

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

**ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ  
(класичні методи)**

Методичні рекомендації  
до виконання лабораторних робіт  
для студентів напряму підготовки  
151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Дніпро  
2021



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



**ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ  
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**  
*Кафедра кіберфізичних та інформаційно-вимірювальних систем*

**ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ  
(класичні методи)**

Методичні рекомендації  
до виконання лабораторних робіт  
для студентів напряму підготовки  
151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2021

### **Трипутень М.М.**

Теорія оптимальних систем керування (класичні методи). Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для студентів напряму підготовки 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / М.М. Трипутень, Є.К. Воскобойник ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2021. – 57 с.

Автори:

М.М. Трипутень, канд. техн. наук, доц.;

Є.К. Воскобойник, асист.

Затверджено до видання методичною комісією за спеціальністю 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (протокол № 3 від 10.03.2021) за поданням кафедри кіберфізичних та інформаційно-вимірювальних систем (протокол № 13 від 05.03.2021).

Подано методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з проектування систем автоматизації студентами напряму підготовки 151 Автоматизації та комп'ютерно-інтегровані технології.

Відповідний за випуск завідувач кафедри кіберфізичних та інформаційно-вимірювальних систем В.В. Ткачов, д-р техн. наук, проф.

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1**  
**ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО**  
**КЕРУВАННЯ ЗА КВАДРАТИЧНИМ КРИТЕРІЄМ**  
**(ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД)**

1.1. Мета роботи.

Поглибити знання студентів при вивченні розділу «Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів методом варіаційного числення».

У процесі виконання роботи вони повинні вміти:

- складати функції Лагранжа з урахуванням квадратичного критерію і обмежень типу «рівність» для об'єктів першого і другого порядків;
- складати системи рівнянь Ейлера для розв'язування задачі оптимізації системи автоматичного керування для об'єктів першого і другого порядків;
- визначати оптимальні керувальні впливи для об'єктів першого і другого порядків;
- визначати значення квадратичних критеріїв при оптимальних керувальних впливах для об'єктів першого і другого порядків.

1.2. Вихідні дані

Ними є структурна схема та числові параметри об'єктів керування і функціонала (рис. 1.1, 1.2, табл. 1.1, 1.2), а також ППП Matlab, MATHCAD для розрахунків та моделювання автоматичних систем на ЕОМ.

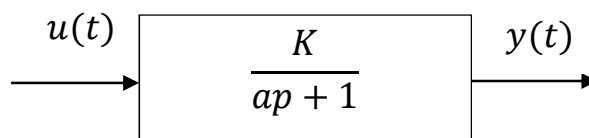


Рис. 1.1 – Структурна схема об'єкта керування першого порядку

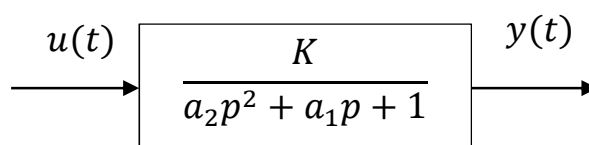


Рис. 1.2 – Структурна схема об'єкта керування другого порядку

Таблиця 1.1 – Вихідні дані для об'єкта керування першого порядку

Варіант №	Об'єкт керування				Функціонал $\int_0^{\infty} (by^2 + cu^2)dt$	
	Параметри		Початковий стан		$b$	$c$
	$k$	$a$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$		
1	2	4	3	0	2	1
2	5	1	2	0	3	2
3	3	3	8	0	4	6
4	1	2	2	0	5	4
5	2	2	5	0	2	4
6	4	2	4	0	6	3
7	2	5	3	0	4	2
8	3	4	7	0	3	3
9	2	1	6	0	2	5
10	5	3	2	0	3	1
11	2	3	3	0	1	5
12	4	5	6	0	6	2
13	6	2	3	0	4	1
14	4	7	7	0	1	2
15	3	6	6	0	5	3
16	5	2	2	0	3	4
17	4	3	3	0	5	1
18	2	6	6	0	2	2
19	7	3	3	0	1	3
20	3	2	2	0	4	2

