МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.Ф. Сторчай

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ. НЕВИЗНАЧЕНІ, ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

УДК 517(075.8)
С 82

Рекомендовано до видання вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» (протокол № 3 від 11.02.2021) як навчальний посібник для студентів.

Рецензенти:

О.М. Кісельова – член-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри обчислювальної математики та кібернетики Дніпровського національного університету імені О. Гончара;

С.О. Пічугов – д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної математики Дніпровського університету залізничного транспорту імені В. Лазаряна.

Сторчай В.Ф.

С 82 Готуємося до олімпіади. Невизначені, визначені та невласні інтеграли: навч. посіб. / В.Ф. Сторчай ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2021. – 125 с.

ISBN 978-966-350-743-9

Кожний розділ містить короткий виклад необхідного теоретичного матеріалу, вправи для самостійної роботи, вказівки та докладні розв'язання різного ступеня складності олімпіадних завдань.

Особливу увагу приділено нестандартним методам розв'язування та темам, які слабо висвітлені в методичній літературі. Наприклад, застосування теорії лишків при обчисленні інтегралів від функції дійсної змінної.

Буде корисним студентам, викладачам різних навчальних закладів, які готують студентів до участі в олімпіадах.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-966-350-743-9

Зміст

Передмова

Загальновідомо, що задача ВНЗ полягає не тільки в тому, щоб надати студентам певну суму знань, а і в тому, щоб навчити їх творчо мислити, прагнути до активної пізнавальної діяльності, умінню практично застосовувати свої знання. Необхідною умовою цього навчання є безпосередня участь студентів у даному виді діяльності. Саме участь в олімпіадах сприяє більш ґрунтовному вивченню математики, дозволяє виявити обдарованих студентів і далі розвивати їх здібності.

Найважливішою проблемою підготовки студентів до участі в олімпіадах є наявність відповідної методичної літератури, користуючись якою студент мав би можливість познайомитися з різними методами розв’язання нестандартних задач. На превеликий жаль, збірники студентських математичних олімпіад давно вже стали бібліографічним раритетом.

Навчальний посібник містить у собі матеріал з таких розділів інтегрального числення: невизначений, визначений та невласний інтеграли. В кожному розділі наведено необхідний теоретичний матеріал, вправи для самостійної роботи, вказівки, а також повні розв’язання олімпіадних завдань різного ступеня складності. Така структура посібника надає студентам велику можливість для самостійної активної роботи і служить основній меті – допомогти студентам з найменшими витратами часу успішно неформально опанувати цей матеріал.

Автор щиро вдячний ректору НТУ «ДП» академіку НАН України, професору Г.Г. Півняку, завідувачу кафедри вищої математики професору О.О.Сдвижковій, які завжди підтримували і підтримують проведення будь-яких наукових студентських заходів і олімпіад, а також студентам-призерам Всеукраїнської студентської олімпіади з математики – Лариковій М.В. і Миронову Ю.А. за оформлення цього посібника.

§ 1. Невизначені інтеграли

1.1. Поняття невизначеного інтеграла

Однією з основних задач диференціального числення є пошук похідної від заданої функції. Інтегральне числення розв'язує обернену задачу: знайти функцію $F(x)$, знаючи її похідну $F'(x) = f(x)$.

Функція $F(x)$ називається **первісною функції** $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-якого $x \in (a;b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому ж самому інтервалі буде мати вигляд $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то множина функцій $\{F(x)+C\}$ називається **невизначеним інтегралом від функції** $f(x)$ і позначається символом

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**, $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, змінна x – **змінною інтегрування**, а $\int$ – **знаком інтегрування**.

Операцією знаходження невизначеного інтеграла від функції називають **інтегруванням цієї функції**.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

1°. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2°. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3°. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої C:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

4°. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5°. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6°. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ й $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u)+C.$$

7°. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx)+C,$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

1.3. Таблиця основних невизначених інтегралів

$\int 0\,du = C$	$\int du = u + C$
$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\alpha \neq -1$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a}+C$	$\int e^{u} du = e^{u}+C$
$\int \sin u\,du = -\cos u + C$	$\int \cos u\,du = \sin u + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
$\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C$	$\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C$
$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+a^2}\right\rvert + C$	
$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$	

1.4. Основні методи інтегрування

1.4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Безпосереднім інтегруванням називається обчислення інтегралів за допомогою тотожних перетворень, таблиці інтегралів і основних властивостей інтеграла.

1.4.2. Метод підстановки (заміни) змінної

Суть цього методу полягає у введені нової змінної, що дає можливість звести заданий інтеграл до табличного або перейти до безпосереднього інтегрування. Цей метод ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на деякому інтервалі $(a;b)$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in (a;b),$$

і нехай $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множина значень цієї функції є інтервал $(a;b)$. Тоді справедлива формула:

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right] + C.$$

1.4.3. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають неперервні похідні на деякому інтервалі $(a;b)$. Тоді на інтервалі $(a;b)$ виконується рівність:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами**. Вона дає можливість звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$, який може бути суттєво більш простим, ніж заданий.

Зауважимо, що в формулі інтегрування частинами u і dv не можна довільно обирати, інакше можна отримати більш складний інтеграл, ніж заданий.

Зазначимо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду

$$\int P(x)\cdot \operatorname{arctg} x dx,\ \int P(x)\cdot \operatorname{arcctg} x dx,\ \int P(x)\cdot \arcsin x dx,$$

$$\int P(x)\cdot \arccos x\, dx,\ \int P(x)\cdot \ln x\, dx,$$

де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід брати $dv = P(x)$, а за u – вираз, що залишився.

2. Інтеграли вигляду

$$\int P(x)\cdot e^{kx}dx,\ \int P(x)\cdot \sin kx\, dx,\ \int P(x)\cdot \cos kx\, dx,$$

де $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число. У цих інтегралах слід брати $u = P(x)$, а за dv – вираз, що залишився.

3. Інтеграли вигляду

$$\int e^{\alpha x}\cdot \sin\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x dx,\ \int \sin\ln x dx,\ \int \cos\ln x dx,$$

де α, β – дійсні числа. Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв’язуючи це рівняння, знаходимо інтеграл.

1.5. Інтегрування раціональних дробів

Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де n – натуральне число, яке називається степенем многочлена; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коефіцієнти многочлена (дійсні або комплексні числа); незалежна змінна x може бути як дійсною, так і комплексною змінною. Далі розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Раціональним дробом або **раціональною функцією** $R(x)$ називається відношення двох многочленів, тобто

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x)$ – многочлен степеня m, а $Q_n(x)$ – многочлен степеня n.

Дріб називається **правильним**, якщо $m < n$, а в іншому випадку ($m \geq n$) раціональний дріб називається **неправильним**. Дроби

$$\frac{A}{x+a}, \ \frac{A}{(x+a)^n}, \ \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \ \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n} \quad (p^2 - 4q < 0, n \geq 2)$$

називають **найпростішими** або **елементарними**. Тут $n > 1$, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб $R(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, знаменник якого розкладається на множники:

$$Q_n(x) = a_0 (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \ldots \left(x^2+px+q\right)^{\mu} \cdot \left(x^2+rx+s\right)^{\nu} \ldots,$$

$$(\alpha + \beta + \ldots + 2\mu + 2\nu + \ldots = n),$$

можна подати у вигляді такої суми елементарних дробів:

$$R(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_{\mu} x + N_{\mu}}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}} +$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2+rx+s} + \frac{C_2 x + D_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2} + \ldots + \frac{C_{\nu} x + D_{\nu}}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu}} + \ldots,$$

де A_1, A_2, …, A_{α}, B_1, B_2, …, B_{β}, M_1, N_1, C_1, D_1, … – деякі дійсні числа.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів в останній рівності можна застосувати **метод невизначених коефіцієнтів**. Суть методу така:

1) зводимо праву частину останньої рівності до спільного знаменника і отримаємо тотожність

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{S(x)}{Q_n(x)},$$

де $S(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами;

2) оскільки в отриманій тотожності знаменники рівні, то тотожно рівні й чисельники, тобто

$$P_m(x)\equiv S(x);$$

3) прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x в обох частинах рівності, отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої і знаходимо невідомі коефіцієнти.

Часто набагато зручніше знаходити значення невідомих коефіцієнтів, якщо комбінувати рівняння з розглянутої вище системи з рівняннями, які можна отримати з тотожності $P_m(x)=S(x)$, надаючи значення змінній, і які є коренями многочлена $Q_n(x)$.

1.6. Інтегрування елементарних дробів

1.	$\int\frac{dx}{x+a}=\ln\lvert x+a\rvert+C.$
2.	$\int\frac{dx}{(x+a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,\ n\neq 1.$
3.	$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=$ $=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{2\alpha}\right)+C_1,\ \alpha=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$
4.	$\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=B\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n},\ \alpha=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$ Перший з цих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий – за **рекурентною формулою** $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$

1.7. Інтегрування тригонометричних виразів та ірраціональностей

Наведемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай $R(u,v,\ldots,w)$ – раціональна функція від змінних $u,v,\ldots,w$, тобто відношення двох многочленів зазначених незалежних змінних. Раціональну функцію задає вираз, отриманий виконанням над аргументами та дійсними числами скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення і ділення.

Інтеграл	Підстановка
$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$	$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, \quad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$
$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$	$\cos x=t$
$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$	$\sin x=t$
$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$	$\operatorname{tg} x=t$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\sin t$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\operatorname{tg} t$
$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\dfrac{a}{\sin t}$
$\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$
$\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$	$x=t^N$, де $N=$НСК $(n,\ldots,s)$

Інтеграл	Підстановка
$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx$, де a і b – дійсні числа; m, n і p – раціональні числа. Інтеграли такого вигляду називаються інтегралами від диференціального бінома. П. Л. Чебишов довів, що тільки в трьох випадках такий інтеграл виражається через відомі елементарні функції.	1) p – ціле число, $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n; 2) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, $ax^n + b = t^s$, де s – знаменник дробу p; 3) $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, $a + bx^{-n} = t^s$, де s – знаменник дробу p.

1.8. Завдання для самостійного розв'язання

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x^2+1}{x^4 - x^2 + 1} dx$.

2. $\int \arcsin x \cdot \arccos x dx$.

3. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

4. $\int \frac{x^2 - 2}{x^4 + 4} dx$.

5. $\int \ln\left(5 + x + 2\sqrt{x}\right) dx$.

6. $\int \frac{x + \sin^2 x}{1 + \cos x} dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

8. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + e^x + 1} dx$.

9. $\int \cos x \ln\left(\sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}\right) dx$.

10. $\int \frac{\cos^2 2x}{\cos 2x - \sin 4x + \cos 6x} dx$.

11. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

12. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

13. $\int \left(1 + 2x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{x^2 + \frac{1}{x}} dx$.

14. $\int e^{\cos x} \cdot \frac{x \sin^3 x + \cos x}{\sin^2 x} dx$.

15. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos^2 x}$.

16. $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

17. $\int \frac{x \operatorname{tg} x - \ln \cos x}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^x} dx$.

18. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$.

19. $\int \frac{dx}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x}$.

20. $\int \frac{(x+1) dx}{x\left(1 + xe^x\right)}$.

21. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

22. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4+\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}}$.

23. $\int \frac{x \ln\left(x^2+x\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)} dx$.

24. $\int \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

25. $\int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}} dx$.

26. $\int \left(|1+x|-|1-x|\right) dx$.

27. $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^6+1} dx$.

28. $\int \frac{e^{2x}}{\left(e^x-1\right)\left(e^{x+1}-1\right)} dx$.

29. Знайти $I = \int \max\left\{1, x^2\right\} dx$.

30. Знайти додатну функцію $f(x)$ при $x>0$, яка задовольняє співвідношення

$$2x\int f(x)\,dx = f(x).$$

1.9. Вказівки до розв'язання

1. Поділити чисельник і знаменник підінтегральної функції на x^2, а потім в знаменнику виділити повний квадрат.

2. Зробити заміну $\arcsin x = t$ і скористатися формулою $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

3. Послідовно зробити дві заміни змінної: спочатку $\operatorname{tg} x = t$, а потім $t^2 = z$.

4. Розв'язання аналогічне розв'язанню прикладу 1.

5. Заміна змінної $\sqrt{x} = t$ та інтегрування частинами зводить заданий інтеграл до інтеграла від неправильного раціонального дробу. Щоб знайти цей інтеграл треба поділити або кутом, або за схемою Горнера та визначити цілу частину.

6. Розглянути заданий інтеграл як суму двох інтегралів. Для знаходження першого інтеграла скористатися формулою $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ і проінтегрувати частинами, а для другого скористатися формулою $1-\cos^2 x = \sin^2 x$.

7. Цей інтеграл заміною $\operatorname{tg} x = t$ звести до інтеграла від правильного раціонального дробу.

8. Виділити цілу частину і при знаходженні інтеграла від дробу скористатися рівністю $d\left(x^2+e^x+1\right) = \left(2x+e^x\right)dx$.

9. Проінтегрувати частинами.

10. Перетворити знаменник до такого виразу:

$$\cos 2x - \sin 4x + \cos 6x = -4\cos 2x\left(\sin 2x + 1\right)\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right),$$

а потім скористатися рівністю

$$\frac{1}{\left(\sin 2x + 1\right)\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sin 2x - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sin 2x + 1}\right].$$

11. Користуючись формулами тригонометрії, звести знаменник до такого вигляду:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}\left(5 + 3\cos 4x\right),$$

а потім зробити підстановку $\operatorname{tg} 2x = t$.

12. Поділити почленно чисельник і знаменник підінтегральної функції на x^2 та послідовно зробити дві заміни змінної: $x + \frac{1}{x} = t$, а потім $t = \frac{1}{z}$.

13. Проінтегрувавши частинами інтеграл $\int e^{x^2 + \frac{1}{x}} dx$, отримаємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язавши це рівняння, знаходимо інтеграл.

14. Розглянути заданий інтеграл як суму двох заданих інтегралів. Кожний з них проінтегрувати частинами.

15. Треба розглянути три випадки: $a^2 = b^2$, $a^2 < b^2$ і $a^2 > b^2$:

1) $a^2 = b^2$ – заданий інтеграл після очевидних перетворень зводиться до табличного.

2) $a^2 < b^2$ – позначити $\frac{a}{b} = \cos\varphi$ і далі шляхом перетворень знаменника підінтегральної функції звести до такого вигляду:

$$a^2 - b^2\cos^2 x = b^2 \sin\left(x + \varphi\right)\sin\left(x - \varphi\right),$$

а чисельник записати таким чином:

$$1 = \sin\left(x + \varphi - \left(x - \varphi\right)\right)\cdot\frac{1}{\sin 2\varphi};$$

скориставшись формулою $\sin\left(\alpha - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$, отримаємо, що заданий інтеграл дорівнюватиме сумі двох табличних інтегралів;

3) $a^2 > b^2$ – після позначення через $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ шляхом очевидних перетворень записати знаменник підінтегральної функції в такому вигляді:

$$a^2 - b^2\cos^2 x = a^2\left(\sin^2 x + \sin^2\alpha\cdot\cos^2 x\right) = a^2\left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin\alpha}\right)^2\right]\sin^2\alpha\cdot\cos^2 x.$$

Отримаємо інтеграл, який підстановкою $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin \alpha} = t$ зводиться до табличного інтеграла.

16. Скориставшись формулою $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ і властивостями тригонометричних функцій, перетворити підінтегральну функцію до вигляду

$$\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \cdot \sin x} + \frac{2}{\cos x + \sin x}\right).$$

Інтеграл від кожного доданку в правій частині рівності знаходиться методом безпосереднього інтегрування.

17. Переконатись, що $\dfrac{x \operatorname{tg} x - \ln \cos x}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^x} dx = -\dfrac{1}{2} d\left(\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)^x$.

18. Перетворити перший співмножник підінтегральної функції до такого вигляду:

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Далі, інтегруючи частинами, знайдемо і $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$, і шуканий інтеграл.

19. Спочатку перетворити знаменник підінтегральної функції на такий вираз:

$$\cos x + \sin 2x - \cos 3x = \sin 2x\left(2\sin x + 1\right),$$

а потім чисельник і знаменник помножити на $\cos x$ і зробити заміну змінної: $\sin x = t$. У результаті отримаємо інтеграл від раціональної функції, яка розкладається методом невизначених коефіцієнтів на суму елементарних дробів.

20. Помножити чисельник і знаменник на e^x та зробити заміну $xe^x = t$. Тоді заданий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції.

21. Перетворити знаменник підінтегральної функції до такого вигляду:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2 2x\right),$$

а потім зробити заміну змінної: $\cos 2x = t$. Отримаємо інтеграл від раціональної функції.

22. Спочатку записати підінтегральну функцію таким чином:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4 + \sqrt{\left(1 + x^4\right)^3}}} = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^4}}},$$

а потім переконатися, що $d\left(1 + \sqrt{1 + x^4}\right) = \dfrac{2x^3 dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

23. Перетворити чисельник підінтегральної функції на такий вираз:

$$x\ln\left(x^2+x\right)+\ln(x+1)=x\ln x+(x+1)\ln(x+1),$$

а потім записати заданий інтеграл як суму двох інтегралів і за формулою інтегрування частинами знайти інтеграл $\int\frac{\ln x}{x+1}dx$.

24. Зробити підстановку $x+\sqrt{1+x^2}=t$.

25. Спочатку помножити чисельник і знаменник підінтегральної функції на e^x, а потім скористатися рівністю $\left[e^x f(x)+1\right]'=e^x f(x)+e^x f'(x)$.

26. Переконатись у справедливості рівності

$$\int|x|dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x|x|}{2}+C$$

і скористатися нею.

27. Скориставшись формулою $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, розкласти знаменник підінтегральної функції на множники:

$$x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right),$$

а чисельник записати як суму двох доданків. Після цього отримаємо два табличних інтеграли.

28. Використати рівність $\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)\left(e^{x+1}-1\right)}=\frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{x+1}-1}\right)$.

29. Розглянути два випадки: $|x|\le 1$ й $x>1$ та врахувати неперервність первісної функції в точках $x=\pm1$.

30. Спочатку обидві частини рівняння поділити на x $(x>0)$, а потім продиференціювати цю рівність. Отримаємо рівняння, з якого і знаходимо $f(x)$.

1.10. Розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$.

Розв'язання. Після очевидних перетворень отримаємо:

$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}=\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-x}{x}\right)+C.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-x}{x}\right)+C$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $I=\int \arcsin x\cdot\arccos x dx$.

Розв’язання

$$I=\int \arcsin x \arccos x dx=\left\{\begin{matrix}\arcsin x=t, & \arccos x=\frac{\pi}{2}-t\\ x=\sin t, & \end{matrix}\right\}=\int t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t\, dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right), & du=\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)dt,\\ dv=\cos t\, dt, & v=\sin t\end{matrix}\right\}=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t-\int\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\sin t dt=$$

$$=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t-\frac{\pi}{2}\int\sin t dt+2\int t\sin t dt=\left\{\begin{matrix}u=t, & dv=\sin t\, dt,\\ du=dt, & v=-\cos t\end{matrix}\right\}=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t+$$

$$+\frac{\pi}{2}\cos t-2t\cos t+2\int\cos t dt=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t+\frac{\pi}{2}\cos t-2t\cos t+2\sin t+C=$$

$$=\left(\frac{\pi t}{2}-t^2+2\right)\sin t+\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\cos t+C.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi t}{2}-t^2+2\right)\sin t+\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\cos t+C$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

Розв’язання

$$I=\int\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=\left\{\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t, & x=\operatorname{arctg}t,\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}, & \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\}=\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^4}}=\left\{\begin{matrix}t^2=z\\ 2tdt=dz\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{2}\arcsin z+C=\frac{1}{2}\arcsin\operatorname{tg}^2x+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\arcsin\operatorname{tg}^2x+C$.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2-2}{x^4+4}dx$.

Розв’язання

$$I=\int\frac{x^2-2}{x^4+4}dx=\int\frac{1-2x^{-2}}{x^2+4x^{-2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{2}{x}\right)}{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{2}{x}-2}{x+\frac{2}{x}+2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}+C$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int \ln\left(5+x+2\sqrt{x}\right)dx$.

Розв'язання

$$I=\int \ln\left(5+x+2\sqrt{x}\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int \ln\left(5+2t+t^2\right)dt^2=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}u=\ln\left(5+2t+t^2\right), & dv=dt^2,\\ du=\dfrac{2+2t}{t^2+2t+5}, & v=t^2\end{array}\right\}=t^2\ln\left(5+2t+t^2\right)-2\int\frac{t^3+t^2}{t^2+2t+5}dt.$$

Оскільки

$$\begin{array}{r|l}
t^3+t^2 & t^2+2t+5\\ \cline{2-2}
\underline{t^3+2t^2+5t} & t-1\\
-t^2-5t & \\
\underline{-t^2-2t-5} & \\
-3t+5 &
\end{array}\text{, то}$$

$$I=t^2\ln(t^2+2t+5)-2\int(t-1)dt+\int\frac{6t-10}{t^2+2t+5}dt=t^2\ln(t^2+2t+5)-t^2+2t+$$

$$+\int\frac{3(2t+2)-16}{t^2+2t+5}dt=t^2\ln(t^2+2t+5)-t^2+2t+6\int\frac{t+1}{(t+1)^2+4}dt-16\int\frac{dt}{(t+1)^2+4}=$$

$$=t^2\ln(t^2+2t+5)-t^2+2t+3\ln\left(t^2+2t+5\right)-8\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}+C=$$

$$=x\ln(x+2\sqrt{x}+5)-x+2\sqrt{x}+3\ln\left(x+2\sqrt{x}+5\right)-8\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}+1}{2}+C.$$

Відповідь: $(x+3)\ln(x+2\sqrt{x}+5)-x+2\sqrt{x}-8\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}+1}{2}+C$.

Приклад 6. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx$.

Розв'язання

$$I=\int\frac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int\frac{x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}, \\ du=dx, & v=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\end{matrix}\right|=x\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx=$$

$$=x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|,$$

$$I_2=\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}dx=\int(1-\cos x)dx=$$
$$=x-\sin x.$$

Отже, $I=x\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\sin x+C$.

Відповідь: $I=x\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\sin x+C$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$.

Розв'язання. Після застосування підстановки $\operatorname{tg}x=t$ і відповідних перетворень отримаємо:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t, & dx=\dfrac{dt}{1+t^2}, \\ x=\operatorname{arctg}t, & \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(t^2+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^4+2t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{t^2\left(t^2+2\right)}=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-t^2-2}{t^2\left(t^2+2\right)}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2t}+C=C-\left[\frac{\operatorname{ctg}x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Відповідь: $C-\left[\frac{\operatorname{ctg}x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

Приклад 8. Знайти інтеграл $I=\int\frac{(x-1)^2}{x^2+e^x+1}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину дробу під інтегралом:

$$I=\int\frac{(x-1)^2}{x^2+e^x+1}=\int\frac{x^2-2x+1}{x^2+e^x+1}dx=\int\left(1-\frac{2x+e^x}{x^2+e^x+1}\right)dx=x-\int\frac{d\left(x^2+e^x+1\right)}{x^2+e^x+1}=$$

$$=x-\ln\left(x^2+e^x+1\right)+C.$$

Відповідь: $x-\ln\left(x^2+e^x+1\right)+C$.

