $y = x^2 + px + q$ перетинає осі Ox та Oy відповідно (рис. 14). Ці точки матимуть координати $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(0; q)$, де $x_1 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Позначимо через D другу точку перетину з віссю Oy кола, яке проходить через точки A, B і C. За властивістю січних, проведених до кола з однієї точки, маємо

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD. \tag{1}$$

Оскільки $OA = |x_1|$, $OB = |x_2|$, $OC = |q|$ та $x_1 x_2 = q$ за теоремою Вієта, т о з (1) отримаємо $OA \cdot OB = |x_1| \cdot |x_2| = |q|$,

$$OC \cdot OD = |q| OD \quad \Rightarrow \quad OD = 1.$$

Звідси виходить, що точка D може мати координати $(0;1)$ або $(0;-1)$.

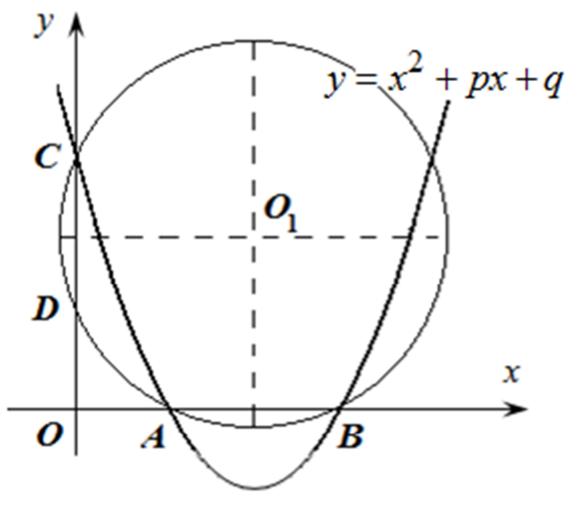

Рис. 14

Доведемо, що це буде точка $D(0;1)$. Для цього досить показати, що точка O_1 перетину серединних перпендикулярів

$x=-\dfrac{p}{2}$ до відрізка AB та $y=\dfrac{q+1}{2}$ до відрізка з кінцями C і $(0;1)$ є центром кола, проведеного через точки A, B і C.

Оскільки $O_1A=O_1B$ за побудовою, то залишається довести, що $O_1A=O_1C$.

Точка O_1 має координати $\left(-\dfrac{p}{2};\dfrac{q+1}{2}\right)$. Тому

$$O_1C^2=\left(-\frac{p}{2}-0\right)^2+\left(\frac{q+1}{2}-q\right)^2=\frac{p^2+q^2-2q+1}{4}=\frac{p^2-4q}{4}+\frac{(q+1)^2}{4}=$$

$$=\left(-\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}--\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}-0\right)^2=O_1A^2,$$ отже, $O_1A=O_1C$, що й треба було довести.

Приклад 17. На площині xOy вказати всі точки, через які не проходить жодна з кривих сімейства $y=x^2-4px+2p^2-3$, де p – параметр.

Розв'язання. Нехай $(x_0;y_0)$ – точка, через яку не проходить жодна з кривих заданого сімейства, тоді координати цієї точки не задовольняють задане рівняння. Таким чином, задача звелася до того, щоб знайти залежність між x і y, при якій задане рівняння не мало б розв'язків. Для цього розглянемо це рівняння як квадратне відносно параметра p:

$$2p^2-4px+x^2-y-3=0.$$

Дискримінант $D=8x^2+8y+24$ має бути від'ємним, тобто, $y<-x^2-3$. Отже, шукану множину утворюють усі точки координатної площини, які лежать нижче параболи $y=-x^2-3$.

Відповідь: частина координатної площини, розташована нижче параболи $y=-x^2-3$.

Самостійна робота 1.4

1. На параболі $y=x^2$ вибрано точки A, B і C так, що кут $\angle ABC$ є прямим. Нехай a, b, c – абсциси вибраних точок. Довести, що $(a+b)(b+c)=-1$.

2. Дві вершини трикутника знаходяться в точках $A(-1;0)$ і $B(1;0)$, а третя точка С рухається по параболі $y = x^2 - 6x + 15$. Знайти рівняння кривої, яку описує центр ваги трикутника.

3. Визначити, при яких значеннях параметрів a і b еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ перетинається з параболою $y^2 = 2px$ під найбільшим кутом.

4. Визначити геометричне місце вершин парабол

$$y = x^2 - \frac{4mx}{m^2 + 1} + \frac{m^4 + 4m^2 + 1}{\left(m^2 + 1\right)^2}.$$

Відповіді: **2.** $y = 3x^2 - 6x + 5$; **3.** $b = a\sqrt{2}$; **4.** Парабола $y = 1 - x^2/2$.

1.5. РІЗНІ ЗАДАЧІ

Приклад 1. Довести, що квадратний тричлен, який набуває цілих значень при деяких трьох послідовних цілих значеннях *x*, набуватиме цілих значень і при будь-якому цілому значенні *x*.

Доведення. Нехай квадратний тричлен $y = ax^2 + bx + c$ набуває цілих значень для трьох послідовних цілих значень аргумента *x*, а саме: $x = m - 1$, $x = m$, $x = m + 1$. За умовою задачі цілими будуть такі числа:

$$y(m-1) = a(m-1)^2 + b(m-1) + c = am^2 + bm + c - 2am + a - b,$$

$$y(m) = am^2 + bm + c,$$

$$y(m+1) = a(m+1)^2 + b(m+1) + c = am^2 + bm + c + 2am + a + b.$$

Тоді числа $y(m+1) + y(m-1) - 2y(m) = 2a$ і $y(m+1) - y(m) - 2am = a + b$ також цілі.

Візьмемо довільне ціле число *n*, подамо його у вигляді $n = m + k$ і розглянемо

$$y(n) = y(m+k) = am^2 + bm + c + 2amk + ak^2 + bk,$$

$$y(n) = y(m) + 2amk + 2a \cdot \frac{k^2 - k}{2} + (a+b)k\,.$$

Оскільки для цілого k число $\frac{k^2 - k}{2}$ теж буде цілим, то в цій сумі всі доданки – цілі числа. Твердження доведено.

Приклад 2. Довести, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ при всіх цілих x набуває цілих значень тоді й тільки тоді, коли числа $2a$, $a+b$, c – цілі.

Доведення. Необхідність. Нехай квадратний тричлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ при всіх цілих x набуває цілих значень. Треба довести, що числа $2a$, $a+b$, c – цілі. Справді, $P(0) = c$ – ціле число та $a+b$ – теж ціле число, бо за умовою $P(1) = a+b+c$ – ціле число.

Далі розглянемо $P(2) = 4a + 2b + c = 2a + 2(a+b) + c$. Звідси випливає, що $2a$ – теж ціле, оскільки $P(2)$, $a+b$, c – цілі. Необхідність доведена.

Достатність. Тепер доведемо, що многочлен $P(x)$ при всіх цілих x набуває цілих значень, якщо $2a$, $a+b$, c – цілі числа.

Розглянемо різницю $P(x+1) - P(x) = 2ax + a + b$. Звідси випливає, що $P(x+1)$ – ціле число для кожного цілого x, для якого $P(x)$ – ціле число, бо $2a$, $a+b$ – цілі. Оскільки за умовою $P(0) = c$ – ціле число, то $P(1)$, $P(2)$ і взагалі при будь-якому цілому x є цілими числами.

Приклад 3. Серед усіх квадратних тричленів $y = x^2 + px + q$, які набувають тільки невід'ємних значень, знайти той, у якого сума коефіцієнтів $p+q$ найменша.

Розв'язання. Оскільки заданий квадратний тричлен $y = x^2 + px + q$ для всіх дійсних x набуває тільки невід'ємних значень, то $p^2 - 4q \le 0$, тобто $q \ge p^2/4$. Враховуючи цю нерівність, отримаємо

$$p + q \ge p + p^2/4, \quad \text{або} \quad p + q \ge (p/2 + 1)^2 - 1 \ge -1,$$

причому знаки рівності матимуть місце тоді й тільки тоді, коли $q = p^2/4$, а $p/2 + 1 = 0$. Звідси знаходимо $p = -2$, $q = 1$. Отже, шуканий квадратний тричлен $y = x^2 - 2x + 1$.

Відповідь: $y = x^2 - 2x + 1$.

Приклад 4. Відомо, що квадратні тричлени $a_1x^2 + 2b_1x + c_1$ і $a_2x^2 + 2b_2x + c_2$ при всіх x набувають додатних значень. Довести, що цю властивість має і квадратний тричлен $a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2$.

Доведення. Як відомо, квадратний тричлен набуває додатних значень при всіх значеннях x тоді й тільки тоді, коли його старший коефіцієнт додатний, а дискримінант від'ємний.

Оскільки $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то й $a_1a_2 > 0$. Залишилося довести, що $a_1a_2 \cdot c_1c_2 - b_1^2b_2^2 > 0$. За умови задачі випливає, що $a_1c_1 > b_1^2$ і $a_2c_2 > b_2^2$. Для завершення доведення досить перемножити ці нерівності.

Приклад 5. Визначити, при яких обмеженнях на цілі числа p і q тричлен $y(x) = x^2 + px + q$ набуває парних (непарних) значень при будь-яких $x \in Z$.

Розв'язання. Значення $y(x)$ при будь-яких x матиме однакову парність тоді й тільки тоді, коли ділиться на 2 кожне з чисел

$$y(x+1) - y(x) = (x+1)^2 + p(x+1) + q - x^2 - px - q = 2x + 1 + p,$$

а значить, p непарне. При цьому парність усіх значень $y(x)$ однозначно визначається парністю числа $q = y(0)$.

Таким чином, усі значення $y(x)$ парні (непарні), коли p непарне, а q парне (непарне).

Приклад 6. Знайти всі значення $x \in Z$, при яких квадратний тричлен $2x^2 - x - 36$ набуває значень, що дорівнюють квадратам простих чисел.

Розв'язання. Нехай p – просте число і $2x^2 - x - 36 = p^2$. Тоді $p^2 = (x+4)(2x-9) = ab$, де $a = x + 4$, $b = 2x - 9$ $(a, b \in Z)$ і $2a - b = 17$. Оскільки a – ціле число, на яке ділиться p^2, то можливі лише такі випадки:

1) $a = p^2$, $b = 1$, тоді $2p^2 - 1 = 17$, $p = 3$, тому $x = a - 4 = p^2 - 4 = 5$;

2) $a = p$, $b = p$, тоді $2p - p = 17$, $p = 17$, тому $x = a - 4 = 13$;

3) $a = 1$, $b = p^2$, тоді $2 - p^2 = 17$, звідки $p^2 = -15$, що неможливо;

4) $a = -p^2$, $b = -1$, тоді $-2p^2 + 1 = 17$, $p^2 = -8$, що неможливо;

5) $a = -p$, $b = -p$, тоді $-2p + p = 17$, $p = -17$, що не підходить;

6) $a=-1$, $b=-p^2$, тоді $-2+p^2=17$, звідки $p^2=19$, що не підходить.

Відповідь: $x=5$, $x=13$.

Приклад 7. Для заданих чисел $p, q\in R$ знайти всі значення, які квадратний тричлен $y(x)=x^2+px+q$ набуває при $x\in[-1;1]$.

Розв'язання. Оскільки функція $y(x)$ на числовій прямій має єдину точку мінімуму $x_0=-\dfrac{p}{2}$, то при $x<x_0$ ця функція спадає, а при $x<x_0$ – зростає. Тому для множини A значень функції $y(x)$ на відрізку $[-1;1]$ маємо такі варіанти:

1. Якщо $p<-2$, то $x_0>1$, тоді $A=[y(1);\ y(-1)]=[1+p+q;\ 1-p+q]$.

2. Коли $-2\le p\le 2$, то $-1\le x_0\le 1$, тоді $A=[y(x_0);\ \max\{y(-1), y(1)\}]$, тобто

$$A=\left[q-p^2/4;\ 1-p+q\right] \text{ при } -2\le p\le 0, \text{ або}$$

$$A=\left[q-p^2/4;\ 1+p+q\right] \text{ при } 0\le p\le 2.$$

3. Якщо $p>2$, то $x_0<-1$, тоді $A=[y(-1);\ y(1)]=[1-p+q;\ 1+p+q]$.

Відповідь: $[1+p+q;\ 1-p+q]$ при $p<-2$; $\left[q-p^2/4;\ 1-p+q\right]$ при $-2\le p\le 0$; $\left[q-p^2/4;\ 1+p+q\right]$ при $0\le p\le 2$; $[1-p+q;\ 1+p+q]$ при $p>2$.

Приклад 8. Серед усіх квадратних тричленів $y=x^2+px+q$, у яких різниця коренів дорівнює a, знайти той, у якого сума коефіцієнтів $p+q$ найменша.

Розв'язання. За умовою задачі $x_1-x_2=a$, де x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена x^2+px+q. За теоремою Вієта $x_1\cdot x_2=q$, $x_1+x_2=-p$. Тоді

$$p+q=x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)=x_1\cdot(x_1-a)-x_1-(x_1-a)=$$

$$=x_1{}^2-(a+2)x_1+a=\left(x_1-\frac{a+2}{2}\right)^2-\left(\frac{a+2}{2}\right)^2+a.$$

Звідси виходить, що вираз $p+q$ буде найменшим, коли $x_1 = \dfrac{a+2}{2}$; при цьому $x_2 = \dfrac{2-a}{2}$, $p = -2$, $q = 1 - \dfrac{a^2}{4}$. Отже, шуканий квадратний тричлен $y = x^2 - 2x + 1 - a^2/4$.

Відповідь: $y = x^2 - 2x + 1 - a^2/4$.

Приклад 9. Знайти ціле число a таке, щоб вираз $(x-a)(x-10)+1$ можна було розкласти як добуток множників $(x+b)(x+c)$ з цілими b і c.

Розв'язання. За умовою задачі має виконуватися така рівність:

$$(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c).$$

Звідси при $x = -b$ отримаємо

$$(b+a)(b+10) = -1.$$

Оскільки a і b – цілі, то $b+a$ і $b+10$ – також цілі. Але число -1 може бути подано у вигляді добутку двох цілих чисел тільки у такий спосіб: $-1 = 1\cdot(-1) = (-1)\cdot 1$.

Отже, можливі лише два випадки:

$$1)\ \begin{cases} b+10 = 1, \\ b+a = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} b = -9, \\ a = 8. \end{matrix}$$

Тоді $(x-8)(x-10)+1 = x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$.

$$2)\ \begin{cases} b+10 = -1, \\ b+a = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} b = -11, \\ a = 12. \end{matrix}$$

У цьому випадку одержимо такий розклад на множники $(x-12)(x-10)+1 = x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2$.

Відповідь: $a = 8$; $a = 12$.

Приклад 10. Знайти всі дійсні пари значень x і y, які задовольняють рівняння

$$x^2 + 6x\cdot \sin xy + 9 = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна записати у вигляді

$$(x + 3\sin xy)^2 + 9(1 - \sin^2 xy) = 0,$$

$$\text{або} \quad (x+3\sin xy)^2+(3\cos xy)^2=0. \qquad (1)$$

Оскільки квадрат дійсного числа невід'ємний, то з (1) маємо:

$$\begin{cases} x+3\sin xy=0, \\ \cos xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3\sin xy=0, \\ \sin xy=\pm 1. \end{cases}$$

Отже, приходимо до сукупності двох систем

$$\begin{cases} x+3\sin xy=0, \\ \sin xy=1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x+3\sin xy=0, \\ \sin xy=-1. \end{cases}$$

З першої системи знаходимо: $x=-3$, $xy=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, тобто $y=-\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi k$, або $y=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$; з другої системи $x=3$, $xy=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, тобто $y=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in Z$.

Відповідь: $x=\pm 3$, $y=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

Приклад 11. Знайти цілі додатні розв'язки рівняння

$$2x^2-xy-y^2+2x+7y=84.$$

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно змінної y, знаходимо

$$y^2-(x-7)y-2x^2-2x+84=0, \text{ звідки одержимо}$$

$$y=\frac{x-7\pm\sqrt{9x^2-6x-287}}{2}=\frac{x-7\pm\sqrt{(3x-1)^2-288}}{2}. \qquad (1)$$

З (1) видно, що величина $(3x-1)^2-288$ має бути повним квадратом, тобто $(3x-1)^2-288=t^2$. Оскільки за умовою x – натуральне число, то й числа $(3x-1)$ і t (як арифметичні значення кореня) – також натуральні, причому $t<3x-1$.

Нехай $t=(3x-1)-k$, де $k\in N$. Тоді

$$(3x-1)^2-288=\left((3x-1)-k\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2k(3x-1)=k^2+288,$$

звідки видно, що k – парне число, тобто $k=2l$, $l\in N$. Отже, маємо:

$$l(3x-1)=l^2+72 \quad \Rightarrow \quad 3x=l+\frac{72}{l}+1. \qquad (2)$$

Очевидно, що число $\frac{72}{l}$ має бути цілим, отже, l є дільником числа 72, його можливі значення: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. З них потрібно взяти лише ті, для яких число $l+\frac{72}{l}+1$ буде кратне трьом. Цій умові задовольняють числа $l_1=2$, $l_2=8$, $l_3=9$, $l_4=36$.

Підставляючи ці значення в (2), здобудемо для x два значення: 13 і 6.

Із рівняння (1) знайдемо відповідні (цілі додатні) значення y. В результаті отримаємо розв'язки $x_1=13,\ y_1=20$ та $x_2=6,\ y_2=0$.

Відповідь: $(13;20)$, $(6;0)$.

Приклад 12. Довести, що при всіх $x>0$ виконується нерівність

$$x^2+\pi x+4\pi\cos x>0.$$

Доведення. При $x\in(0;\pi/2]$ перші два доданки лівої частини рівності додатні, а третій – невід'ємний, отже, заданий вираз додатний. При $x\in[\pi;\infty)$ маємо

$$x^2+\pi x+4\pi\cos x\geq\pi^2+\pi^2-4\pi=2\pi(\pi-2)>0.$$

Коли ж $x\in(\pi/2;\pi)$ скористаємося нерівністю $\sin y<y$, де $y=x-\pi/2$. Тоді отримаємо

$$x^2+\pi x+4\pi\cos x=x^2+\pi x-4\pi\sin(x-\pi/2)>x^2+\pi x-4\pi=$$

$$=x^2-3\pi x+2\pi^2=(x-\pi)(x-2\pi)>0.$$

Таким чином, задана нерівність доведена для всіх $x>0$.