Таблиця 1.2 – Вихідні дані для об'єкта керування другого порядку

Варіант №	Об'єкт керування				Функціонал $\int_0^{\infty} (y^2 + bu^2)dt$	
	Параметри			Початковий стан		$b$
	$k$	$a_1$	$a_2$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	
1	2	1,6	0,4	3	0	2
2	4	1,5	0,3	4	0	4
3	5	1,6	0,2	5	0	3
4	5	1,8	0,3	6	0	2
5	3	2,3	0,5	7	0	4
6	6	2,6	0,9	8	0	6
7	5	2,4	0,5	9	0	5
8	2	1,9	0,6	8	0	4
9	2	2,1	0,8	7	0	5
10	4	2,2	0,6	6	0	3
11	5	2,6	0,4	5	0	2

Варіант №	Об'єкт керування					Функціонал $\int_0^{\infty} (y^2 + bu^2)dt$
	Параметри			Початковий стан		
	$k$	$a_1$	$a_2$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$b$
12	3	2,2	0,3	4	0	4
13	4	2,8	0,7	3	0	3
14	3	1,8	0,2	2	0	5
15	2	2,2	0,9	3	0	3
16	3	2,9	0,8	4	0	2
17	5	3,1	0,6	5	0	4
18	3	2,1	0,8	6	0	6
19	2	2,6	0,6	7	0	5
20	4	2,7	0,9	8	0	3

### 1.3. Порядок виконання роботи

- скласти функцію Лагранжа з урахуванням функціонала і диференціального рівняння об'єкта керування.
- скласти рівняння Ейлера.
- визначити оптимальний керувальний вплив.
- виконати моделювання системи і встановити значення критерію оптимізації.
- змінити параметри керувального впливу і з'ясувати значення критерію оптимізації методом моделювання.
- побудувати графіки залежності критерію оптимізації від параметрів закону керування.

### 1.4. Методичні пояснення

Нехай заданий функціонал для оцінки якості перехідного процесу об'єкту керування першого порядку

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \quad (1.1)$$

Необхідно перевести об'єкт із стану  $y_0$  в момент часу  $t_0$  у стан  $y_1$  в момент часу  $t_1$ . Кількість можливих шляхів такого переходу дорівнює безкінечності. На рис. 1.3 наведено два можливих з них.

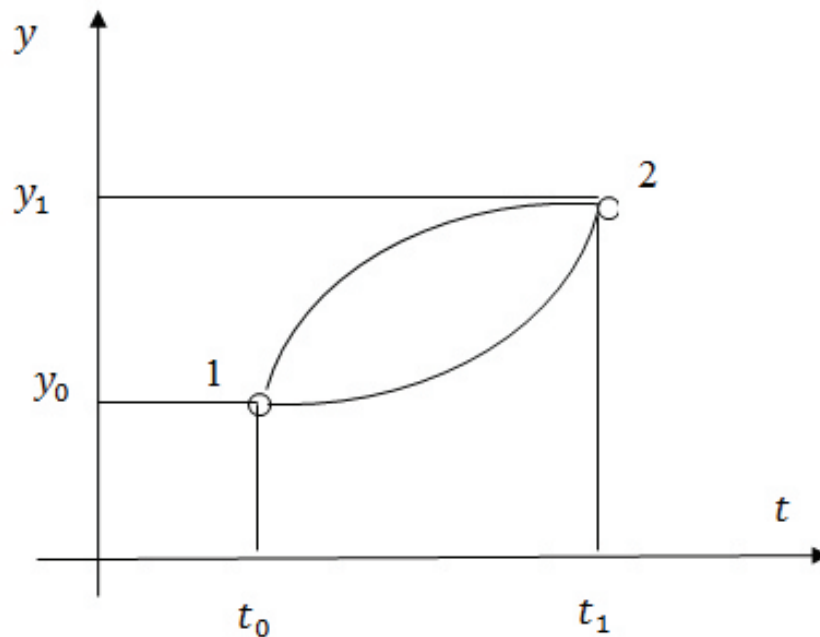


Рисунок 1.3 – Шляхи переходу об'єкта із стану 1 в стан 2

Функціонал (1.1) формується на базі фізичних уявлень про процес. Функція  $y(t)$ , яку необхідно визначити, має бути екстремаллю. Її пошук здійснюється на основі виразу