Приклад 9. Знайти інтеграл $I=\int\cos x\cdot\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$I=\int\cos\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u=\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right),\quad dv=\cos x dx,\quad v=\sin x \\ du=\dfrac{\cos x+\dfrac{\cos x\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}}{\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}}dx=\dfrac{\cos x\left(\sqrt{2-\cos^2 x}+\sin x\right)}{\sqrt{2-\cos^2 x}\left(\sqrt{2-\cos^2 x}+\sin x\right)}dx=\dfrac{\cos x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}\end{array}\right\}=$$

$$=\sin x\cdot\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)-\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}dx=\sin x\cdot\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(2-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(2-\cos^2 x\right)dx=\sin x\cdot\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)-\sqrt{2-\cos^2 x}+C.$$

Відповідь: $\sin x\cdot\ln\left(\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\right)-\sqrt{2-\cos^2 x}+C$.

Приклад 10. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\cos^2 2x}{\cos 2x-\sin 4x+\cos 6x}dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos 2x-\sin 4x+\cos 6x=2\cos 4x\cos 2x-2\sin 2x\cos 2x=2\cos 2x(\cos 4x-\sin 2x)=$$

$$=2\cos 2x\left(1-2\sin^2 2x-\sin 2x\right)=-4\cos 2x(\sin 2x+1)\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right),$$ а

$$\frac{1}{(\sin 2x+1)\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sin 2x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sin 2x+1}\right],$$ то

$$I=-\frac{1}{4}\int\frac{\cos 2x}{(\sin 2x+1)\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)}dx=-\frac{1}{6}\int\cos 2x\left[\frac{1}{\sin 2x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sin 2x+1}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{12}\int\frac{d\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)}{\sin 2x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}\int\frac{d(\sin 2x+1)}{\sin 2x+1}=-\frac{1}{12}\ln\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{12}\ln\left|\sin 2x+1\right|+C=$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-\frac{1}{2}}\right|+C$.

Приклад 11. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

Розв’язання. Оскільки

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)=$$

$$=\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-$$

$$-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{8}\left(1-\cos 4x\right)=\frac{1}{8}\left(5+3\cos 4x\right)\text{, то}$$

$$I=8\int\frac{dx}{5+3\cos 4x}=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,2x=t,\\ dx=\dfrac{dt}{2\left(1+t^2\right)},\quad \cos 4x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\}=$$

$$=4\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(5+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+4}=\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)+C=\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2}\right)+C.$$

Відповідь: $\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2}\right)+C$.

Приклад 12. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Розв’язання. Після очевидних перетворень отримаємо

$$I=\int\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}dx=\left\{\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{x}=t,\quad \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=dt,\\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2\end{array}\right\}=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{z},\quad dt=-\dfrac{1}{z^2}dz,\\ t^2-2=\dfrac{1-2z^2}{z^2}\end{array}\right\}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{2}-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\sqrt{2}z+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{t}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}+C$.

Приклад 13. Знайти інтеграл $I=\int\left(1+2x^2-\frac{1}{x}\right)e^{x^2+\frac{1}{x}}dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int e^{x^2+\frac{1}{x}}dx=\left\{\begin{matrix} dv=dx, & v=x, & u=e^{x^2+\frac{1}{x}}, \\ du=\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+\frac{1}{x}}dx \end{matrix}\right\}=xe^{x^2+\frac{1}{x}}-\int\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)e^{x^2+\frac{1}{x}}dx+C,\text{ то}$$

$$I=x\cdot e^{x^2+\frac{1}{x}}+C.$$

Відповідь: $x\cdot e^{x^2+\frac{1}{x}}+C$.

Приклад 14. Знайти інтеграл $I=\int e^{\cos x}\cdot\frac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Розв'язання

$$I=\int e^{\cos x}x\sin x dx+\int e^{\cos x}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int e^{\cos x}x\sin x dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=e^{\cos x}x\sin x dx, & v=-e^{\cos x} \end{matrix}\right\}=-xe^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx,$$

$$I_2=\int e^{\cos x}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\left\{\begin{matrix} u=e^{\cos x}, & du=-\sin x e^{\cos x}dx, \\ dv=\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, & v=-\frac{1}{\sin x} \end{matrix}\right\}=-\frac{e^{\cos x}}{\sin x}-\int e^{\cos x}dx.$$

Отже, $I=-e^{\cos x}\left(x+\frac{1}{\sin x}\right)+C$.

Відповідь: $-e^{\cos x}\left(x+\frac{1}{\sin x}\right)+C$.

Приклад 15. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$.

Розв'язання. Будемо розглядати три випадки: $a^2=b^2$, $a^2<b^2$ і $a^2>b^2$.

Перший випадок: $a^2=b^2$.

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}x+C.$$

Другий випадок: $a^2<b^2$.

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\cos^2x}=\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\cos\varphi,\\ \varphi=\arccos\frac{a}{b}\end{array}\right\}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\cos^2\varphi-\cos^2x}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{(\cos\varphi-\cos x)(\cos\varphi+\cos x)}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{2\sin\frac{x+\varphi}{2}\sin\frac{x-\varphi}{2}\cdot 2\cos\frac{x+\varphi}{2}\cos\frac{x-\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)\sin(x-\varphi)}=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\int\frac{\sin(x+\varphi-(x-\varphi))}{\sin(x+\varphi)\sin(x-\varphi)}dx=$$

$$=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\int\frac{\sin(x+\varphi)\cos(x-\varphi)-\sin(x-\varphi)\cos(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)\sin(x-\varphi)}dx=$$

$$=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\left(\int\frac{\cos(x-\varphi)}{\sin(x-\varphi)}dx-\int\frac{\cos(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\left(\ln\left|\sin(x-\varphi)\right|-\ln\left|\sin(x+\varphi)\right|\right)+C=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\ln\left|\frac{\sin(x-\varphi)}{\sin(x+\varphi)}\right|+C.$$

Третій випадок: $a^2>b^2$.

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2x}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\cos^2x}=\left\{\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\cos\alpha,\\ \alpha=\arccos\frac{b}{a}\end{array}\right\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1-\cos^2\alpha\cdot\cos^2x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}1-\cos^2\alpha\cos^2x=1-\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos^2x=\\ =1-\cos^2x+\sin^2\alpha\cos^2x=\sin^2x+\sin^2\alpha\cos^2x\end{array}\right\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\sin^2x+\sin^2\alpha\cos^2x}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left[1+\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)^2\right]\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2x}=\left\{d\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)=\frac{dx}{\sin\alpha\cdot\cos^2x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a^2\sin\alpha}\int\frac{d\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)^2}=\frac{1}{a^2\sin\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}x+C$, якщо $a^2=b^2$; $I=\frac{1}{b^2\sin2\varphi}\ln\left|\frac{\sin(x-\varphi)}{\sin(x+\varphi)}\right|+C$, де $\varphi=\arccos\frac{a}{b}$ при $a^2<b^2$ й $I=\frac{1}{a^2\sin\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}\right)+C$, де $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, якщо $a^2>b^2$.

Приклад 16. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$.

Розв’язання. Скориставшись формулою суми кубів і тотожними перетвореннями, зведемо підінтегральну функцію до такого вигляду:

$$\frac{1}{\cos^3 x+\sin^3 x}=\frac{1}{(\cos x+\sin x)\left(\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x\right)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cdot\cos x}{(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cdot\cos x)}=\frac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cdot\cos x+2}{3(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cdot\cos x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2+2(1-\sin x\cdot\cos x)}{3(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cdot\cos x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos x+\sin x}{1-\cos x\cdot\sin x}+\frac{2}{\cos x+\sin x}\right).$$

Тоді $I=\frac{1}{3}\int\frac{\cos x+\sin x}{1-\cos x\cdot\sin x}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}=\left\{\begin{array}{l}1-\cos x\cdot\sin x=\\ =\frac{1}{2}\left(1+(\sin x-\cos x)^2\right)\end{array}\right\}=$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right|+C$.

Приклад 17. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x\operatorname{tg}x-\ln\cos x}{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^x}dx$.

Розв’язання. Оскільки

$$\left(\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{-x}\right)'=-\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{-x}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)-x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{-x-1}\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=$$

$$=-2\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{-x}(-\ln\cos x+x\operatorname{tg}x)=-2\frac{x\operatorname{tg}x-\ln\cos x}{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^x},\text{ то}$$

$$I=-\frac{1}{2}\int d\left(\frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^x}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^x}+C=-\frac{1}{2}\cos^{2x}x+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos^{2x}x+C$.

Приклад 18. Знайти інтеграл $I=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}dx$.

Розв'язання

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}dx=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}e^{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{\cos^{2}\frac{x}{2}}dx+\int\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^{2}\frac{x}{2}}e^{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{\cos^{2}\frac{x}{2}}dx+\int e^{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=e^{x}, & du=e^{x}dx,\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^{2}\frac{x}{2}}, & v=2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2e^{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2\int e^{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx\right)+\int e^{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx=e^{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Відповідь: $e^{x}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$.

Приклад 19. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\cos x+\sin 2x-\cos 3x}$.

Розв'язання. Враховуючи, що

$$\cos x+\sin 2x-\cos 3x=2\sin 2x\sin x+\sin 2x=\sin 2x\left(2\sin x+1\right),$$

зведемо заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції:

$$I=\int\frac{dx}{\sin 2x\left(2\sin x+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x dx}{\sin x\cdot\cos^{2}x\left(2\sin x+1\right)}=\left\{\begin{array}{l}\sin x=t,\\ \cos x dx=dt,\\ \cos^{2}x=1-t^{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\left(1-t^{2}\right)\left(2t+1\right)}=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t\left(t^{2}-1\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}.$$

Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладемо підінтегральну функцію на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{t\left(t^{2}-1\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t+\frac{1}{2}},$$

$$1=A\left(t^{2}-1\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)+Bt\left(t+1\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)+Ct\left(t-1\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)+Dt\left(t^{2}-1\right),$$

$$t=0\ \left|\ -\frac{A}{2}=1\Rightarrow\ A=-2,\right.\qquad t=-1\ \left|\ C=1,\right.$$

$$t=1\ \left|\ 3B=1\Rightarrow\ B=\frac{1}{3},\right.\qquad t=-\frac{1}{2}\ \left|\ \frac{3}{8}D=1\Rightarrow\ D=\frac{8}{3}.\right.$$

Отже, маємо:

$$I=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t+\frac{1}{2}}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(-6\ln|t|+\ln|t-1|+3\ln|t+1|+8\ln\left|t+\frac{1}{2}\right|\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(-6\ln|\sin x|+\ln|\sin x-1|+3\ln|\sin x+1|+8\ln\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|\right)+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|\sin x|-\frac{1}{12}\ln|\sin x-1|-\frac{1}{4}\ln|\sin x+1|-\frac{2}{3}\ln\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|+C$.

Приклад 20. Знайти інтеграл $I=\int\frac{(x+1)dx}{x\left(1+xe^x\right)}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник підінтегральної функції на e^x. Тоді

$$I=\int\frac{e^x(x+1)dx}{xe^x\left(1+xe^x\right)}=\left\{\begin{array}{c} xe^x=t, \\ e^x(x+1)dx=dt \end{array}\right\}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right|+C.$$

Відповідь: $\ln\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right|+C$.

Приклад 21. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right),$$

то $I=2\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx=\left\{\begin{array}{c} \cos 2x=t, \\ -2\sin 2xdx=dt \end{array}\right\}=-\int\frac{dt}{1+t^2}=-\operatorname{arctg} t+C=$
$=-\operatorname{arctg}(\cos 2x)+C$.

Відповідь: $-\operatorname{arctg}(\cos 2x)+C$.

Приклад 22. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4+\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}}$.

Розв'язання

$$I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}=\left\{d\left(1+\sqrt{1+x^4}\right)=\frac{2x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+\sqrt{1+x^4}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}=$$
$$=\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}+C.$$

Відповідь: $\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}+C$.

Приклад 23. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x\ln\left(x^2+x\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)}dx$.

Розв'язання. Оскільки $x\ln\left(x^2+x\right)+\ln(x+1)=x\left[\ln x+\ln(x+1)\right]+$ $+\ln(x+1)=x\ln x+(x+1)\ln(x+1)$, то

$$I=\int\frac{x\ln x+(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}dx=\int\frac{\ln x}{x+1}dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx.$$

Інтегруючи частинами, здобудемо

$$\int\frac{\ln x}{x+1}dx=\left\{\begin{matrix}u=\ln x, & dv=\dfrac{dx}{x+1},\\ du=\dfrac{1}{x}, & v=\ln(x+1)\end{matrix}\right\}=\ln x\cdot\ln(x+1)-\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx.$$

Отже,

$$I=\ln x\cdot\ln(x+1)-\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx+C=\ln x\cdot\ln(x+1)+C.$$

Відповідь: $\ln x\cdot\ln(x+1)+C$.

Приклад 24. Знайти інтеграл $\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Розв'язання

$$\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left\{\begin{matrix}x+\sqrt{x^2+1}=t, & \\ \left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=dt, & \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt\end{matrix}\right\}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=$$
$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{2}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+C$.

Приклад 25. Функція $f:\mathbf{R}\to(0;+\infty)$ диференційовна і має неперервну похідну. Знайти невизначений інтеграл

$$I=\int\frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}}dx.$$

Розв'язання

$$I=\int\frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}}dx=\int\frac{e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)}{e^{x}f(x)+1}dx=\int\frac{\left[e^{x}f(x)+1\right]'}{e^{x}f(x)+1}dx=$$

$$=\ln\left[e^{x}f(x)+1\right]+C.$$

Відповідь: $\ln\left[e^{x}f(x)+1\right]+C$.

Приклад 26. Знайти інтеграл $I=\int(|1+x|-|1-x|)dx$.

Розв'язання. Оскільки $\int|x|dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x|x|}{2}+C$, то

$$I=\int|1+x|dx+\int|1-x|d(1-x)=\frac{1}{2}\left((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|\right)+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\left((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|\right)+C$.

Приклад 27. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^6+1}dx$.

Розв'язання. Враховуючи вказівку, маємо

$$\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^6+1}dx=\int\frac{\left(x^4-x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2}{x^6+1}dx=$$

$$=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C$.

Приклад 28. Знайти інтеграл $I=\int\frac{e^{2x}}{\left(e^x-1\right)\left(e^{x+1}-1\right)}dx$.

Розв'язання. Скориставшись вказівкою, маємо

$$I=\frac{1}{e-1}\int\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{x+1}-1}\right)e^xdx=\frac{1}{e-1}\left(\ln\left|e^x-1\right|-\frac{1}{e}\ln\left|e^{x+1}-1\right|\right)+C=$$

$$= \frac{1}{e-1}\ln\left|\frac{e^x-1}{\left(e^{x+1}-1\right)^{1/e}}\right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{e-1}\ln\left|\frac{e^x-1}{\left(e^{x+1}-1\right)^{1/e}}\right| + C$.

Приклад 29. Знайти $I = \int \max\left\{1, x^2\right\} dx$.

Розв'язання. Розглянемо випадки $|x| \le 1$ і $|x| > 1$. В першому випадку знаходимо

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} dx = \int dx = x + C_1,$$

у другому –

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Оскільки первісна функція неперервна, то в точці $x = 1$ повинна виконуватися рівність

$$1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2 \ (\text{при } x > 0).$$

Аналогічно в точці $x = -1$ маємо $-1 + C_1 = -\frac{1}{3} + C_2$.

Отже, при $x > 0$ знаходимо, що:

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} dx = \begin{cases} x + C, & 0 < x \le 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & 1 \le x < +\infty. \end{cases}$$

При $x \le 0$ відповідно дістанемо:

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} dx = \begin{cases} x + C, & -1 \le x \le 0, \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & +\infty < x < -1. \end{cases}$$

Об'єднаємо дві відповіді в одну:

$$\int \max\left\{1, x^2\right\} dx = \begin{cases} x + C, & |x| \le 1, \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відповідь: $I = x + C$ при $|x| \le 1$ й $I = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x + C$ при $|x| > 1$.

Приклад 30. Знайти додатну функцію $f(x)$ при $x>0$, яка задовольняє співвідношення

$$2x\int f(x)\,dx = f(x).$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння таким чином:

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(x)}{2x}, \qquad x>0,$$

звідки

$$f(x) = \frac{x\cdot f'(x) - f(x)}{2x^2}, \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x^2+1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\ln f(x) - x^2 - \ln x\right) = 0,$$

$$\ln f(x) = \ln e^{x^2} + \ln x + \ln C, \quad C>0.$$

Отже, $f(x) = Cxe^{x^2}$.

Відповідь: $f(x) = Cxe^{x^2}$, $C>0$.

§ 2. Визначені інтеграли

2.1. Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} = b$$

розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних відрізків $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Нехай λ – максимальна із довжин відрізків $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На кожному частинному відрізку $[x_{k-1};x_k]$ виберемо довільну точку $c_k \in [x_{k-1};x_k]$.

Сума
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$$

називається **інтегральною сумою функції** $\boldsymbol{f(x)}$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a;b]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda \to 0$ (при цьому $n \to \infty$), яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$, ні від вибору точок c_k, то ця границя називається **визначеним інтегралом функції** $\boldsymbol{f(x)}$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int_b^a f(x)dx$. Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k .$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається **інтегровною на відрізку** $[a;b]$; числа a і b називаються відповідно **нижньою** та **верхньою межами інтегрування**; функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**; $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**; x – **змінною інтегрування**; $[a;b]$ – **проміжком інтегрування**.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

2.2. Властивості визначеного інтеграла

1°. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz .$$

2°. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3°. При переставлянні меж інтегрування величина визначеного інтеграла змінює знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4°. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5°. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$, то для будь-яких чисел α і β функція $\alpha f(x)+\beta\varphi(x)$ також інтегровна на відрізку $[a;b]$ і

$$\int_a^b \left[\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot\varphi(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6°. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)\geq 0$ $(a<b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

7°. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ $a<b$, виконується нерівність $f(x)\leq\varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

8°. Якщо $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, $a<b$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна по цьому відрізку й

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

9°. Якщо для всіх $x\in[a;b]$ виконується нерівність $|f(x)|\leq C$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq C(b-a).$$

10°. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$, то

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a).$$

11°. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує така точка $c \in [a;b]$, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Значення $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ називається **середнім значенням функції на відрізку $[a;b]$**.

12°. Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Зауважимо, що

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)' = f\left[\psi(x)\right]\cdot\psi'(x) - f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x).$$

2.3. Обчислення визначеного інтеграла

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – яка-небудь первісна для $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця рівність називається **формулою Ньютона – Лейбніца**.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді якщо:

1) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;
2) множина значень функції $x = \varphi(t)$ є відрізок $[a;b]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$,

то справджується рівність $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt$.

Ця формула називається **формулою заміни змінної** (або **підстановки**) **у визначеному інтегралі.**

Теорема 3. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла.**

2.4. Завдання для самостійного розв’язання

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{3}^{8} x^{\frac{1}{\ln x}} dx$.

2. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$.

3. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}} dx$.

4. $\int\limits_{0}^{2020\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

5. $\int\limits_{0}^{2014} x(x-1)\ldots(x-2014)\, dx$.

6. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+2^{\pi \operatorname{tg} x}}$.

7. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+3)x}{\sin x} dx$.

8. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}$.

9. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\, dx$.

10. $\int\limits_{-1}^{1} \cos x \cdot \ln\frac{2+x}{2-x} dx$.

11. $\int\limits_{-1}^{1} x^{2019} \ln\left(1+e^x\right) dx$.

12. $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}} dx$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^{2010} x \cdot \cos 2012x\, dx$.

14. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}$.

15. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^p x dx}{\sin^p x + \cos^p x}$.

16. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{e^x + \alpha(\cos x - \sin x)}$.

17. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx,\ n \in \mathbf{N}$.

18. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} dx}{3\pi^2 + 4\pi x - 4x^2}$.

19. $\int\limits_{\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\ln\sqrt{e}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8}\left(e^{5x}+1\right)}$.

20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3} dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} dx$.

23. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x}$.

24. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{\left(8-x^2\right)dx}{\left(x^4+64\right)\left(3^{-2020x}+1\right)}$.

25. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} (x+\cos x)\cdot \ln\frac{1+x}{1-x} dx$.

26. $\int\limits_{0}^{\pi} x \sin^6 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

27. $\int_0^1 \arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

28. $\int_0^2 \frac{\cos \pi x}{e^x + e}\,dx$.

29. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(1+\operatorname{ctg} x)\,dx$.

30. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{2+\sin x}$.

31. Який знак має число $\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1}{\sqrt{\cos x}}\,dx$?

32. Довести нерівність $e^{-1010^2} < \int_0^1 e^{2020^2\left(t^2 - t\right)}\,dt < 1$.

33. Знаючи, що $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$, обчислити $\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}\,dx$.

34. Що більше: $\int_0^{10\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ чи $10\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 10x}\,dx$?

35. Довести, що $f(x) \sim x$ при $x \to 0$, якщо $f(x) = \int_{-\sin x}^{-\sin^2 x} e^{t^2}\,dt$.

36. При яких $a \in \mathbf{R}$ виконується нерівність $I_1 = \int_0^a e^{x^2-2x}\,dx \geq I_2 = \int_0^a x e^{x^2-2x}\,dx$.

37. Нехай $f(x)$ – неперервна періодична функція з періодом T, $\int_0^T f(x)\,dx = 0$.

Довести, що існує таке число a, що при будь-якому b виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

38. Довести, що $\int_0^1 x^x\,dx > \frac{3}{4}$.

39. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x) = x\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

40. Значення якого з поданих інтегралів більше?

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\,dx,\quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(\cos x)\,dx.$$

41. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=0$ і $y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$ на відрізку, довжиною в період.

42. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0;1]$. Довести, що для будь-якого $n\in\mathbf{N}$ існує точка $x_0\in[0;1]$ така, що $\int\limits_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0)$.

43. Довести, що при $\alpha>1$ $\int\limits_0^{\pi/2}\cos\alpha x\cdot(\cos x)^{\alpha-2}dx=0$.

44. Довести, що значення інтеграла $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\mathrm{tg}^k x}$ не залежить від k.