Приклад 13. Додатні числа $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ задовольняють нерівності $b_1{}^2\leq 4a_1c_1$, $b_2{}^2\leq 4a_2c_2$. Довести, що

$$4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2)>(b_1+b_2+1)^2.$$

Доведення. Розглянемо квадратні тричлени $a_1x^2 + b_1x + c_1$ і $a_2x^2 + b_2x + c_2$. За умовою їхні дискримінанти $D_1 \le 0$, $D_2 \le 0$, а старші коефіцієнти додатні. Тоді для будь-якого x мають місце нерівності

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0 \quad \text{і} \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 \ge 0 .$$

Зазначимо, що також $7x^2 + x + 2 > 0$ при всіх значеннях x. Склавши останні три нерівності, отримаємо

$$(a_1 + a_2 + 7)x^2 + (b_1 + b_2 + 1)x + (c_1 + c_2 + 2) > 0 .$$

Оскільки ця квадратична нерівність виконується для будь-якого x, то дискримінант відповідного квадратного тричлена від'ємний, тобто

$$4(a_1 + a_2 + 7)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 1)^2 ,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 14. Нехай $f(x) = x^2 + ax + b$ – квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами a і b, n – довільне натуральне число. Довести, що існує ціле число β таке, що $f(n)f(n+1) = f(\beta)$.

Доведення. Виконаємо перетворення:

$$f(n)f(n+1) = \left(n^2 + an + b\right)\left((n+1)^2 + a(n+1) + b\right) = n^2(n+1)^2 +$$

$$+a\left(n(n+1)^2 + n^2(n+1)\right) + b\left(n^2 + (n+1)^2\right) + a^2n(n+1) + b^2 + ab(2n+1) =$$

$$= n^2(n+1)^2 + a\left(2n^2(n+1) + n(n+1)\right) + b\left(2n(n+1) + 1\right) + a^2n^2 + a^2n + b^2 +$$

$$+ab(2n+1) = n^2(n+1)^2 + a^2n^2 + b^2 + 2an^2(n+1) + 2bn(n+1) + 2nab + a^2n +$$

$$+an(n+1) + ab + b = \left(n(n+1) + an + b\right)^2 + a\left(n(n+1) + an + b\right) + b =$$

$= f\left(n(n+1) + an + b\right) = f(\beta)$, що й треба було довести.

Приклад 15. Знайти найменше дійсне число A таке, що для кожного квадратного тричлена $f(x)$, який задовольняє умову

$$\left|f(x)\right| \le 1 \ \text{ при } 0 \le x \le 1,$$

виконується нерівність $f'(0) \le A$.

Розв'язання. Припустимо, що квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ задовольняє нерівність

$$|f(x)|\le 1 \text{ при } 0\le x\le 1. \qquad (1)$$

Тоді, зокрема, виконуються й такі нерівності

$$|f(0)|\le 1, \quad |f(1/2)|\le 1, \quad |f(1)|\le 1.$$

Оскільки

$$f(0)=c, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c, \quad f(1)=a+b+c,$$

$$f'(0)=b=4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)-3c, \text{ то}$$

$$|f'(0)|\le 4\left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|+|a+b+c|+3|c|=$$

$$=4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+3|f(0)|\le 4+1+3=8.$$

З іншого боку, квадратний тричлен

$$f(x)=-8x^2+8x-1=-2(2x-1)^2+1$$

задовольняє нерівність (1). Дійсно, при $0\le x\le 1$ виконується нерівність

$$-1\le 2x-1\le 1, \quad \text{тому} \quad 0\le (2x-1)^2\le 1.$$

Звідси одержимо $-2\le -2(2x-1)^2\le 0$ і $-1\le f(x)\le 1$.

Крім того, $f'(x)=-16x+8$, тому $f'(0)=8$. Таким чином, $A\ge 8$. Оскільки $A\le 8$ і $A\ge 8$, то $A=8$.

Відповідь: $A=8$.

Приклад 16. Довести, що коли корені квадратного тричлена $P(x)$ належать відрізку $[-1;1]$, причому $\max\limits_{|x|\le 1}|P(x)|=1$, то виконується нерівність

$$\max_{|x|\le 1}|P'(x)|\ge 1.$$

Доведення. З умови задачі випливає, що $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, при цьому можна вважати, що $a>0$ і $-1\le x_1\le x_2\le 1$. Тоді

$$P'(x)=a(2x-x_1-x_2).$$

Функція $\left|P(x)\right|$ на відрізку $[-1;1]$ набуває найбільшого значення або на його кінцях, тобто при $x=1$ $(x=-1)$, або в точці $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. Розглянемо кожен з цих випадків.

1. Нехай $\max\limits_{|x|\le 1} P(x)=P(1)$. Тоді з рівності $P(1)=1$ виходить, що

$$a=\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \text{ і тому } P'(1)=\frac{2-x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли $\left|P(x)\right|$ набуває найбільшого значення в точці $x=-1$.

2. Нехай $\max\limits_{|x|\le 1}\left|P(x)\right|=\left|P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\right|$ і $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=-1$. Тоді

$$a=\frac{4}{(x_2-x_1)^2},\qquad P'\left(x_2\right)=\frac{4(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}=\frac{4}{x_2-x_1}\ge\frac{4}{2}=2,$$

тобто $\max\limits_{|x|\le 1}\left|P'(x)\right|\ge 1$, що і треба було довести.

Приклад 17. Довести, що коли $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, де a, b, c – раціональні числа, то $a=b=c=0$.

Доведення. Нехай $x=\sqrt[3]{2}$, тоді $\sqrt[3]{4}=x^2$, отже, задану рівність запишемо так:

$$cx^2+bx+a=0. \tag{1}$$

Оскільки $x^3=2$, то (1) можна подати у вигляді

$$2cx^2+2bx+ax^3=0, \text{ або } \quad ax^2+2cx+2b=0 \ (x\ne 0). \tag{2}$$

Помножимо (1) на a, а (2) на c і віднімемо, одержимо

$$abx+a^2-2c^2x-2bc=0 \quad\Rightarrow\quad (ab-2c^2)x+a^2-2bc=0, \tag{3}$$

$$(ab-2c^2)\sqrt[3]{2}+a^2-2bc=0. \tag{4}$$

Рівність (4) можлива лише за умови $ab-2c^2=0$, бо інакше $\sqrt[3]{2}$ буде раціональним числом $\dfrac{a^2-2bc}{2c^2-ab}$, що неможливо.

Отже, $ab-2c^2=0$, тоді з (3) отримаємо $a^2-2bc=0$, звідки матимемо

$$ab=2c^2, \tag{5}$$

$$a^4=4b^2c^2. \tag{6}$$

Помноживши (5) на $2b^2$ і віднявши (6), одержимо

$$a^4-2ab^3=0 \quad \Rightarrow \quad a(a^3-2b^3)=0.$$

Якщо припустити, що $a\neq 0$, то $a^3-2b^3=0$, тобто $\dfrac{a^3}{b^3}=2$, звідки $b\neq 0$ і $\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$, що неможливо, оскільки $\sqrt[3]{2}$ не може дорівнювати раціональному числу.

Отримана суперечність доводить, що $a=0$. З (5) виходить, що і $c=0$. Підставивши $a=c=0$ в задане рівняння, знайдемо, що і $b=0$. Твердження доведено.

Приклад 18. Квадратний тричлен $P(x)=ax^2+bx+c$ такий, що рівняння $P(x)=x$ дійсних коренів не має. Довести, що в цьому разі рівняння $P(P(x))=x$ також не має дійсних коренів.

Доведення. Оскільки рівняння $ax^2+bx+c=x$ не має дійсних коренів, то квадратний тричлен

$$P(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$$

при всіх x набуває значень тільки одного знаку. Нехай для визначеності $P(x)-x>0$ при всіх x. Тоді для будь-якого x_0 матимемо

$$P(P(x_0))-P(x_0)>0, \qquad \text{тобто} \qquad P(P(x_0))>P(x_0).$$

І оскільки за припущенням $P(x_0)-x_0>0$, тобто $P(x_0)>x_0$, то $P(P(x_0))>x_0$. А це означає, що x_0 не може бути коренем рівняння четвертої степені $P(x)=x$.

Приклад 19. Графік квадратного тричлена

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

з раціональними коефіцієнтами зсунули на вектор $\overline{U} = (x_0; y_0)$, координати якого також раціональні числа. Довести, що точка перетину цих двох графіків має раціональні координати.

Доведення. При паралельному зсуві графіка квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ довільна точка $M(x; y)$ перейде в точку $M_1(x_1; y_1)$, координатами якої будуть числа $x_1 = x + x_0$, $y_1 = y + y_0$. Тоді маємо

$$x = x_1 - x_0, \;\; y = y_1 - y_0; \quad y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)^2 + b(x_1 - x_0) + c,$$

бо числа *x* і *y* задовольняють рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Таким чином, записавши x, y замість x_1, y_1, отримаємо рівняння, що відповідає зсунутому графіку:

$$y = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c + y_0. \qquad (2)$$

Враховуючи, що вектор $\overline{U}$ не паралельний осі *Oy*, тобто $x_0 \neq 0$, із системи рівнянь (1) і (2) знайдемо координати $x_п$ і $y_п$ точки перетину початкового і зсунутого графіків

$$x_п = \frac{ax_0^2 - bx_0 + y_0}{2ax_0}; \;\; y_п = a\left(\frac{ax_0^2 - bx_0 + y_0}{2ax_0}\right) + b\left(\frac{ax_0^2 - bx_0 + y_0}{2ax_0}\right) + c.$$

За умовою задачі числа a, b, c, x_0 і y_0 – раціональні, тому $x_п$ і $y_п$ також будуть раціональними, що й треба було довести.

Приклад 20. Довести, що комплексні числа a і b задовольняють умову $a^2 = 2b \neq 0$ тоді й тільки тоді, коли корені тричлена $x^2 + ax + b$ утворюють на комплексній площині дві вершини рівнобедреного прямокутного трикутника, у якого вершина прямого кута розташована в початку координат.

Розв'язання. Позначимо через x_1 і x_2 корені тричлена $x^2 + ax + b$. Точки x_1 і x_2 утворюють вершини заданого в умові задачі трикутника тоді й тільки тоді, коли $x_1 \neq 0$ і число x_2/x_1 дорівнює i або $-i$, оскільки модулі чисел збігаються, а їхні аргументи відрізняються на величину $\pi/2 + 2\pi n$ для деякого числа $n \in Z$.

А це означає наступне: або $x_2 = i \cdot x_1$, або $x_1 = i \cdot x_2$, тобто корені заданого тричлена мають вигляд x_0 та $i \cdot x_0$ $(x_0 \neq 0)$.

За теоремою Вієта останні умови еквівалентні системі

$$\begin{cases} (1+i)x_0 = -a, \\ i \cdot x_0^2 = b, \\ x_0 \neq 0, \end{cases}$$

яка сумісна тоді й тільки тоді, коли $a^2 = 2b \neq 0$, оскільки $2\left(ix_0^2\right) = \left((1+i)x_0\right)^2$. Твердження доведено.

Самостійна робота 1.5

1. Знайти дійсні корені рівняння $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

2. Визначити, чи можна подати квадратний тричлен $9n^2 - 12n + 6$, як різницю квадратів двох лінійних двочленів.

3. Довести, що тричлен $y = x^2 + 5x + 16$ при будь-якому цілому x не ділиться на 169.

4. Довести, що для коренів квадратного тричлена $x^2 + px - \dfrac{1}{2p^2} = 0$, де $p \in R$, $p \neq 0$, виконується нерівність $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

5. Довести, що вираз $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ є квадратом тричлена.

6. Знайти всі розв’язки системи рівнянь, які задовольняють умову $z \geq 0$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16. \end{cases}$$

7. Довести тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

Відповіді: **1.** $x = 3$, $y = 4$; **2.** Ні; **6.** $(-2;1;2)$.

2. МНОГОЧЛЕНИ

Многочленом степеня n від дійсного чи комплексного аргументу x називається алгебраїчний вираз вигляду

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 ,$$

де $n \in Z_+$; a_0, a_1, $a_2, ... a_n \in C$, причому, якщо $n \geq 1$, то $a_n \neq 0$.

Числа a_n, a_{n-1}, ..., a_0 називають ***коефіцієнтами многочлена P(x)***, зокрема a_n – ***старшим коефіцієнтом*** (***коефіцієнтом при старшому степені***), a_0 – ***вільним членом***.

Многочлен нульового степеня – відмінна від нуля константа. Якщо ж ця константа дорівнює нулю, маємо нуль-многочлен.

Символ $\deg P$ означає степінь многочлена.

Теорема 1. Два многочлени

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{і}$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$$

називають рівними тоді й тільки тоді, коли $n = m$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, ... a_n = b_n$.

Два многочлени, як і будь-які алгебраїчні вирази, можна додавати, віднімати і множити за звичайними правилами розкриття дужок і зведення подібних членів.

Теорема 2. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – довільні многочлени. Тоді:

- функція $S(x) = P(x) + Q(x)$ також є многочленом, причому

$$\deg S = \max\,(\deg P, \deg Q);$$

- функція $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ також є многочленом, причому якщо $P(x)$ і $Q(x)$ не тотожні нулі, то $R(x)$ також не є тотожним нулем і

$$\deg R = \deg P + \deg Q .$$

Операції додавання і множення многочленів підпорядковуються таким законам:

1) комутативності

$$P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x),$$

$$P(x)\cdot Q(x)=Q(x)\cdot P(x);$$

2) асоціативності

$$\big(P(x)+Q(x)\big)+R(x)=P(x)+\big(Q(x)+R(x)\big),$$

$$\big(P(x)\cdot Q(x)\big)\cdot R(x)=P(x)\cdot\big(Q(x)\cdot R(x)\big);$$

3) дистрибутивності

$$\big(P(x)+Q(x)\big)\cdot R(x)=P(x)\cdot R(x)+Q(x)\cdot R(x).$$

Крім перелічених, існує операція ділення з остачею многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$.

Теорема 3. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – довільні многочлени, причому $Q(x)$ не тотожний нуль. Тоді існують єдині многочлени $S(x)$ і $R(x)$, які задовольняють умови:

$$P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x), \qquad \deg R<\deg Q.$$

Тут $S(x)$ – ***частка***, а $R(x)$ – ***залишок*** від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. Якщо $R(x)\equiv 0$, то говорять, що многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x)$.

Теорема 4. Якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ в умовах теореми 3 дійсні (раціональні), то многочлени $S(x)$ і $R(x)$ також матимуть дійсні (раціональні) коефіцієнти. Коли ж коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ є цілими числами, а старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ дорівнює 1 або -1, то многочлени $S(x)$ і $R(x)$ також матимуть цілі коефіцієнти.

Число x_0 називається ***коренем многочлена*** $P(x)$, якщо $P(x_0)=0$.

Теорема 5 (Безу). Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $(x-x_0)$ дорівнює $P(x_0)$.

Наслідок 1. Многочлен $P(x)$ ділиться на двочлен $(x-x_0)$ тоді й тільки тоді, коли число x_0 є його коренем.

Наслідок 2. Якщо $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ – різні корені многочлена , то $P(x)$ ділиться на $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Наслідок 3. Число різних коренів многочлена, відмінного від нуля, не більше, ніж його степінь.

- Число x_0 називається ***коренем многочлена*** $P(x)$ ***кратності k*** $(k \in N)$, якщо цей многочлен ділиться на $(x-x_0)^k$, але не ділиться на $(x-x_0)^{k+1}$.

- Якщо x_0 – корінь кратності k многочлена $P(x)$, то це рівносильно виконанню таких умов:

$$P(x_0)=0,\ P'(x_0)=0,\ P''(x_0)=0,\ \ldots,\ P^{(k-1)}(x_0)=0,\ P^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Теорема 6 (Основна теорема алгебри). Будь-який многочлен степеня $n \geq 1$ має рівно n комплексних коренів.

Наслідок 1. Якщо значення двох многочленів степеня не вище n збігаються в $n+1$ різних точках, то ці многочлени рівні.

Наслідок 2. Будь-який многочлен $P(x)$ степеня $n \geq 0$ єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) можна подати у вигляді

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

де a_n – старший коефіцієнт, а $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ – його корені.

Наслідок 3. Многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x)$ (не тотожний нуль) тоді й тільки тоді, коли кожен корінь многочлена $Q(x)$ є коренем многочлена $P(x)$, причому не меншої кратності.

Теорема 7 (Вієта). Нехай многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ має корені $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. Тоді виконуються такі рівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Має місце й обернена теорема.

Теорема 8. Числа $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \in C$, які задовольняють співвідношення теореми 7, є коренями многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Теорема 9. Якщо $P(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами і комплексне число z з ненульовою уявною частиною є його коренем, то спряжене комплексне число $\overline{z}$ теж є його коренем, причому тієї ж кратності. Зокрема, многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен

$$(x-z)^k (x-\overline{z})^k = \left(x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2\right)^k,$$

де k – кратність коренів z і $\overline{z}$.

Як наслідок отримаємо наслідок 2 із теореми 6.

Наслідок. Будь-який многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами степеня n єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) може бути поданий у вигляді:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)(x^2 + 2b_1 x + c_1) \ldots (x^2 + 2b_t x + c_t),$$

де $m,\ t \geq 0$, $m + 2t = n$, a_n – старший коефіцієнт многочлена $P(x)$, $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m \in R$, причому квадратні тричлени

$$(x^2 + 2b_1 x + c_1),\ (x^2 + 2b_2 x + c_2),\ \ldots\ ,\ (x^2 + 2b_t x + c_t)$$

не мають дійсних коренів, тобто $b_1^2 < c_1,\ \ldots\ ,\ b_t^2 < c_t$.

Теорема 10. Якщо раціональне число $\frac{p}{q}$, яке є нескорочуваним дробом, – корінь многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами, то число p є дільником вільного члена a_0, а q – дільником старшого коефіцієнта a_n.

Наслідок. Якщо $a_n = 1$, то цілі корені, якщо вони є, обов'язково будуть дільниками вільного члена a_0.

Теорема 11. Рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Теорема 12. Кожен корінь многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами є або цілим числом, або ірраціональним.

Теорема 13. Нехай $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – заданий многочлен. Тоді мають місце рівності

$$P(0) = a_0,\ P'(0) = a_1,\ P''(0) = 2a_2,\ \ldots\ ,\ P^{(n)}(0) = n!\,a_n.$$

Отже, многочлен $P(x)$ можна подати у вигляді

$$P(x) = \frac{P(0)}{0!} + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ \text{ де }\ 0! = 1.$$

Теорема 14. Якщо α – корінь кратності $k \geq 2$ многочлена $P(x)$, то число α також є коренем многочлена $P'(x)$ кратності $(k-1)$.

Наслідок. Якщо α – простий корінь многочлена $P(x)$, то число α не є коренем многочлена $P'(x)$.

ПОЗНАЧЕННЯ

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел;

Q – множина раціональних чисел;

I – множина ірраціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел.

2.1. ПОДІЛЬНІСТЬ МНОГОЧЛЕНІВ. РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ

Приклад 1. Знайти суму дійсних коренів рівняння

$$2x^6-3x^5+3x^4+x^3-3x^2+3x-1=0.$$

Розв'язання. Не знаходячи всіх коренів, за теоремою Вієта можна визначити, що їх сума дорівнює $\frac{3}{2}$. Але серед них, крім дійсних, можуть бути і комплексні корені.