$$\frac{\partial f(t, y(t), \dot{y}(t))}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f(t, y(t), \dot{y}(t))}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Він називається рівнянням Ейлера і застосовується для розв'язання оптимізаційних задач. Позначивши  $F_y = \frac{\partial f(t, y(t), \dot{y}(t))}{\partial y}$ ,  $F_{\dot{y}} = \frac{\partial f(t, y(t), \dot{y}(t))}{\partial \dot{y}}$ , рівняння (1.2) прийме вигляд

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0. \quad (1.3)$$

Якщо початковий функціонал містить похідні вищого порядку, то застосовується рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} + \frac{d}{dt} F_{\ddot{y}} + \dots + (-1)^n F_{y^{(n)}} = 0 \quad (1.4)$$

де  $y^{(n)}$  –  $n$ -а похідна функції  $y(t)$ .



Якщо функціонал містить не одну функцію  $y(t)$ , а декілька  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , то

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y_1, y_2, \dots, y_n; \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dt. \quad (1.5)$$

В такому випадку будується система рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F_{y_1} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_1} = 0 \\ F_{y_2} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_2} = 0 \\ \dots \\ F_{y_n} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_n} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Її розв'язанням є  $n$  екстремалей.

**Приклад 1.1** Динаміка об'єкта керування першого порядку задана диференціальним рівнянням

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 8u(t). \quad (1.7)$$

Необхідно перевести даний об'єкт із початкового стану  $y(0) = 3$  в кінцевий стан  $y(\infty) = 0$  таким чином, щоб

$$I = \int_0^{\infty} (y^2(t) + 4u^2(t)) dt \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

Визначити оптимальний закон керування  $u_{opt}(t)$  при забезпеченні умови (1.8).

**Розв'язання.** Аргумент функціонала містить дві функції  $y(t)$  і  $u(t)$ , зв'язок між якими визначається виразом (1.7). Отже, дана задача полягає в умовному пошуку екстремуму. Для її розв'язання застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. Далі складає функцію Лагранжа

$$L = y^2(t) + 4u^2(t) + \lambda(t)(2\dot{y}(t) + y(t) - 8u(t)). \quad (1.9)$$

де  $\lambda$  – множник Лагранжа;  $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ .

Складемо систему рівнянь Ейлера (1.6) для функцій  $y(t)$ ,  $u(t)$  і  $\lambda(t)$

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0 \\ F_u - \frac{d}{dt}F_{\dot{u}} = 0 \\ F_\lambda - \frac{d}{dt}F_{\dot{\lambda}} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Маємо:

$$F_y = \frac{\partial L}{\partial y(t)} = 2y(t) + \lambda(t); \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}(t)} = 2 \frac{d\lambda(t)}{dt} = 2\dot{\lambda}(t); \quad (1.12)$$

$$F_u = \frac{\partial L}{\partial u(t)} = 8u(t) - 8\lambda(t); \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{u}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}(t)} = 0; \quad (1.14)$$

$$F_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda(t)} = 2\dot{y}(t) + y(t) - 8u(t); \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{\lambda}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}(t)} = 0; \quad (1.16)$$