45. Нехай $f\in C[0;1]$ і для будь-яких $x,y\in[0;1]$ виконується нерівність $xf(y)+yf(x)\le 1$. Довести, що

$$I=\int\limits_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{4}.$$

46. Нехай $f(x)$, $x\in[a;b]$ – неперервна, додатно зростаюча функція. Довести, що для будь-якого $c\in[a;b]$ виконується нерівність

$$\frac{1}{c-a}\int\limits_a^c f(x)dx<\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

тобто, що середнє значення $f(x)$ на відрізку $[a;c]$ менше середнього значення $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

47. Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a;b]$ і $\int\limits_a^b f(x)dx=1$. Довести, що

$$\int\limits_a^b x^2\cdot f(x)dx\ge\left(\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx\right)^2.$$

48. Знайти $n\in\mathbf{N}$ з рівняння $e^{\int\limits_1^{n+1}\ln[x]dx}=2020!$, де $[x]$ – ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

49. Для неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[0;2\pi]$ знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}f(x)|\cos nx|dx.$$

50. Нехай для $\alpha>0$

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^\alpha x dx.$$

Довести, що функція $f(\alpha)=(\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1}$, яка визначена для всіх додатних α, має період 1. Обчислити $f(0)$.

51. Нехай

$$M=\left\{f\in C[0;\pi]:\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=1\right\}.$$

Знайти $\min\limits_{f\in M}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$.

52. Знайти функцію $f(x)$, яка задовольняє рівняння

$$f(x)=\int_0^1 x(1+xy)\cdot f(y)\,dy+\sqrt{x}\,.$$

53. Парна функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1;1]$. Довести, що

$$\int_0^{\pi} x\cdot f(\cos x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx\,.$$

54. Знайти всі функції $f(x)$, неперервні на проміжку $[0;\infty)$, для яких

$$\sin\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{x}{x+1}\,.$$

55. Довести справедливість співвідношення

$$f(x)=2f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2\,,$$

де $f(x)=-\int_0^x \ln\cos y\,dy$. За допомогою знайденого співвідношення обчислити

величину $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\int_0^{\pi/2}\ln\cos y\,dy\,.$$

56. Для непарної функції $f(x)$ обчислити інтеграл $I=\int_{-3}^{3}\frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}$.

57. Нехай $f(x)$ – довільна неперервна функція, яка визначена на всій множині дійсних чисел $\mathbf{R}$. Довести, що рівняння

$$f(\cos x)=3x^2 f\left(\cos x^3\right)$$

має хоча б один дійсний корінь.

58. Знайти всі функції $y(x)$, $x\in\mathbf{R}$, такі, що для будь-якого $x\in\mathbf{R}$ виконується

рівність $$y'(x)=\int_0^1 \max\{1,y(x)\}\,dx\,,$$

якщо $y(0)=1/2$.

59. Знайти функцію $f:\left(\frac{1}{e};\infty\right)\ni x\to y(x)\in\mathbf{R}$, яка є розв'язком диференціального рівняння $\int\limits_{0}^{y'(x)}\frac{e^t dt}{1+2e^t}=\frac{1}{2}\ln x$ із початковою умовою $y(1)=-\frac{2}{3}$.

60. Для $0<\alpha<\pi$ обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

2.5. Вказівки до розв'язання

1. Скористатися рівністю $x^{\frac{1}{\ln x}}=x^{\log_x e}=e$.
2. Проміжок інтегрування $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ розбити на два проміжки інтегрування: $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Кожний з отриманих інтегралів зводиться до табличного, якщо зробити відповідно такі заміни змінної: $\frac{a}{b}\operatorname{tg}x=t$ і $\frac{b}{a}\operatorname{ctg}x=t$. Крім того, корисно скористатися формулою $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$ $(x\neq 0)$.
3. Зробити заміну $9-y=x+3$.
4. Врахувати, що $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\left|\sin x\right|$ і функція $\left|\sin x\right|$ має період π.
5. Зробити заміну $x=t+1007$ і врахувати непарність отриманої підінтегральної функції.
6. Заданий інтеграл записати як суму двох інтегралів:
$$\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{1}f(x)dx,$$
а потім в першому інтегралі в правій частині рівності зробити заміну $x=-t$.
7. Використати послідовно такі рівності:
$$\sin(2n+3)x=\sin(2n+1)x\cos 2x+\cos(2n+1)x\sin 2x,\ 1-2\sin^2 x=\cos 2x,$$
а потім застосувати метод математичної індукції.
8. Зробити заміну $x=\frac{\pi}{2}-t$, а потім в отриману підінтегральну функцію підставити $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$.
9. Підінтегральну функцію перетворити до вигляду $\sqrt{1-\sin x}=\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|$, а потім позбавитися модуля.
10. Спочатку знайти ОДЗ підінтегральної функції, а потім переконатися, що вона непарна.

11. Алгоритм знаходження інтеграла такий же, як і у прикладі 6.

12. Можна, наприклад, заміною $x = 2 - t$ звести заданий інтеграл до табличного.

13. Використати рівність $\cos 2012x = \cos 2011x \cos x - \sin 2011x \sin x$, а потім знайти інтеграл від функції $\sin^{2010} x \cos x \cos 2011x$, інтегруючи частинами.

14. Після заміни змінної $x = -t$ отриманий інтеграл додати до заданого інтеграла.

15. Зробити заміну $x = \frac{\pi}{2} - t$, а потім отриманий інтеграл додати до заданого інтеграла.

16. Помножити чисельник і знаменник підінтегральної функції на e^{-x}, а потім зробити заміну змінної $t = 1 + \alpha e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

17. Застосувати метод інтегрування частинами, взявши за $u = (\sin x - \cos x)^{2n}$, а $dv = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^{2n+1}} dx$. Потім застосувати метод математичної індукції.

18. Розкласти знаменник підінтегральної функції на множники, а потім заданий інтеграл записати як суму двох інтегралів. Інтеграл від раціональної функції розглянути як суму інтегралів від елементарних дробів, а другий дорівнює нулю, бо підінтегральна функція непарна, а відрізок інтегрування симетричний відносно початку координат.

19. Звернути увагу на те, що $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}, \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$, а потім скористатися рівністю

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(-x)\right] dx. \qquad (1)$$

20. Записати чисельник підінтегральної функції таким чином: $x - 1 = (x+1) - 2$, а потім розглянути заданий інтеграл як суму двох інтегралів і знайти інтеграл від функції $e^{x}(x+1)^{-3}$ інтегруванням частинами.

21. Зробити підстановку $x = \mathrm{tg}\, t$, потім використати рівність

$1 + \mathrm{tg}\, t = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos t}$ і властивість логарифмів.

22. Застосувати метод інтегрування частинами. Тоді заданий інтеграл зведеться до попереднього інтеграла.

23. У знаменнику підінтегральної функції використати формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а потім заданий інтеграл записати як суму двох інтегралів:

$$I = \int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \alpha^2\left(1 - \cos^2 x\right)} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \sin^2 x},$$

кожний з яких легко зводиться до табличного.

24. Застосувати рівність (1) (приклад 19), а потім чисельник і знаменник підінтегральної функції почленно поділити на x^2.

25. Подати заданий інтеграл у вигляді суми двох інтегралів. Встановити, що функції $\cos x \ln\frac{1+x}{1-x}$ – непарна, а $x\ln\frac{1+x}{1-x}$ – парна. Інтеграл від першої функції дорівнює нулю, а другий треба обчислити, інтегруючи частинами.

26. Зробити заміну змінної $x=\pi-t$. Тоді обчислення заданого інтеграла зводиться до обчислення інтеграла від функції $\sin^6 x\cos^4 x$, яку треба перетворити до такого вигляду: $\sin^6 x\cos^4 x=\frac{1}{32}\sin^4 2x\left(1-\cos 2x\right)$.

27. Проінтегрувати частинами, а потім в отриманому інтегралі зробити заміну змінної $1+x=t^2$.

28. Зробити заміну змінної $t=x-1$, а потім проінтегрувати частинами і врахувати, що в отриманому інтегралі підінтегральна функція непарна.

29. Перетворити підінтегральну функцію до такого вигляду:

$\ln\left(1+\operatorname{ctg} x\right)=\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$, використати властивості логарифмічної функції, а потім довести, що інтеграли функції $\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\ln\sin x$ рівні.

30. Зробити підстановку $x=\pi-t$. Розбити проміжок інтегрування $\left[0;\pi\right]$ на два проміжки: $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Заміною $x=t+\frac{\pi}{2}$ інтеграл по проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ звести до інтеграла по проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. При обчисленні обох інтегралів використати підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

31. Використати рівність

$$e^x-1=x+\frac{e^{\theta}}{2}x^2 \quad \left(0<\theta<x\le 1\right)$$

та непарність функції $\frac{x}{\sqrt{\cos x}}$.

32. Довести нерівність $-\frac{1}{4}\le t^2-t\le 0$, а потім використати її при оцінювання інтеграла.

33. Довести, що $I_k=\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1-x^k\right)}{x}dx=\frac{1}{k}\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1-y\right)}{y}dy$, звідки випливає рівність

$$I = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2} I_1.$$

Залишилось виразити I_3 через I_1.

34. Врахувати періоди підінтегральних функцій, а також те, що
$$\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2}\left|\cos x\right|,\ \sqrt{1-\cos 10x} = \sqrt{2}\left|\sin 5x\right|.$$

35. Застосувати правило Лопіталя, враховуючи значення похідної $\left[\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right]'$.

36. Обчислити інтеграл $I_2 - I_1$, а потім розв'язати нерівність $I_2 - I_1 \le 0$.

37. Розглянути функцію $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Обґрунтувати існування локального мінімуму цієї функції в точці a.

38. При доведенні цієї нерівності використати такі співвідношення:
$$x^x = e^{x \ln x},\ e^x > x+1\ \left(x \ne 0\right),$$
а отриманий у результаті цих перетворень інтеграл проінтегрувати частинами.

39. Дослідити функції $f'(x)$ та $f''(x)$.

40. Використати нерівність
$$\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x),\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

41. Використати парність і періодичність функції $y = y(x) = \max\left\{\sin^2 x, \cos^2 x\right\}$, $x \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$, де T – період.

42. Зробити заміну змінної $x^{n+1} = t$, а потім скористатися теоремою про середнє для функції $f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)$.

43. Використати таку рівність:
$$\cos \alpha x = \cos\left[(\alpha - 1) + 1\right]x = \cos(\alpha - 1)x \cdot \cos x - \sin(\alpha - 1)x \cdot \sin x,$$
а потім застосовувати формулу інтегрування частинами до інтеграла від функції $\sin(\alpha - 1)x \cdot \sin x (\cos x)^{\alpha - 2}$.

44. Довести, що похідна по k від цього інтеграла дорівнює нулю.

45. У заданому інтегралі один раз зробити заміну $x = \sin\varphi$, а другий – $x = \cos\varphi$. Звідси випливає, що шуканий інтеграл дорівнює половині суми отриманих після заміни інтегралів. Для завершення доведення залишається скористатися заданою нерівністю.

46. Використовуючи рівність $b-a=(c-a)+(b-c)$, властивості функції $f(x)$ і інтеграла, отримати нерівність

$$(b-a)\int_a^c f(x)dx<(c-a)\int_a^b f(x)dx.$$

47. Розглянути вираз $\int_a^b (t-x)^2 f(x)dx\ (t\in \mathbf{R})$ як квадратний тричлен відносно t. Використати зв'язок між знаком квадратного тричлена і дискримінантом.

48. Використати означення цілої частини x.

49. Зробити заміну $t=nx$ та скористатися означенням визначеного інтеграла.

50. Отримати рівність $(\alpha+2)I_{\alpha+2}=(\alpha+1)I_{\alpha+1}I_{\alpha}$, застосувавши метод інтегрування частинами:

$$u=\sin^{\alpha+1}x,\ dv=\sin x dx.$$

51. Переконатися, що функція $\sin x+\cos x=f_0(x)\in M$, а також використати нерівність $\int_0^{\pi}\left[f(x)-f_0(x)\right]^2 dx\geq 0$.

52. Задану функцію можна записати як квадратний тричлен відносно x: $f(x)=ax^2+bx+\sqrt{x}$, де a і b – деякі числа, які знаходяться із системи рівнянь, отриманих при визначенні a і b.

53. Зробити заміну змінної $x=t+\frac{\pi}{2}$, а потім врахувати парність функції $f(x)$ та непарність функції $xf(x)$.

54. Зробити таке позначення: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, а потім, розв'язавши рівняння, знайти $F(x)$ та $F'(x)=f(x)$.

55. Записати задане рівняння, скориставшись визначенням $f(x)$. Потім у лівій частині отриманого рівняння зробити заміну змінної $y=\frac{\pi}{2}-t$. Оскільки ліві частини цих рівнянь рівні, то залишається переконатись шляхом перетворень, що права частина отриманого рівняння дорівнює правій частини заданого рівняння.

56. У заданому інтегралі зробити заміну $x=-t$, враховуючи непарність функції $f(x)$. Далі до отриманого інтеграла додати заданий, тобто треба знайти $2I$.

57. Розглянути функцію $F(x)=\int_0^x\left[3t^2\cdot f\left(\cos t^3\right)-f(\cos t)\right]dt$. Переконатися, що ця функція на відрізку $[0;1]$ задовольняє умову теореми Ролля, а потім її застосувати.

58. Позначити $\int\limits_0^1 \max\{1, y(x)\}dx = a > 0$. Звідси знайти, враховуючи початкову умову $y(0)=\frac{1}{2}$, що $y = ax + \frac{1}{2}$, а потім використати таку рівність:

$$\max\{1, y(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{при } x \le \frac{1}{2a}, \\ ax + \frac{1}{2}, & \text{при } x > \frac{1}{2a}. \end{cases}$$

59. Отримати рівняння $y'(x) = \ln\frac{3x-1}{2}$, проінтегрувавши ліву частину заданого рівняння.

60. Записати знаменник у такому вигляді: $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$, а потім в інтегралі зробити заміну змінної $x - \cos\alpha = t$.

2.6. Розв'язання завдань

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_3^8 x^{\frac{1}{\ln x}}dx$.

Розв'язання

$$I = \int\limits_3^8 x^{\frac{1}{\ln x}}dx = \left\{ x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\log_x e} = e \right\} = e\int\limits_3^8 dx = 5e.$$

Відповідь: $5e$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, $ab \ne 0$.

Розв'язання. Розіб'ємо проміжок інтегрування $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на два проміжки інтегрування: $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$I = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\left[1 + \left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)^2\right]} +$$

$$+ \frac{1}{a^2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x\left[1 + \left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)^2\right]} = \frac{1}{ab}\left[\int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)}{1 + \left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)^2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{d\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)^2}\right] =$$

$$
=\frac{1}{ab}\left[\left.\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)\right|_0^{\pi/4}+\left.\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}x\right)\right|_{\pi/2}^{\pi/4}\right]=\frac{1}{ab}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)=
$$

$$
=\frac{\pi}{2ab}\operatorname{sgn}(ab)=\frac{\pi}{2|ab|},
$$

бо $$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x \quad (x\neq 0).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2|ab|}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$.

Розв'язання. Після заміни $9-y=x+3$ отримаємо

$$
I=-\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}dy=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx.
$$

Тоді $$2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=2\Rightarrow I=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{2020\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Розв'язання

$$
I=\int_0^{2020\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{2020\pi}|\sin x|\,dx=2020\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-2020\sqrt{2}\cdot\left.\cos x\right|_0^{\pi}=
$$

$$
=4040\sqrt{2}.
$$

Відповідь: $4040\sqrt{2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{2014}x(x-1)\ldots(x-2014)\,dx$.

Розв'язання

$$
I=\int_0^{2014}x(x-1)\ldots(x-2014)\,dx=\left\{\begin{array}{c}x=t+2007,\\ dx=dt\end{array}\right\}=
$$

$$
=\int_{-1007}^{1007}(t+1007)(t+1006)\ldots(t-1006)(t-1007)\,dt.
$$

Оскільки функція $f(t)=(t+1007)(t+1006)\ldots(t-1006)(t-1007)=$
$=\left(t^2-1007^2\right)\left(t^2-1006^2\right)\ldots\left(t^2-1^2\right)t$ – непарна, то

$$\int\limits_{-1007}^{1007} f(t)\,dt=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}$.

Розв’язання

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+2^{-\pi\,\mathrm{tg}\,x}}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}+$$
$$+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\,\mathrm{tg}\,x}}=\int\limits_{0}^{1}dx=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}dx$.

Розв’язання

$$I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin\left[(2n+1)+2\right]x}{\sin x}dx=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x\cdot\cos 2x}{\sin x}dx+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x\cdot\sin 2x}{\sin x}dx=$$
$$=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-2\int\limits_{0}^{\pi}\sin(2n+1)x\cdot\sin x\,dx+2\int\limits_{0}^{\pi}\cos(2n+1)x\cdot\cos x\,dx=$$
$$=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+2\int\limits_{0}^{\pi}\cos(2n+1)x\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\ldots=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\pi.$$

Відповідь: π.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{3}}}$.

Розв’язання

$$I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{3}}}=\left\{\begin{matrix}x=\frac{\pi}{2}-t,\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}=-\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{dt}{1+(\mathrm{ctg}\,t)^{\sqrt{3}}}=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{3}}dx}{1+(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{3}}}.$$

Звідси маємо

$$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}}+\int_0^{\pi/2}\frac{(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}\,dx}{1+(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}}=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\ I=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 9. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$.

Розв'язання

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=2\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+2\left(-\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=2\left(\sqrt{2}-1\right)+2\left(-1+\sqrt{2}\right)=4\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь: $4\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Приклад 10. Обчислити інтеграл $I=\int_{-1}^{1}\cos x\cdot\ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$.

Розв'язання. Оскільки область існування підінтегральної функції $-2<x<2$ і

$$f(-x)=\cos(-x)\cdot\ln\frac{2-x}{2+x}=\cos x\cdot\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}=-\cos x\cdot\ln\frac{2+x}{2-x}=-f(x),$$

то $f(x)$ – непарна функція й інтеграл від неї дорівнює 0.

Відповідь: 0.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $I=\int_{-1}^{1}x^{2019}\ln\left(1+e^x\right)dx$.

Розв'язання

$$I=\int_{-1}^{1}x^{2019}\ln\left(1+e^x\right)dx=\int_{-1}^{0}x^{2019}\ln\left(1+e^x\right)dx+\int_{0}^{1}x^{2019}\ln\left(1+e^x\right)dx.$$

Оскільки

$$\int_{-1}^{0}x^{2019}\ln\left(1+e^x\right)dx=\left\{\begin{array}{l}x=-t,\\ dx=-dt\end{array}\right\}=-\int_0^1 t^{2019}\ln\left(1+e^{-t}\right)dt=-\int_0^1 t^{2019}\ln\left(1+e^{t}\right)dt+$$

$$+\int_0^1 t^{2020}dt = -\int_0^1 t^{2019}\ln\left(1+e^t\right)dt + \frac{1}{2021}, \text{ то } I = \frac{1}{2021}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2021}$.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}dx$.

Розв'язання. Перший спосіб.

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}dx = \left\{\begin{matrix} x = 1-t, \\ dx = -dt \end{matrix}\right\} = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} + \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2-t)}dt}{\sqrt{\sin(2-t)}+\sqrt{\sin(2+t)}} + \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} = \int_0^1 dt = 1.$$

Другий спосіб. Оскільки

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}dx = \left\{\begin{matrix} x = 2-t, \\ dx = -dt \end{matrix}\right\} = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(t+1)}}{\sqrt{\sin(t+1)}+\sqrt{\sin(3-t)}}dt,$$

то
$$2I = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}dx = \int_0^2 dx = 2.$$

Отже,
$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}dx = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\pi} \sin^{2010} x \cdot \cos 2012x dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos 2012x = \cos(2011x + x) = \cos 2011x \cdot \cos x - \sin 2011x \cdot \sin x,$$

то
$$I = \int_0^{\pi} \sin^{2010} x\left(\cos 2011x \cdot \cos x - \sin 2011x \cdot \sin x\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^{2010} x \cdot \cos 2011x \cdot \cos x dx - \int_0^{\pi} \sin^{2011} x \cdot \sin 2011x dx = I_1 - I_2.$$

Враховуючи значення

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin^{2010}x\cos 2011x\cos x dx=\left\{\begin{matrix} u=\cos 2011x, & du=-2011\sin 2011x dx,\\ dv=\sin^{2010}x\cos x dx, & v=\dfrac{\sin^{2011}x}{2011}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\sin^{2011}x}{2011}\cos 2011x\Bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin^{2011}x\cdot\sin 2011x dx=\int_0^{\pi}\sin^{2011}x\sin 2011x dx,$$

отримаємо $I=I_1-I_2=0$.

Відповідь: 0.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Розв'язання

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\left\{\begin{matrix} x=-t,\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}=-\int_{1}^{-1}\frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)}=-\int_{1}^{-1}\frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}.$$

Отже, $2I=\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}+\int_{-1}^{1}\dfrac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\pi/2$.

Приклад 15. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^p x dx}{\sin^p x+\cos^p x}$.

Розв'язання

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^p x dx}{\sin^p x+\cos^p x}=\left\{\begin{matrix} x=\dfrac{\pi}{2}-t,\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}=-\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^p t dt}{\sin^p t+\cos^p t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^p x dx}{\sin^p x+\cos^p x}.$$

Звідси випливає, що $2I=\int_0^{\pi/2}dt=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\pi/4$.

Приклад 16. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi/4}\dfrac{\cos x dx}{e^x+\alpha(\cos x-\sin x)}$.

Розв'язання

$$I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{e^{-x}\cos x dx}{1+\alpha e^{-x}(\cos x-\sin x)}=\left\{\begin{array}{c} t=1+\alpha e^{-x}(\cos x-\sin x),\\ dt=\alpha e^{-x}(-\sin x-\cos x)dx-\\ -\alpha e^{-x}(\cos x-\sin x)dx=\\ =-2\alpha e^{-x}\cos x dx\end{array}\right\}=-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{1+\alpha}^{1}\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{2\alpha}\ln|t|\Big|_{1+\alpha}^{1}=\frac{1}{2\alpha}\ln|1+\alpha|.$$

Відповідь: $\frac{1}{2\alpha}\ln|1+\alpha|$.

Приклад 17. Обчислити інтеграл $I_n=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання

$$I_n=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx=\left\{\begin{array}{c} u=(\sin x-\cos x)^{2n},\\ du=2n(\sin x-\cos x)^{2n-1}(\cos x+\sin x)dx,\\ dv=\frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)^{2n+1}},\quad v=\frac{1}{2n(\sin x+\cos x)^{2n}}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)^{2n}}{2n(\sin x+\cos x)^{2n}}\Bigg|_0^{\pi/4}-\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n-1}dx=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}=$$

$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}+I_{n-2}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\ln 2,$$

бо
$$I_0=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Відповідь: $I_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\ln 2$.

Приклад 18. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{3\pi^2+4\pi x-4x^2}$.