Знайдемо дійсні корені рівняння. Позначимо ліву частину рівняння $P(x)$. Оскільки $P(-1)=0$, $P(1/2)=0$, то за теоремою Вієта многочлен $P(x)$ ділиться на $2x^2+x-1$ без остачі. Виконаємо ділення:

$$\begin{array}{l|l}
2x^6-3x^5+3x^4+x^3-3x^2+3x-1 & 2x^2+x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{2x^6+x^5-x^4} & x^4-2x^3+3x^2-2x+1 \\
\quad -4x^5+4x^4+x^3 & \\
\quad \underline{-4x^5-2x^4+2x^3} & \\
\qquad\quad 6x^4-x^3-3x^2 & \\
\qquad\quad \underline{6x^4+3x^3-3x^2} & \\
\qquad\qquad -4x^3+0\cdot x^2+3x & \\
\qquad\qquad \underline{-4x^3-2x^2+2x} & \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2+x-1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2x^2+x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Після цього задане рівняння набуває вигляду

$$P(x)=(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)(2x^2+x-1)=0.$$

Розкладемо многочлен у першій дужці на два співмножника, скориставшись методом невизначених коефіцієнтів:

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x^2+bx+c)(x^2+px+q),$$

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^4+(b+p)x^3+(c+pb+q)x^2+(bq+cp)x+cq.$$

$$\begin{cases} b+p=-2, \\ c+pb+q=3, \\ bq+cp=-2, \\ cq=1, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad b=-1,\quad c=1,\quad p=-1,\quad q=1.$$

Таким чином, $P(x)=(x^2-x+1)^2(2x^2+x-1)$. Оскільки квадратний тричлен x^2-x+1 дійсних коренів не має, то залишається сума дійсних коренів тричлена $2x^2+x-1$, тобто $-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Визначіть, при яких натуральних *n* можна скоротити дріб

$$\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+3}{n^4+6n^3+15n^2+18n+8}.$$

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник на множники

$$n^4+6n^3+13n^2+12n+3=(n^4+6n^3+9n^2)+4n^2+12n+3=$$

$$=(n^2+3n+1)(n^2+3n+3);$$

$$n^4+6n^3+15n^2+18n+8=(n^4+6n^3+9n^2)+6n^2+18n+8=$$

$$=(n^2+3n)^2+6(n^2+3n)+8=(n^2+3n+2)(n^2+3n+4).$$

Оскільки числа n^2+3n+1 і n^2+3n+3 взаємно прості з числом n^2+3n+2, то чисельник дробу не ділиться на n^2+3n+2.

Числа n^2+3n+3 і n^2+3n+4 також взаємно прості, тому скорочення може відбутися тільки за наявності спільних дільників чисел n^2+3n+1 і n^2+3n+4.

Припустимо, що $d\neq 1$ – спільний дільник чисел n^2+3n+1 і n^2+3n+4, тоді їхня різниця 3 ділиться на *d*, тобто $d=3$. Але при цьому має ділитися на 3 і саме число n^2+3n+1, що неможливо при будь-якому *n*. Отже, заданий дріб нескоротний при будь-якому натуральному *n*.

Приклад 3. Многочлен $P(x)$ ділиться без остачі на $x+1$, а при діленні на x^2-3x має остачу $7x-1$. Знайти остачу від ділення $P(x)$ на x^3-2x^2-3x.

Розв'язання. За теоремою про ділення многочлена з остачею маємо

$$P(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)Q(x) + ax^2 + bx + c\text{, або}$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 3x)Q(x) + ax^2 + bx + c,$$

де $Q(x)$ – неповна частка.

Треба знайти такий многочлен $R(x) = ax^2 + bx + c$, який би ділився без остачі на $x+1$, а при діленні на $x^2 - 3x$ давав остачу $7x - 1$, тобто

$$R(-1) = 0, \quad R(x) = a(x^2 - 3x) + 7x - 1.$$

З останньої рівності знаходимо $4a - 8 = 0$, $a = 2$. Тоді

$$R(x) = 2(x^2 - 3x) + 7x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

Відповідь: $R(x) = 2x^2 + x - 1$.

Приклад 4. Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ з цілими коефіцієнтами дорівнює 5 при $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Визначити, чи існує ціле число *x*, при якому цей многочлен дорівнює 6.

Розв'язання. За умовою задачі $x = 1$, $x = 2$ та $x = 3$ є коренями многочлена $P_n(x) - 5$. Тому

$$P_n(x) - 5 = (x-1)(x-2)(x-3)\,T_{n-3}(x),$$

де $T_{n-3}(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо існує таке число $x = c$, що $P_n(c) = 6$, то матимемо

$$1 = (c-1)(c-2)(c-3)\,T_{n-3}(c).$$

Але це неможливо, оскільки число 1 не можна подати у вигляді добутку чотирьох множників, принаймні три з яких різні. Отже, не існує цілого *x*, про яке йде мова в задачі.

Відповідь: не існує.

Приклад 5. Многочлен $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ набуває цілих значень при $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Довести, що цей многочлен набуває цілих значень при всіх цілих значеннях *x*.

Доведення. Справедлива тотожність:

$$P(x)=6a\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d\,. \qquad (1)$$

За умовою $P(0)=d$, $P(1)=a+b+c+d$ – цілі числа. Тому $a+b+c$ – також ціле число. Крім того, $P(-1)=2-(a+b+c)+d$ та $2b$ – також є цілими.

Оскільки $P(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d$ – ціле число, то $6a$ – також ціле.

При будь-якому x числа $\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$ і $\frac{x(x-1)}{2}$ є цілими, бо добуток трьох послідовних чисел ділиться на 6, а двох послідовних чисел – на 2.

Таким чином, вираз (1) при будь-яких x набуває цілих значень, звідки й випливає справедливість твердження задачі.

Приклад 6. Знайти остачу від ділення $f(x^6)$ на $f(x)$, якщо

$$f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$$

Розв'язання. Зазначимо, що $(x-1)f(x)=x^6-1$. Далі подамо многочлен $f(x^6)$ у такому вигляді:

$$f(x^6)=x^{30}+x^{24}+x^{18}+x^{12}+x^6+1=$$

$$=(x^{30}-1)+(x^{24}-1)+(x^{18}-1)+(x^{12}-1)+(x^6-1)+6.$$

В останньому записі (x^6-1), а значить, і $f(x)$ є дільником кожної дужки, тобто $f(x^6)=g(x)\cdot f(x)+6$, де $g(x)$ – деякий многочлен (частка від ділення). Отже, остача від ділення $f(x^6)$ на $f(x)$ дорівнює 6.

Відповідь: 6.

Приклад 7. Довести, що многочлен $x^{101}+x^{100}+x^{99}+...+x^2+x+1$ ділиться на многочлен $x^{33}+x^{32}+x^{31}+...+x^2+x+1$.

Доведення. Це дійсно так, бо

$$x^{101}+x^{100}+x^{99}+...+x^2+x+1=(1+x+x^2+...+x^{33})+$$

$$+x^{34}(1+x+x^2+...+x^{33})+x^{68}(1+x+x^2+...+x^{33})=$$

$$=(1+x^{34}+x^{68})(1+x+x^2+...+x^{33}).$$

Твердження доведено.

Приклад 8. При яких b і a многочлен x^3+bx+1 ділиться на $(x-a)$ без остачі та частка від ділення $Q(x)>0$ при всіх *x*.

Розв'язання. Виконавши ділення многочлена x^3+bx+1 на $(x-a)$, отримаємо частку $Q(x)=x^2+ax+a^2+b$ та остачу $R=a^3+ab+1$.

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^3+bx+1 \\ \underline{x^3-ax^2} \end{array} & \begin{array}{l} x-a \\ \hline x^2+ax+a^2+b \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} ax^2+bx \\ \underline{ax^2-a^2x} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} (a^2+b)x+1 \\ \underline{(a^2+b)x-a(a^2+b)} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^3+ab+1 &
\end{array}$$

За умовою $R=0$, тобто $a^3+ab+1=0$, звідки знаходимо $b=-a^2-\dfrac{1}{a}$ і

$$Q(x)=x^2+ax-\frac{1}{a}\ (a\neq 0).$$

Оскільки за умовою квадратний тричлен $Q(x)$ набуває тільки додатних значень при всіх *x*, його дискримінант $D<0$, тобто

$$\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a}<0,\quad \text{або}\quad \frac{a^3+4}{4a}<0,\quad \text{звідки одержимо}\quad -\sqrt[3]{4}<a<0.$$

Відповідь: $-\sqrt[3]{4}<a<0$; $b=-a^2-1/a$.

Приклад 9. При яких a і b многочлен $x^4-x^3+x^2+ax+b$ ділиться без остачі на x^2+2x+5.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки дискримінант квадратного тричлена x^2+2x+5 від'ємний, то його корені комплексні, тому застосовувати метод, заснований на теоремі Безу, недоцільно.

Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів:

$$x^4-x^3+x^2+ax+b=(x^2+2x+5)(x^2+px+q),$$

$$x^4-x^3+x^2+ax+b=x^4+(p+2)x^3+(q+2p+5)x^2+(2q+5p)x+5q.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3, x^2, x та вільні члени, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p+2=-1, \\ q+2p+5=1, \\ 2q+5p=a, \\ 5q=b, \end{cases}$$

звідки знаходимо $p=-3$, $q=2$, $a=-11$, $b=10$.

Другий спосіб. Очевидно, що

$$x^4-x^3+x^2+ax+b=x^4+2x^3+5x^2-3x^3-4x^2+ax+b=$$

$$=x^2(x^2+2x+5)-3x(x^2+2x+5)+2\left(x^2+\frac{15+a}{2}x+\frac{b}{2}\right).$$

Звідси виходить, що для подільності заданого многочлена на x^2+2x+5 необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$x^2+\frac{15+a}{2}x+\frac{b}{2}=x^2+2x+5, \text{ звідки знаходимо } a=-11,\ b=10.$$

Відповідь: $a=-11$, $b=10$.

Приклад 10. Визначити, при якому a многочлен $P(x)=x^{13}+x+90$ ділиться на $Q(x)=x^2-x+a$.

Розв'язання. Оскільки $Q(0)=a$ і $Q(1)=a$, а $P(0)=90$ і $P(1)=92$, то найбільший спільний дільник чисел 90 і 92, тобто 2, повинен ділитись на a. Далі, оскільки $Q(-1)=a+2$, $P(-1)=88$, то $a\neq 1$, $a\neq -2$. Взявши до уваги, що $Q(-2)=a+6$, $P(-2)=-8104$, приходимо до висновку, що $a\neq -1$. Отже, або $a=2$, або воно зовсім не існує. Дійсно, при $a=2$ многочлен $P(x)$ ділиться на $Q(x)$:

$$\frac{x^{13}+x+90}{x^2-x+2}=x^{11}+x^{10}-x^9-3x^8-x^7+5x^6+7x^5-3x^4-17x^3-11x^2+23x+45.$$

Відповідь: $a=2$.

Приклад 11. Визначити, при яких a і n многочлен $P(x)=x^n-ax^{n-1}+ax-1$ ділиться на $(x-1)^2$.

Розв'язання. Запишемо заданий многочлен у вигляді

$$P(x) = x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1).$$

Оскільки $\dfrac{x^{m+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{m-1} + x^m$, то

$$\frac{P(x)}{x-1} = \left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1\right) - ax\left(x^{n-3} + x^{n-4} + ... + x + 1\right).$$

Для того, щоб права частина ділилася на $(x-1)$, необхідно і достатньо, аби при $x = 1$ вона оберталася на нуль (теорема Безу), тобто $n - a(n-2) = 0$, звідки $a = \dfrac{n}{n-2}$. Отже, щоб многочлен $P(x)$ ділився на $(x-1)^2$, необхідно і достатньо, щоб $n > 2$ і $a = \dfrac{n}{n-2}$.

Відповідь: $a = \dfrac{n}{n-2}$, $n > 2$.

Приклад 12. Знайти всі многочлени третього степеня $P(x)$, для яких $P(x) + 2$ ділиться на $(x-1)^2$, а $P(x) - 2$ ділиться на $(x+1)^2$.

Розв'язання. Перший спосіб. Нехай $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. За умовою $P(x) + 2$ має ділитися на $(x-1)$, отже, за наслідком з теореми Безу маємо $P(1) + 2 = 0$, тобто $a + b + c + d + 2 = 0$, звідки $d + 2 = -a - b - c$. Тоді

$$P(x) + 2 = a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) = (x - 1)\left(a(x^2 + x + 1) + b(x + 1) + c\right).$$

Оскільки $P(x) + 2$ ділиться на $(x-1)^2$, то вираз у другій дужці $a(x^2 + x + 1) + b(x + 1) + c$, у свою чергу, має ділитися на $(x-1)$, тому $3a + 2b + c = 0$.

Міркуючи аналогічно, з умови, що $P(x) - 2$ ділиться на $(x+1)^2$, отримаємо $-a + b - c + d - 2 = 0$, звідки $d - 2 = a - b + c$. Тоді матимемо

$$P(x) - 2 = a(x^3 + 1) + b(x^2 - 1) + c(x + 1) = (x + 1)\left(a(x^2 - x + 1) + b(x - 1) + c\right),$$

звідки одержимо $3a - 2b + c = 0$.

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a+b+c+d+2=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ -a+b-c+d-2=0, \\ 3a-2b+c=0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $b=d=0$, $a=1$, $c=-3$.

Отже, умовам задачі задовольняє єдиний многочлен $P(x)=x^3-3x$.

Другий спосіб. Оскільки $x=1$ і $x=-1$ є коренями другої кратності многочленів $P(x)+2$ і $P(x)-2$ відповідно, то похідна від цих многочленів

$$\left(P(x)+2\right)'=\left(P(x)-2\right)'=\left(P(x)\right)'=3ax^2+2bx+c$$

матиме ті самі корені тільки першої кратності, тобто

$$P'(1)=3a+2b+c=0 \text{ і } P'(-1)=3a-2b+c=0.$$

Враховуючи значення виразів $P(x)+2$ і $P(x)-2$ в точках $x=1$ і $x=-1$ відповідно, одержимо ту саму систему рівнянь відносно коефіцієнтів *a*, *b*, і *c*, що і в першому способі.

Відповідь: $P(x)=x^3-3x$.

Приклад 13. Довести, що при будь-якому цілому n многочлени n^5+4n^3+3n і n^4+3n^2+1 не мають спільних дільників, відмінних від одиниці.

Доведення. Для заданих многочленів очевидна справедливість таких рівностей:

$$n^5+4n^3+3n=n(n^4+4n^2+3)=n(n^2+1)(n^2+3), \quad (1)$$

$$n^4+3n^2+1=n^2(n^2+3)+1, \quad (2)$$

$$n^4+3n^2+1=(n^2+1)(n^2+2)-1. \quad (3)$$

Із (1) зрозуміло, що будь-який простий дільник числа n^5+4n^3+3n є дільником принаймні одного з чисел n, n^2+1, n^2+3. Рівність (2) свідчить про те, що дільником числа n^4+3n^2+1 не може бути жоден простий дільник чисел n та n^2+3, а із (3) виходить, що для числа n^4+3n^2+1 не може бути дільником жоден простий дільник числа n^2+1.

Отже, многочлени n^5+4n^3+3n і n^4+3n^2+1 не мають спільних дільників, відмінних від одиниці, що й треба було довести.

Приклад 14. Довести, що для будь-якого значення $n \in Z_+$ многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ ділиться на x^2+x+1.

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції для всіх $n \in Z_+$. При $n=0$ твердження справедливе, оскільки в цьому випадку

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv x^2+x+1.$$

Припустимо, що твердження виконується для деякого значення $n-1$, тобто $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ ділиться на x^2+x+1.

Заданий многочлен подамо у вигляді

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv (x+1)^2(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1}=(x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+$$

$$+x\cdot x^{n+1} \equiv (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x\left((x+1)^{2n-1}+x^{n+1}\right).$$

Очевидно, що кожен з його доданків ділиться на x^2+x+1, а це й означає, що твердження задачі справедливе для всіх $n \in Z_+$.

Приклад 15. Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x) \equiv 0, \quad x \in R.$$

Розв'язання. Підставляючи в задану тотожність значення $x=1;\ x=0;\ x=-1$, знаходимо $P(1)=P(0)=P(-1)=0$, тобто шуканий многочлен має корені $0; \pm 1$, а значить, ділиться на $x(x-1)(x+1)=x^3-x$. Далі, підставляючи в тотожний вираз $P(x)=(x^3-x)\cdot Q(x)$, отримаємо для многочлена $Q(x)$ тотожність

$$Q(x+1)-Q(x)=0,$$

звідки маємо $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\ldots$ і т. д. Це означає, що $Q(x)=C-$ константа, а шукані многочлени мають вигляд $P(x)=C(x^3-x)$. Безпосередня перевірка показує, що такі многочлени задовольняють задану тотожність.

Відповідь: $P(x)=C(x^3-x)$, де $C-$ довільна константа.

Приклад 16. Нехай многочлени $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ і $S(x)$ задовольняють тотожність

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)\equiv(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x).$$

Довести, що многочлен $P(x)$ ділиться на $(x-1)$.

Доведення. Нехай $d_0,\ d_1, \dots, d_n$ – коефіцієнти многочлена $S(x)$, тобто

$$S(x)=d_0+d_1x+\dots+d_nx^n.$$

Обидві частини заданої тотожності помножимо на $x-1$, отримаємо

$$(x-1)\Big(P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)\Big)\equiv(x^5-1)S(x), \quad \text{або}$$

$$P(x^5)+(x^5-1)S_1(x)\equiv-(x^5-1)S_2(x)+xP(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5),$$

$$\text{де}\ \ S_1(x)=d_0+d_5x^5+d_{10}x^{10}+\dots+d_{5m}x^{5m},$$

$$S_2(x)=S(x)-S_1(x); \qquad m=\left[\frac{n}{5}\right].$$

Оскільки до лівої частини останньої тотожності змінна x входить лише з показниками, кратними п'яти, а до правої частини – лише з показниками, не кратними п'яти, то обидві частини тотожності дорівнюють нулю. Отже, маємо

$$P(x^5)=(1-x^5)S_1(x).$$

Підставляючи в цю тотожність $x=1$, отримаємо $P(1)=0$. Тому згідно з теоремою Безу $P(x)$ ділиться на $(x-1)$, що й потрібно було довести.

Приклад 17. Знайти умову, при якій многочлен $x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1$ ділиться на многочлен $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1$.

Розв'язання. Обидва многочлени є геометричними прогресіями, отже

$$x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1=\frac{x^{m+1}-1}{x-1},$$

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

і частка від ділення першого многочлена на другий дорівнює $\dfrac{x^{m+1}-1}{x^{n+1}-1}$.

Цей вираз можна записати так: $\dfrac{\left(x^{n+1}\right)^{\frac{m+1}{n+1}}-1}{x^{n+1}-1}$. Звідси очевидно: щоб перший многочлен ділився на другий, достатньо, щоб дріб $\frac{m+1}{n+1}$ був цілим додатним числом, тобто $m+1$ має бути кратним $n+1$.

Відповідь: $m+1$ має бути кратним $n+1$.