Розв'язання

$$I=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{4x^2-4\pi x-3\pi^2}dx=-\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}dx=\left\{\begin{array}{c} x=t+\frac{\pi}{2},\\ dx=dt\end{array}\right\}=$$

$$= -\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi}\frac{1-\sin t}{(t+\pi)(t-\pi)}dt = -\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{(t+\pi)(t-\pi)} + \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{t^2-\pi^2}.$$

Оскільки

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{(t-\pi)(t+\pi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{t-\pi}-\frac{1}{t+\pi}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{t-\pi}{t+\pi}\right|\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln 3\right) = -\frac{\ln 3}{\pi} \text{ й } \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{t^2-\pi^2} = 0,$$

то
$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{3\pi^2+4\pi x-4x^2} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{\ln 3}{\pi}\right) = \frac{\ln 3}{8\pi}.$$

Відповідь: $\frac{\ln 3}{8\pi}$.

Приклад 19. Обчислити інтеграл $I = \int_{\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\ln\sqrt{e}}\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8\left(e^{5x}+1\right)}}$.

Розв'язання. Оскільки $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$, а $\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$, то, скориставшись рівністю $\int_{-a}^{a}f(x)dx = \int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$, знаходимо

$$I = \int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8\left(e^{5x}+1\right)}} = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+8\left(e^{5x}+1\right)}}+\frac{1}{\sqrt{4x^2+8\left(e^{-5x}+1\right)}}\right)dx =$$

$$= \int_0^{1/2}\frac{e^{5x}+1}{\sqrt{4x^2+8\left(e^{5x}+1\right)}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}\right)-\ln\sqrt{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{1}{4}\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}\ln 2$.

Приклад 20. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1\frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}dx$.

Розв'язання

$$I = \int_0^1\frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}dx = \int_0^1\frac{(x+1-2)e^x}{(x+1)^3}dx = \int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2} - 2\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^3}.$$

Застосовуючи до другого інтеграла метод інтегрування частинами, отримуємо:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^3} = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^3}, & v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2} \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{(x+1)^2}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{e}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx.$$

Тоді $$I = \frac{e}{4} - 1.$$

Відповідь: $\frac{e}{4} - 1$.

Приклад 21. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Розв'язання

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t,\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}, \\ 1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} t)\,dt =$$

$$= \left\{ 1 + \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos t} \right\} = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)dt - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{4} - y, \\ dt = -dy \end{array} \right\} = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\cos y\,dy - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Приклад 22. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}dx$.

Розв'язання

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = \dfrac{dx}{1+x}, & v = \ln(1+x) \end{array} \right\} = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$ (див. приклад 21), то

$$I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Приклад 23. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x}$.

Розв'язання

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\alpha^2\left(1-\cos^2 x\right)} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{1+\alpha^2}{\cos^2 x} - \alpha^2\right)} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \alpha^2\right)} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) - \alpha^2} -$$

$$- \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{1+\alpha^2+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{1+\alpha^2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{1+\alpha^2}} - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{1+\alpha^2+\operatorname{ctg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+\alpha^2}\operatorname{tg} x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+\alpha^2} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

оскільки $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$.

Приклад 24. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{\left(8-x^2\right)dx}{\left(x^4+64\right)\left(3^{-2020x}+1\right)}$.

Розв'язання. Враховуючи рівність $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_0^a \left[f(x) + f(-x)\right]dx$, маємо

$$I = \int\limits_0^2 \left[\frac{8-x^2}{\left(x^4+64\right)\left(3^{2020x}+1\right)} + \frac{8-x^2}{\left(x^4+64\right)\left(3^{-2020x}+1\right)}\right]dx = \int\limits_0^2 \frac{8-x^2}{x^4+64}dx.$$

Оскільки

$$\int\frac{8-x^2}{x^4+64}dx=-\int\frac{\left(1-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2+\frac{64}{x^2}}dx=-\int\frac{d\left(x+\frac{8}{x}\right)}{\left(x+\frac{8}{x}\right)^2-16}=-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+\frac{8}{x}-4}{x+\frac{8}{x}+4}\right|=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-4x+8}{x^2+4x+8}\right|, \text{ то } I=-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-4x+8}{x^2+4x+8}\right|\Bigg|_0^2=-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{5}=\frac{1}{8}\ln 5.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}\ln 5$.

Приклад 25. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1/2}^{1/2}(x+\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо ОДЗ функції $\varphi(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$:

$$\frac{1+x}{1-x}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{x-1}<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1)<0 \quad \Rightarrow \quad x\in(-1;1).$$

Оскільки ОДЗ функції $\varphi(x)$ – множина, симетрична відносно початку координат і

$$\varphi(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-\varphi(x),$$

то $\varphi(x)$ – непарна функція. Подамо заданий інтеграл у вигляді суми двох інтегралів:

$$I=\int\limits_{-1/2}^{1/2}x\ln\frac{1+x}{1-x}dx+\int\limits_{-1/2}^{1/2}\cos x\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$$

Оскільки $\cos x\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$ – непарна функція, $x\ln\frac{1+x}{1-x}$ – парна функція, то другий інтервал дорівнюватиме нулю, а

$$I=2\int\limits_0^{1/2}x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln\frac{1+x}{1-x}, & du=\frac{2}{1-x^2}, \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=x^2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1/2}-2\int\limits_0^{1/2}\frac{x^2}{1-x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln 3+2\int\limits_0^{1/2}dx+2\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{4}\ln 3+2x\Big|_0^{1/2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{4}\ln 3+1-\ln 3=1-\frac{3}{4}\ln 3.$$

Отже, $$I=\int\limits_{-1/2}^{1/2}(x+\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx=1-\frac{3}{4}\ln 3.$$

Відповідь: $1-\dfrac{3}{4}\ln 3$.

Приклад 26. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi} x\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx$.

Розв'язання

$$I=\int\limits_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,dx=\left\{\begin{array}{l} x=\pi-t,\\ dx=-dt\end{array}\right\}=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^6 t\cos^4 t\,dt-\int\limits_0^{\pi} t\sin^6 t\cos^4 t\,dt .$$

Звідси отримуємо, що

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\pi}{256}=\frac{3}{512}\pi^2,$$

оскільки $\int\limits_0^{\pi}\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx=\dfrac{1}{32}\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x(1-\cos 2x)\,dx=$

$$=\frac{1}{32}\left(\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x\,dx-\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x\cdot\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{32}(I_1+I_2)=\frac{3\pi}{256},$$

бо $I_1=\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x\,dx=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 4x)^2\,dx=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos 4x+\dfrac{1+\cos 8x}{2}\right)dx=$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 8x}{16}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi;$$

$$I_2=-\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x\cdot\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin^4 2x\,d(\cos 2x)=\frac{\sin^5 2x}{10}\Bigg|_0^{\pi}=0.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{512}\pi^2$.

Приклад 27. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{1}\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\,dx$.

Розв'язання

$$I=\int\limits_0^{1}\arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\;,\quad dv=dx\;,\quad v=x,\\ du=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{1+x}}}\dfrac{dx}{(1+x)^2}=-(1+x)^{-3/2}\,dx\end{array}\right\}=$$

$$= x\arccos\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}}.$$

Оскільки

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1+x=t^2, & dx=2tdt, \\ x=t^2-1, & \sqrt{(1+x)^3}=t^3 \end{array}\right\} = 2\int\frac{\left(t^2-1\right)t}{t^3}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$=2\left(t+\frac{1}{t}\right)+C = 2\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)+C,$$

то $$I=\frac{\pi}{4}+2\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}+2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)=\frac{\pi}{4}+3\sqrt{2}-4.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+3\sqrt{2}-4$.

Приклад 28. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^2 \frac{\cos\pi x}{e^x+e}dx$.

Розв’язання

$$\int_0^2 \frac{\cos\pi x}{e^x+e}dx = \left\{\begin{array}{l} t=x-1\\ dt=dx\end{array}\right\} = -\int_{-1}^1 \frac{\cos\pi t}{e^{t+1}+e}dt = -\frac{1}{e}\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=0.$$

Це випливає з того, що

$$I_1=\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=\{t=-t\}=\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^{-t}+1}dt=\int_{-1}^1\frac{e^t\cos\pi t}{e^t+1}dt=\int_{-1}^1\cos\pi t dt-\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=$$

$=\frac{1}{2\pi}\sin\pi t\Big|_{-1}^1 - I_1 = -I_1$, тобто $I_1=0$, а тому й $I=0$.

Зауважимо, що інтеграл I_1, можна обчислити і так:

$$I_1=\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=\left\{\begin{array}{ll} u=\frac{1}{e^t+1}, & dv=\cos\pi t dt, \\ du=-\frac{e^t dt}{\left(e^t+1\right)^2}, & \nu=\frac{1}{\pi}\sin\pi t \end{array}\right\}=\frac{\sin\pi^t}{\pi\left(e^t+1\right)}\Bigg|_{-1}^1 +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}\sin\pi t dt=0,$$

оскільки підінтегральна функція непарна:

$$f(-t)=-\frac{e^{-t}}{\left(e^{-t}+1\right)^2}\sin\pi t=-\frac{e^{t}}{\left(e^{t}+1\right)^2}\sin\pi t=-f(t).$$

Відповідь: 0.

Приклад 29. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(1+\operatorname{ctg}x)\,dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію таким чином:

$$\ln(1+\operatorname{ctg}x)=\ln\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}=\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}.$$

Тоді

$$I=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sqrt{2}dx+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx-\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin x dx.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\left\{\begin{matrix} t=x-\frac{\pi}{4},\\ dt=dx\end{matrix}\right\}=\int\limits_{0}^{\pi/4}\ln\cos t dt,$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin x dx=\left\{\begin{matrix} t=\frac{\pi}{2}-x,\\ dt=-dx\end{matrix}\right\}=\int\limits_{0}^{\pi/4}\ln\cos t dt,$$

то
$$I=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(1+\operatorname{ctg}x)dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sqrt{2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Приклад 30. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{xdx}{2+\sin x}$.

Розв'язання

$$I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{xdx}{2+\sin x}=\left\{\begin{matrix} x=\pi-t,\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\pi-t}{2+\sin t}dt=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{2+\sin t}-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{tdt}{2+\sin t}.$$

Оскільки значення інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, то
$$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{2+\sin x}.$$

Обчислимо цей інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\sin x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{2+\sin x}=\left\{\begin{array}{l} x=t+\frac{\pi}{2},\\ dx=dt\end{array}\right\}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}+\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2},\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int_0^1\frac{2dt}{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}+\int_0^1\frac{2dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}+$$

$$+2\int_0^1\frac{dt}{t^2+3}=\int_0^1\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+2\int_0^1\frac{dt}{t^2+3}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Отож, $I=\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Приклад 31. Який знак має число $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx$?

Розв'язання. Перший спосіб.

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx+\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx=\left\{\begin{array}{l} t=-x,\\ dt=-dx\end{array}\right\}=-\int_{1}^{0}\frac{e^{-t}-1}{\sqrt{\cos t}}dt+\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dt=$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx-\int_{0}^{1}\frac{e^t-1}{e^t\sqrt{\cos t}}dt>0,$$

оскільки $e^x>1$ при $x>0$ і $\dfrac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}>\dfrac{e^x-1}{e^x\sqrt{\cos x}}$ при $x\in(0;1)$.

Другий спосіб. За формулою Тейлора $e^x-1=x+\dfrac{e^{\theta}}{2}x^2$, де $0<\theta<x\le 1$.

Тоді $$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{\cos x}}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{\theta}x^2dx.$$

Оскільки $\dfrac{x}{\sqrt{\cos x}}$ – непарна функція, то $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{\cos x}}dx=0$.

Тому $$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{\theta}x^2dx\ge\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}>0.$$

Відповідь: число $\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{\sqrt{\cos x}}dx$ додатне.

Приклад 32. Довести нерівність $e^{-1010^2}<\int_0^1 e^{2020^2\left(t^2-t\right)}dt<1$.

Розв'язання. Оскільки $f(t)=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, то для $0\le t\le 1$

$$-\frac{1}{4}\le f(t)\le 0.$$

Тому $\int_0^1 e^{-\left(\frac{2020}{2}\right)^2}dt<\int_0^1 e^{2020^2\left(t^2-t\right)}dt<\int_0^1 dt$, тобто $e^{-1010^2}<\int_0^1 e^{2020^2\left(t^2-t\right)}dt<1$, що і треба було довести.

Приклад 33. Знаючи, що $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\frac{\pi^2}{12}$, обчислити $\int_0^1\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}dx$.

Розв'язання. Нехай

$$I_k=\int_0^1\frac{\ln\left(1-x^k\right)}{x}dx=\left\{\begin{array}{l} x^k=y, \\ kx^{k-1}dx=dy\end{array}\right\}=\frac{1}{k}\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy.$$

Тоді $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=I_2-I_1=\frac{1}{2}I_1-I_1=-\frac{1}{2}I_1$, а $I_3=\frac{1}{3}I_1=-\frac{2}{3}I=-\frac{\pi^2}{18}$.

Відповідь: $-\frac{\pi^2}{18}$.

Приклад 34. Що більше: $\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$ чи $10\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 10x}dx$?

Розв'язання. Обчислимо перший інтеграл, користуючись формулою $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ і властивостями визначеного інтеграла для періодичних функцій:

$$\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{10\pi}|\cos x|dx=20\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos x dx=20\sqrt{2}.$$

Аналогічно обчислюємо другий інтеграл:

$$10\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 10x}dx=10\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin 5x|dx=50\sqrt{2}\int_0^{\pi/5}\sin 5x dx=-10\sqrt{2}\cos 5x\Big|_0^{\pi/5}=20\sqrt{2}.$$

Відповідь: інтеграли рівні.

Приклад 35. Довести, що $f(x) \sim x$ при $x \to 0$, якщо $f(x) = \int\limits_{-\sin x}^{-\sin^2 x} e^{t^2} dt$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{d}{dx} \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f\left[\psi(x)\right]\cdot\psi'(x) - f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)$,

то, застосувавши правило Лопіталя, знайдемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\sin x}^{-\sin^2 x} e^{t^2} dt =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-2\sin x\cdot\cos x e^{\sin^4 x} + e^{\sin^2 x}\cos x\right) = 1.$$

Отже, $f(x) \sim x$, що і треба було довести.

Приклад 36. При яких $a \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$I_1 = \int\limits_0^a e^{x^2-2x} dx \ge I_2 = \int\limits_0^a x e^{x^2-2x} dx?$$

Розв'язання. Маємо

$$I_2 - I_1 = \int\limits_0^a x e^{x^2-2x} dx - \int\limits_0^a e^{x^2-2x} dx = \int\limits_0^a (x-1) e^{x^2-2x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a e^{x^2-2x} d\left(x^2-2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-2x}\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left(e^{a(a-2)} - 1\right).$$

Останній вираз від'ємний при від'ємному показнику степеня, тобто при $a \in [0;2]$.

Відповідь: $a \in [0;2]$.

Приклад 37. Нехай $f(x)$ – неперервна періодична функція з періодом T, $\int\limits_0^T f(x)\,dx = 0$. Довести, що існує таке число a, що при будь-якому b виконується нерівність $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Розв'язання. Нехай $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Функція $f(x)$ неперервна та періодична. Нехай a – точка глобального мінімуму $F(x)$. Тоді для будь-якого $b \in \mathbf{R}$ маємо $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ge 0$, що і треба було довести.

Приклад 38. Довести, що $\int\limits_0^1 x^x dx > \frac{3}{4}$.

Розв'язання. Скористаємося нерівністю $e^t > t+1$ при $t \neq 0$. Маємо

$$\int\limits_0^1 x^x dx = \int\limits_0^1 e^{x\ln x} dx > \int\limits_0^1 (1 + x\ln x)\, dx = 1 + \int\limits_0^1 x\ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, & dv = xdx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x \Big|_{+0}^{1} - \int\limits_0^1 x dx \right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\lim_{x \to +0} x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

бо $$\lim_{x \to +0} x^2 \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \to +0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to +0} x^2 = 0.$$

Отже, нерівність доведена.

Приклад 39. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції

$$f(x) = x\int\limits_0^x e^{t^2} dt.$$

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій прямій. Її похідна $f'(x) = \int\limits_0^x e^{t^2} dt + xe^{x^2}$ обертається на нуль при $x = 0$. Оскільки для всіх x

$$f''(x) = e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = \left(2 + 2x^2\right) e^{x^2} > 0,$$

то $f'(x) < 0$ при $x < 0$ і $f'(x) > 0$ при $x > 0$.

Отже, функція $f(x)$ на проміжку $(-\infty; 0)$ спадає, а на проміжку $(0; \infty)$ зростає. В точці $x = 0$ вона має мінімум, який дорівнює 0.

Приклад 40. Значення якого з поданих нижче інтегралів більше:

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\, dx,\; I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(\cos x)\, dx\ ?$$

Розв'язання. Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x).$$

Перша нерівність випливає з нерівності $\sin x < x$, а друга – із спадання косинуса.

Отже, $I_1 > I_2$.

Відповідь: $I_1 > I_2$.

Приклад 41. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=0$ і

$$y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}$$

на відрізку довжиною в період.

Розв'язання. Функція $y_n=\sqrt[n]{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}$ має період $T=\pi$ (при фіксованому n). Розглянемо спочатку випадок $0\le x<\frac{\pi}{4}$. Тоді $\mathrm{tg}^{2n}x\to 0$, коли $n\to\infty$ і $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^{2n}x\cdot\left(1+\mathrm{tg}^{2n}x\right)}=\cos^2 x$.

У випадку $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$ $\mathrm{ctg}^{2n}x\to 0$, коли $n\to\infty$ і

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^{2n}x\cdot\left(1+\mathrm{ctg}^{2n}x\right)}=\sin^2 x.$$

Враховуючи властивості функцій $\cos^2 x$ і $\sin^2 x$, отримаємо, що площа

$$S=2\left(\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx\right)=\int_0^{\pi/4}\left(1+\cos 2x\right)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1-\cos 2x\right)dx=$$

$$=\left.\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\right|_0^{\pi/4}+\left.\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\right|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=1+\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $S=1+\frac{\pi}{2}$.

Приклад 42. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0;1]$. Довести, що для будь-якого $n\in\mathbf{N}$ існує точка $x_0\in[0;1]$ така, що

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0).$$

Розв'язання

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)dx^{n+1}=\left\{\begin{array}{l}x^{n+1}=t,\\ x=\sqrt[n+1]{t}\end{array}\right\}=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)dt.$$

Функція $f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)$ неперервна на відрізку $[0;1]$. Тому за теоремою про середнє для визначеного інтеграла існує точка $t_0\in[0;1]$ така, що

$$\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)dt=f\left(\sqrt[n+1]{t_0}\right).$$

Звідси знаходимо, що $\int\limits_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0)$, $x_0=\sqrt[n+1]{t_0}\in[0;1]$.

Отже, рівність доведена.

Приклад 43. Довести, що при $\alpha > 1$ $\int\limits_0^{\pi/2} \cos\alpha x \cdot (\cos x)^{\alpha-2}\,dx = 0$.

Розв'язання. Заданий інтеграл запишемо як суму двох інтегралів, а потім другий інтеграл проінтегруємо частинами:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos\alpha x (\cos x)^{\alpha-2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \big(\cos(\alpha-1)x\cos x - \sin(\alpha-1)x\sin x\big)(\cos x)^{\alpha-2}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin(\alpha-1)x, & du = (\alpha-1)\cos(\alpha-1)x, \\ dv = (\cos x)^{\alpha-2}\sin x\,dx, & v = -\dfrac{(\cos x)^{\alpha-1}}{\alpha-1} \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\alpha-1)x\cos x\,dx +$$

$$+ \left.\frac{\sin(\alpha-1)x(\cos x)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}\cos(\alpha-1)x\cos x\,dx = 0,$$

що і треба було довести.

Приклад 44. Довести, що значення інтеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\mathrm{tg}^k x}$ не залежить від k.

Розв'язання. Справді, оскільки

$$\frac{d}{dk}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\mathrm{tg}^k x} = -\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^k x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x}{\left(1+\mathrm{tg}^k x\right)^2}dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^k x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x}{\left(1+\mathrm{tg}^k x\right)^2}dx +$$

$$+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^k x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x}{\left(1+\mathrm{tg}^k x\right)^2}dx = 0, \text{ а } \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^k x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x}{\left(1+\mathrm{tg}^k x\right)^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - t, \\ dx = -dt \end{array} \right\} =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{tg}^k t\left(1+\mathrm{ctg}^k t\right)^2}dx = -\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^k t\cdot\ln\mathrm{tg}\,t}{\left(1+\mathrm{tg}^k t\right)^2}dt,$$

то звідси випливає справедливість твердження.

Приклад 45. Нехай $f \in C[0;1]$ і для будь-яких $x, y \in [0;1]$ виконується нерівність $xf(y) + yf(x) \le 1$. Довести, що $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \le \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin\varphi, \\ dx = \cos\varphi\,d\varphi \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi,$$

то $$2I=\int\limits_0^{\pi/2}\left[f(\sin\varphi)\cos\varphi+f(\cos\varphi)\sin\varphi\right]d\varphi\le\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Звідси маємо $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}$, що і треба було довести.

Приклад 46. Нехай $f(x)$, $x\in[a;b]$ – неперервна, додатно зростаюча функція. Довести, що для будь-якого $c\in(a;b)$ виконується нерівність

$$\frac{1}{c-a}\int\limits_a^c f(x)\,dx<\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

тобто, що середнє значення $f(x)$ на відрізку $[a;c]$ менше середнього значення $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Розв’язання. Оскільки $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ – неперервна, додатно зростаюча функція, то

$$(b-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx=(c-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+(b-c)\int\limits_a^c f(x)\,dx<(c-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+$$

$$+(b-c)\int\limits_a^c f(c)\,dx=(c-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+(b-c)(c-a)f(c)=(c-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+$$

$$+(c-a)\int\limits_c^b f(c)\,dx<(c-a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+(c-a)\int\limits_c^b f(x)\,dx=$$

$$=(c-a)\left(\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx\right)=(c-a)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Розділивши обидві частини отриманої нерівності на $(b-a)(b-c)$, отримаємо шукану нерівність.

Приклад 47. Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a;b]$, і $\int\limits_a^b f(x)\,dx=1$. Довести, що $\int\limits_a^b x^2 f(x)\,dx\ge\left(\int\limits_a^b xf(x)\,dx\right)^2$.

Розв’язання. Оскільки

$$0\le\int\limits_a^b (t-x)^2 f(x)\,dx=t^2-2t\int\limits_a^b xf(x)\,dx+\int\limits_a^b x^2 f(x)\,dx$$

і при будь-яких $t\in\mathbf{R}$ права частина цієї нерівності є квадратним тричленом відносно змінної t, то повинна виконуватися нерівність $D<0$, тобто

$$\int_a^b x^2 f(x)dx \ge \left(\int_a^b x f(x)dx\right)^2,$$

що і треба було довести.

Приклад 48. Знайти $n\in \mathbf{N}$ з рівняння $e^{\int_1^{n+1}\ln[x]dx}=2020!$, де $[x]$ – ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Розв’язання. Оскільки $\int_1^{n+1}\ln[x]dx=\int_1^2\ln 1dx+\int_2^3\ln 2dx+\ldots+\int_n^{n+1}\ln ndx=\ln(n!)$, то одержимо рівняння $n!=2020!$, тобто $n=2020$.

Відповідь: 2020.

Приклад 49. Для неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[0;2\pi]$ знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\cos nx|dx$.

Розв’язання

$$I_n=\int_0^{2\pi}f(x)|\cos nx|dx=\left\{\begin{array}{l} t=nx, \\ dt=ndx \end{array}\right\}=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi n}f\left(\frac{t}{n}\right)|\cos t|dt=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k}f\left(\frac{t}{n}\right)|\cos t|dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k}|\cos t|dt=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}f(c_k)\int_0^{2\pi}|\cos t|dt=$$

$$=\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\cdot\Delta_k, \text{ де } c_k\in\left[\frac{2\pi(k-1)}{n};\frac{2\pi k}{n}\right],\ \Delta_k=\frac{2\pi}{n},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Отже, враховуючи неперервність функції $f(x)$ на $[0;2\pi]$, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx.$$

Відповідь: $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$.

Приклад 50. Нехай для $\alpha>0$ $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}xdx$. Довести, що функція $f(\alpha)=(\alpha+1)I_{\alpha}I_{\alpha+1}$, яка визначена для всіх додатних α, має період 1. Обчислити $f(0)$.

Розв'язання

$$I_{\alpha+2}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha+2}x\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\sin^{\alpha+1}x, & dv=\sin x\,dx,\\ du=(\alpha+1)\sin^{\alpha}x\cos x\,dx, & v=-\cos x\end{array}\right\}=$$

$$=-\sin^{\alpha+1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(\alpha+1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^2 x\,dx=(\alpha+1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$

$$=(\alpha+1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\,dx-(\alpha+1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha+2}x\,dx=(\alpha+1)\left(I_{\alpha}-I_{\alpha+2}\right),$$

тобто $$(\alpha+2)I_{\alpha+2}=(\alpha+1)I_{\alpha}.$$

Тоді, враховуючи цю рівність, маємо

$$f(\alpha+1)=(\alpha+2)I_{\alpha+1}I_{\alpha+2}=(\alpha+1)I_{\alpha+1}I_{\alpha}.$$

Отже, функція $f(\alpha)$ має період 1, що і треба було довести, а

$$f(0)=I_0\cdot I_1=\int\limits_0^{\pi/2}dx\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $f(0)=\pi/2$.

Приклад 51. Нехай $M=\left\{f\in C[0;\pi]:\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=1\right\}.$

Знайти $\min\limits_{f\in M}\int\limits_0^{\pi}f^2(x)\,dx$.

Розв'язання. Нехай $f_0(x)=\frac{2}{\pi}(\sin x+\cos x)$. Покажемо, що $f_0\in M$:

$$\int\limits_0^{\pi}f_0(x)\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\sin x+\cos x)\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1,$$

$$\int\limits_0^{\pi}f_0(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\sin x+\cos x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)=1.$$

Крім того, для будь-якої функції $f\in M$ $\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)-f_0(x)\right]^2dx\geq 0$. Тому

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx \geq 2\int_0^{\pi} f(x)\cdot f_0(x)\,dx - \int_0^{\pi} f_0^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)(\sin x + \cos x)\,dx -$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx = \frac{8}{\pi} - \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} = \int_0^{\pi} f_0^2(x)\,dx.$$

Отже, $\min\limits_{f\in M}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$ досягається при $f = f_0$ і дорівнює $\frac{4}{\pi}$.

Відповідь: $4/\pi$.

Приклад 52. Знайти функцію $f(x)$, яка задовольняє рівняння

$$f(x) = \int_0^1 (1+xy)\,f(y)\,dy + \sqrt{x}.$$

Розв'язання. Оскільки $f(x)$ можна записати так:

$$f(x) = x\int_0^1 f(y)\,dy + x^2\int_0^1 y f(y)\,dy + \sqrt{x},$$

то тоді $f(x) = ax^2 + bx + \sqrt{x}$, де a і b – деякі константи при x і x^2.

Отже, маємо

$$a = \int_0^1 y f(y)\,dy = \int_0^1 y\left(ay^2 + by + \sqrt{y}\right)dy = \left(\frac{a}{4}y^4 + \frac{b}{3}y^3 + \frac{2}{5}y\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{2}{5}.$$

Аналогічно

$$b = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1\left(ay^2 + by + \sqrt{y}\right)dy = \left(\frac{a}{3}y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{2}{3}y\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{2}{3}.$$

Таким чином, для знаходження a і b маємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a - \frac{b}{3} = \frac{2}{5}, \\ \frac{1}{3}a - \frac{b}{2} = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отже, $a = 1{,}6$; $b = 2{,}4$. Тому $f(x) = 1{,}6x^2 + 2{,}4x + \sqrt{x}$.

Відповідь: $f(x) = 1{,}6x^2 + 2{,}4x + \sqrt{x}$.

Приклад 53. Парна функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1;1]$. Довести, що

$$\int_0^{\pi} x f(\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx.$$

Розв'язання. Використавши заміну змінної інтегрування, а також парність функції $f(x)$, послідовно маємо:

$$\int_0^{\pi} xf(\cos x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t + \frac{\pi}{2}, \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) f\left[\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right] dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} tf(-\sin t)\,dt +$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-\sin t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} tf(\sin t)\,dt + \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{\pi}{2}, \\ dt = dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{0} f(\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx,$$ що й треба було довести.

Приклад 54. Знайти всі функції $f(x)$, неперервні на проміжку $[0;+\infty)$, для яких $\sin\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \dfrac{x}{x+1}$.

Розв’язання. Нехай $\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$:

$$\sin F(x) = \frac{x}{x+1}, \quad \frac{x}{x+1} \in [-1;1] \;\Rightarrow\; -1 \le \frac{x}{x+1} \le 1 \;\Rightarrow\; x \ge -\frac{1}{2}.$$

Тоді $F(x) = \arcsin\dfrac{x}{x+1} + 2\pi k$, $F(x) = -\arcsin\dfrac{x}{x+1} + \pi + 2\pi k$.

Оскільки $F(x)$ – неперервна функція і $F(0) = 0$, то підходить тільки розв’язок $F(x) = \arcsin\dfrac{x}{x+1}$.

Отже, із рівняння $\int_0^x f(t)\,dt = \arcsin\dfrac{x}{x+1}$ знаходимо, що

$$f(x) = \left(\arcsin\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Відповідь: $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.

Приклад 55. Довести справедливість співвідношення

$$f(x) = 2f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2,$$

де $f(x) = -\int_0^x \ln\cos y\,dy$. За допомогою знайденого співвідношення обчислити величину $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\pi/2} \ln\cos y\,dy$.

Розв'язання. Фактично необхідно довести справедливість співвідношення

$$-\int_0^x \ln\cos y\,dy = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln\cos y\,dy + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln\cos y\,dy - x\ln 2. \qquad (1)$$

У лівій частині цієї рівності зробимо підстановку $y=\frac{\pi}{2}-t$. Маємо

$$-\int_0^x \ln\cos y\,dy = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin t\,dt.$$

Враховуючи, що $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}$, одержимо

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin t\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln 2\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin\frac{t}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\cos\frac{t}{2}\,dt. \qquad (2)$$

Покажемо, що вирази (1) і (2) тотожно рівні:

а) $\int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln 2\,dt = -x\ln 2$;

б) $\int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin\frac{t}{2}\,dt = \left\{\begin{aligned}&\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}-y,\\ &dt=-2dy\end{aligned}\right\} = 2\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln\cos y\,dy$;

в) $\int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\cos\frac{t}{2}\,dt = \left\{\begin{aligned}&y=\frac{t}{2},\\ &2dy=dt\end{aligned}\right\} = 2\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln\cos y\,dy$.

Звідси випливає справедливість заданого співвідношення. І нарешті

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\ln 2 = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

звідки $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\ln 2$.

Відповідь: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\ln 2$.

Приклад 56. Обчислити інтеграл для непарної функції $f(x)$:

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки за умовою $f(-x)=-f(x)$, то при підстановці $x=-t$ маємо

$$I=-\int_{3}^{-3}\frac{dx}{1+f(-t)+\sqrt{1+f^2(-t)}}=\int_{-3}^{3}\frac{dx}{1-f(t)+\sqrt{1+f^2(t)}}.$$

Тоді

$$2I=\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1+f^2(x)}+f(x)}+\frac{1}{1+\sqrt{1+f^2(x)}-f(x)}\right)dx=$$

$$=\left\{\left(1+\sqrt{1+f^2(x)}\right)^2-f^2(x)=1+2\sqrt{1+f^2(x)}+1+f^2(x)-\right.$$

$$\left.-f^2(x)=2\left(1+\sqrt{1+f^2(x)}\right)\right\}=\int_{-3}^{3}\frac{2\left(1+\sqrt{1+f^2(x)}\right)}{2\left(1+\sqrt{1+f^2(x)}\right)}dx=\int_{-3}^{3}dx=6.$$

Отже, $I=3$.

Другий спосіб.

$$I=\int_{-3}^{0}\frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}+\int_{0}^{3}\frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}=\left\{\begin{array}{l}x=-t,\\ dx=-dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int_{0}^{3}\frac{dx}{1+\sqrt{1+f^2(x)}-f(x)}+\int_{0}^{3}\frac{dx}{1+\sqrt{1+f^2(x)}+f(x)}=$$

$$=\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1+f^2(x)}-f(x)}+\frac{1}{1+\sqrt{1+f^2(x)}+f(x)}\right)dx=\int_{0}^{3}dx=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 57. Нехай $f(x)$ – довільна неперервна функція, яка визначена на всій множині дійсних чисел $\mathbf{R}$. Довести, що рівняння

$$f(\cos x)=3x^2\cdot f\left(\cos x^3\right)$$

має хоча б один дійсний корінь.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що функція $3x^2 f\left(\cos x^3\right)-f(\cos x)$ неперервна на $\mathbf{R}$. Тому функція

$$F(x)=\int_{0}^{x}\left(3t^2\cdot f\left(\cos t^3\right)-f(\cos t)\right)dt$$

диференційовна на $\mathbf{R}$, причому

$$F'(x)=3x^2\cdot f\left(\cos x^3\right)-f\left(\cos x\right),\ \forall x\in R. \qquad (1)$$

Обчислимо $F(1)$:

$$F(1)=\int_0^1\left(3t^2 f\left(\cos t^3\right)-f\left(\cos t\right)\right)dt=\int_0^1 3t^2 f\left(\cos t^3\right)dt-\int_0^1 f\left(\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^1 f\left(\cos t^3\right)dt^3-\int_0^1 f\left(\cos t\right)dt=\int_0^1 f\left(\cos u\right)du-\int_0^1 f\left(\cos t\right)dt=0.$$

Отже, функція $F(x)$ задовольняє умови:

1) визначена і диференційовна на відрізку $[0;1]$;
2) $F(0)=F(1)$.

Тоді за теоремою Ролля існує точка $c\in(0;1)$ така, що $F'(c)=0$. Звідси, враховуючи (1), маємо:

$$3c^2\cdot f\left(\cos c^3\right)-f\left(\cos c\right)=0.$$

А це означає, що c – корінь даного рівняння, що і потрібно було довести.

Приклад 58. Знайти всі функції $y(x)$, $x\in\mathbf{R}$, такі, що для будь-якого $x\in\mathbf{R}$ виконується рівність

$$y'(x)=\int_0^1\max\{1,y(x)\}dx \text{ й } y(0)=\frac{1}{2}.$$

Розв’язання. Нехай $y(x)$ – шукана функція. Зробимо позначення:

$$\int_0^1\max\{1,y(x)\}dx=a.$$

Очевидно, що $a>0$. Оскільки $y'(x)=a$, то $y(x)=\int a\,dx=ax+C$. Із початкової умови $y(0)=\frac{1}{2}$ знаходимо $C=\frac{1}{2}$, $y(x)=ax+\frac{1}{2}$. Тоді

$$\max\{1,y(x)\}=\begin{cases}1, & \text{при } x\le\frac{1}{2a},\\ ax+\frac{1}{2}, & \text{при } x>\frac{1}{2a}\end{cases}$$

і при $a \geq \dfrac{1}{2}$ послідовно отримуємо:

$$a = \int\limits_0^{1/2a} dx + \int\limits_{1/2a}^{1} \left(ax + \frac{1}{2}\right) dx, \quad a = \frac{a}{2} + \frac{1}{8a} + \frac{1}{2}, \quad 4a^2 - 4a - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При $a < \dfrac{1}{2}$ відповідно отримаємо $a = \int\limits_0^1 dx = 1$, що неможливо.

Отже, шукана функція одна: $y(x) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} x + \dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $y(x) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} x + \dfrac{1}{2}$.

Приклад 59. Знайти функцію $f : \left(\frac{1}{e}; \infty\right) \ \forall x \to y(x) \in \mathbf{R}$, яка є розв'язком диференціального рівняння $\int\limits_0^{y'(x)} \dfrac{e^t dt}{1+2e^t} = \dfrac{1}{2} \ln x$ із початковою умовою $y(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\limits_0^{y'(x)} \frac{e^t dt}{1+2e^t} = \frac{1}{2} \ln\left(1+2e^t\right)\Big|_0^{y'(x)} = \frac{1}{2} \ln\left(1+2e^{y'(x)}\right) - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e^{y'(x)}}{3}.$$

Тоді задане рівняння матиме такий вигляд:

$$\ln \frac{1+2e^{y'(x)}}{3} = \ln x, \quad e^{y'(x)} = \frac{3x-1}{2}, \quad y'(x) = \ln \frac{3x-1}{2}.$$

Знайдемо $y(x)$:

$$y(x) = \int \ln \frac{3x-1}{2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3x-1}{2} = t, \\ dx = \dfrac{2}{3} dt \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \int \ln t dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln t, & dv = dt, \\ du = \dfrac{dt}{t}, & v = t \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(t \ln t - \int dt\right) = \frac{2}{3} t (\ln t - 1) + C = \frac{3x-1}{3}\left(\ln \frac{3x-1}{2} - 1\right) + C.$$

Оскільки $y(1) = -\dfrac{2}{3}$, то $C = 0$.

Відповідь: $y(x) = \dfrac{3x-1}{3}\left(\ln \dfrac{3x-1}{2} - 1\right)$.

Приклад 60. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $(0<\alpha<\pi)$.

Розв'язання

$$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\left\{\begin{matrix} x-\cos\alpha=t, \\ dx=dt \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha}\frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sin\alpha}\Bigg|_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

§ 3. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

3.1. Означення невласного інтеграла першого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$ при $b>a$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

то її називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають символом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином, за означенням,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл **збігається**. Якщо ж зазначена границя не існує або нескінченна, то говорять, що інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **розбігається**. Аналогічно дається означення невласному інтегралу першого роду на проміжку $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

де c – довільне дійсне число. В цьому випадку інтеграл зліва збігається лише тоді, коли збігаються обидва інтеграли справа.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ для $\alpha\in\mathbf{R}$.

Розв’язання. Нехай $\alpha\neq 1$, тоді

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}+1\right)=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b = +\infty$.

Отже, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

3.2. Основні формули для невласних інтегралів першого роду

1°. **Лінійність інтеграла**. Якщо невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ збігаються, то для будь-яких чисел α і β збігається також інтеграл

$$\int\limits_a^{\infty} \left[\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\right] dx, \text{ причому}$$

$$\int\limits_a^{\infty} \left[\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\right] dx = \alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

2°. **Формула Ньютона – Лейбніца**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$ і $F(x)$ на цьому проміжку – будь-яка її первісна, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

де $$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x).$$

3°. **Формула заміни змінної**. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$, а $\varphi(t)$ на проміжку $[\alpha;\beta)$ – неперервно диференційовна функція, причому

$$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = +\infty.$$

Тоді $$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt.$$

Ця формула справедлива у випадку збіжності принаймні одного з інтегралів.

4°. **Формула інтегрування частинами**. Нехай $u(x)$, $v(x)$ на проміжку $[\alpha;+\infty)$ – неперервно диференційовні функції і $\lim\limits_{x \to \infty}(uv)$ існує. Тоді

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du,$$

де $$uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}(uv) - u(a)v(a).$$

5°. **Інтегрування нерівностей**. Якщо для всіх $x \in [a;+\infty)$ виконується нерівність $f(x) \le \varphi(x)$, то для інтегралів

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

за умови їх збіжності виконується нерівність

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

3.3. Ознаки збіжності та розбіжності інтегралів для невід'ємних функцій (ознаки порівняння)

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ неперервні функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Теорема 2. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, при $f(x) > 0$ та $\varphi(x) > 0$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ й $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Наслідок. Якщо $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ збігається і $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається.

Теорема 3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ збігається, то збігається і $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, і **умовно збіжним**, якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається.

3.4. Достатні ознаки збіжності інтегралів

3.4.1. Ознака Діріхле

Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна і має обмежену первісну на проміжку $[a;+\infty)$;

б) функція $g(x)$ неперервно диференційовна і монотонна на проміжку $[a;+\infty)$, причому $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Розв'язання. Введемо такі позначення: $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. За цих умов отримаємо, що:

1) функція $f(x)=\sin 2x$ неперервна на проміжку $[0;+\infty)$;
2) $\left|\int\limits_0^b \sin 2x\,dx\right| = \left|-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^b\right| = \frac{1}{2}|1-\cos 2b| \le 1$ для будь-якого $b \ge 0$;
3) $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ – неперервна, наприклад, для $x \ge 1$, а оскільки $g'(x)<0$ при $x \ge 1$, то $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$, спадаючи.

За ознакою Діріхле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ збігається. Враховуючи, що $\int\limits_0^{1} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ – визначений інтеграл, звідси випливає, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ збігається.

3.4.2. Ознака Абеля

Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$ і $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається;

б) функція $g(x)$ обмежена, неперервно диференційовна і монотонна на проміжку $[a;+\infty)$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} \operatorname{arctg} x\, dx$.

Розв'язання. Нехай $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$, а $g(x)=\operatorname{arctg} x$. Функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[1;+\infty)$, а $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$ збігається за ознакою Діріхле.

Функція $g(x)=\operatorname{arctg} x$ має на проміжку $[1;+\infty)$ неперервну похідну $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ і монотонна (зростає). Крім того, $|g(x)|\le\frac{\pi}{2}$. За ознакою Абеля заданий інтеграл збігається.

3.4.3. Критерій Коші

Невласний інтеграл першого роду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $b=b(\varepsilon)\ge a$ таке, що при будь-яких $b_1>b$ та $b_2>b$ виконується нерівність

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Приклад 1. За допомогою критерія Коші довести збіжність інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x} dx.$$

Розв'язання. Нехай $b>a$, тоді

$$\left|\int\limits_a^{b} \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x} dx\right| \le \int\limits_a^{b} \frac{|\sin 2x|}{x^2+\sin^2 x} dx \le \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_a^b = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}<\frac{1}{a}.$$

Позначимо через $a_\varepsilon = \max\left(1; \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Із наведених вище оцінок випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $a_\varepsilon = \max\left(1; \frac{1}{\varepsilon}\right)$ таке, що для будь-яких $a, b \geq a_\varepsilon$ виконується нерівність

$$\left|\int_a^b \frac{\sin 2x}{x^2 + \sin^2 x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

що, за критерієм Коші, й означає збіжність заданого інтеграла.

Критерій Коші часто використовують для доведення розбіжності інтегралів: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $b \geq a$ існують числа $b_1 > b$, $b_2 > b$ такі, що

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geq \varepsilon.$$

Приклад 2. Довести розбіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \leq 1$.

Розв'язання. Нехай $b \in [1; +\infty)$ і виберемо натуральне число n так, щоб виконувалася нерівність $\pi n > b$ і покладемо $b_1 = n\pi$, $b_2 = 2n\pi$. Тоді

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx\right| = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx \geq \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \geq \frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Отже, існує число $\varepsilon = \frac{1}{4}$ таке, що для будь-якого $b > 1$ існують числа $b_1 = n\pi$ і $b_2 = 2n\pi > b$, для яких $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geq \varepsilon$.

Отже, при $\alpha \leq 1$ заданий інтеграл розбігається.

3.5. Головне значення невласного інтеграла першого роду (в сенсі Коші)

Границю $\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$ називають **головним значенням інтеграла** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ і позначають $\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, тобто

$$\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

Якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, то він збігається і в сенсі головного значення й $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Однак, із збіжності інтеграла в сенсі Коші не випливає збіжність відповідного невласного інтеграла.

Справді,

$$\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} x\,dx=\lim_{a\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-a}^{a}=0,\text{ але } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx,\text{ очевидно, не існує.}$$

Приклад. Обчислити $\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ при $\beta\neq 0$.

Розв'язання

$$\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\left\{\begin{aligned}x-\alpha&=t,\\ dx&=dt\end{aligned}\right\}=\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+\alpha}{t^2+\beta^2}dt=\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,dt}{t^2+\beta^2}+$$

$$+\alpha\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{t^2+\beta^2}=0+2\alpha\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{t^2+\beta^2}=\frac{2\alpha}{\beta}\lim_{a\to+\infty}\left.\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\right|_{0}^{a}=$$

$$=\frac{2\alpha}{\beta}\lim_{a\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}=\frac{2\alpha}{\beta}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\alpha}{\beta}.$$

Зазначимо, що інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ розбігається, оскільки $\frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\sim\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$.

§ 4. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

4.1. Означення невласного інтеграла другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$ і необмежена на будь-якому проміжку $(b-\varepsilon;b)$, $\varepsilon>0$. В цьому випадку точку b називають **особливою точкою функції** $f(x)$.

Нехай на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$ функція $f(x)$ інтегровна, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при такому $\varepsilon>0$, що $b-\varepsilon>a$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

то ця границя називається **невласним інтегралом другого роду** і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$. В цьому випадку говорять, що цей інтеграл **існує** або **збігається**. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то говорять, що інтеграл **розбігається**.

Аналогічно, якщо $x=a$ – особлива точка, то невласний інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі деякої внутрішньої точки $c\in[a;b]$, то при умові існування обох інтегралів справа за означенням покладаємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

У випадку, коли a і b – особливі точки й обидва інтеграли справа існують, то невласний інтеграл визначається як сума двох інтегралів, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim_{\eta\to 0+}\int\limits_{a}^{b-\eta} f(x)dx,$$

де c – будь-яка точка з проміжку $(a;b)$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ для $\alpha \in \mathbf{R}$.

Розв'язання. Нехай $\alpha \neq 1$, тоді

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1-\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha<1, \\ +\infty & \text{при } \alpha>1. \end{cases}$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\varepsilon = +\infty .$$

Отже, заданий інтеграл збігається при $\alpha<1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ($a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$).