Приклад 18. Розкласти на множники многочлени

1) $x^{12}+x^6+1$; **2)** x^8+x^7+1.

Розв'язання. Після очевидних перетворень одержимо:

1) $x^{12}+x^6+1=x^{12}+2x^6+1-x^6=(x^6+1)^2-(x^3)^2=(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$;

2) $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6+x^5-x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+$

$+x-x+1=x^6(1+x+x^2)-x^4(1+x+x^2)+x^3(1+x+x^2)-x(1+x+x^2)+$

$+(1+x+x^2)=(1+x+x^2)(x^6-x^4+x^3-x+1)$.

Відповідь: **1)** $(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$; **2)** $(1+x+x^2)(x^6-x^4+x^3-x+1)$.

Приклад 19. Розкласти на множники многочлени:

1) $P(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$;

2) $P(x,y,z)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;

3) $P(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3-x^2)+(z-x)^3$.

Розв'язання. 1). Виділивши повний квадрат, отримаємо

$$P(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=$$

$$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=\left(x^2-(y+z)^2\right)\left(x^2-(y-z)^2\right)=$$

$$=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$$

2). Оскільки $P(x,y,z)=0$ при $x=y$, то за теоремою Безу $P(x,y,z)$ ділиться без остачі на $(x-y)$.

Зазначимо, що заданий многочлен не змінюється при будь-якій круговій перестановці змінних x, y і z, тому $P(x,y,z)=0$ також при $y=z$ і $z=x$, а отже, ділиться на $(y-z)$ і $(z-x)$. Таким чином, розклад на множники має вигляд

$$P(x,y,z)=k(x-y)(y-z)(z-x),$$

де k – деяке число. Для знаходження k надамо змінним x, y і z певних значень, наприклад, $x=1$, $y=2$, $z=3$. При цьому $2=2k$, $k=1$, і остаточно одержимо розклад

$$P(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

3). Запишемо $z-x$ у вигляді $z-x=(z-y)-(x-y)$ і застосуємо формулу

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b).$$

Тоді отримаємо

$$P(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+\big((z-y)-(x-y)\big)^3=(x-y)^3+$$

$$+(y-z)^3+\Big((z-y)^3-(x-y)^3\Big)-3(z-y)(x-y)\big((z-y)-(x-y)\big)=$$

$$=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Відповідь: **1)** $P(x,y,z)=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$;

2) $P(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$; **3)** $P(x,y,z)=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Приклад 20. Задано многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами і три різних цілих числа a, b і c. Довести, що не може статися так, що $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$.

Доведення. Припустимо протилежне, – що для різних цілих чисел a, b і c виконуються рівності $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$. Тоді

$$P(a)-P(b)=b-c,\quad P(b)-P(c)=c-a,\quad P(c)-P(a)=a-b.$$

Але для довільних цілих чисел k і n різниця $P(k)-P(n)$ ділиться на $(k-n)$. Звідси виходить, що

$$b-c \,\vdots\, a-b,\ \ c-a \,\vdots\, b-c,\ \ a-b \,\vdots\, c-a,$$

отже, $a=b=c$, що суперечить припущенню. Таким чином, не існує різних чисел a, b і c, таких, що $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$. Твердження доведено.

Самостійна робота 2.1

1. Розкласти на множники многочлени: **а)** $x^8 + x + 1$; **б)** $x^{12} + 5x^6 + 9$.

2. Не виконуючи ділення, знайти остачу $R(x)$ від ділення многочлена $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 3x + 1$ на $x^2 - x - 2$.

3. Скоротити дріб $\dfrac{x^{47} + x^{46} + ... + x + 1}{x^{15} + x^{14} + ... + x + 1}$.

4. Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність $xP(x-1) = (x-2)P(x)$.

Відповіді: **1а)** $(1 + x + x^2)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$; **1б)** $(x^6 + x^3 + 3)(x^6 - x^3 + 3)$; **2.** $R(x) = 18x + 15$; **3.** $x^{32} + x^{16} + 1$; **4.** $P(x) = C(x^2 - x)$, де C – довільна константа.

2.2. КОРЕНІ, КОЕФІЦІЄНТИ МНОГОЧЛЕНІВ. ТЕОРЕМА ВІЄТА

У цьому розділі розглянуто такі типи задач:

- визначення коренів многочленів із застосуванням теореми Вієта та тотожніх перетворень;
- визначення знаків коренів, а також їх наявності або відсутності залежно від параметра або коефіцієнтів многочлена;
- умови існування спільних коренів заданих многочленів;
- знаходження многочленів, які задовольняють задані умови.

Приклад 1. Обчислити значення виразу

$$\frac{7 + 2018xy}{7 + 7x + xy} + \frac{7 + 2018yz}{7 + y + yz} + \frac{1 + 2018xz}{1 + z + xz},$$

якщо $x,\ y,\ z-$ корені рівняння $t^3+9t^2-9t-7=0$.

Розв'язання. Оскільки за теоремою Вієта для заданого рівняння $xyz=7$, то після множення чисельника і знаменника другого дробу на x, а третього – на xy заданий вираз набуде вигляду

$$\frac{7+2018xy}{7+7x+xy}+\frac{7x+2018\cdot 7}{7x+xy+7}+\frac{xy+2018\cdot 7x}{xy+7+7x}=\frac{2019(7+7x+xy)}{7+7x+xy}=2019.$$

Відповідь: 2019.

Приклад 2. Два многочлени з цілими коефіцієнтами називають ***подібними***, якщо вони мають однаковий степінь та однакові коефіцієнти, які, можливо, розташовані в різному порядку.

Довести, що для подібних многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ правильні твердження:

а) різниця $P(2019)-Q(2019)$ ділиться на 2;

б) існує деяке натуральне число $k>2$, таке, що $P(2019)-Q(2019)$ ділиться на це число k.

Розв'язання. Нехай многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ подібні, тоді $P(1)=Q(1)$. Розглянемо многочлен $R(x)=P(x)-Q(x)$. Очевидно, що $R(1)=P(1)-Q(1)=0$, отже, $R(x)=(x-1)F(x)$, де $F(x)$ – частка від ділення $R(x)$ на $(x-1)$.

а) різниця $P(2019)-Q(2019)$ дорівнює $R(2019)=2018F(2019)$, тому вона ділиться на 2;

б) з рівності $R(2019)=2018F(2019)$ також випливає, що задана різниця ділиться і на інші числа, зокрема, на $k=2018$, а також на будь-яке число $k\in N$, що є дільником числа 2018.

Приклад 3. Довести, що многочлен шостого степеня

$$P(x)=(...)x^6+(...)x^5+(...)x^4+(...)x^3+(...)x^2+(...)x+(...),$$

коефіцієнтами якого в дужках є числа $-7,\ -4,\ -2,\ -1,\ 3,\ 5,\ 6$, розташовані в довільному порядку, завжди має раціональний корінь.

Доведення. Сума коефіцієнтів дорівнює нулю незалежно від порядку їх розташування в дужках. Тоді $P(1)=0$, тобто $x=1$ – корінь многочлена $P(x)$.

Приклад 4. Знайти многочлен з цілими коефіцієнтами, такий, щоб число $\alpha=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}$ було його коренем.

Розв'язання. Обчислимо

$$\alpha^3=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5})^3=8+3(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5})\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}=8+3\sqrt[3]{15}\cdot\alpha .$$

Тоді $(\alpha^3-8)^3=405\alpha^3$, або $\alpha^9-24\alpha^6+192\alpha^3-512=405\alpha^3$, тобто

$$\alpha^9-24\alpha^6-213\alpha^3-512=0.$$

Отже, шуканий многочлен $P(x)=x^9-24x^6-213x^3-512$.

Відповідь: $P(x)=x^9-24x^6-213x^3-512$.

Приклад 5. Корені рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$ утворюють арифметичну прогресію. Виразити вільний член через коефіцієнти a і b.

Розв'язання. Оскільки за умовою корені x_1, x_2, x_3 утворюють арифметичну прогресію, їх зручно позначити так:

$$x_1=\beta-d, \quad x_2=\beta, \quad x_3=\beta+d .$$

Тоді $x_1+x_2+x_3=3\beta$, а за теоремою Вієта маємо $x_1+x_2+x_3=-a$, звідки $\beta=-\dfrac{a}{3}$, а отже, $x_2=-\dfrac{a}{3}$. Підставляючи цей корінь у задане рівняння, отримаємо

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0, \quad \text{звідки знаходимо} \quad c=\frac{9ab-2a^3}{27}.$$

Відповідь: $c=\dfrac{9ab-2a^3}{27}$.

Приклад 6. Нехай x_1, x_2, …, x_{2020} – корені рівняння

$$x^{2020}+2019x+2018=0.$$

Знайдіть суму 2020-х степенів цих коренів.

Розв'язання. Для кожного кореня x_i заданого рівняння виконується рівність

$$x_i^{2020} + 2019x_i + 2018 = 0.$$

Тоді шукану суму можна записати у вигляді

$$\sum_i x_i^{2020} = -2019\sum_i x_i - 2018 \cdot 2020.$$

Але за теоремою Вієта сума всіх коренів дорівнює нулю. Отже, шукана сума дорівнює $-2018 \cdot 2020$.

Відповідь: $-2018 \cdot 2020$.

Приклад 7. Відомо, що x_1, x_2, …, x_n – ненульові корені многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \text{ де } a_0 \neq 0, \ a_n \neq 0.$$

Визначити, які корені матимуть многочлени:

1) $A(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - ... + (-1)^n a_n$;

2) $B(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Розв'язання. 1). Нехай x_1 є коренем многочлена $P_n(x)$. Доведемо, що коренем многочлена $A(x)$ буде число $-x_1$. Дійсно, $A(-x_1)$ можна записати у вигляді

$$A(-x_1) = (-1)^n a_0x_1^n - (-1)^{n-1}a_1x_1^{n-1} + (-1)^{n-2}a_2x_1^{n-2} + ... - a_{n-1}x_1 +$$

$$+(-1)^n a_n = (-1)^n \left(a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x_1 + a_n\right) =$$

$$= (-1)^n P(x_1) = 0, \quad \text{тобто} \quad A(-x_1) = 0,$$

а це й означає, що число $-x_1$ є коренем многочлена $A(x)$. Отже, числа $-x_1$, $-x_2$, …, $-x_n$ будуть коренями многочлена $A(x)$.

2). Нехай x_1 – корінь многочлена $P_n(x)$, $x_1 \neq 0$. Доведемо, що $\frac{1}{x_1}$ буде коренем многочлена $B(x)$.

Розглянемо

$$B\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{a_n}{x_1^n} + \frac{a_{n-1}}{x_1^{n-1}} + ... + \frac{a_2}{x_1^2} + \frac{a_1}{x_1} + a_0,$$

помножимо обидві частини рівності на x_1^n, одержимо:

$$x_1^n \cdot B\left(\frac{1}{x_1}\right) = a_n + a_{n-1}x_1 + \ldots + a_2 x_1^{n-2} + a_1 x_1^{n-1} + a_0 x_1^n = P_n(x_1) = 0,$$

отже, $B\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0$, тобто $\frac{1}{x_1}$ – корінь многочлена $B(x)$. Таким чином, числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ будуть коренями многочлена $B(x)$.

Відповідь: 1) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; **2)** $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Приклад 8. Усі корені многочлена $P(x) = x^3 + px + q$ $(q \neq 0)$ дійсні. Довести, що коефіцієнт $p < 0$.

Доведення. Перший спосіб. За теоремою Вієта маємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \\ x_1x_2x_3 = -q. \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

Враховуючи друге рівняння, одержимо

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0.$$

Оскільки за умовою $q \neq 0$, то x_1, x_2, x_3 – відмінні від нуля числа, отже, з останньої рівності виходить, що $p < 0$.

Другий спосіб. Зрозуміло, що всі корені многочлена $P(x)$ не можуть бути рівними, бо в противному разі многочлен $P(x)$ був би повним кубом $(x-a)^3$, що при $q \neq 0$ неможливо. Отже, $P(x)$ має принаймні два різних корені x_1 і x_2, для визначеності нехай $x_1 < x_2$.

Припустимо, що $p \geq 0$, тоді $px_1 < px_2$. Враховуючи, що при цьому $x_1^3 < x_2^3$, одержимо

$$P(x_1) = x_1^3 + px_1 + q < x_2^3 + px_2 + q = P(x_2),$$

тобто $P(x_1) < P(x_2)$, що суперечить рівностям $P(x_1) = 0$, $P(x_2) = 0$.

Отже, наше припущення, що $p \geq 0$, привело до протиріччя, тобто $p < 0$, що й треба було довести.

Приклад 9. Рівняння $x^{2n} + px^2 + qx + r = 0$, де $n \in N$, $p, q \in R$, має принаймні три дійсних корені. Довести, що $p < 0$.

Доведення. Оскільки за умовою задане рівняння має не менше трьох дійсних коренів, то за теоремою Ролля функція $y = \left(x^{2n} + px^2 + qx + r\right)''$ має принаймні один дійсний корінь x_0, тобто виконується рівність $2n(2n-1)x_0^{2n-2} + 2p = 0$, звідки виходить, що $p < 0$.

Приклад 10. Чи існують такі дійсні числа a, b, c, для яких рівняння $ax^{2020} + bx^{1901} + c = 0$ має три дійсних корені ?

Розв'язання. Нехай $f(x) = ax^{2020} + bx^{1901} + c$, тоді

$$f'(x) = 2020ax^{2019} + 1901bx^{1900} = x^{1900}(2020ax^{119} + 1901b).$$

Звідси виходить, що функція $f(x)$ має тільки одну точку екстремуму (в точці $x = 0$ немає екстремуму, бо знак похідної $f'(x)$ не змінюється при переході через цю точку). А це означає, що задане рівняння має не більше двох різних коренів.

Відповідь: ні.

Приклад 11. Довести, що многочлен $Q(x) = c_0 + c_1x + ... + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$ має принаймні один дійсний корінь, якщо $c_0 + \frac{c_1}{2} + ... + \frac{c_n}{n+1} = 0$.

Доведення. Розглянемо многочлен

$$P(x) = c_0x + \frac{c_1x^2}{2} + ... + \frac{c_{n-1}x^n}{n} + \frac{c_nx^{n+1}}{n+1}.$$

З умови задачі виходить, що $P(1) = 0$, крім того, $P(0) = 0$. За теоремою Ролля існує $x_0 \in (0;1)$, таке, що $P'(x_0) = 0$. А оскільки

$$P'(x) = c_0 + c_1x + ... + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = Q(x),$$

то x_0 є коренем заданого многочлена $Q(x)$, що й потрібно було довести.

Приклад 12. Довести, що для будь-якого значення $n \in Z_+$ многочлен $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ не може мати більше одного дійсного кореня.

Доведення. За допомогою метода математичної індукції доведемо, що коли n парне, многочлен $P_n(x)$ набуває додатних значень при всіх $x \in R$. Якщо ж n непарне, то многочлен $P_n(x)$ має рівно один дійсний корінь. При $n = 0$ маємо $P_0(x) = 1 > 0$ при всіх $x \in R$.

Нехай твердження правильне для всіх значень, менших за число $n \in N$. Доведемо, що воно правильне і для значення n.

1. Нехай n – непарне. Тоді згідно з індукційним припущенням $P_n'(x) = P_{n-1}(x) > 0$ при всіх $x \in R$. Тому функція $P_n(x)$ зростає і не може набувати значення нуль більше одного разу. Оскільки $P_n(0) = 1 > 0$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty$ (тобто функція $P_n(x)$ набуває від'ємного значення хоча б в одній точці), то неперервна функція $P_n(x)$ хоча б один раз набуває нульового значення.

2. Нехай n – парне. Тоді многочлен $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ має рівно один дійсний корінь $x_0 \neq 0$. Оскільки $P_n''(x) = P_{n-2}(x) > 0$ при всіх $x \in R$, то $P_n'(x) > 0$ при $x > x_0$ і $P_n'(x) < 0$ при $x < x_0$. Отже, при всіх $x \in R$ маємо

$$P_n(x) \geq P_n(x_0) = P_{n-1}(x_0) + \frac{x_0{}^n}{n!} = \frac{x_0{}^n}{n!} > 0.$$

Твердження доведено.

Приклад 13. Довести, що многочлен $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ не має кратних коренів.

Розв'язання. Припустимо протилежне, – що серед коренів многочлена є кратний, тобто $x_1 = x_2$. В такому разі похідна від многочлена $P'(x)$ також матиме корінь x_1. Знайдемо цю похідну

$$P'(x)=1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+...+\frac{nx^{n-1}}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тоді одержимо дві рівності:

$$P(x_1)=1+\frac{x_1}{1!}+\frac{{x_1}^2}{2!}+...+\frac{{x_1}^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{{x_1}^n}{n!}=0$$

$$\text{та}\quad P'(x_1)=1+\frac{x_1}{1!}+\frac{{x_1}^2}{2!}+...+\frac{{x_1}^{n-1}}{(n-1)!}=0,$$

звідки випливає, що $\frac{{x_1}^n}{n!}=0$, тобто $x_1=0$. Але $x_1=0$ не є коренем многочлена $P(x)$, отже, наше припущення хибне. Таким чином, многочлен $P(x)$ не має кратних коренів.

Приклад 14. Дано a, b, c, d – довільні дійсні числа, відмінні від нуля. Довести, що не всі корені рівняння $x^6+ax^3+bx^2+cx+d=0$ дійсні.

Доведення. Припустимо, що x_1, x_2, x_3, … , x_6 – дійсні корені рівняння $x^6+ax^3+bx^2+cx+d=0$. З умови зрозуміло, що принаймні один з коренів x_i має бути відмінним від нуля.

Оскільки за теоремою Вієта $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=0$, $\sum\limits_{1\le i\le j\le 6}x_ix_j=0$, то

$$\sum_{i=1}^{6}{x_i}^2=\left(\sum_{i=1}^{6}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i\le j\le 6}x_ix_j=0,$$

тобто сума квадратів коренів дорівнює нулю, а це можливо лише тоді, коли всі корені – дійсні числа, що дорівнюють нулю. А це суперечить припущенню, що принаймні один з коренів x_i відмінний від нуля. Отримана суперечність доводить правильність твердження задачі.

Приклад 15. Нехай $P(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, усі корені якого є суто уявними числами. Довести, що всі корені многочлена $P'(x)$, крім одного, також уявні.

Доведення. Згідно з теоремою 9 многочлен з дійсними коефіцієнтами може мати тільки парне число чисто уявних коренів, які розбиваються на пари взаємно спряжених. Тому многочлен $P(x)$ можна записати так:

$$P(x) = a(x - ia_1)\dots(x - ia_{2n}) = a(x^2 + a_1{}^2)\dots(x^2 + a_{2n}{}^2),$$

де a_1, $a_2, \dots, a_{2n}$ – ненульові дійсні числа і $a_{n+k} = -a_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$.

Оскільки у многочлена $P(x)$ коефіцієнт при x^2 відмінний від нуля, а при x – дорівнює нулю, то многочлен $P'(x)$ матиме рівно один корінь $x = 0$. Доведемо, що решта його $n - 2$ коренів чисто уявні.

Нехай $P'(b + ic) = 0$, причому $b^2 + c^2 \neq 0$. Якщо при цьому $P(b + ic) = 0$, то $b + ic$ – корінь даного многочлена, а значить, це число уявне, тобто $b = 0$. Коли ж $P(b + ic) \neq 0$, то матимемо

$$0 = \frac{P'(b + ic)}{P(b + ic)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{b + i(c - a_k)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{b - i(c - a_k)}{b^2 + (c - a_k)^2}.$$

Оскільки $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{x - ia_k}$, то дійсна частина виразу $\dfrac{P'(b + ic)}{P(b + ic)}$ буде

$$b \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{b^2 + (c - a_k)^2} = 0,$$

а значить, $b = 0$, що і треба було довести.

Приклад 16. Дано многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d – цілі числа), причому $a^2 d$ – непарне, а bc – парне. Довести, що принаймні один з його коренів нераціональний.

Розв'язання. Припустимо, що всі корені заданого многочлена x_i $(i = 1, 2, 3)$ раціональні. Тоді легко переконатися в тому, що $y_i = ax_i$ – раціональний корінь многочлена $y^3 + by^2 + acy + a^2 d$. За наслідком з теореми 10 будь-який раціональний корінь многочлена з цілими коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1, є цілим. Отже, y_1, y_2, y_3 – цілі числа і всі вони є дільниками непарного числа $a^2 d$, тому y_1, y_2, y_3 – непарні. Крім того, їх сума і сума їх попарних добутків теж мають бути непарними.

За теоремою Вієта $y_1 + y_2 + y_3 = -b$, $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = ac$, тоді b і c – непарні, що суперечить умові (bc – парне). Отримана суперечність доводить правильність твердження задачі.

Приклад 17. Нехай n – натуральне число, $n > 4$. Відомо, що многочлен

$$P(x) = x^n - 5x^{n-1} + 12x^{n-2} - 15x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + ... + a_1 x + a_n,$$

де $a_{n-4}, ..., a_1, a_0$ – задані дійсні числа, має n попарно різних дійсних коренів. Доведіть, що принаймні один з цих коренів не є додатним.

Доведення. Припустимо, що $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ – корені даного многочлена. Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$\sum_{1 \le i \le n} x_i = 5, \quad \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = 12, \quad \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k = 15.$$

Застосуємо формулу куба суми кількох доданків

$$\left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right)^3 = \sum_{1 \le i \le n} x_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i^2 x_j + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k.$$

Враховуючи співвідношення

$$\left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right) \left(\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i^2 x_j + 3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k,$$

одержимо

$$\left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right)^3 = \sum_{1 \le i \le n} x_i^3 + 3 \left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right) \left(\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \right) - 3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k.$$

Тоді матимемо

$$0 < \sum_{1 \le i \le n} x_i^3 = \left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right)^3 - 3 \left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right) \left(\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \right) + 3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k =$$

$$= 125 - 3 \cdot 5 \cdot 12 + 3 \cdot 15 = -10.$$

Дістали суперечність, отже, серед коренів многочлена не всі є додатними, що й треба було довести.

Приклад 18. Довести, що многочлен $P(x) = x^4 + x^3 + x - 2$ має один додатний корінь і один від'ємний.

Доведення. Оскільки $P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1 > 0$ для всіх $x \ge 0$, тобто $P(x)$ монотонно зростає при $x \ge 0$, а $P(0) = -2$, то цей многочлен має єдиний додатний корінь.

Тепер доведемо єдиність від'ємного кореня. Розглянемо функцію

$$Q(x) = P(-x) = x^4 - x^3 - x - 2,$$

для якої $Q(0) = -2$, $Q'(x) = P(-x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$.

Доведемо, що коли $Q(x) \geq 0$, то $Q'(x) > 0$. (Із цього випливатиме наше твердження, оскільки в даному випадку $Q(x)$ зростає всюди, де $Q(x) \geq 0$). Але $Q(0) = -2$, а при більших x буде $Q(x) > 0$.

Маємо

$$4Q(x) = 4x^4 - 4x^3 - 4x - 8 = x(4x^3 - 3x^2 - 1) - (x^3 + 3x + 8) =$$

$$= xQ'(x) - (x^3 + 3x + 8).$$

Звідси $Q'(x) = \dfrac{4Q(x) + (x^3 + 3x + 8)}{x} > 0$ при $Q(x) \geq 0$ ($x > 0$, $x^3 + 3x + 8 > 0$). Твердження доведено.

Приклад 19. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – додатні числа. Довести, що рівняння $x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_{n-1} x - a_n = 0$ має рівно один додатний корінь.

Доведення. Перепишемо задане рівняння у вигляді $x^n \cdot g(x) = 0$, де

$$g(x) = 1 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_n}{x^n}.$$

Функція $g(x)$ строго зростає на $(0;\infty)$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$. За теоремою про проміжні значення функції існує точка $x_0 \in (0;\infty)$, у якій $g(x_0) = 0$. Ця точка єдина, бо $g(x)$ неперервна і строго зростає на $(0;\infty)$. Таким чином, x_0 – єдиний додатний корінь заданого рівняння, що й треба було довести.

Приклад 20. Довести, що рівняння $ax^7 + bx^4 + cx^2 - dx - e = 0$ при $a, b, c, d, e > 0$ має не більше двох додатних коренів.

Доведення. Нехай $y = ax^7 + bx^4 + cx^2 - dx - e$, тоді $y' = 7ax^6 + 4bx^3 + 2cx - d$, а $y'' = 42ax^5 + 12bx^2 + 2c > 0$ при $x > 0$. Це означає, що функція $y(x)$ опукла до низу, має тільки один мінімум і не має жодного максимуму. Отже, якщо $y_{\min} < 0$, то рівняння $y = 0$ має два додатних корені. Коли $y_{\min} = 0$, то рівняння $y=0$ має один додатний корінь. У випадку $y_{\min}>0$ дане рівняння не матиме жодного додатного кореня.

Приклад 21. Числа a і b – два з чотирьох коренів многочлена

$$P(x)=x^4+x^3-1.$$

Довести, що ab – корінь многочлена $x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

Доведення. Нехай a, b, c, d – корені многочлена

$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Доведемо рівність $(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=0$, із якої випливатиме справедливість твердження

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1=(ab)^3\left((ab)^3-\frac{1}{(ab)^3}+ab-\frac{1}{ab}+1\right)=0.$$

Дійсно, із рівностей $P(a)=P(b)=0$ маємо $a^3=\frac{1}{a+1}$, $b^3=\frac{1}{b+1}$, а із рівностей $P(c)=P(d)=0$ виходить $c^3=\frac{1}{c+1}$, $d^3=\frac{1}{d+1}$. Враховуючи, що $abcd=-1$ (за теоремою Вієта), отримуємо

$$(ab)^3=\frac{1}{(1+a)(1+b)}=-\frac{1}{(cd)^3}=\frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}=-(1+c)(1+d).$$

Аналогічно одержимо $(cd)^3=-(1+a)(1+b)$. Отже, маємо

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=-(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1=$$

$=-1-a-b-c-d=0$, оскільки за теоремою Вієта $a+b+c+d=-1$.

Твердження доведено.

Приклад 22. Числа a, b, c – три з чотирьох коренів многочлена x^4-ax^3-bx+c. Знайти всі такі трійки чисел.

Розв'язання. Припустимо, що $c=0$. Тоді число c є коренем рівняння $x^4-ax^3-bx=0$. Отже, залишається знайти всі многочлени вигляду

$x^4 - ax^3 - bx$, для яких числа a і b є коренями. Якщо позначити через d четвертий корінь такого многочлена, то за теоремою Вієта будемо мати $a + b + d = a$, звідки $d = -b$. Далі $ab + ad + bd = ab - b(a+b) = -b^2 = 0$, тобто $b = 0$.

Зазначимо, що будь-яка трійка чисел виду $(a;0;0)$ задовольняє умову задачі.

Тепер припустимо, що $c \neq 0$. Тоді жоден із чотирьох коренів a, b, c, d многочлена $x^4 - ax^3 - bx + c$ не дорівнює нулю. За теоремою Вієта матимемо

$$a + b + c + d = a, \quad d = -(b+c),$$

$$ab + ac + bc + ad + bd + cd = ab + ac + bc - (a+b+c)(b+c) =$$

$$= -b^2 - bc - c^2 = -b^2 - c(b+c) = 0,$$

$$abc + abd + acd + bcd = adc - (ab + ac + bc)(b+c) =$$

$$= -a(b^2 + bc + c^2) - b^2c - bc^2 = -bc(b+c) = b,$$

тобто $b^2 = -c(b+c) = 1$, $c^2 + bc + 1 = 0$, $abcd = -abc(b+c) = ab^3 = ab = c$, звідки $a = \dfrac{c}{b}$. Тому можливі тільки такі варіанти для чисел a, b, c:

$$b_{1,2} = 1, \; c_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4} = -1, \; c_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad a_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Кожний з наведених варіантів задовольняє умову задачі.

Відповідь: трійка чисел $(a;b;c)$ або має вигляд $(a;0;0)$, де a – будь-яке комплексне число, або збігається з однією з чотирьох трійок

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ 1;\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ 1;\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ -1;\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ -1;\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 23. Нехай *a*, *b*, *c* – корені рівняння $x^3 + qx + r = 0$. Скласти рівняння, коренями якого будуть числа $\frac{b+c}{a^2}, \frac{c+a}{b^2}, \frac{a+b}{c^2}$.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт при x^2 в заданому рівнянні дорівнює нулю, то згідно з теоремою Вієта $a + b + c = 0$. Отже, $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$. Іншими словами, коренями шуканого рівняння мають бути числа $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}$ – величини, обернені кореням заданого рівняння з протилежним знаком. Тоді згідно з оберненою теоремою Вієта одержимо шукане рівняння

$$rx^3 - qx^2 + 1 = 0.$$

Відповідь: $rx^3 - qx^2 + 1 = 0$.

Приклад 24. Нехай числа *p*, *q*, r – корені кубічного рівняння $x^3 - 3px^2 + 3q^2x - r^3 = 0$. Довести, що $p = q = r$.

Доведення. Скориставшись теоремою Вієта, отримаємо

$$\begin{cases} p + q + r = 3p, \\ pq + qr + rp = 3q^2, \\ pqr = r^3. \end{cases}$$

З останньої рівності маємо: або $r = 0$, або $pq = r^2$. Якщо $r = 0$, то з першого рівняння $q = 2p$, а з другого – $pq = 3q^2$, тобто $p \cdot 2p = 3(2p)^2$, звідки $p = 0$. Але тоді й $q = 0$, отже, маємо $p = q = r$.

Розглянемо випадок $pq = r^2$, при цьому матимемо

$$\begin{cases} q + r = 2p, \\ r^2 + qr + rp = 3q^2. \end{cases}$$

Помноживши першу рівність на *r*, отримаємо $qr + r^2 = 2pr$. Тоді з другої рівності одержимо $3pr = 3q^2$, тобто $pr = q^2$. Оскільки $pq = r^2$, то $q^3 = r^3$, тоді або $q = r$, або $q^2 + qr + r^2 = 0$. В останньому випадку маємо

$$0 = q^2 + qr + r^2 = pr + qr + r^2 = 3q^2,$$

звідки $q=0$. Але тоді з рівності $pq=r^2$ виходить, що $r=0$, а тоді й $p=0$.

Коли $q=r$, то з рівності $q+r=2p$ отримаємо $2q=2p$, тому $p=q=r$.

Таким чином, у всіх розглянутих випадках $p=q=r$, що й треба було довести.

Приклад 25. Нехай c і d – додатні числа, такі, що кубічне рівняння $x^3-cx+d=0$ має тільки дійсні корені, серед яких α – корінь, найменший за абсолютною величиною. Довести, що $\frac{d}{c}<\alpha\le\frac{3d}{2c}$.

Доведення. Позначимо α, β, γ – корені заданого рівняння. Застосувавши теорему Вієта, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-c,\\ \alpha\beta\gamma=-d.\end{cases}$$

З останнього рівняння виходить, що або всі корені від'ємні, або два з них додатні, а один від'ємний. Друге рівняння вказує на те, що всі корені бути від'ємними не можуть. Отже, серед α, β, γ два числа додатні, а одне – від'ємне. З першого рівняння зрозуміло, що від'ємний корінь за абсолютною величиною більший за додатні, тобто можна стверджувати, що $\gamma<0<\alpha\le\beta$, причому $|\alpha|\le|\beta|\le|\gamma|$.

Тоді, підставляючи значення $x=\alpha$ в задане кубічне рівняння і скориставшись рівняннями системи, отримаємо

$$d-c\cdot\alpha=-\alpha\beta\gamma+\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha^2(\beta+\gamma)=-\alpha^3<0.$$

Звідси одержуємо $\frac{d}{c}<\alpha$, бо $c>0$, тобто перша частина нерівності доведена.

Доведемо другу частину нерівності $\alpha\le\frac{3d}{2c}$:

$$3d-2c\cdot\alpha=-3\alpha\beta\gamma+2\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-\alpha\beta\gamma+2\alpha^2\beta+2\alpha^2\gamma=$$

$$=\alpha\left(2\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma\right)=\alpha\left(-2(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma\right)=-\alpha\left(2\beta^2+5\beta\gamma+2\gamma^2\right)=$$

$$=-\alpha(2\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)=-\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha).$$

Зазначимо, що в останньому виразі $-\alpha < 0$, $\beta \geq \alpha$, $\gamma - \alpha < 0$, отже, число $3d - 2c \cdot \alpha \geq 0$, звідки виходить, що $\alpha \leq \dfrac{3d}{2c}$. Твердження доведено.

Приклад 26. Нехай a, b, c – дійсні числа, причому $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$, а λ – корінь кубічного рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (дійсний чи комплексний). Довести, що $|\lambda| \leq 1$.

Доведення. За умовою $\lambda -$ корінь рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, отже,

$$\lambda^3 = -a\lambda^2 - b\lambda - c.$$

Помноживши обидві частини рівності на λ, після очевидних перетворень отримаємо

$$\lambda^4 = -a\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda = (1-a)\lambda^3 + (a-b)\lambda^2 + (b-c)\lambda + c.$$

Припустимо, що $|\lambda| \geq 1$, тоді

$$\left|\lambda^4\right| \leq (1-a)|\lambda|^3 + (a-b)|\lambda|^2 + (b-c)|\lambda| + c \leq$$

$$\leq (1-a)|\lambda|^3 + (a-b)|\lambda|^3 + (b-c)|\lambda|^3 + c|\lambda|^3 \leq |\lambda|^3.$$

В цьому випадку єдино можливим варіантом є $|\lambda| = 1$. Таким чином, приходимо до висновку, що $|\lambda| \leq 1$. Твердження доведено.

Приклад 27. Знайти такі цілі числа a і b, для яких один з коренів рівняння $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ дорівнює $1 + \sqrt{3}$.

Оскільки $1 + \sqrt{3}$ – корінь заданого рівняння, має виконуватися рівність

$$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0.$$

Після очевидних перетворень отримаємо:

$$3(3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1) + a(1 + 2\sqrt{3} + 3) + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0,$$

$$\text{або} \quad (4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0.$$

Позначимо $4a + b + 42 = A$, $2a + b + 18 = B$. Зрозуміло, що A і B є цілими, бо за умовою a і b – цілі числа. При цьому $A + B\sqrt{3} = 0$. Звідси виходить, що

$B=0$, бо в противному разі $\sqrt{3}=-\dfrac{A}{B}$, тобто ірраціональне число дорівнює раціональному, що неможливо. Таким чином, маємо $B=0$ і $A=0$. Отже, для того, щоб число $1+\sqrt{3}$ було коренем заданого рівняння, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти a і b задовольняли систему рівнянь

$$\begin{cases} 4a+b+42=0, \\ 2a+b+18=0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є пара чисел $a=-12$, $b=6$.

Відповідь: $a=-12$, $b=6$.

Приклад 28. Для всіх значень параметра a знайти дійсні корені рівняння $x^4+4x^3-8x+a=0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x-6x^2-12x-6+a+5=0,$$

$$\text{або } (x^2+2x+1)^2-6(x^2+2x+1)+a+5=0,$$

$$\text{тобто } (x+1)^4-6(x+1)^2+a+5=0.$$

Звідси знаходимо $x=-1\pm\sqrt{3\pm\sqrt{4-a}}$.

Очевидно, при $a>4$ рівняння не має дійсних коренів.

Якщо $a<4$ і $3-\sqrt{4-a}>0$, тобто $-5<a<4$, то рівняння матиме 4 дійсних корені.

Коли $a<4$ і $3-\sqrt{4-a}<0$, тобто $a<-5$, то рівняння має 2 дійсних корені $x=-1\pm\sqrt{3+\sqrt{4-a}}$.

При $a=4$ рівняння має 2 двократних корені $x_{1,2}=-1+\sqrt{3}$ і $x_{3,4}=-1-\sqrt{3}$.

Якщо $a=-5$, то рівняння має двократний корінь $x_{1,2}=-1$ і ще два дійсних корені $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$.

Відповідь: при $a=4$ $x_{1,2}=-1+\sqrt{3}$, $x_{3,4}=-1-\sqrt{3}$; при $a=-5$ $x_{1,2}=-1$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$; при $a\in(-\infty;-5)$ $x=-1\pm\sqrt{3+\sqrt{4-a}}$; при $a\in(-5;4)$ $x=-1\pm\sqrt{3\pm\sqrt{4-a}}$.

Приклад 29. Знайти всі значення *a*, при яких рівняння $ax^3 - x^2 - x - (a+1) = 0$ і $ax^2 - x - (a+1) = 0$ мають спільний корінь. Визначити цей корінь.

Розв'язання. Спочатку переконаємося, що $a \neq 0$. Дійсно, якщо $a = 0$, то рівняння набувають вигляду $x^2 + x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$, і корінь другого рівняння $x = -1$ не задовольняє перше рівняння. Отже, $a \neq 0$.

Нехай x_1 – спільний корінь заданих рівнянь. Тоді

$$ax_1^3 - x_1^2 - x_1 - (a+1) = 0,$$

$$ax_1^2 - x_1 - (a+1) = 0.$$

Помножимо друге рівняння на x_1 і віднімемо від першого, отримаємо

$$ax_1 - (a+1) = 0, \text{ звідки } x_1 = \frac{a+1}{a}.$$

Отже, якщо рівняння мають спільний корінь, він дорівнює $\frac{a+1}{a}$ при будь-яких значеннях $a \neq 0$.

Відповідь: $x = \frac{a+1}{a}$, $a \neq 0$.