Розв'язання. Оскільки

$$(x-a)(b-x) = -x^2+(a+b)x-ab = -\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - ab =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$ то

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+ \\ \eta\to 0+}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+ \\ \eta\to 0+}} \arcsin \left.\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right|_{a+\varepsilon}^{b-\eta} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+ \\ \eta\to 0+}} \arcsin \frac{b-\eta-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} - \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+ \\ \eta\to 0+}} \arcsin \frac{a+\varepsilon-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Зауваження. Оскільки підінтегральна функція необмежена в правому околі точки $x=a$ і в лівому околі $x=b$, то заміною змінної цей інтеграл можна звести до визначеного інтеграла:

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \left\{ \begin{array}{c} x = a\cos^2 t + b\sin^2 t\ ; \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt, \\ x-a = (b-a)\sin^2 t\ , \\ b-x = (b-a)\cos^2 t \end{array} \right\} = 2\int_0^{\pi/2} dt = \pi .$$

4.2. Основні формули для невласних інтегралів другого роду

1°. **Лінійність інтеграла**. Якщо невласні інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \varphi(x)dx$ збігаються, то для будь-яких чисел α і β збігається також інтеграл

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\right]dx,$$

причому $\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b \varphi(x)dx$.

2°. **Формула Ньютона – Лейбніца**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ і $F(x)$ на цьому проміжку – будь-яка її первісна, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $$F(b) = \lim_{\varepsilon\to 0+} F(b-\varepsilon).$$

3°. **Формула заміни змінної**. Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, а $\varphi(t)$ на проміжку $[\alpha;\beta)$ – неперервно диференційовна функція, причому

$$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim_{t\to\beta-0}\varphi(t) = b.$$

Тоді $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt.$$

Ця формула справедлива у випадку збіжності принаймні одного з інтегралів.

4°. **Формула інтегрування частинами**. Нехай $u(x)$, $v(x)$ – неперервно диференційовні функції на проміжку $[\alpha;b)$ і $\lim\limits_{x\to\infty}(uv)$ існує, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

де $$uv\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0}(uv) - u(a)v(a).$$

5°. **Інтегрування нерівностей**. Якщо для всіх $x\in[a;b)$ виконується нерівність $f(x)\le\varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

при умові збіжності цих інтегралів.

4.3. Ознаки збіжності й розбіжності інтегралів для невід'ємних функцій (порівняльні ознаки)

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a;b)$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ невід'ємні, $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 2. Якщо $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ та існує границя

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,$$

то при $0 < k < \infty$ інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ й $\int_a^b \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Наслідок. Якщо збігається невласний інтеграл другого роду $\int_a^b \varphi(x)dx$ і $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Теорема 3. Якщо інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається також інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, і **умовно збіжним**, якщо $\int_a^b f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ розбігається.

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання. $x=0$ – особлива точка підінтегральної функції. Оскільки на проміжку $(0;1]$ виконується нерівність $\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, а інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ збігається

(приклад 1 із 4.1), то за теоремою 1 буде збіжним й інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^2}\right)}{x\sin\sqrt[5]{x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція на проміжку $(0;1]$ зберігає знак та має особливу точку $x=0$. Оскільки

$$\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^2}\right)}{x\sin\sqrt[5]{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x\sqrt[5]{x}} = \frac{1}{x^{4/5}},$$

то інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{4/5}}dx$ збігається (приклад 1 із 4.1), а тому за теоремою 2 буде збігатися і заданий інтеграл.

4.4. Достатні ознаки збіжності інтегралів

Будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$ і має єдину особливу точку – точку b.

4.4.1. Ознака Діріхле

Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна і має обмежену первісну на проміжку $[a;b)$;

б) функція $g(x)$ неперервно диференційовна і монотонна на проміжку $[a;b)$, причому $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$.

Розв'язання. Особлива точка $x=0$. Для дослідження збіжності скористаємося ознакою Діріхле. Зробимо такі позначення: $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$. Тоді:

1) функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(0;1]$;
2) $\left|\int\limits_\eta^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx\right| = \left|-\int\limits_\eta^1 \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\cos\frac{1}{x}\Big|_\eta^1\right| = \left|\cos 1-\cos\frac{1}{\eta}\right| \le 2$ для будь-якого $\eta\in(0;1]$;
3) $g(x)$ неперервно диференційовна, монотонна і $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=0$.

Оскільки всі умови ознаки Діріхле виконані, то даний інтеграл є збіжним.

4.4.2. Ознака Абеля

Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна на $[a;b)$, а інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

б) функція $g(x)$ має неперервну похідну, обмежена і монотонна на проміжку $[a;b)$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\cos\frac{1}{x}dx$.

Розв'язання. Особлива точка підінтегральної функції $x=0$. При дослідженні збіжності даного інтеграла застосуємо ознаку Абеля. Позначимо через $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, а через $g(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$. Перевіримо виконання умов цієї ознаки:

1) функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(0;1]$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$ збігається за ознакою Діріхле (умови застосування ознаки Діріхле перевіряються аналогічно попередньому прикладу);
3) функція $g(x)$ має неперервну похідну $g'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$;
4) $g(x)$ монотонно зростає, оскільки $g'(x)>0$ при $x\in(0;1)$;

5) функція $g(x)$ обмежена, $|g(x)| \le 1$.

Отже, даний інтеграл збігається за ознакою Абеля.

4.4.3. Критерій Коші

Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\eta \in (a;b)$, що при будь-яких $\eta_1, \eta_2 \in (\eta, b)$ виконується нерівність
$$\left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Критерій Коші часто використовують при доведенні розбіжності інтегралів: $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається, якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого числа $\eta \in (a;b)$ існують числа $\eta_1, \eta_2 \in [\eta; b)$, для яких
$$\left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| \ge \varepsilon.$$

Приклад. Довести розбіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}$.

Розв'язання. Для доведення скористаємося критерієм Коші. Візьмемо довільне число $\eta \in [0;1)$ і натуральне число n таке, щоб виконувалася нерівність
$$n > \frac{1}{\pi(1-\eta)}.$$

Після заміни змінної $t = \frac{1}{(1-x)}$ виконаємо нижню оцінку модуля інтеграла на відрізку $\left[1 - \frac{1}{\pi n}; 1 - \frac{1}{2\pi n}\right]$:
$$\left| \int\limits_{1-\frac{1}{\pi n}}^{1-\frac{1}{2\pi n}} \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x} \right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 t}{t}dt > \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 t dt = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Із отриманої оцінки випливає, що існує число $\varepsilon=\frac{1}{4}$ таке, що для будь-якого числа $\eta\in[0;1)$ існують числа $\eta_1=1-\frac{1}{\pi n}$ й $\eta_2=1-\frac{1}{2\pi n}$ такі, що

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}\sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}\right|\geq\varepsilon.$$

Це означає, що за критерієм Коші цей інтеграл розбігається.

4.5. Головне значення невласного інтеграла другого роду (в сенсі Коші)

Головним значенням інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ називається границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right),$$

де $c\in(a;b)$ – єдина особлива точка підінтегральної функції. Цю границю позначають V.P. $\int_a^b f(x)dx$.

Якщо існує інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то існує інтеграл і в сенсі головного значення. Більш того, ці інтеграли рівні. Однак, слід пам'ятати, що із збіжності інтеграла в сенсі Коші не випливає збіжність відповідного невласного інтеграла другого роду.

Приклад. Обчислити V.P. $\int_1^4\frac{dx}{x-3}$.

Розв'язання. Маємо

$$\text{V.P.}\int_1^4\frac{dx}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_1^{3-\varepsilon}\frac{dx}{x-3}+\int_{3+\varepsilon}^4\frac{dx}{x-3}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln|x-3|\Big|_1^{3-\varepsilon}+\ln|x-3|\Big|_{3+\varepsilon}^4\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln\varepsilon-\ln 2+\ln 1-\ln\varepsilon)=-\ln 2.$$

Отже, V.P. $\int_1^4\frac{dx}{x-3}=-\ln 2$, хоча $\int_1^4\frac{dx}{x-3}$ і розбігається.

4.6. Завдання для самостійного розв’язання

Обчислити невласні інтеграли:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3+x}$.

2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2-4}{x^4+16}dx$.

3. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+2020x^{2020}}$.

4. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^n dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^n\right)}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+0,5\right)^2}$.

6. $\displaystyle\int_0^{1}(\ln x)^n dx$, $n=0,1,2,\ldots$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x}$.

9. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^4+x^8}}$.

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

11. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x\right)dx$.

12. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)}$.

13. $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}$, $\alpha,\beta>0$.

14. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx$, $m>0$.

Дослідити на збіжність інтеграли:

15. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

16. $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$.

17. $\displaystyle\int_0^{\infty}(-1)^{\left[x^2\right]}dx$.

18. $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x\sin x^2dx$.

19. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x^{\alpha}\left(x^2+1\right)}dx$.

20. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}dx$.

21. За умови $a>0$ обчислити інтеграли $I_1=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$, $I_2=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$.

22. При якому значенні параметра $a\in(0;\infty)$ площа фігури, обмеженої графіком функції $y=\dfrac{a^2}{\left(a^2+1\right)\left(x^2+2ax+2a^2\right)}$ та віссю Ox, буде найбільшою і чому дорівнювати?

23. Обчислити $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$, якщо відомо, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

24. Довести рівність $\int\limits_0^{\infty}f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\int\limits_0^{\infty}f\left(\sqrt{x^2+4a}\right)dx$ при $a>0$.

25. Довести збіжність і знайти значення невласного інтеграла

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx,\ a>0.$$

26. Довести, що $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

27. При яких значеннях параметрів $a>0$ і $b>0$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty}\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}dx?$$

28. Знайти всі функції $f(x)$ такі, що для будь-якого $x\in \mathbf{R}$

$$f'(x)=f(x)\int\limits_0^{\infty}f(x)dx.$$

29. Довести збіжність $\int\limits_0^{\infty}\cos x^2dx$.

30. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$.

4.7. Вказівки до розв'язання

1. Розкласти підінтегральну функцію на елементарні дроби.
2. Спочатку знайти первісну $F(x)$ для невизначеного інтеграла. Для цього треба чисельник і знаменник підінтегральної функції поділити на x^2, а потім зробити заміну змінної $x+\frac{4}{x}=t$. Після цього обчислити невласний інтеграл.
3. У знаменнику підінтегральної функції винести за дужки множник x^{2020}, а потім зробити заміну змінної $x^{-2019}=t$.
4. Проміжок інтегрування $[0;\infty)$ розбити на два проміжки інтегрування $[0;1]$ і $[1;\infty)$. Заміною змінної $x=\frac{1}{t}$ проміжок інтегрування $[1;\infty)$ звести до проміжку $[0;1]$.
5. Проінтегрувати частинами двічі, а потім скористатися тим, що $\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Інтегруючи частинами, встановити, що $I_n = -nI_{n-1}$.

7. Використати властивість визначеного інтеграла від парної функції, а потім зробити підстановку $x = \operatorname{tg} t$.

8. Заданий визначений інтеграл підстановкою $\operatorname{ctg} x = t$ звести до невласного інтеграла першого роду.

9. Спочатку розглянути заданий інтеграл як невизначений. У знаменнику підінтегральної функції винести з-під кореня x^4, під коренем виділити повний квадрат і знайти цей інтеграл. Потім за означенням перейти до невласного інтеграла першого роду.

10. Зробити заміну змінної $x = 2t$, використати формули: $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$, $\ln xyz = \ln x + \ln y + \ln z \quad (x, y, z > 0)$. Потім шляхом заміни змінної $t = \frac{\pi}{2} - x$ у відповідному інтегралі отримати рівняння $I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$.

11. Знайти одну з первісних $F(x)$ для підінтегральної функції заданого інтеграла. Для цього треба записати заданий інтеграл, як суму двох інтегралів, а потім другий інтеграл проінтегрувати частинами. Після цього обчислити заданий інтеграл.

12. Записати заданий інтеграл як суму двох інтегралів відповідно до проміжків інтегрування $[0;1]$ і $[1;\infty)$. У першому інтегралі заміною $x = \frac{1}{t}$ звести проміжок інтегрування до проміжку $[1;\infty)$.

13. Перетворити підінтегральну функцію до такого вигляду:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}} - \frac{1}{1+x^{\beta}}\right) = \frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}.$$

14. Використайте розв'язання прикладу № 12.

15. Обґрунтувати, що при дослідженні даного інтеграла на збіжність достатньо дослідити інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, до якого треба застосувати метод інтегрування частинами, а потім порівняльну ознаку для невласних інтегралів першого роду.

16. Проінтегрувати частинами, а потім застосувати порівняльну ознаку.

17. Використати означення цілої частини x.

18. Дослідити на збіжність інтеграл на проміжку $[1;\infty)$, використовуючи інтегрування частинами та порівняльні ознаки збіжності інтегралів першого роду.

19. Застосувати порівняльні ознаки збіжності невласних інтегралів першого та другого роду.

20. Розбити проміжок інтегрування $[0;\infty)$ на два проміжки інтегрування: $[0;1]$ та $[1;\infty)$, а потім при дослідженні на збіжність до кожного з інтегралів застосувати теорему 2 відповідно для інтегралів першого та другого роду.

21. Використати зв'язок заданих інтегралів з інтегралом

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right)dx.$$

22. Скориставшись невласним інтегралом, знайти площу $S(a)$, а потім дослідити функцію $S(0)$ на екстремум.

23. Використати рівність $\dfrac{1}{1-e^{-x}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$ і можливість почленного інтегрування. Потім тричі почленно інтегрувати.

24. Зробити заміну $x + \dfrac{a}{x} = \sqrt{t^2 + 4a}$.

25. Для доведення збіжності заданий інтеграл треба записати, як суму двох інтегралів з межами інтегрування $[0;1]$ і $[1;\infty)$. Потім до кожного з них застосувати порівняльну ознаку.

Для обчислення заданого інтеграла необхідно: зробити заміну змінної $x = at$, використати формулу $\ln at = \ln a + \ln t$, проміжок інтегрування $[0;\infty)$ розбити на два проміжки інтегрування $[0;1]$ і $[1;\infty)$, а потім заміною змінної $x = \dfrac{1}{t}$ інтеграл по проміжку інтегрування $[1;\infty)$ звести до інтеграла з проміжком інтегрування $[0;1]$.

26. Для доведення рівності заданих інтегралів у першому інтегралі покласти $x = \dfrac{1}{t}$. При обчисленні заданого інтеграла використати рівність

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

27. Шляхом перетворень отримати такі рівності:

$$\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x} = \frac{x^2}{b^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}\right) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2+a^4}{4b^2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

а потім скористатись порівняльною ознакою збіжності невласних інтегралів першого роду.

28. Оскільки $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx - const$, то задане рівняння – лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, яке треба розв'язати і зробити аналіз цього розв'язку.

29. Проміжок інтегрування $[0;\infty)$ розбити на два проміжки інтегрування $\left[0;\sqrt{\pi}\right]$ та $\left[\sqrt{\pi};\infty\right)$, дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty}\cos x^2dx$, зробити заміну $x=\sqrt{t}$, проінтегрувати частинами, а потім застосувати порівняльну ознаку збіжності невласних інтегралів першого роду.

30. Застосувати порівняльні ознаки збіжності невласних інтегралів першого та другого роду.

4.8. Розв'язання завдань

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^4+x^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{1}{x^4+x^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}$,

то $I=\int\limits_1^{\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_1^b=$

$=-\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{\pi}{4}$.

Відповідь: $I=1-\dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\dfrac{x^2-4}{x^4+16}dx$.

Розв'язання

$$\int\frac{x^2-4}{x^4+16}dx=\int\frac{\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)dx}{x^2+\dfrac{16}{x^2}}=\left\{\begin{matrix} x+\dfrac{4}{x}=t\ , & \left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)dx=dt, \\ & x^2+\dfrac{16}{x^2}=t^2-8 \end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{t^2-8}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-2\sqrt{2}x+4}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\right|.$$

Тоді $\quad I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4}{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{b} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln 5 = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln 5$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln 5$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + 2020x^{2020}}$.

Розв'язання

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{2019}} + 2020} \cdot \frac{dx}{x^{2020}} = \left\{ \begin{array}{l} x^{-2019} = t, \quad -2019x^{-2020}dx = dt, \\ \qquad x^{-2020}dx = -\frac{dt}{2019} \end{array} \right\} = \frac{1}{2019}\int_0^1 \frac{dt}{t + 2020} =$$

$$= \frac{1}{2019}\ln\left(t + 2020\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2019}\ln\frac{2021}{2020}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2019}\ln\frac{2021}{2020}$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)}$.

Розв'язання

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} = \int_0^{1} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} + \int_1^{\infty} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{1} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} - \int_1^{0} \frac{dt}{t^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^n}\right)t^n} = \int_0^{1} \frac{x^n dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} +$$

$$+ \int_0^{1} \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^n\right)} = \int_0^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\left(x^2 + 0.5\right)^2}$.

Розв’язання. Скориставшись вказівками, отримаємо

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+0.5\right)^2}=\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2x}\right)\left(-\frac{2x}{\left(x^2+0.5\right)^2}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=-\dfrac{e^{-x^2}}{2x}, & dv=-\dfrac{2x\,dx}{\left(x^2+0.5\right)^2}dx, \\ du=\dfrac{4x^2e^{-x^2}+2e^{-x^2}}{4x^2}dx, & v=\dfrac{1}{\left(x^2+0.5\right)} \end{matrix}\right\}=-\left.\frac{e^{-x^2}}{x\left(2x^2+1\right)}\right|_0^{\infty}-$$

$$-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}\left(4x^2+2\right)}{x^2\left(4x^2+2\right)}dx=\left.\frac{-e^{-x^2}}{x\left(2x^2+1\right)}\right|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} u=e^{-x^2}, & dv=-\dfrac{dx}{x^2}, \\ du=-2xe^{-x^2}dx, & v=\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left.\left(\frac{-e^{-x^2}}{x\left(2x^2+1\right)}+\frac{e^{-x^2}}{x}\right)\right|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{2\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\text{, оскільки }\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{\pi}$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I_n=\int_0^1(\ln x)^n\,dx,\ n=0,1,2,\ldots$.

Розв’язання. Інтегруючи частинами, знаходимо

$$I_n=\int_0^1(\ln x)^n\,dx=\left\{\begin{matrix} u=(\ln x)^n, & dv=dx, \\ du=\dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}dx, & v=x \end{matrix}\right\}=$$

$$=x(\ln x)^n\Big|_0^1-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}\,dx=-n\,I_{n-1},$$

оскільки $\lim\limits_{x\to 0+}x(\ln x)^n=0$. Цю рівність отримаємо, якщо n разів застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0+}x(\ln x)^n=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}}=-n\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x}}=\ldots=(-1)^{n+1}n!\lim_{x\to 0+}x=0.$$

Зазначимо, що $I_0=\int_0^1dx=1$. Тоді $I_n=(-1)^n n!$.

Відповідь: $(-1)^n n!$.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$I=2\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\left\{\begin{matrix} x=\operatorname{tg} t, & 1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}, \\ dt=\frac{dx}{1+x^2}, & 1+x^2=\frac{1}{\cos^2 t} \end{matrix}\right\}=2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}dt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(t+\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi.$$

Відповідь: $\frac{3}{8}\pi$.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x}$.

Розв'язання. Скориставшись вказівками, отримаємо

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\alpha^2\right)}=\left\{\begin{matrix} \operatorname{ctg} x=t, \quad dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}, \\ \frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x=1+t^2 \end{matrix}\right\}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\alpha^2+1}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dt}{t^2+\alpha^2+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big|_0^b=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$.

Приклад 9. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^4+x^8}}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^4+x^8}}=\int\frac{dx}{x^5\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}\right)^2+\frac{1}{x^4}+1}}=\int\frac{dx}{x^5\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x^4+x^8}}{x^4}\right)=$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{2+x^4+2\sqrt{1+x^4+x^8}}{2x^4} = \frac{1}{4}\ln\frac{2x^4}{2+x^4+2\sqrt{1+x^4+x^8}}+C,$$

то за означенням

$$I=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{2x^4}{2+x^4+2\sqrt{1+x^4+x^8}}\Bigg|_1^b=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{2b^4}{2+b^4+2\sqrt{1+b^4+b^8}}-$$

$$-\ln\frac{2}{3+2\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Приклад 10. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

Розв'язання. Після заміни змінної $x=2t$ маємо

$$I=2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin 2t\,dt=2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\left(2\sin t\cdot\cos t\right)dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну змінної $t=\frac{\pi}{2}-x$. Маємо

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx.$$

Отже, $I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$, звідки $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Приклад 11. Обчислити $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x\right)dx$.

Розв'язання. Для всіх $x>0$ маємо

$$\int\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{1}{x^3}\operatorname{arctg}x\,dx=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x - \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

Отже, однією з первісних для підінтегральної функції даного інтеграла є функція
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} + \operatorname{arctg} x\right),\ x > 0.$$

Оскільки
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} + \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$F(+0) = \lim_{x \to +0} F(x) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} + \operatorname{arctg} x\right) = 0,$$

то
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right)dx = F(\infty) - F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)}$.

Розв'язання

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)}.$$

Заміною $x = \frac{1}{t}$ зведемо перший інтеграл у правій частині рівності по проміжку $[1;\infty)$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)} = \int_1^{\infty} \frac{t^{\sqrt{2}}dt}{\sqrt{t}(1+t)\left(1+t^{\sqrt{2}}\right)} = \left\{\frac{t^{\sqrt{2}}}{\sqrt{t}(1+t)\left(1+t^{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)\left(1+t^{\sqrt{2}}\right)}\right\} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} - \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)\left(1+t^{\sqrt{2}}\right)}.$$

Отже,

$$I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}=\left\{\begin{array}{l} t=u^2, \\ dt=2u\,du \end{array}\right\}=\int\limits_1^{\infty}\frac{2u\,du}{u\left(1+u^2\right)}=2\operatorname{arctg}u\Big|_1^{\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}$, $\alpha,\beta>0$.

Розв'язання. Перший спосіб. Перетворимо підінтегральну функцію таким чином:

$$\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x\left(1+x^{\alpha}\right)}-\frac{1}{x\left(1+x^{\beta}\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}-\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}\right)=$$

$$=\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}-\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}.$$

Тому для всіх $x>0$

$$\int\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}-\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}\right)dx=\frac{1}{\beta}\ln\left(1+x^{\beta}\right)-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+x^{\alpha}\right)+C=$$

$$=\ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}+C.$$

Таким чином,

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}-\lim_{x\to+0}\ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}.$$

Оскільки $\alpha>0$ і $\beta>0$, то

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x\left(1+x^{-\beta}\right)^{1/\beta}}{x\left(1+x^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}}=0 \quad i \quad \lim_{x\to+0}\ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}=0.$$

Отже, $$\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

Другий спосіб.

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=\int\limits_0^{1}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)}\cdot\frac{dx}{x}+\int\limits_1^{\infty}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Оскільки

$$\int_0^1 \frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)}\cdot\frac{dx}{x}=\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{t},\\ dx&=-\frac{dt}{t^2}\end{aligned}\right\}=\int_1^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{t^{\beta}}-\frac{1}{t^{\alpha}}\right)\frac{dt}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{t^{\beta}}\right)\frac{1}{t}}=\int_1^{\infty}\frac{\left(t^{\alpha}-t^{\beta}\right)}{\left(1+t^{\alpha}\right)\left(1+t^{\beta}\right)}\cdot\frac{dt}{t},$$

то $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=0$ за умови, що $\alpha,\beta>0$.

Відповідь: 0.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx$, $m>0$.

Розв'язання. Очевидно, що даний невласний інтеграл є збіжним. Зведемо його до інтеграла по відрізку $[0;1]$:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx=\int_0^{1}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx+\int_1^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx,$$

$$\int_1^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx=\left\{x=\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2}\right\}=-\int_1^{0}\frac{t^{-m}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(t^{-2(m+1)}+1\right)}dt=\int_0^{1}\frac{t^m\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{2(m+1)}+1}dt=$$

$$=\int_0^{1}\frac{t^m\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t\right)}{t^{2(m+1)}+1}dt=-\int_0^{1}\frac{t^m\operatorname{arctg}t}{t^{2(m+1)}+1}dt+\frac{\pi}{2}\int_0^{1}\frac{t^m}{t^{2(m+1)}+1}dt \text{ й}$$

$$\int_0^{1}\frac{t^m}{t^{2(m+1)}+1}dt=\frac{1}{m+1}\int_0^{1}\frac{d\left(t^{m+1}\right)}{t^{2(m+1)}+1}=\frac{1}{m+1}\operatorname{arctg}t^{m+1}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4(m+1)}.$$

Отже, $$\int_0^{\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{x^{2(m+1)}+1}dx=\frac{\pi^2}{8(m+1)}.$$

Відповідь: $\frac{\pi^2}{8(m+1)}$.

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язання. Зазначимо, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Тому підінтегральна функція, доозначена одиницею в точці $x=0$, буде неперервною для всіх $x\ge 0$, а тому й інтегровна, зокрема, на відрізку $[0;1]$. Тому питання збіжності заданого інтеграла рівносильне питанню про збіжність інтеграла

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Для дослідження його на збіжність виконаємо інтегрування частинами:

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\frac{1}{x}, & dv=\sin x dx,\\ du=-\frac{dx}{x^2}, & v=-\cos x\end{array}\right\}=-\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^{\infty}-\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Оскільки $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, то за порівняльною ознакою інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ збігається абсолютно, а тому й просто збігається. Таким чином, заданий інтеграл збігається.

Відповідь: збігається.

Приклад 16. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\pi}^{b}\frac{\cos x}{x}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\frac{1}{x}, & dv=\cos x dx,\\ du=-\frac{dx}{x^2}, & v=\sin x\end{array}\right\}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\pi}^{b}+$$

$$+\lim_{b\to\infty}\int_{\pi}^{b}\frac{\sin x}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin b}{b}-\frac{\sin\pi}{\pi}+\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx.$$

Оскільки $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ збігається, то за порівняльною ознакою інтеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ також збігається, а тому й заданий інтеграл збігається.

Відповідь: збігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty}(-1)^{\left[x^2\right]}dx$, де $[x]$ – ціла частина x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Розв'язання. Зміна знаку підінтегральної функції відбувається при переході через точки виду $x=\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}$. Оскільки відстань між сусідніми точками такого виду прямує до нуля при $n\to\infty$, то достатньо дослідити поведінку інтеграла

$$\int_0^{\sqrt{n}} (-1)^{\left[x^2\right]} dx = 1-\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}},$$

яка, очевидно, має скінченну границю при $n \to \infty$, тобто інтеграл збігається.

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 18. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \sin x \cdot \sin x^2 dx$.

Розв'язання. Збіжність інтеграла не зміниться, якщо нижню границю замінити на 1.

$$\int\limits_1^{\infty} \sin x \cdot \sin x^2 dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{2x} \sin x^2 dx^2 = \left\{ \begin{array}{ll} dv = \sin x^2 dx^2, & v = -\cos x^2, \\ u = \dfrac{\sin x}{2x}, & du = \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^2} dx \end{array} \right\} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{\sin x}{2x} \cos x^2 \Big|_1^b + \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2} \cos x^2 dx = \frac{\sin 2}{4} + \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\cos x}{2x} \cos x^2 dx -$$

$$- \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\sin x}{2x^2} \cos x^2 dx.$$

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{2x^2} \cos x^2 dx$ збігається абсолютно за порівняльною ознакою. Залишилося дослідити перший інтеграл у правій частині останньої рівності:

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\cos x}{2x} \cos x^2 dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\cos x}{4x^2} \cos x^2 dx^2 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} dv = \cos x^2 dx^2, & v = \sin x^2, \\ u = \dfrac{\cos x}{4x^2}, & du = -\dfrac{x\sin x + 2\cos x}{4x^3} dx \end{array} \right\} = \lim_{b\to\infty} \frac{\cos x}{4x^2} \sin x^2 \Big|_1^b -$$

$$- \int\limits_1^{\infty} \frac{x\sin x + 2\cos x}{4x^3} \sin x^2 dx = -\frac{\sin 2}{8} - \int\limits_1^{\infty} \frac{x\sin x + 2\cos x}{4x^3} \sin x^2 dx.$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\sin x + 2\cos x}{4x^3} \sin x^2 dx$ за порівняльною ознакою абсолютно збігається, то і заданий інтеграл також абсолютно збігається.

Відповідь: інтеграл абсолютно збігається.

Приклад 19. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^{\alpha}\left(x^2+1\right)} dx$.

Розв'язання. Особливі точки $x=0$ і $x=\infty$.

$x=0$: $$\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^{\alpha}\left(x^2+1\right)} \sim \frac{2x}{x^{\alpha}} = \frac{2}{x^{\alpha-1}}.$$

Із умови збіжності $\alpha-1<1$ випливає, що $\alpha<2$.

$x=\infty$: $$\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^{\alpha}\left(x^2+1\right)} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{\alpha+2}}.$$

Умова збіжності $\alpha+2>1$, тобто $\alpha>-1$. Отже, заданий інтеграл збігається тільки при $-1<\alpha<2$.

Відповідь: інтеграл збігається при $-1<\alpha<2$ і розбігається при інших α.

Приклад 20. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Запишемо заданий інтеграл, як суму двох інтегралів:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx$$

і дослідимо кожний з них на збіжність окремо.

Розглянемо спочатку невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx$.

Скористаємося наслідком з теореми 2 (с. 81). Нехай

$$f(x)=\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}, \varphi(x)=\frac{1}{x^3}.$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається і $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{\sqrt{x}} = 0$, то невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}} dx$ теж збігається.

Розглянемо тепер інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}dx$. Це невласний інтеграл другого роду. Оскільки при $x\to 0+$ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}=+\infty$, то скористаємося теоремою 2 (с. 81) для невласних інтегралів другого роду. Нехай $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^3\right)\sqrt{x}}{x^3\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3}=1$, а інтеграл $\int\limits_0^1\varphi(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^3\sqrt{x}}dx$ теж збігається.

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

Приклад 21. За умови $a>0$ обчислити інтеграли

$$I_1=\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx dx,\ I_2=\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx dx.$$

Розв'язання. Помножимо I_2 на уявну одиницю і додамо I_1:

$$I_1+i\cdot I_2=\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\left(\cos bx+i\sin bx\right)dx=\int\limits_0^{\infty}e^{(-a+ib)x}dx=\left.\frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\right|_0^{\infty}=$$

$$=\left.\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a-ib)(\cos bx+i\sin bx)\right|_0^{\infty}=$$

$$=\left.\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left[(b\sin bx-a\cos bx)-i(a\sin bx+b\cos bx)\right]\right|_0^{\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Отже, $$I_1=\frac{a}{a^2+b^2},\quad I_2=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Відповідь: $I_1=\frac{a}{a^2+b^2}$, $I_2=\frac{b}{a^2+b^2}$.

Приклад 22. При якому значенні параметра $a\in(0;\infty)$ площа фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{a^2}{\left(a^2+1\right)\left(x^2+2ax+2a^2\right)}$ та віссю Ox, буде найбільшою і чому дорівнювати?

Розв’язання

$$S=\frac{a^2}{a^2+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+a)^2+a^2}=\left\{\begin{array}{l} x+a=t, \\ dx=dt \end{array}\right\}=\frac{a^2}{a^2+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=2\frac{a^2}{a^2+1}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi a}{a^2+1}.$$

Отже, $\quad S(a)=\dfrac{\pi a}{a^2+1}$, $S'(a)=\dfrac{a^2+1-2a^2}{\left(a^2+1\right)^2}\pi=\dfrac{1-a^2}{\left(a^2+1\right)^2}\pi$.

Оскільки $S(a)$ зростає на проміжку $[0;1]$ і спадає на проміжку $[1;\infty)$, то найбільше значення $S(a)$ набуває в точці $a=1$, тобто $S(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: найбільше значення $\dfrac{\pi}{2}$ при $a=1$.

Приклад 23. Обчислити $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$, якщо відомо, що $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Розв’язання. Оскільки $\left|e^{-x}\right|<1$, то $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}$.

Тоді

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx=\lim_{\substack{b\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{x^3}{1-e^{-x}}\cdot\frac{dx}{e^x}=\lim_{\substack{b\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{b}x^3\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}\frac{dx}{e^x}=\lim_{\substack{b\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{b}\sum_{k=0}^{\infty}x^3e^{-(k+1)x}dx.$$

Оскільки отриманий ряд збігається рівномірно, то його можна почленно інтегрувати:

$$I=\lim_{\substack{b\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{b}x^3e^{-(k+1)x}dx.$$

Тричі проінтегрувавши частинами, знаходимо заданий інтеграл:

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^4}=\frac{\pi^4}{15}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{\pi^4}{15}$.

Приклад 24. Довести рівність $\displaystyle\int_0^{\infty}f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\int_0^{\infty}f\left(\sqrt{x^2+4a}\right)dx$, $a>0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x+\frac{a}{x}=\sqrt{t^2+4a}$, згідно з якою:

$$t^2=x^2+2a+\frac{a^2}{x^2}-4a=\left(x-\frac{a}{x}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t=x-\frac{a}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-tx-a}{x}=0,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2+4a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}\right)dt, \quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Тоді, враховуючи отримані співвідношення, після очевидних перетворень отримаємо

$$\int_0^{\infty} f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4a}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f\left(\sqrt{t^2+4a}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}\right)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f\left(\sqrt{t^2+4a}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}\right)dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} t=-z, & t=0 \Rightarrow z=0, \\ dt=-dz, & t\to-\infty \Rightarrow z\to+\infty \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{z^2+4a}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+4a}}\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{t^2+4a}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}\right)dt=\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{x^2+4a}\right)dx,$$ що і треба було довести.

Приклад 25. Довести збіжність і знайти значення невласного інтеграла

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx,\ a>0.$$

Розв'язання. Оскільки $I=\int_0^{1}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx+\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$, то для доведення збіжності заданого невласного інтеграла достатньо довести збіжність інтегралів

$$I_1=\int_0^{1}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx,\ I_2=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx.$$

Нехай $0<\alpha<1$. Тоді $\frac{\ln x}{x^2+a^2}:\frac{1}{x^{\alpha}}=\frac{x^{\alpha}\ln x}{x^2+a^2}\to 0$, якщо $x\to 0$.

Якщо ж $1<\alpha<2$, то $\frac{\ln x}{x^2+a^2}:\frac{1}{x^{\alpha}}=\frac{x^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\ln x}{x^{2-\alpha}}\to 0$, коли $x\to\infty$.

Тому за порівняльною ознакою інтеграли I_1 і I_2 збігаються. Отже, збігається і заданий інтеграл. Знайдемо його значення.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx=\left\{\begin{array}{l} x=at,\\ dx=adt\end{array}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{\ln t+\ln a}{t^2+1}dt=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt+\ln a\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\left(\int_0^{1}\frac{\ln t}{t^2+1}dt+\int_1^{\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt+\ln a\cdot\operatorname{arctg}t\Big|_0^{\infty}\right)=\frac{\pi}{2a}\ln a,$$

оскільки $\int_1^{\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt=\left\{t=\frac{1}{z},\quad dt=-\frac{dz}{z^2}\right\}=\int_1^{0}\frac{\ln z}{z^2\left(\frac{1}{z^2}+1\right)}dz=-\int_0^{1}\frac{\ln z}{z^2+1}dz.$

Відповідь: $I=\frac{\pi}{2a}\ln a$.

Приклад 26. Довести, що $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\left\{\begin{array}{ll} x=-\frac{1}{t}, & x=0\Rightarrow t\to\infty,\\ dx=-\frac{dt}{t^2} & x\to\infty\Rightarrow t=0\end{array}\right\}=\int_0^{\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4},$$

то перша частина твердження доведена.

Враховуючи, що

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}}+\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right),\text{ то}$$

$$2I=\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}}+\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right]dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}+\operatorname{arctg}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}\right]\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $I=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, що і треба було довести.

Приклад 27. При яких $a>0$ і $b>0$ збігається невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty}\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}dx\,?$$

Розв’язання. Перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}=\frac{1}{b^2}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+x\right)=\frac{x^2}{b^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{2x^2}+\frac{a^4}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\left(2+\frac{b^2}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2+a^4}{4b^2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Якщо $a\neq b$, то $\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}\sim\ln\frac{a^2}{b^2}\neq 0$ й інтеграл розбігається.

Якщо $a=b$, то $\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}\sim\ln\left(1+\frac{a^2}{2x^2}+0\cdot\frac{1}{x^2}\right)\sim\frac{a^2}{2x^2}$.

Оскільки інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ збігається, то збігається і $\int\limits_a^{+\infty}\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}dx$.

Відповідь: інтеграл збігається при $a=b$.

Приклад 28. Знайти всі функції $f(x)$ такі, що для будь-якого $x\in\mathbf{R}$

$$f''(x)=f(x)\int\limits_0^{\infty}f(x)dx\ . \tag{1}$$

Розв’язання. Позначимо

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)dx=k\ . \tag{2}$$

Тоді $f(x)$ – розв’язок лінійного однорідного рівняння $y''-ky=0$.

Якщо $k>0$, то $f(x)=C_1e^{-\sqrt{k}x}+C_2e^{\sqrt{k}x}$ задовольняє рівняння (1) за умови виконання (2). Але тоді $C_2=0$ і рівність (2) набуває такого вигляду:

$$-\frac{1}{\sqrt{k}}C_1e^{-\sqrt{k}x}\Big|_0^{\infty}=k \text{ або } C_1=k\sqrt{k}\ .$$

Отже, при будь-якому $k>0$ $f(x)=k\sqrt{k}e^{-\sqrt{k}x}$ – розв’язок заданого рівняння.

Якщо $k=0$, то $f(x)=ax+b$ і рівність (2) виконується тільки при $a=b=0$, тобто $f(x)\equiv 0$.

Якщо $k<0$, то $f(x)=C_1\cos\sqrt{-k}x+C_2\sin\sqrt{-k}x$ і рівність (2) неможлива через розбіжність інтеграла.

Позначимо $a=\sqrt{k}$. Тоді всі розв’язки заданого рівняння мають вигляд

$$f(x)=a^3e^{-ax},\ a\geq 0.$$

Відповідь: $f(x)=a^3e^{-ax}$, $a\geq 0$.

Приклад 29. Довести збіжність $I=\int\limits_0^{\infty}\cos x^2dx$.

Розв'язання

$$\int\limits_0^{\infty}\cos x^2dx=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx+\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty}\cos x^2dx.$$

Доведемо збіжність другого інтеграла.

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty}\cos x^2dx=\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{t},\\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\end{array}\right\}=\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt=\left\{\begin{array}{ll} u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, & du=-\dfrac{dt}{2\sqrt{t^3}},\\ dv=\cos t\,dt, & v=\sin t\end{array}\right\}=\left.\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\right|_{\pi}^{\infty}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t^3}}dt=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t^3}}dt.$$

Оскільки для $t\geq\pi$ $\left|\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}\right|\leq\dfrac{1}{t^{3/2}}$, то $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t^3}}dt$ збігається, а тому $\int\limits_0^{\infty}\cos x^2dx$ теж збігається.

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 30. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx.$$

Розв'язання. Особливі точки $x=0$ і $x=\infty$.

$x=0$: в околі точки $x=0$ підінтегральна функція додатна, оскільки $\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то інтеграл за порівняльною ознакою збігається абсолютно.

$x=\infty$: $\left|\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. Інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}$ збігається. За порівняльною ознакою $\int\limits_1^{\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|dx$ також збігається.

Отже, заданий інтеграл збігається абсолютно.

Відповідь: абсолютно збігається.

§ 5. Застосування теорії лишків при обчисленні інтегралів від функцій дійсної змінної

5.1. Обчислення лишків

Нехай $z = a$ – скінченна особлива точка однозначної аналітичної функції $f(z)$. Тоді в будь-якому околі точки a: $0 < |z - a| < R$ функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Лорана, коефіцієнти якого знаходяться за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots),$$

де $\Gamma: |z - a| = \rho$, $0 < \rho < R$ – коло радіусом ρ з центром у точці a. Дуже важливу роль у розкладі функції $f(z)$ в ряду Лорана відіграє коефіцієнт

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

Лишком однозначної аналітичної функції $f(z)$ у скінченній ізольованій особливій точці a (позначається $\operatorname{res} f(a)$) називається коефіцієнт c_{-1} в її ряді Лорана в околі точки a, тобто $\operatorname{res} f(a) = c_{-1}$.

З означення лишка випливає, що якщо точка a – точка аналітичності або усувна особлива точка функції $f(z)$, то $\operatorname{res} f(a) = 0$.

Якщо точка a – полюс, то для знаходження лишку необов'язково розкладати функцію в ряд Лорана.

Якщо точка a – полюс n-го порядку, то лишок знаходиться за формулою

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z), \tag{1}$$

звідки при $n = 1$ маємо

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a}(z-a) f(z). \tag{2}$$

Якщо ж функція $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ аналітичні в точці a і $\psi(a) = 0$, $\psi'(0) \neq 0$, а $\varphi(a) \neq 0$, тобто a – простий полюс функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3}$$

Лишки знайшли численні застосування не тільки при обчисленні інтегралів від функцій комплексної змінної, але і при обчисленні деяких визначених інтегралів від функцій дійсної змінної, причому часто вдається достатньо просто отримати відповідь у тих випадках, коли застосування методів математичного аналізу виявляється проблематичним, тобто призводить до значних ускладнень.

Застосування теорії лишків базується на основній теоремі про лишки: нехай Γ – замкнута гладка крива, яка обмежує область G, а функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{G}$, крім скінченного числа ізольованих особливих точок $z_k \in G$, $k = 1, 2 \ldots n$. Тоді

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

5.2. Обчислення визначених інтегралів

За допомогою теорії лишків можна обчислювати інтеграли виду

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{4}$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція відносно аргументів u і v, причому $R(\cos x, \sin x)$ – неперервна на відрізку $[0; 2\pi]$. Інтеграл такого виду зводиться до інтеграла від функції комплексної змінної по колу $|z| = 1$. Для цього зробимо заміну змінної інтегрування $z = e^{ix}$, тоді

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \\ \sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right), \end{cases} \qquad dx = \frac{dz}{iz}. \tag{5}$$

При зміні x від 0 до 2π точка $z = e^{ix}$ опише коло $|z| = 1$ в додатному напрямку. Таким чином, інтеграл (4) зводиться до інтеграла по контуру $|z| = 1$ від функції комплексної змінної:

$$I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right]\frac{dt}{z} = \oint_{|z|=1} \Phi(z)\,dz,$$

де $\Phi(z) = \dfrac{1}{iz} R\left[\dfrac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \dfrac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right]$ – раціональна функція. За основною теоремою про лишки отримуємо:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} \Phi(z_k). \tag{6}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$.

Розв’язання. Після заміни змінної (5) отримаємо

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \dfrac{z^2 + 1}{2z}\right)^2} \times \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(z^2 + 4z + 1\right)^2}.$$

Підінтегральна функція має дві особливі точки: $z_1 = -2+\sqrt{3}$ та $z_2 = -2-\sqrt{3}$ – полюси другого порядку, але всередині контуру інтегрування знаходиться лише точка $z_1 = -2+\sqrt{3}$. Тоді за формулою (6)

$$I = 8\pi \operatorname{res} f\left(-2+\sqrt{3}\right).$$

Оскільки

$$\operatorname{res} f\left(-2+\sqrt{3}\right) = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z+2\sqrt{3}\right)^2}\right) = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{2+\sqrt{3}-z}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{18},$$

то остаточно маємо $I = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Відповідь: $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Розв’язання. Оскільки

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$

$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x,$$

то після заміни $e^{ix} = z$ отримаємо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-3\sin^2 x\cos^2 x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{1+3\frac{\left(z^4-1\right)^2}{16z^4}}\frac{dz}{iz} = \frac{16}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{3z^8+10z^4+3}.$$

Підінтегральна функція $\Phi(z)$ має полюси першого порядку тільки в тих точках, у яких $z^4 = -\frac{1}{3}$ або $z^4 = -3$. В крузі $|z|<1$ містяться лише чотири полюси:

$$z_k = \left(\sqrt[4]{-1/3}\right)_k,\ k = 0,1,2,3.$$

Обчислимо лишки в цих точках за формулою (3):

$$\operatorname{res}\Phi\left(z_k\right)=\frac{z_k^3}{24z_k^7+40z_k^3}=\frac{1}{24z_k^4+40}=\frac{1}{32},\ k=0,1,2,3.$$

Тоді за формулою (6) отримаємо

$$I=\frac{16}{i}2\pi i\sum_{k=0}^{4}\operatorname{res}\Phi\left(z_k\right)=4\pi .$$

Відповідь: 4π .

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a>b>0$.