Приклад 30. Знайти всі пари дійсних чисел *p* і *q*, при яких рівняння $x^3 + px^2 + 18 = 0$ і $x^3 + qx + 12 = 0$ мають два спільних корені. Визначити ці корені.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – спільні корені заданих рівнянь. Тоді x_1 і x_2 задовольняють також рівняння, яке є різницею заданих, тобто

$$px^2 - qx + 6 = 0. \tag{1}$$

Тепер помножимо перше задане рівняння на 2, друге – на 3, віднімемо перше отримане рівняння від другого й одержимо рівняння

$$x^3 - 2px^2 + 3qx = 0,$$

яке теж має корені x_1 і x_2. Зрозуміло, що $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, бо в заданих рівняннях вільні члени відмінні від нуля. Тому останнє рівняння можна поділити на x:

$$x^2 - 2px + 3q = 0. \tag{2}$$

Числа x_1 і x_2 задовольняють це рівняння.

Таким чином, квадратні рівняння (1) і (2) мають спільні корені x_1 і x_2. Застосовуючи терему Вієта до кожного з цих рівнянь, матимемо:

$$x_1 + x_2 = \frac{q}{p}, \ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{p};$$

$$x_1 + x_2 = 2p, \ \ x_1 \cdot x_2 = 3q.$$

Звідси виходить, що $\frac{q}{p} = 2p$, $3q = \frac{6}{p}$, тобто $p = 1$, $q = 2$.

Підставивши знайдені значення p і q в задані рівняння, отримаємо

$$x^3 + x^2 + 18 = 0 \ \text{ і } \ x^3 + 2x + 12 = 0,$$

$$\text{або } (x+3)(x^2 - 2x + 6) = 0 \ \text{ і } \ (x+2)(x^2 - 2x + 6) = 0.$$

Кожна з цих рівностей виконується, коли $x^2 - 2x + 6 = 0$, тобто при $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{5}$.

Відповідь: $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{5}$ при $p = 1$, $q = 2$.

Приклад 31. Рівняння $x^3 + p_1 x + q_1 = 0$ і $x^3 + p_2 x + q_2 = 0$, де $p_1 \neq p_2$, мають спільний корінь. Знайти всі три корені кожного з рівнянь.

Розв'язання. Нехай α – спільний корінь заданих рівнянь. Тоді

$$\alpha^3 + p_1\alpha + q_1 = 0,$$

$$\alpha^3 + p_2\alpha + q_2 = 0,$$

звідки маємо $p_1\alpha + q_1 = p_2\alpha + q_2$. Оскільки $p_1 \neq p_2$, то

$$\alpha = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2},$$

причому $\alpha \neq 0$, бо $q_1 \neq q_2$.

Тепер нехай $x^2 + bx + c$ – частка від ділення $x^3 + p_1 x + q_1$ на $(x - \alpha)$, тобто

$$x^3 + p_1 x + q_1 = (x - \alpha)(x^2 + bx + c), \ \text{ або}$$

$$x^3 + p_1 x + q_1 = x^3 - (\alpha - b)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c.$$

Прирівнюючи коефіцієнти в лівій і правій частинах рівності, отримаємо

$$\alpha - b = 0, \quad q_1 = -\alpha c. \tag{1}$$

Якщо $q_1 \neq 0$, то з (1) маємо $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$, тому $b = \alpha$, $c = -\dfrac{q_1}{\alpha}$.

Таким чином, крім $x_1 = \alpha$ рівняння має ще два корені, які визначаються з квадратного рівняння

$$x^2 + \alpha x - \frac{q_1}{\alpha} = 0, \quad \text{тобто} \quad x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{4q_1}{\alpha}}\right).$$

Коли ж $q_1 = 0$, то перше рівняння набуває вигляду $x^3 + p_1 x = 0$ і має корені 0 і $\pm\sqrt{-p_1}$ (за умовою один з коренів збігається з α).

Аналогічно друге рівняння при $q_2 \neq 0$ має корені $x_1 = \alpha$ та $x_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{4q_2}{\alpha}}\right)$, а при $q_2 = 0$ – корені 0 і $\pm\sqrt{-p_2}$.

Відповідь: перше рівняння: $x_1 = \alpha$, $x_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{4q_1}{\alpha}}\right)$, якщо $q_1 \neq 0$; $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-p_1}$ при $q_1 = 0$;

друге рівняння: $x_1 = \alpha$, $x_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{4q_2}{\alpha}}\right)$, якщо $q_2 \neq 0$; $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-p_2}$ при $q_2 = 0$.

Самостійна робота 2.2

1. Обчислити значення виразу $\dfrac{3+2020ab}{3+3a+ab} + \dfrac{3+2020bc}{3+b+bc} + \dfrac{1+2020ac}{1+c+ac}$, якщо a, b, c – корені рівняння $2x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$.

2. Знайти корені рівняння $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

3. Не розкриваючи дужок, розв’язати рівняння

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$$

Вказівка: застосувати підстановку $x = \dfrac{y}{12}$.

4. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – подібні многочлени (див. Приклад 2). Довести, що число $\dfrac{P(2021)-Q(2021)}{101}$ – ціле.

5. Довести, що при будь-яких ненульових значеннях α і β корені x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ задовольняють рівність

$$\left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

Відповіді: **1.** 2021. **2.** 1; -2 ; $-1 \pm \sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{5 \pm i\sqrt{39}}{24}$.

2.3. РІЗНІ ЗАДАЧІ

Приклад 1. Знайти коефіцієнт при x^8 в розкладі $\left(1 + x^2 - x^3\right)^9$.

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона маємо: $\left(1 + (x^2 - x^3)\right)^9 =$

$$= 1 + C_9^1(x^2 - x^3) + C_9^2(x^2 - x^3)^2 + C_9^3(x^2 - x^3)^3 + C_9^4(x^2 - x^3)^4 + \ldots + (x^2 - x^3)^9.$$

Очевидно, що x^8 міститься тільки в четвертому та п'ятому доданках правої частини рівності. Тому коефіцієнт при x^8 буде $3C_9^3 + C_9^4 = 378$.

Відповідь: 378.

Приклад 2. Нехай $a_0, a_1, \ldots, a_{70}$ – коефіцієнти многочлена $\left(1 + x + x^2\right)^{35}$. Довести, що сума $a_0 + a_1 + \ldots + a_{70}$ – парне число.

Доведення. Якщо в тотожність

$$\left(1 + x + x^2\right)^{35} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{70} x^{70}$$

підставити $x = 1$, матимемо рівність

$$3^{35} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{70},$$

а при $x = -1$ одержимо

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{70}.$$

Додавши отримані рівності, матимемо вираз

$$3^{35} + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{70}),$$

який можна подати у вигляді

$$3^{35} + 1 = (3^{35} - 1) + 2 = 2(3^{34} + 3^{33} + \ldots + 3 + 1) + 2 = 2(3^{34} + 3^{33} + \ldots + 3 + 1 + 1).$$

Зазначимо, що в останніх дужках стоїть парне число, отже, і сума $a_0 + a_1 + \ldots + a_{70}$ – парне число. Твердження доведено.

Приклад 3. Нехай $x_1, x_2, \ldots x_n$ – корені рівняння $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k}$.

Розв'язання. Розглянемо многочлен

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

та його похідну

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

або $P'(x) = P(x) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} = \frac{P'(x)}{P(x)}$.

З останньої рівності одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k} = \frac{P'(1)}{P(1)}.$$

Оскільки $P'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$, то

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{n + (n-1) + \ldots + 2 + 1}{n+1} = \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 4. Визначіть, скільки дійсних коренів у многочлена

$$P(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - 1.$$

Розв'язання. Зауважимо, що $x = 1$ є коренем многочлена $P(x)$. Для решти значень x перетворимо многочлен до вигляду

$$P(x) = nx^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x - 1}.$$

Таким чином, задача звелася до підрахунку коренів, відмінних від 1, для многочлена $Q(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Маємо:

$$Q'(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1).$$

Похідна обертається на нуль при $x = 0$ та $x = 1$. Крім того, $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$. Залежно від парності числа n маємо два варіанти поведінки функції $Q(x)$:

а) n – парне.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$Q'(x)$	+	0	–	0	+
$Q(x)$	↗	1	↘	0	↗

У цьому випадку функція має два корені – 1 (кратності 2) і ще один корінь на проміжку $(-\infty;0)$;

б) n – непарне.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$Q'(x)$	–	0	–	0	+
$Q(x)$	↘	1	↘	0	↗

Тут функція має єдиний корінь – 1 (кратності 2).

Відповідь: многочлен має два корені при парному n і один корінь при непарному n.

Приклад 5. Многочлен $P(x)$ в точці $x = 2$ має локальний мінімум на відрізку $[1;3]$, а 1 і 3 – його прості корені. Яким може бути степінь цього многочлена ?

Розв'язання. Многочлен з коренями 1 і 3 можна записати у вигляді:

$$P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)=(x^2-4x+3)Q(x).$$

Знайдемо похідну

$$P'(x)=(2x-4)Q(x)+(x^2-4x+3)Q'(x).$$

З умови зрозуміло, що $P'(2)=-Q'(2)=0$.

Розкладемо многочлен $Q(x)$ за степенями $(x-2)$:

$$Q(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\dots ,$$

де $a_1=Q'(2)=0$. Звідси виходить, що $Q(x)$ – або константа, або многочлен степеня не менше 2. За останній можна взяти, наприклад, $Q(x)=2^n+(x-2)^n$.

Таким чином, степінь заданого многочлена $P(x)$ $n=2$, або $n\geq 4$.

Відповідь: $n=2$, або $n\geq 4$.

Приклад 6. Нехай $P(x)$ – многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами, який має дійсні корені. Довести, що

$$(n-1)\left(P'(x)\right)^2\geq nP(x)P''(x).$$

Доведення. Достатньо довести нерівність при $n>1$ і при $x\neq x_i$, де x_i – корені многочлена $P(x)$. Оскільки $P'(x)=P(x)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$, маємо

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i},\qquad \frac{P''(x)}{P(x)}=\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}.$$

Отже,

$$(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2-n\frac{P''(x)}{P(x)}=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)^2-n\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{(x-x_i)^2}-\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2n}{(x-x_i)(x-x_j)}=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{1}{x-x_i}-\frac{1}{x-x_j}\right)\geq 0,$$

тобто $(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2\geq n\frac{P''(x)}{P(x)}$, звідки випливає правильність заданої нерівності.

Приклад 7. Відомо, що всі корені многочлена

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$$

з комплексними коефіцієнтами – суто уявні. Довести, що при будь-якому дійсному x виконується нерівність

$$\left| \frac{2xP'(x)}{P(x)} - n \right| \le n .$$

Доведення. Нехай

$$P(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m} ,$$

де $\operatorname{Re} a_s = 0$ і $\sum\limits_{s=1}^{m} k_s = n$. Тоді

$$\left| \frac{2xP'(x)}{P(x)} - n \right| = \left| 2x \sum_{s=1}^{m} \frac{k_s}{x - a_s} - \sum_{s=1}^{m} k_s \right| = \left| \sum_{s=1}^{m} k_s \frac{x + a_s}{x - a_s} \right| \le \sum_{s=1}^{m} k_s \left| \frac{x + a_s}{x - a_s} \right| = \sum_{s=1}^{m} k_s = n ,$$

що й треба було довести.

Приклад 8. Довести, що коли многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

з дійсними коефіцієнтами не має дійсних коренів на інтервалі $(0;1)$, то функція

$$f(y) = \frac{a_n}{n + y} + \frac{a_{n-1}}{n + y - 1} + \ldots + \frac{a_0}{y}$$

не обертається на нуль в інтервалі $(0;\infty)$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Припустимо, що існує таке $y_0 \in (0;\infty)$, що виконується рівність

$$f(y_0) = \frac{a_n}{n + y_0} + \frac{a_{n-1}}{n + y_0 - 1} + \ldots + \frac{a_0}{y_0} = 0 . \qquad (1)$$

Розглянемо функцію

$$F(x) = \frac{a_n x^{n + y_0}}{n + y_0} + \frac{a_{n-1} x^{n + y_0 - 1}}{n + y_0 - 1} + \ldots + \frac{a_0 x^{y_0}}{y_0} .$$

Зазначимо, що з (1) випливає рівність $F(1)=0$, а із умови $y_0>0$ виходить $F(0)=0$. Тоді за теоремою Ролля на інтервалі (0;1) існує така точка x_0, що $F'(x_0)=0$. Але

$$F'(x)=a_n x^{n+y_0-1}+a_{n-1}x^{n+y_0-2}+...+a_0 x^{y_0-1}=P(x)x^{y_0-1}.$$

Отже, $P(x_0)=0$, що неможливо за умовою. Отримане протиріччя і доводить твердження.

Приклад 9. Через точку *P*, що лежить на графіку Γ функції $y=x^3$, проведена дотична, яка перетинає Γ в точці $Q\neq P$. В точці Q також проведено дотичну до кривої *Г*. Довести, що кутовий коефіцієнт дотичної в точці Q в чотири рази більший, ніж кутовий коефіцієнт дотичної в точці *P*.

Доведення. Нехай p і q – абсциси точок P і Q відповідно. Оскільки $y'=3x^2$, то $y'(p)=3p^2$ і $y'(q)=3q^2$, а відношення кутових коефіцієнтів $\dfrac{y'(q)}{y'(p)}=\dfrac{q^2}{p^2}$.

Рівняння дотичної до Γ в точці P має вигляд:

$$y-p^3=3p^2(x-p).$$

Оскільки точка $Q(q,q^3)\in\Gamma$ і належить дотичній до *Г*, проведеній в точці *P*, то правильною буде рівність $q^3-p^3=3p^2(q-p)$, яка після ділення обох частин на $q-p$ $(q\neq p)$) набуває вигляду

$$q^2+pq+p^2=3p^2 \quad\Rightarrow\quad q^2+pq-2p^2=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{q}{p}\right)^2+\frac{q}{p}-2=0,$$

звідки знаходимо $\dfrac{q}{p}=1$ або $\dfrac{q}{p}=-2$. Оскільки $q\neq p$, то $\dfrac{q^2}{p^2}=4$, що й треба було довести.

Приклад 10. Довести, що коли многочлен $P(x)$ степеня n не має дійсних коренів, то многочлен

$$Q(x)=P(x)+\alpha P'(x)+...+\alpha^n P^{(n)}(x)$$

при будь-якому $\alpha\in R$ теж не матиме дійсних коренів.

Доведення. Із умови задачі виходить, що

$$Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + ... + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x),$$

тому $Q(x) - \alpha Q'(x) = P(x)$.

Без обмежень узагальнення вважаємо, що старший коефіцієнт многочлена додатний. Оскільки цей многочлен не має дійсних коренів, то його степінь n – парне число і для всіх $x \in R$ виконується нерівність $P(x) > 0$. Припустимо, що многочлен $Q(x)$ має дійсні корені $x_1 \le x_2 \le ... \le x_k$. Нехай $\alpha \ge 0$. Тоді оскільки старші коефіцієнти многочленів $Q(x)$ та $P(x)$ рівні й додатні, то $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$, звідки маємо $Q(x) > 0$ при $x > x_k$. Тому $Q'(x_k) \ge 0$ і

$$P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \le 0.$$

Коли ж $\alpha < 0$, то при $x < x_1$ маємо $Q(x) > 0$, оскільки $\deg Q(x) = n$ – парне число. Тому $Q'(x) \le 0$ і

$$P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \le 0.$$

В обох випадках приходимо до протиріччя з нерівністю $P(x) > 0$. Отже, многочлен $Q(x)$ не має дійсних коренів, що й потрібно було довести.

Приклад 11. Знайти такі числа *A*, *B*, *C*, *a*, *b*, *c*, щоб виконувалася тотожність

$$\frac{4x-2}{x^3 - x} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

Розв'язання. Запишемо задану тотожність у вигляді

$$\frac{4x-2}{x^3 - x} = \frac{A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Оскільки обидва дроби нескоротні, то вони рівні за умови рівності їх чисельників і знаменників. Прирівнявши знаменники, маємо

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

звідки знаходимо $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$.

Враховуючи знайдені значення *a*, *b*, *c*, запишемо рівність чисельників:

$$4x - 2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1)x + Cx(x-1),$$

$$\text{або} \quad 4x - 2 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, отримаємо систему

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ B-C=4, \\ A=2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=2,\ B=1,\ C=-3.$$

Отже, отримали $\dfrac{4x-2}{x^3-x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}$. Легко перевірити тотожність, якщо звести дроби в правій частині до спільного знаменника.

Відповідь: $A=2$, $B=1$, $C=-3$, $a=0$, $b=1$, $c=-1$.

Приклад 12. Знайти такі числа a, b, c, щоб виконувалася тотожність $x^3-ax^2+bx-c=(x-a)(x-b)(x-c)$.

Розв'язання. Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x. Маємо:

$$x^3-ax^2+bx-c=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc,$$

$$a+b+c=a,\quad (b=-c) \tag{1}$$

$$ab+bc+ac=b, \tag{2}$$

$$abc=c,\quad (c=0 \text{ або } ab=1). \tag{3}$$

Випадок 1: $c=0$. Тоді з (1) одержимо $b=0$ і рівність (2) виконується при будь-якому значенні a.

Випадок 2: $ab=1$. Підставимо із (1) в (2) $c=-b$, отримаємо

$$b=ab+bc+ac=ab-ab-b^2=-b^2, \text{ тобто } b=-b^2 \ \Rightarrow \ b=0 \text{ або } b=-1.$$

Якщо $b=0$, то й $c=0$, і маємо випадок 1. Коли ж $b=-1$, то $c=1$, тоді з (3) одержимо $a=-1$.

Отже, заданий многочлен набуває вигляду:

або $x^3-ax^2=x^2(x-a)$, де $a-$ будь-яке число;

або $x^3+x^2-x-1=(x+1)(x-1)(x+1)$.

Відповідь: $b=0$, $c=0$, $a-$ будь-яке число; $a=-1$, $b=-1$, $c=1$.

Самостійна робота 2.3

1. Знаючи, що $1+x+x^2=0$, знайти $x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}$.

2. Скласти рівняння дотичної, яка дотикається до графіка функції $y=x^4-x^2+x$ в двох точках.

3. Знайти таке значення x, що $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2n})=2020$.

Відповіді: 1. -1; **2.** $y=x-1/4$; **3.** $x=2019/2020$.

3. ВІДПОВІДІ

Самостійна робота 1.1

1. Розв'язати рівняння:

а) $(x^2-2x-4)(x^2-2x-3)=2$; **б)** $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

в) $\dfrac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}=\dfrac{128}{15}$; **г)** $(3x^2+7x-2)^2+5x^2(3x^2+7x-24)=24x^4$.

Розв'язання: а). Після заміни $x^2-2x-3=t$ отримаємо квадратне рівняння відносно змінної t:

$$(t-1)t=2,\ \ t^2-t-2=0,\ \text{звідки матимемо}\ t_1=-1,\ t_2=2.$$

Отже, задане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=-1, \\ x^2-2x-3=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2=0, \\ x^2-2x-5=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}, \\ x_{3,4}=1\pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

б). Розкладемо на множники вираз $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, а потім, оскільки $x=1$ не є коренем заданого рівняння, почленно поділимо на $(x-1)^2$. Одержимо

$$2\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2-13\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)-7=0.$$

Виконавши в цьому рівнянні заміну $\frac{x^2+x+1}{x-1}=t$, прийдемо до квадратного рівняння $2t^2-13t-7=0$, яке має корені $t_1=7$, $t_2=-1/2$.

Таким чином, задане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7,\\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-1/2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+8=0,\\ 2x^2+3x+1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2,\ x_2=4,\\ x_3=-1,\ x_4=-1/2.\end{array}\right.$$

в). Після виконання перетворень у лівій частині рівняння отримаємо

$$\frac{\left((x^2+1)+2x\right)^2}{x(x^2+1)}=\frac{128}{15} \Rightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x(x^2+1)}+\frac{4x(x^2+1)}{x(x^2+1)}+\frac{4x^2}{x(x^2+1)}=\frac{128}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}+\frac{4x^2}{x(x^2+1)}=\frac{68}{15}.$$

За допомогою заміни $\frac{x^2+1}{x}=t$ перетворимо рівняння до вигляду $t^2-\frac{68}{15}t+4=0$, звідки знайдемо $t_1=10/3$, $t_2=6/5$.

Таким чином, приходимо до сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{10}{3},\\ \dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{6}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-10x+3=0,\\ 5x^2-6x+5=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=3,\ x_2=\dfrac{1}{3},\\ x_{3,4}=\dfrac{3\pm 4i}{5}.\end{array}\right.$$

г). Відносно змінної $(3x^2+7x-2)$ задане рівняння є квадратним, яке за теоремою Вієта має корені $3x^2$ і $-8x^2$. Тоді, враховуючи, що

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена, задане рівняння набуває вигляду:

$$(11x^2+7x-2)(7x-2)=0,$$

звідки маємо $\left[\begin{array}{l}11x^2+7x-2=0,\\ 7x-2=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{137}}{22},\\ x=2/7.\end{array}\right.$

2. Знайти область значень функції $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання. Завдання фактично полягає в тому, щоб знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}=a$$

має дійсні корені. Розглянемо це рівняння

$$x^2+x+1=ax^2+2ax+2a, \text{ або}$$

$$(a-1)x^2+(2a-1)x+2a-1=0.$$

Якщо $a=1$, то $x=-1$ є коренем рівняння. Коли $a\neq 1$, то дійсні корені знайдемо з умови $D\geq 0$:

$$(2a-1)^2-4(a-1)(2a-1)\geq 0, \text{ або } (2a-1)(2a-3)\leq 0, \text{ звідки } a\in[1/2;3/2].$$

Таким чином, функція $f(x)$ набуває значень $[1/2;3/2]$.

Відповіді: 1.а) $1\pm\sqrt{3}$; $1\pm\sqrt{6}$. **1.б)** 2; 4; -1; $-1/2$. **1.в)** 3; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{3\pm 4i}{5}$.

1.г) $\dfrac{-7-\sqrt{137}}{22}$; $\dfrac{-7+\sqrt{137}}{22}$; $2/7$. **2.** $[1/2;3/2]$.

Самостійна робота 1.2

1. Визначити, чи може квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант $D=23$.

Розв'язання. Припустимо, що дискримінант заданого рівняння дорівнює 23, тобто $b^2-4ac=23$. Тоді

$$b^2-25=4ac-2, \quad \text{або} \quad (b-5)(b+5)=2(2ac-1).$$

Зазначимо, що числа $b-5$ і $b+5$ однакової парності. Тому їх добуток, якщо він є парним числом, ділиться на 4. Але ж права частина – парне число, яке не ділиться на 4. Отже, задане рівняння не може мати дискримінант $D=23$.

Відповідь: ні.

2. Відомо, що рівняння $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів і $a+b+c<0$. Визначити знак коефіцієнта c.

Розв'язання. Коли квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не має дійсних коренів, то він зберігає один і той самий знак для всіх x. Оскільки $f(1)=a+b+c<0$, то й $f(0)=c<0$. Отже, $c<0$.

Відповідь: $c<0$.

3. Знайти корені рівняння $y=x^2+px+q$, якщо вони цілі й $p+q=198$.

Розв'язання. Згідно з теоремою Вієта для коренів x_1 і x_2 заданого рівняння можна записати:

$$198=p+q=-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=x_1(x_2-1)-(x_2-1)-1=$$

$$=(x_1-1)(x_2-1)-1, \text{ звідки } (x_1-1)(x_2-1)=199.$$

Оскільки число 199 просте, то пара чисел $(x_1-1; x_2-1)$ збігається або з $(1;199)$, або з $(-1;-199)$. Таким чином, задане рівняння має такі корені: $x_1=2$, $x_2=200$ або $x_1=0$, $x_2=-198$.

Відповідь: $x_1=2, x_2=200$; $x_1=0$, $x_2=-198$.

4. Довести, що рівняння $x^2+2px+2q=0$, де p і q – цілі непарні числа, не може мати раціональних коренів.

Доведення. Нехай x – непарне число. Тоді x^2 також є непарним, а число $2px+2q=2(px+q)$ – парне. Сума цих чисел $x^2+(2px+2q)$ не може дорівнювати нулю. Отже, коренями даного рівняння не можуть бути непарні цілі числа.

Парні цілі числа теж не можуть бути коренями заданого рівняння, бо тоді число $x^2+2px=x(x+2p)$ ділиться на 4, а для непарних q число $2q$ при діленні на 4 дає остачу 2. Через це сума $(x^2+2px)+2q$ не може дорівнювати нулю.

Переконаємося тепер, що задане рівняння не може мати і дробових коренів. Запишемо рівняння в такому вигляді:

$$(x+p)^2=p^2-2q\,.$$

Нехай x – дробове раціональне число. Тоді число $x+p$ – теж дробове раціональне і його квадрат не може дорівнювати цілому числу p^2-2q.

5. Довести, що рівняння $x^2+(2m+1)x+(2n+1)=0$, де m і n – цілі числа, не має раціональних коренів.

Доведення. Перший спосіб. Припустимо, що $x=\dfrac{p}{q}$ – раціональний корінь рівняння $(p,q\in Z)$. Оскільки коефіцієнти рівняння – цілі числа, то цей раціональний корінь теж є цілим (див. розділ 1.2, Приклад 14), тобто $x=p$. Розглянемо два випадки: p – парне; p – непарне.

Нехай $p=2k$ $(k\in Z)$. Тоді $4k^2+(2m+1)2k+(2n+1)=2l+1$ $(l\in Z)$.

Коли $p=2k+1$, то $(2k+1)^2+(2m+1)(2k+1)+(2n+1)=2r+1$ $(r\in Z)$.

В обох випадках отримали суперечність – непарне число дорівнює нулю (за означенням нуль – число парне). Отже, припущення щодо раціональності коренів рівняння хибне, що й треба було довести.

Другий спосіб. Нехай раціональне число $\dfrac{m}{n}$ є коренем даного рівняння. Дріб $\dfrac{m}{n}$ вважаємо нескоротним, тобто числа m і n не мають спільних дільників. Підставивши $\dfrac{m}{n}$ замість x в задане рівняння, отримаємо

$$m^2 + pmn + qn^2 = 0. \qquad (1)$$

З цієї рівності виходить, що q ділиться на m, оскільки $m(m + pn) = -qn^2$.

Оскільки за умовою q непарне, то m має бути теж непарним. Непарним буде й число n, бо інакше з попередньої рівності вийшло б, що сума парного і непарного чисел дорівнює нулю, що неможливо. Але при непарних m, n, p, q будуть непарними всі три доданки в рівності (1), отже, їх сума не може дорівнювати нулю. Таким чином, приходимо до висновку, що задане рівняння не має раціональних коренів.

6. Квадратні рівняння $x^2 + ax + b = 0$ і $x^2 + cx + d = 0$ мають додатні дискримінанти, причому $(b-d)^2 - (a-c)(bc-ad) < 0$. Довести, що між коренями кожного з рівнянь міститься рівно один корінь іншого рівняння.

Доведення. Квадратні рівняння входять в умову задачі рівноправно, тому достатньо довести, що між коренями першого рівняння міститься рівно один корінь другого рівняння. Нехай x_1, x_2 – корені першого рівняння, а y_1, y_2 – другого. Враховуючи теорему Вієта, матимемо

$$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2); \qquad y_1 + y_2 = -c, \qquad y_1 \cdot y_2 = d.$$

Звідси знаходимо $y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = c^2 - 2d$. Користуючись цими співвідношеннями, обчислюємо добуток

$$(y_1 - x_1)(y_1 - x_2)(y_2 - x_1)(y_2 - x_2) = (y_1^2 - (x_1 + x_2)y_1 + x_1x_2)(y_2^2 - (x_1 + x_2)y_2 + x_1x_2) =$$

$$= (y_1^2 + ay_1 + b) \cdot (y_2^2 + ay_2 + b) = y_1^2y_2^2 + ay_1y_2(y_1 + y_2) + b(y_1^2 + y_2^2) +$$

$$+ a^2y_1y_2 + ab(y_1 + y_2) + b^2 = d^2 - adc + b(c^2 - 2d) + a^2d - abc + b^2 =$$

$$= b^2 - 2bd + d^2 + ad(a-c) - bc(a-c) = (b-d)^2 - (a-c)(bc-ad) < 0.$$

Оскільки добуток від’ємний, то його множники $(y_1 - x_1)(y_1 - x_2)$ і $(y_2 - x_1)(y_2 - x_2)$ мають протилежні знаки. Якщо, наприклад, перший з них буде додатним, а другий від’ємним, то це означатиме, що корінь y_1 лежить зовні інтервалу $(x_1; x_2)$, а y_2 – всередині, тобто між коренями x_1 і x_2 першого рівняння лежить рівно один корінь другого рівняння, що й треба було довести.

Випадок, коли множник $(y_1 - x_1)(y_1 - x_2)$ буде від'ємним, а $(y_2 - x_1)(y_2 - x_2)$ – додатним, розглядається аналогічно.

7. Довести, що коли квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (c \neq 0)$$

має раціональний корінь, то принаймні одне з чисел a, b, c – парне.

Доведення. Підставимо в рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

$x = \dfrac{y}{a}$ і помножимо обидві частини на a, отримаємо рівняння з цілими коефіцієнтами

$$y^2 + by + ac = 0. \tag{2}$$

Якщо x – раціональне число, то і число $y = ax$ раціональне. Отже, рівняння (2), як і рівняння (1), має раціональний корінь. Відомо, що коли зведене рівняння з цілими коефіцієнтами має раціональний корінь, то цей корінь – ціле число. Таким чином, рівняння (2) має цілий корінь y_1. Але тоді його інший корінь $y_2 = -b - y_1$ також є цілим числом. Оскільки

$$y_1 + y_2 = -b, \ \ y_1 y_2 = ac, \ \text{то} \ \ abc = -y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

Серед чисел y_1, y_2, $y_1 + y_2$ принаймні одне парне, тому добуток abc – парне число. Звідси виходить, що принаймні одне з чисел a, b, c парне, що й треба було довести.

Самостійна робота 1.3

1. Визначити, при яких значеннях параметра a нерівність

$$ax^2 + (2-a)x + (3-2a) \leq 0$$

виконується тільки для одного значення x.

Розв'язання. Оскільки у лівій частині нерівності многочлен відносно змінної x не вище другого степеня, то починати треба, звичайно, з випадку, коли $a = 0$. Тоді маємо $2x + 3 \leq 0$, звідки $x \leq -3/2$, що не задовольняє умову.

При $a \neq 0$ розглянемо квадратний тричлен $y = ax^2 + (2-a)x + (3-2a)$. Задана нерівність матиме єдиний розв'язок, коли дискримінант квадратного тричлена буде дорівнювати нулю, тобто

$$(2-a)^2 - 4a(3-2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9a^2 - 16a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}.$$

Відповідь: $a_{1,2} = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}$.

2. Знайти всі значення параметра a, для яких різниця коренів рівняння $2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ дорівнює 1.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \dfrac{a+1}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a+3}{2}$. Тоді

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a+3}{2} = \frac{a^2 - 6a - 23}{4}.$$

Враховуючи умову, маємо

$$\frac{a^2 - 6a - 23}{4} = 1, \quad a^2 - 6a - 27 = 0, \quad a_1 = 9,\ a_2 = -3.$$

Відповідь: $a_1 = 9$; $a_2 = -3$.

3. Знайти всі дійсні значення k, при яких корені рівняння $(k-3)x^2 - 2kx + 6k = 0$ додатні.

Розв'язання. При $k = 3$ отримаємо рівняння першого степеня $-6x + 18 = 0$, яке має додатний корінь $x = 3$.

Нехай тепер $k \neq 3$, тоді задане рівняння буде квадратним. Аби воно мало додатні корені, необхідно вимагати виконання наведених далі умов. По-перше, дискримінант має бути невід'ємним, оскільки корені дійсні:

$$k^2 - 6k(k-3) \geq 0, \text{ тобто } k(18 - 5k) \geq 0,$$

звідки знаходимо

$$0 \leq k \leq 3{,}6\ (k \neq 3). \tag{1}$$

При цьому обидва корені будуть додатними, коли їх сума і добуток додатні, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{2k}{k-3} > 0, \\ \dfrac{6k}{k-3} > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k < 0 \text{ і } k > 3. \qquad (2)$$

Одночасне виконання умов (1) і (2) дає множину значень $3 < k \le 3{,}6$. Враховуючи раніше знайдене $k = 3$, остаточно одержимо $3 \le k \le 3{,}6$.

Відповідь: $3 \le k \le 3{,}6$.

4. Не обчислюючи коренів рівняння $2x^2 - 5x + 1 = 0$, знайти різницю квадратів його коренів.

Розв'язання. Згідно з теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2}$, отже, маємо

$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = \sqrt{\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 4x_1^2 x_2^2} =$$

$$= \sqrt{\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right)^2 - 4x_1^2 x_2^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{17}}{4}.$$

Звідси одержимо $x_1^2 - x_2^2 = \pm\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Відповідь: $\pm\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

5. Визначити, при яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ більші за 3.

Розв'язання. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, x_1 і x_2 – корені рівняння $f(x) = 0$. Обидва корені квадратного тричлена більші за деяке число M тоді й тільки тоді (рис. 15), коли виконуються умови

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) > 0, \end{cases}$$

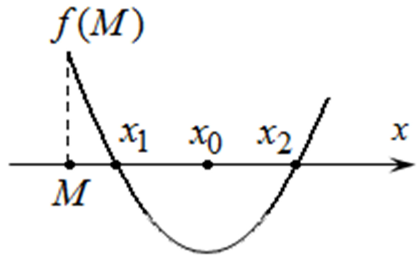

Рис. 15

Згідно з умовою використаємо першу систему, враховуючи, що $x_0 = 3a$, $f(3) = 9a^2 - 20a + 11$, $\dfrac{D}{4} = 9a^2 - 2 + 2a - 9a^2 = 2a - 2$. Одержимо

$$\begin{cases} 2a - 2 \ge 0, \\ 3a > 3, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0, \end{cases} \quad \text{звідки знаходимо } a > \frac{11}{9}.$$

Відповідь: $a > 11/9$.

6. Знайти всі значення параметра *a*, при яких корені рівняння $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ задовольняють умови $x_1 < 2$, $x_2 > 3$.

Розв'язання. Із умови задачі виходить, що задане рівняння є квадратним, отже, $a - 2 \ne 0$. Крім того, умови $x_1 < M$, $x_2 > N$ означають, що відрізок $[M;N]$ повністю лежить в інтервалі між коренями (рис. 16). Це можливо тоді й тільки тоді, коли $a \cdot f(M) < 0$ і $a \cdot f(N) < 0$, де $f(x) = ax^2 + bx + c$.

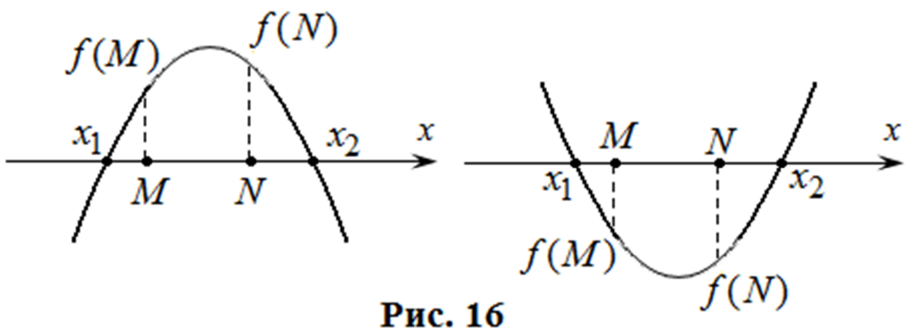

Рис. 16

Таким чином, шукані значення параметра *a* знайдемо, розв'язавши систему

$$\begin{cases} (a-2)(4a-20) < 0, \\ (a-2)(7a-36) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < a < 5, \\ 2 < a < 36/7 \end{cases} \Rightarrow 2 < a < 5.$$

Відповідь: $2 < a < 5$.

Самостійна робота 1.4

1. На параболі $y = x^2$ вибрано точки *A*, *B* і *C* так, що кут $\angle ABC$ є прямим. Нехай *a*, *b*, *c* – абсциси вибраних точок. Довести, що $(a+b)(b+c) = -1$.

Доведення. Із умов задачі випливає, що ординатами точок *A*, *B*, *C* будуть відповідно числа $y_A = a^2$, $y_B = b^2$, $y_C = c^2$. Крім цього, виконується умова $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$, де $\overline{BA} = \left(a-b; a^2-b^2\right)$, $\overline{BC} = \left(c-b; c^2-b^2\right)$. Скалярний добуток цих векторів матиме такий вигляд:

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (a-b)(c-b) + (a^2-b^2)(c^2-b^2) = (a-b)(c-b)(1+(a+b)(c+b)) = 0.$$

Звідси одержимо $(a+b)(b+c) = -1$, бо $a \neq b$, $c \neq b$, оскільки точки A, B, C – різні. Твердження доведено.

2. Дві вершини трикутника знаходяться в точках $A(-1;0)$ і $B(1;0)$, а третя точка *C* рухається по параболі $y = x^2 - 6x + 15$. Знайти рівняння кривої, яку описує центр ваги трикутника.

Розв'язання. Центр ваги трикутника розташований у точці *M* перетину його медіан. Оскільки медіана, проведена з точки *C*, проходить через середину відрізка *AB*, тобто через точку $O(0;0)$, то точка $M(t;z)$ ділить відрізок *OC* у відношенні $2:1$, рахуючи від точки *C*. Це означає, що $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OC}$, отже, координати точки *M*: $t = \frac{x}{3}$, $z = \frac{y}{3}$.

Звідси виходить, що $z = \frac{y(x)}{3} = \frac{1}{3}y(3t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Відповідь: $y = 3x^2 - 6x + 5$.

3. Визначити, при яких значеннях параметрів *a* і *b* еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ перетинається з параболою $y^2 = 2px$ під найбільшим кутом.