Розв'язання. Заміною (5) зведемо заданий інтеграл до інтеграла по колу $|z|=1$ від функції комплексної змінної. Тоді

$$I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{a^2\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-4z^2}+b^2\frac{\left(z^2+1\right)^2}{4z^2}}\frac{dz}{iz}=-\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{a^2\left(z^2-1\right)^2+b^2\left(z^2+1\right)^2}=$$

$$=-\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(a^2-b^2\right)z^4-2\left(a^2+b^2\right)z^2+a^2-b^2}.$$

Підінтегральна функція $\Phi(z)$ має полюси першого порядку тільки в таких точках, у яких $z^2=\frac{a+b}{a-b}$ або $z^2=\frac{a-b}{a+b}$. Оскільки за умовою $a>b$, то $\frac{a+b}{a-b}>1$ і $\frac{a-b}{a+b}<1$. Тому в круг $|z|<1$ попадає лише дві точки: $z_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. Скориставшись рівностями

$$\left(a^2-b^2\right)z_k^4-2\left(a^2+b^2\right)z_k^2=b^2-a^2,\ z_k^2=\frac{a-b}{a+b},$$

обчислимо лишки в цих полюсах за формулою (3):

$$\operatorname{res}\Phi\left(z_k\right)=\frac{z_k}{4\left(a^2-b^2\right)z_k^3-4\left(a^2+b^2\right)z_k}=\frac{z_k^2}{4\left(a^2-b^2\right)z_k^4-4\left(a^2+b^2\right)z_k^2}=$$

$$=\frac{a-b}{(a+b)\left(2\left(a^2-b^2\right)z_k^4+4\left(a^2+b^2\right)z_k^2+2\left(a^2-b^2\right)z_k^4\right)}=$$

$$=\frac{a-b}{(a+b)\left[2\left(b^2-a^2\right)+2\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]}=\frac{a-b}{2(a+b)\left(a^2-b^2\right)\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-1\right]}=$$

$$=-\frac{(a+b)^2}{2(a+b)^2\,4ab}=-\frac{1}{8ab}.$$

Скориставшись формулою (6), отримаємо

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=-\frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{2}\operatorname{res}\Phi\left(z_k\right)=-8\pi\left(-\frac{1}{4ab}\right)=\frac{2\pi}{ab}.$$

Відповідь: $\frac{2\pi}{ab}$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi}\sin^{2n}xdx$.

Розв'язання. Враховуючи періодичність (період π) функції $\sin^{2n}x$ і заміну (5), отримаємо

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}xdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}xdx=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2n}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}=\frac{(-1)^n}{2i\cdot 2^{2n}}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}dz.$$

Функція $\Phi\left(z\right)=\frac{\left(z^2-1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}$ в крузі $|z|<1$ має єдину ізольовану особливу точку $z=0$ – полюс $2n+1$ порядку. Для обчислення лишка функції $\Phi(z)$ в точці $z=0$ розкладемо її по степеням z, скориставшись біномом Ньютона:

$$(u+v)^n=u^n+nu^{n-1}v+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{n-k}v^k+\ldots+v^n,$$

$$\Phi\left(z\right)=\frac{1}{z^{2n+1}}\left(z^2-1\right)^{2n}=\frac{1}{z^{2n+1}}\left[\left(z^2\right)^{2n}-2n\left(z^2\right)^{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{2!}\left(z^2\right)^{2n-2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+(-1)^n\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}\left(z^2\right)^n+\ldots\right].$$

Звідси знаходимо, що

$$c_{-1}=(-1)^n\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Тому, враховуючи рівність $c_{-1}=\operatorname{res}\ \Phi\left(0\right)$, за формулою (6) маємо

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}xdx=\frac{(-1)^n}{2i\cdot 2^{2n}}2\pi\operatorname{res}\Phi\left(0\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n)}{(2\cdot 4\ldots 2n)(2\cdot 4\ldots 2n)}\pi=$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

Відповідь: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$.

Зауваження: Лишок $\operatorname{res}\Phi(0)$ можна знайти і за формулою (1):

$$\operatorname{res} F(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left(z^2-1\right)^{2n}=(-1)^n\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

оскільки $\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left(z^2-1\right)^{2n}\Big|_{z=0}$ – коефіцієнт при z^{2n} в розкладі бінома $\left(z^2-1\right)^{2n}$. Використовуючи цю рівність, інтеграл $\oint\limits_{|z|=1}F(z)\,dz$ можна обчислити і за інтегральною формулою Коші:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\cdot\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left(z^2-1\right)^{2n}\Big|_{z=0}=(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\pi i.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$, $n\in\mathbf{N}$.

Розв'язання. Скориставшись рівністю $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, запишемо шуканий інтеграл у такому вигляді:

$$I=\operatorname{Re}\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\left[\cos(\sin\varphi-n\varphi)+i\sin(\sin\varphi-n\varphi)\right]d\varphi=\operatorname{Re}\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}e^{i(\sin\varphi-n\varphi)}d\varphi=$$

$$=\operatorname{Re}\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi+i\sin\varphi}e^{-in\varphi}\,d\varphi=\left\{\begin{array}{l}z=e^{i\varphi},\\ d\varphi=\dfrac{dz}{iz}\end{array}\right\}=\operatorname{Re}\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz.$$

Точка $z=0$ – полюс $n+1$ порядку для функції $F(z)=\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$. Знайдемо лишок функції $F(z)$ у точці $z=0$ за формулою (1):

$$\operatorname{res}F(0)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}(e)^z=\frac{1}{n!}.$$

Застосовуючи основну теорему про лишки, отримаємо

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi=\operatorname{Re}\left[2\pi\operatorname{res}F(0)\right]=\frac{2\pi}{n!}.$$

Звідки, крім того, випливає, що $\int\limits_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi=0$.

Відповідь: $\dfrac{2\pi}{n!}$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(17+8x)\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл не належить до інтегралів розглянутого виду, але заміною $x=\cos\varphi$, враховуючи парність отриманої підінтегральної функції, зводиться до нього:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(17+8x)\sqrt{1-x^2}}=\left\{\begin{array}{l} x=\cos\varphi, \\ dx=-\sin\varphi\, d\varphi, \\ \sqrt{1-x^2}=\sin\varphi, \end{array}\quad \begin{array}{l} x=-1\Rightarrow \varphi=\pi, \\ x=1\Rightarrow \varphi=0 \end{array}\right\}=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{17+8\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{17+8\cos\varphi}.$$

Після заміни (5) у цьому інтегралі отримаємо

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{17+8\cos\varphi}=\left\{\begin{array}{l} z=e^{i\varphi}, \quad d\varphi=\frac{dz}{iz}, \\ \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \end{array}\right\}=\frac{1}{8}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left[17+\frac{4\left(z^2+1\right)}{z}\right]}\cdot\frac{dz}{iz}=$$

$$=\frac{1}{8i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^2dz}{z^2\left(4z^2+17z+4\right)}.$$

Особливими точками підінтегральної функції $\Phi(z)$ будуть точки: $z=0$ – полюс другого порядку, $z=-\frac{1}{4}$, $z=-4$ – прості полюси. В круг $|z|<1$ попадають лише точки $z=0$ і $z=-\frac{1}{4}$. Тому за формулою (6) маємо

$$I=\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{res}\Phi(0)+\operatorname{res}\Phi\left(-\frac{1}{4}\right)\right].$$

Обчислимо лишки в цих точках за формулами (1) та (2) відповідно:

$$\operatorname{res}\Phi(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(z^2+1\right)^2}{4z^2+17z+4}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z\left(z^2+1\right)\left(4z^2+17z+4\right)-(8z+17)\left(z^2+1\right)^2}{\left(4z^2+17z+4\right)^2}=-\frac{17}{16},$$

$$\operatorname{res}\Phi\left(-\frac{1}{4}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{4}}\frac{\left(z^2+1\right)^2}{4z^2(z+4)}=\frac{17^2}{16\cdot 15}.$$

Отже, $$I=\frac{17\pi}{4\cdot 16}\left(\frac{17}{15}-1\right)=\frac{17\pi}{480}.$$

Відповідь: $\frac{17\pi}{480}$.

5.3. Обчислення невласних інтегралів

Розглянемо невласні інтеграли, при обчисленні яких використовується теорема 1.

Теорема 1. Нехай функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченного числа полюсів z_k, $\operatorname{Im} z_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$ й $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z>0}} zf(z)=0$. Тоді
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k). \tag{7}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Розв’язання. Оскільки підінтегральна функція парна, то $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Функція $f(z)=\frac{z^4+1}{z^6+1}$ задовольняє всі умови теореми 1: має полюси першого порядку в точках $z_k=e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{6}}$, $k=0,1,2,\ldots,5$, серед яких три: $z_0=e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_1=e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_2=e^{\frac{5i\pi}{6}}$ лежать у верхній півплощині. Тоді за формулою (7) маємо
$$I=\pi i\sum_{k=0}^{2}\operatorname{res} f(z_k)=\pi i\sum_{k=0}^{2}\frac{z_k^4+1}{6z_k^5}=-\frac{\pi i}{6}\sum_{k=0}^{2}\left(z_k^5+z_k\right)=-\frac{\pi i}{6}\sum_{k=0}^{2}\left(-\frac{1}{z_k}+z_k\right)=$$
$$=\frac{\pi i}{6}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{z_k}-z_k\right)=\frac{\pi i}{6}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}-e^{\frac{i\pi}{6}}+e^{-\frac{i\pi}{2}}-e^{\frac{i\pi}{2}}+e^{-\frac{5i\pi}{6}}-e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)=\frac{\pi i}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\right.$$
$$\left.-i\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{6}+1\right)=\frac{2}{3}\pi.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^8+1}$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{z^8+1}$ задовольняє всі умови, при виконанні яких можна застосовувати теорему 1. Оскільки

$$\sqrt[8]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{8}=e^{i\frac{\pi+2k}{8}},\ k=0,1,2,\ldots 7,$$

то серед восьми простих полюсів функції $f(z)$ тільки чотири лежать у верхній півплощині: $z_0=e^{i\frac{\pi}{8}}, z_1=e^{i\frac{3\pi}{8}}, z_2=e^{i\frac{5\pi}{8}}, z_3=e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Оскільки за формулою (3) $\operatorname{res} f(z_k)=\frac{1}{8z_k^7}=-\frac{z_k}{8}$, то, враховуючи парність функції $\frac{1}{z^8+1}$, рівності

$$\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}=-\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8},\ \cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},$$

за формулою (7) отримаємо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^8+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^8+1}=\pi i\sum_{k=0}^{3}\operatorname{res} f(z_k)=-\frac{\pi i}{8}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{i\frac{3\pi}{8}}+e^{i\frac{5\pi}{8}}+e^{i\frac{7\pi}{8}}\right)=$$

$$=-\frac{\pi i}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=-\frac{\pi i}{8}\left(2i\sin\frac{\pi}{8}+2i\sin\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^{n+1}}$ задовольняє всі вимоги теореми 1 і має у верхній півплощині єдину особливу точки $z=i$ – полюс $n+1$ порядку. За формулою (1) маємо:

$$\operatorname{res} f(i)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{(z-i)^{n+1}}{\left(z^2+1\right)^{n+1}}\right]=\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]=$$

$$=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!}\lim_{z\to i}(z+i)^{-2n-1}=-\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}i=-\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}i.$$

Тоді $$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(i)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi .$$

Відповідь: $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)^2}$ $(a>0, b>0)$.

Розв’язання. Функція $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)^2}$ у верхній півплощині має дві ізольовані особливі точки: $z=ai$ – простий полюс і $z=bi$ – полюс другого порядку. Знайдемо лишки в цих точках відповідно за формулами (2) і (1):

$$\operatorname{res} f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{z-ai}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)^2}=\lim_{z\to ai}\frac{1}{(z+ai)\left(z^2+b^2\right)^2}=\frac{-i}{2a\left(b^2-a^2\right)^2},$$

$$\operatorname{res} f(bi)=\lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-bi)^2}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)^2}\right]=\lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)(z+bi)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to bi}\frac{-2z(z+bi)^2-2(z+bi)\left(z^2+a^2\right)}{\left(z^2+a^2\right)^2(z+bi)^4}=\frac{3b^2-a^2}{4b^3\left(a^2-b^2\right)^2}i.$$

Тоді за формулою (7) отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)^2}=2\pi i\left[\operatorname{res} f(ai)+\operatorname{res} f(bi)\right]=$$

$$=-2\pi\left(\frac{3b^2-a^2}{4b^3\left(a^2-b^2\right)^2}-\frac{1}{2a\left(b^2-a^2\right)^2}\right)=2\pi\frac{a^3-3ab^2+2b^3}{4ab^3\left(a^2-b^2\right)^2}=\frac{(a+2b)\pi}{2ab^3(a+b)^2},$$

бо $$a^3-3ab^2+2b^3=a\left(a^2-b^2\right)-2b^2(a-b)=(a-b)\left(a^2+ab-2b^2\right)=$$

$$=(a-b)\left[(a-b)(a+b)+b(a-b)\right]=(a-b)^2(a+2b).$$

Відповідь: $\dfrac{(a+2b)\pi}{2ab^3(a+b)^2}$.

Теорема 2. Нехай $\Phi(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ $(\alpha > 0)$ і виконуються такі умови:

1) функція $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченного числа полюсів z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$ й $k = 1, 2, \ldots, n$;
2) $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f(z) = 0$.

Тоді
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} \Phi(z_k).$$

Якщо функція $f(z)$ на дійсній осі набуває дійсних значень, то мають місце такі формули:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} \Phi(z_k); \qquad (8)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} \Phi(z_k). \qquad (9)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2 - 2x + 5}\,dx$.

Розв'язання. Функція $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 5}$ задовольняє всі вимоги теореми 2. У цієї функції у верхній півплощині один простий полюс $z = 1 + 2i$. Оскільки $\Phi(z) = \dfrac{e^{i5z}}{z^2 - 2z + 5}$, то, користуючись формулами (8) і (3), отримаємо

$$I = -2\pi \operatorname{Im} \operatorname{res} \Phi(1+2i) = -2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i5z}}{2z - 2} \right)\Bigg|_{z=1+2i} = -2\pi \operatorname{Im} \frac{e^{-10+5i}}{4i} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} e^{-10}(-\sin 5 + i\cos 5) = \frac{\pi}{2} e^{-10}\cos 5.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} e^{-10}\cos 5$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 \sin\alpha x}{\left(1 + x^2\right)^2}\,dx$.

Розв'язання. Враховуючи непарність функції $f(x) = \dfrac{x^3}{\left(1 + x^2\right)^2}$, маємо

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin\alpha x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im}z\ge 0}} f(z)=0$ і $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком точки $z=i$, у якій вона має полюс другого порядку, то, застосовуючи формули (9) і (1), отримаємо

$$I=\pi\operatorname{Re}\Phi(i)=\pi\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3e^{i\alpha z}(z-i)^2}{\left(1+z^2\right)^2}\right)=\pi\operatorname{Re}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3e^{i\alpha z}}{(z+i)^2}\right)=$$

$$=\pi\operatorname{Re}\lim_{z\to i}\frac{\left(3z^2e^{i\alpha z}+i\alpha z^3e^{i\alpha z}\right)(z+i)^2-2(z+i)z^3e^{i\alpha z}}{(z+i)^4}=$$

$$=\pi\operatorname{Re}\lim_{z\to i}\frac{z^2e^{i\alpha z}\left[(3+i\alpha z)(z+i)-2z\right]}{(z+i)^3}=$$

$$=\pi\operatorname{Re}\lim_{z\to i}\frac{z^2e^{i\alpha z}\left[i\alpha z^2+(1-\alpha)z+3i\right]}{(z+i)^3}=\frac{\pi}{4}e^{-\alpha}(2-\alpha).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}e^{-\alpha}(2-\alpha)$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)^2}dx$.

Розв'язання. Для функції $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)^2}$ виконуються всі умови теореми 2. В точках $z=i$ й $z=2i$ вона має відповідно полюси першого і другого порядку. В цих точках за формулами (2) і (1) знайдемо лишки для функції

$$\Phi(z)=\frac{e^{i\alpha z}}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)^2}:\ \operatorname{res}\Phi(i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)\left(z^2+4\right)^2}=-\frac{e^{-\alpha}}{18}i,$$

$$\operatorname{res}\Phi(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{\left(z^2+1\right)(z+2i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{i\alpha e^{i\alpha z}\left(z^2+1\right)(z+2i)^2-e^{i\alpha z}\left[2z(z+2i)^2+2(z+2i)\left(z^2+1\right)\right]}{\left(z^2+1\right)^2(z+2i)^4}=$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{e^{i\alpha z}\left[i\alpha\left(z^2+1\right)(z+2i) - 4z^2 - 4iz - 2\right]}{\left(z^2+1\right)^2 (z+2i)^3} = \frac{e^{-2\alpha}(6\alpha+11)}{288} i .$$

Далі, застосовуючи формулу (8), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)^2} dx = -2\pi \operatorname{Im}\left[\operatorname{res}\Phi(i) + \operatorname{res}\Phi(2i)\right] = \frac{\pi e^{-\alpha}}{144}\left[16 - e^{-\alpha}(6\alpha+11)\right].$$

Відповідь: $\frac{\pi e^{-\alpha}}{144}\left[16 - e^{-\alpha}(6\alpha+11)\right]$.

Теорема 3. Нехай $\Phi(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ $(\alpha > 0)$, а функція $f(z)$ має такі властивості:

1) аналітична у верхній півплощині, крім скінченного числа полюсів z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
2) аналітична у всіх точках дійсної осі, крім точок a_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, які є простими полюсами;
3) $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f(z) = 0$.

Тоді $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\Phi(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\Phi(a_k)\right),$$

де інтеграл розглядається в розумінні головного значення за Коші відносно точок a_k та ∞.

Якщо функція $f(z)$ на дійсній осі набуває дійсних значень, то мають місце такі формули:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx = -2\pi \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\Phi(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\Phi(a_k)\right); \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\Phi(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\Phi(a_k)\right). \quad (11)$$

Нагадаємо, що якщо функція $f(x)$ не має особливих точок на дійсній осі, то невласний інтеграл з нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

де граничні переходи по a і b не залежать один від одного. У випадку, коли ця границя не існує, розглядають границю того самого виразу в припущенні, що

$-a=b\to\infty$. Якщо ця границя існує, то вона називається головним значенням невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ за Коші та позначається символом

$$\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ має лише одну особливу точку c на відрізку $[a;b]$ і інтегровна в кожній його частині, що не містить точку c, то невласний інтеграл від a до b визначається рівністю

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 0+}}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right),$$

де граничні переходи по ε і δ незалежні.

У випадку, коли ця границя не існує, розглядають границі в припущенні, що $\delta=\varepsilon\to 0+$. Якщо границя існує, то вона називається головним значенням інтеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ за Коші та позначається символом

$$\text{V.P.}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{\left(x^2+1\right)(x-2)}$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)(z-2)}$ має у верхній півплощині один полюс першого порядку $z=i$ й на дійсній осі особливу точку $z=2$ – полюс першого порядку. Оскільки функція $f(z)$ задовольняє всі умови теореми 3, то за формулою (11) отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{\left(x^2+1\right)(x-2)}=2\pi\,\text{Re}\left(\text{res}\,\Phi(i)+\frac{1}{2}\text{res}\,\Phi(2)\right)=$$

$$=2\pi\,\text{Re}\left(\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-2)}+\frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right)=2\pi\,\text{Re}\left(\frac{e^{-1}}{2i(i-2)}+\frac{e^{2i}}{10}\right)=$$

$$=2\pi\,\text{Re}\left(-\frac{e^{-1}}{2(1+2i)}+\frac{e^{2i}}{10}\right)=2\pi\,\text{Re}\left(\frac{-e^{-1}+\cos 2+i\left(2e^{-1}+\sin 2\right)}{10}\right)=\frac{\pi}{5}\left(\cos 2-e^{-1}\right).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{5}\left(\cos 2-e^{-1}\right)$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)^2} dx$, $(\beta > 0, \alpha > 0)$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+\alpha^2\right)}$ у верхній півплощині має полюс другого порядку в точці $z=\alpha i$, а на дійсній осі – полюс першого порядку $z=0$. За формулами (1) і (2) відповідно знайдемо лишки в цих точках для функції $\Phi(z)=\frac{e^{i\beta z}}{z\left(z^2+\alpha^2\right)}$.

$$\operatorname{res}\Phi(\alpha i)=\lim_{z\to\alpha i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\beta z}}{z(z+\alpha i)^2}\right)=\lim_{z\to\alpha i}\frac{e^{i\beta z}\left(i\beta z(z+\alpha i)-3z-\alpha i\right)}{z^2(z+\alpha i)^3}=$$

$$=\frac{-2\alpha(\alpha\beta+2)e^{-\alpha\beta}i}{8\alpha^5 i}=\frac{-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4\alpha^4},$$

$$\operatorname{res}\Phi(0)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{i\beta z}}{\left(z^2+\alpha^2\right)^2}=\frac{1}{\alpha^4}.$$

Враховуючи парність підінтегральної функції і значення лишків $\operatorname{res}\Phi(\alpha i)$ та $\operatorname{res}\Phi(0)$, за формулою (11) знайдемо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx=\pi\operatorname{Re}\left(\operatorname{res}\Phi(\alpha i)+\frac{1}{2}\operatorname{res}\Phi(0)\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2\alpha^4}-\frac{e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4\alpha^4}\right)=\frac{2-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4a^4}.$$

Відповідь: $\frac{2-e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta+2)}{4a^4}$.

Список літератури

1. Беркович Ф.Д. Задачи математических олимпиад с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий, В.И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 172 с.

2. Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ / М.І. Деркач, О.І. Песчанський, Ю.Є. Обжерін, О.Ф. Хрустальов. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 144 с.

3. Кожухов И.Б. Московские городские олимпиады по математике 1996-2005 гг. / И.Б. Кожухов, В.А. Свентковский, М.В. Соколова. – Москва: Техполиграфцентр, 2010. – 293 с.

4. Ляшко И.И. Математический анализ в примерах и задачах : в 2 ч. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – Киев: Вища школа, 1974. – Ч. 1. – 680 с.

5. Ніколенко В.В. Збірник задач з математики "Математична олімпіада 2014" / В.В. Ніколенко, О.В. Ячменьов. – Суми: СумДУ, 2015. – 40 с.

6. Попов И.Ю. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учеб. пособие / И.Ю. Попов. – Санкт-Петербург: ИТМО, 2008. – 214 с.

7. Сторчай В.Ф. Практикум з теорії функції комплексної змінної / В.Ф. Сторчай. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1995. – 104 с.

8. Сторчай В.Ф. Об интегралах на олимпиадах / В.Ф. Сторчай // Математика и ее приложения – Санкт-Петербург, 2013. – № 4. – С. 138–150.

9. Сторчай В.Ф. Вычисление некоторых определенных и несобственных интегралов с помощью теории вычетов / В.Ф. Сторчай // Математика и ее приложения – Санкт-Петербург, 2015. – № 5. – С. 20–30.

10. Ройтенберг В.И. Задачи студенческих математических олимпиад ДГТУ / В.И. Ройтенберг, Ю.К. Олейникова, Л.А. Сидорова. – Ярославль: ЯГТУ, 2012. – 127 с.

11. Павлова Л.В. Теорія аналітичних функцій / Л.В. Павлова, О.І. Редькіна. – Київ: Вища школа, 1980. – 216 с.

Навчальне видання

Сторчай Володимир Федорович

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ.
НЕВИЗНАЧЕНІ, ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Художнє оформлення М.В. Ларикова

Підписано до друку 23.02.2021. Формат 30 x 42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 6,3
Обл.-вид. арк. 6,3. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.