Розв'язання. Кутові коефіцієнти дотичних у точці $(x_0; y_0)$ відповідно до еліпса і параболи визначаються формулами $k_e = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ і $k_n = \frac{p}{y_0}$. Найбільший кут між ними дорівнює $90°$ за умови $k_e k_n = -1$, тобто $\frac{b^2 x_0 p}{a^2 {y_0}^2} = 1$. Оскільки ${y_0}^2 = 2px_0$, то $b^2 = 2a^2$, тобто $b = a\sqrt{2}$.

Відповідь: $b = a\sqrt{2}$.

4. Визначити геометричне місце вершин парабол

$$y = x^2 - \frac{4mx}{m^2+1} + \frac{m^4+4m^2+1}{\left(m^2+1\right)^2}.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$y = \left(x - \frac{2m}{m^2+1}\right)^2 + \frac{m^4+1}{\left(m^2+1\right)^2},$$

звідки отримаємо параметричні координати вершин $x = \dfrac{2m}{m^2+1}$, $y = \dfrac{m^4+1}{\left(m^2+1\right)^2}$.

Аби виключити параметр *m*, із першого рівняння знаходимо $\dfrac{m}{m^2+1} = \dfrac{x}{2}$.

Тоді $2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y = \dfrac{2m^2+m^4+1}{\left(m^2+1\right)^2} = 1$.

Отже, геометричним місцем точок, які є вершинами заданих парабол, є парабола $y = 1 - x^2/2$.

Відповідь: парабола $y = 1 - x^2/2$.

Самостійна робота 1.5

1. Знайти дійсні корені рівняння $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

Розв'язання. Подамо задане рівняння у вигляді

$$x^2 - 6x + 9 + y - 4\sqrt{y} + 4 = 0, \text{ або } (x-3)^2 + (\sqrt{y}-2)^2 = 0.$$

Оскільки $(x-3)^2 \ge 0$ і $(\sqrt{y}-2)^2 \ge 0$, то сума цих величин дорівнює нулю тільки тоді, коли $(x-3)^2 = 0$ і $(\sqrt{y}-2)^2 = 0$, звідки $x = 3$, $y = 4$.

Відповідь: $x = 3$, $y = 4$.

2. Визначити, чи можна подати квадратний тричлен $9n^2 - 12n + 6$, як різницю квадратів двох лінійних двочленів.

Розв'язання. Нехай $p(n)$ і $q(n)$ − двочлени і має місце рівність

$$9n^2 - 12n + 6 = p^2(n) - q^2(n) = \big(p(n) - q(n)\big)\big(p(n) + q(n)\big).$$

Тоді з правої частини цієї рівності виходить, що квадратний тричлен має дійсні корені. Але його дискримінант $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 6 = -72$, отже, маємо суперечність. Тому виконати умови задачі неможливо.

Відповідь: ні.

3. Довести, що тричлен $y = x^2 + 5x + 16$ при будь-якому цілому x не ділиться на 169.

Доведення. Запишемо заданий тричлен у вигляді

$$y = x^2 + 5x + 16 = (x+9)(x-4) + 52.$$

Якщо існує таке ціле число *x*, при якому *y* ділиться на 169, то при цьому значенні *x* число *y* ділитиметься й на 13. Оскільки 52 кратне 13, то добуток $(x+9)(x-4)$ теж має ділитися на 13, тобто принаймні один із співмножників $(x+9)$ чи $(x-4)$ має ділитись на 13.

Нехай x таке, що один із вказаних співмножників $(x+9)$ або $(x-4)$ ділиться на 13. Тоді й інший буде ділитись на 13, тому що $x + 9 = (x-4) + 13$. Тоді добуток $(x+9)(x-4)$ має ділитись на 169. Але ж 52 не ділиться на 169, тому заданий тричлен ні при якому значенні *x* не ділиться на 169, що й треба було довести.

4. Довести, що для коренів квадратного тричлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, де $p \in R$, $p \neq 0$, виконується нерівність $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Доведення. Скориставшись теоремою Вієта та зв'язком між середнім арифметичним і середнім геометричним двох чисел, отримаємо

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1^3 x_2 - 6x_1^2 x_2^2 - 4x_1 x_2^3 =$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 2x_1 x_2 \left(2(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2\right) = p^4 + \frac{1}{p^2}\left(2p^2 + \frac{1}{2p^2}\right) =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} = 2 + \sqrt{2}$$, що й треба було довести.

5. Довести, що вираз $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ є квадратом тричлена.

Доведення. Якщо даний вираз є квадратом тричлена, то справедлива рівність

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (x^2 + ax + b)^2.$$

Розкриємо дужки і порівняємо коефіцієнти при x^3 і x^2 в лівій і правій частинах рівності:

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 25 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2,$$

$$\begin{cases} 2a = 10, \\ a^2 + 2b = 35 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 5,\ b = 5.$$

Легко переконатися, що при цих значеннях a і b збігаються також коефіцієнти при x та x^0. Отже, заданий вираз дорівнює $(x^2 + 5x + 5)^2$, тобто є квадратом тричлена, що і треба було довести.

6. Знайти всі розв'язки системи рівнянь, які задовольняють умову $z \geq 0$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо друге рівняння системи, як квадратне відносно змінної y, тобто $4y^2 - 8y + z^2 = 0$. Його дискримінант $D = 64 - 16z^2 \geq 0$, звідки $|z| \leq 2$. Враховуючи, що за умовою $z \geq 0$, матимемо $0 \leq z \leq 2$.

Запишемо третє рівняння, як квадратне відносно змінної x:

$$x^2 - 2(z-4)x - 6z + 16 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння $D = 4(z-4)^2 + 4(6z - 16) \geq 0$, тобто $(z-4)^2 + 6z - 16 \geq 0$, або $z^2 - 2z \geq 0$, звідки маємо $z \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. Беручи до уваги, що $0 \leq z \leq 2$, одержимо $z = 0$ або $z = 2$.

Підставляючи в систему $z=0$, отримаємо розв'язки $y=0,\ x=-4$ та $y=2,\ x=-4$, які не задовольняють перше рівняння. При $z=2$ одержимо $y=1,\ x=-2$.

Відповідь: $(-2;1;2)$.

7. Довести тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Доведення. Ліва частина заданої тотожності є многочленом не вище другого степеня. Це означає, що цей многочлен не може мати більше двох різних дійсних коренів. Але легко переконатися, що задану рівність задовольняють три різних значення: $x=a$, $x=b$ і $x=c$. Отже, ця рівність є тотожністю.

Самостійна робота 2.1

1. Розкласти на множники многочлени: **а)** x^8+x+1; **б)** $x^{12}+5x^6+9$.

Розв'язання: а) $x^8+x+1=x^8+x^7-x^7+x^6-x^6+x^5-x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+$

$$+x^2-x^2+x+1=x^6(1+x+x^2)-x^5(1+x+x^2)+x^3(1+x+x^2)-$$

$$-x^2(1+x+x^2)+(1+x+x^2)=(1+x+x^2)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)\ ;$$

б) $x^{12}+5x^6+9=x^{12}+6x^6+9-x^6=(x^6+3)^2-(x^3)^2=(x^6+x^3+3)(x^6-x^3+3)$.

Відповідь: а) $(1+x+x^2)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$; **б)** $(x^6+x^3+3)(x^6-x^3+3)$.

2. Не виконуючи ділення, знайти остачу $R(x)$ від ділення многочлена $P(x)=4x^4-5x^2+3x+1$ на x^2-x-2.

Розв'язання. Квадратний тричлен x^2-x-2 має корені $x_1=2$, $x_2=-1$, розкладемо його на множники

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Оскільки остача $R(x)$ – многочлен першого степеня, то

$$P(x) = (x-2)(x+1)Q(x) + ax + b,$$

де $Q(x)$ – частка.

Надаючи змінній x значення, що дорівнюють кореням тричлена, матимемо $P(2) = 2a + b$, $P(-1) = -a + b$. З іншого боку, $P(2) = 51$, $P(-1) = -3$.

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a + b = 51, \\ -a + b = -3, \end{cases}$$

з якої знаходимо $a = 18$, $b = 15$. Отже, $R(x) = 18x + 15$.

Відповідь: $R(x) = 18x + 15$.

3. Скоротити дріб $\dfrac{x^{47} + x^{46} + \ldots + x + 1}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1}$.

Розв'язання. Перший спосіб:

$$\frac{x^{47} + x^{46} + \ldots + x + 1}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1} = \frac{(x^{47} + \ldots + x^{32}) + (x^{31} + \ldots + x^{16}) + (x^{15} + \ldots + x + 1)}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1} =$$

$$= \frac{x^{32}(x^{15} + \ldots + x + 1) + x^{16}(x^{15} + \ldots + x + 1) + (x^{15} + \ldots + x + 1)}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1} =$$

$$= \frac{(x^{32} + x^{16} + 1)(x^{15} + \ldots + x + 1)}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1} = x^{32} + x^{16} + 1.$$

Другий спосіб. Після множення на $(x-1)$ чисельника і знаменника заданого дробу і використання формули розкладення на множники виразу $x^n - 1$ отримаємо

$$\frac{x^{47} + x^{46} + \ldots + x + 1}{x^{15} + x^{14} + \ldots + x + 1} = \frac{x^{48} - 1}{x^{16} - 1} = \frac{\left(x^{16}\right)^3 - 1}{x^{16} - 1} = x^{32} + x^{16} + 1.$$

Відповідь: $x^{32} + x^{16} + 1$.

4. Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність

$$xP(x-1) = (x-2)P(x).$$

Розв'язання. Після підстановки в задану тотожність значень $x=0$ та $x=2$ отримуємо $P(0)=0$, $P(1)=0$, а це означає, що шуканий многочлен має корені $x=0$ та $x=1$, а значить, ділиться на $x(x-1)=x^2-x$. Далі, підставляючи в задану тотожність вираз $P(x)=(x^2-x)\cdot Q(x)$, одержимо для многочлена $Q(x)$ тотожність $Q(x)=Q(x-1)$. Звідси виходить $Q(0)=Q(-1)=Q(-2)=\dots$. Тому $Q(x)=C$ – константа, а шуканий многочлен має вигляд $P(x)=C(x^2-x)$. Перевіркою переконуємося, що всі многочлени такого вигляду задовольняють задану тотожність.

Відповідь: $P(x)=C(x^2-x)$, де C – довільна константа.

Самостійна робота 2.2

1. Обчислити значення виразу

$$\frac{3+2020ab}{3+3a+ab}+\frac{3+2020bc}{3+b+bc}+\frac{1+2020ac}{1+c+ac},$$

якщо a, b, c – корені рівняння $2x^3+5x^2-5x-6=0$.

Розв'язання. Оскільки за теоремою Вієта для заданого рівняння $abc=3$, то після множення чисельника і знаменника другого дробу на a, а третього – на ab заданий вираз набуде вигляду

$$\frac{3+2020ab}{3+3a+ab}+\frac{3a+2020\cdot 3}{3a+ab+3}+\frac{ab+2020\cdot 3a}{ab+3+3a}=\frac{2021(3+3a+ab)}{3+3a+ab}=2021.$$

Відповідь: 2021.

2. Знайти корені рівняння $x^4+3x^3+2x^2-6x+4=0$.

Розв'язання. Оскільки $x=0$ не є коренем заданого рівняння, то, поділивши обидві частини на x^2, одержимо рівносильне рівняння

$$x^2+3x+2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}=0, \quad \text{або} \quad x^2+\frac{4}{x^2}+3\left(x-\frac{2}{x}\right)+2=0.$$

Нехай $x-\frac{2}{x}=y$, тоді $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$, і рівняння набуває вигляду

$$y^2+3y+2=0, \quad \text{звідки} \quad y_1=-1, \quad y_2=-2.$$

Отже, маємо два рівняння: $x-\frac{2}{x}=-1$ і $x-\frac{2}{x}=-2$. Із першого знаходимо $x_1=1$, $x_2=-2$, а з другого $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

3. Не розкриваючи дужок, розв’язати рівняння

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.$$

Розв’язання. Застосувавши підстановку $x=\frac{y}{12}$, зведемо задане рівняння до вигляду $(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=120$, або

$$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=2\cdot3\cdot4\cdot5.$$

Будь-який корінь цього рівняння перетворить його ліву частину на добуток чотирьох послідовних цілих чисел. Очевидно, що $y_1=-1$ та $y_2=6$ – саме такі корені. Щоб знайти ще два корені y_3 та y_4, скористаємося теоремою Вієта:

$$(-1)\cdot 6y_3y_4=-120+(-1)(-2)(-3)(-4) \quad \Rightarrow \quad y_3y_4=16;$$

$$-(-1+6+y_3+y_4)=-1-2-3-4 \quad \Rightarrow \quad y_3+y_4=5.$$

Отже, y_3 та y_4 збігаються з коренями рівняння $y^2-5y+16=0$, тобто

$$y_{3,4}=\frac{5\pm i\sqrt{39}}{2}.$$

Повернувшись до змінної x, одержимо всі корені заданого рівняння

$$x_1=-\frac{1}{12}; \quad x_2=\frac{1}{2}; \quad x_{3,4}=\frac{5\pm i\sqrt{39}}{24}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5\pm i\sqrt{39}}{24}$.

4. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – подібні многочлени (див. Приклад 2, розділ 2.2). Довести, що число $\dfrac{P(2021)-Q(2021)}{101}$ – ціле.

Розв'язання. Нехай многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ – подібні, тоді $P(1)=Q(1)$. Розглянемо многочлен $R(x)=P(x)-Q(x)$. Очевидно, що $R(1)=P(1)-Q(1)=0$, отже, $R(x)=(x-1)F(x)$, де $F(x)$ – частка від ділення $R(x)$ на $(x-1)$.

Тоді різниця $P(2021)-Q(2021)$ буде $R(2021)=2020\,F(2021)$, тому вона ділиться на 2020, а також на будь-яке число $k\in N$, що є дільником числа 2020, зокрема на 101. Отже, число $\dfrac{P(2021)-Q(2021)}{101}$ – ціле.

5. Довести, що при будь-яких ненульових значеннях α і β корені x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$ задовольняють рівність

$$\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$$

Доведення. За теоремою Вієта корені x_1 , x_2 , x_3 заданого многочлена задовольняють такі рівності:

$$x_1+x_2+x_3=1,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{\beta}{\alpha},\quad x_1x_2x_3=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Тому $\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\right)=\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right)=$

$$=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)=-1.$$

Самостійна робота 2.3

1. Знаючи, що $1+x+x^2=0$, знайти $x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}$.

Розв'язання. З умови задачі зрозуміло, що $x\neq 0$, тож розділимо $1+x+x^2=0$ почленно на *x*, одержимо $x+\dfrac{1}{x}=-1$. Далі, помноживши обидві частини цього рівняння на $x-1$, отримаємо $x^3=1$.

Враховуючи отримані рівності, матимемо

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=(x^3)^4x^2+\frac{1}{(x^3)^4x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1.$$

Відповідь: -1.

2. Скласти рівняння дотичної, яка дотикається до графіка функції $y=x^4-x^2+x$ в двох точках.

Розв'язання. Перший спосіб. Для розв'язання задачі треба знайти дві точки, у яких похідна заданої функції має рівні значення, тобто розв'язати рівняння

$$y'=4x^3-2x+1=a.$$

Для зручності візьмемо $a=1$:

$$4x^3-2x+1=1,\ \text{ або }\ 2x(2x^2-1)=0,\ \text{ звідки }\ x=0,\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},\qquad y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4},$$

то з рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ маємо

$$y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \Rightarrow\ y=x-\frac{1}{4}$$

$$\text{і}\quad y=-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \Rightarrow\ y=x-\frac{1}{4}.$$

Таким чином, шукана дотична має рівняння $y=x-\frac{1}{4}$.

Другий спосіб. Після виділення повного квадрата задана функція набуває вигляду

$$y=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+x-\frac{1}{4}\quad\text{або}\quad y=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+x-\frac{1}{4}.$$

Легко перевірити, що пряма $y = x - \frac{1}{4}$ дотикається графіка функції $y = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + x - \frac{1}{4}$ в точках з абсцисами $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $y = x - 1/4$.

3. Знайти таке значення *x*, що

$$\lim_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\,...\,(1+x^{2n}) = 2020\,.$$

Розв'язання. Зазначимо, що границя в лівій частині рівності дорівнює нулю при $x = -1$ і ∞ при $x \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$. При $x \in (-1; 1)$ матимемо

$$\lim_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\,...\,(1+x^{2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{4n}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

тобто $\frac{1}{1-x} = 2020$, звідки $x = \frac{2019}{2020}$.

Відповідь: $x = \frac{2019}{2020}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичні олімпіади школярів України 2001–2006: навч.-метод. посіб. / упоряд.: В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський; – Львів: Каменяр, 2008. – 350 с.

2. Математичні олімпіадні змагання школярів України 2007–2008 та 2008–2009: навч.-метод. посіб. / за ред. Б.В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 549 с.

3. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач: навч. посіб. / В.А. Вишенський, М.В. Карташов, В.І. Михайловський, М.Й. Ядренко. – Київ: Либідь, 1993. – 144 с.

4. Сборник задач киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташов, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко. – Киев: Вища школа, 1984. 240 с.

5. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. / В.А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.

6. Страшевич С. Польские математические олимпиады. / С. Страшевич, Е. Бровкин.– Москва: Мир, 1978. – 340 с.

7. Зарубежные математические олимпиады / С.В. Конягин, Г.А. Тоноян, И.Ф. Шарыгин и др. / под ред. И.Н. Сергеева. – Москва: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.

8. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. / В.В. Ткачук. – Москва: Изд-во МНМО, 1998. – 364 с.

9. Мерзляк Л.Г. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. / Л.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Киев: Агрофирма “Александрия”, 1993. – 60 с.

10. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами. / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир.– Киев: РИА “Текст”; МП “Око”, 1992. – 288 с.

11. Українські математичні олімпіади: довідник / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкин, М.В. Карташов, В.І. Михайловський, Г.Й. Призва, М.Й. Ядренко. – Київ: Вища шк., 1993. – 415 с.

12. Шклярский Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.

13. Кушнир И.А. Уравнения. Задачи и решения. / И.А. Кушнир. – Киев: Астарта, 1996. – 604 с.

14. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. / И.Х. Сивашинский. – Москва: Просвещение, 1988. – 312 с.

15. Федак І.В. Готуємось до олімпіади з математики. / І.В. Федак. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.

16. Егоров А. О дискриминанте / А. Егоров // Квант. – 1992. – № 6 – С. 59–63.

17. Сторчай В.Ф. Олимпиадные задачи о многочленах. / В.Ф. Сторчай, Е.В. Кошеленко. // Математика и ее приложения. – СПб: Изд-во ГУМРФ им. адм. Макарова, – 2018. – № 6 – С. 112–126.

Навчальне видання

Сторчай Володимир Федорович
Приходько Віра Володимирівна

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ. МНОГОЧЛЕНИ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Художнє оформлення М.В. Ларікова

Підписано до друку 03.03.2021. Формат 30×42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 6,3.
Обл.-вид. арк. 6,3. Тираж 50 пр. Зам. № .

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.