З урахуванням (1.11) – (1.16) система рівнянь Ейлера прийме вигляд

$$\begin{cases} 2y(t) + \lambda(t) - 2\dot{\lambda}(t) = 0 \\ 8u(t) - 8\lambda(t) = 0 \\ 2\dot{y}(t) + y(t) - 8u(t) = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Із другого рівняння системи (1.17) випливає, що

$$u(t) = \lambda(t). \quad (1.18)$$

Підставимо  $\lambda(t)$  в третє рівняння системи (1.17) замість  $u(t)$  і виключимо друге рівняння. Дістанемо

$$\begin{cases} 2y(t) + \lambda(t) - 2\dot{\lambda}(t) = 0 \\ 2\dot{y}(t) + y(t) - 8\lambda(t) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (1.19) методом підстановки. Для цього друге рівняння розв'яжемо відносно  $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{8}y(t) + \frac{1}{4}\dot{y}(t). \quad (1.20)$$

Визначимо похідні у лівій і правій частині (1.20):

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{8}\dot{y}(t) + \frac{1}{4}\ddot{y}(t). \quad (1.21)$$

Підставимо (1.20) і (1.21) в перше рівняння (1.19):

$$2y(t) + \frac{1}{8}y(t) + \frac{1}{4}\dot{y}(t) - 2\left(\frac{1}{8}\dot{y}(t) + \frac{1}{4}\ddot{y}(t)\right) = 0. \quad (1.22)$$

Після тотожних перетворень дістанемо:

$$\ddot{y}(t) - 4\frac{1}{4}y(t) = 0. \quad (1.23)$$

Представимо (1.23) в операторній формі:

$$y(p)p^2 - y(p)4\frac{1}{4} = 0. \quad (1.24)$$

де  $p$  – комплексна змінна,  $y(p)$  – зображення функції  $y(t)$ .

Після тотожних перетворень (1.24) дістанемо:

$$p^2 - 4\frac{1}{4} = 0. \quad (1.25)$$

Рівняння (1.25) називається характеристичним. Його коренями є  $p_1 \approx 2,06$ ;  $p_2 \approx -2,06$ . Їм відповідають наступні розв'язки диференціального рівняння (1.23):

$$y_1(t) = C_1 e^{2,06t}. \quad (1.26)$$

$$y_2(t) = C_2 e^{-2,06t}. \quad (1.27)$$

Розв'язок (1.26) відкидаємо, оскільки він відповідає нестійкій системі.

Визначимо сталу  $C_2$  із початкових умов  $y(0) = 3$ :

$$3 = C_2 e^{-2,06 \times 0}. \quad (1.28)$$

Із (2.39) маємо  $C_2 = 3$ . Отже:

$$y(t) = 3e^{-2,06t}. \quad (1.29)$$

Похідна

$$\dot{y}(t) = -2,06 \times 3e^{-2,06t}. \quad (1.30)$$

Підставимо (1.29) і (1.30) в (1.20) і, враховуючи (1.18), визначимо оптимальний закон керування  $u_{opt}(t)$ :

$$u_{opt}(t) = \frac{1}{8}3e^{-2,06t} + \frac{1}{4} \times (-2,06) \times 3e^{-2,06t} = -0,39(3e^{-2,06t}) =$$

$$= -0,39y(t) \quad (1.31)$$

або

$$u_{opt}(t) = -1,17e^{-2,06t} . \quad (1.32)$$

Рівняння (1.31) з коефіцієнтом  $K = -0,39$  є основою для реалізації оптимальної замкнутої САК (рис. 1.4), а (1.32) з коефіцієнтом  $K = -1,17$  – основою для реалізації оптимальної розімкнутої САК (рис.1.5).

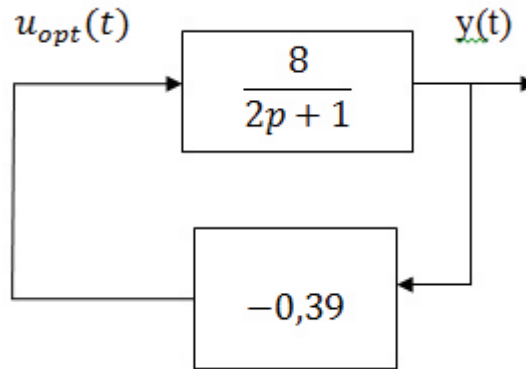


Рисунок 1.4 – Замкнута оптимальна САК

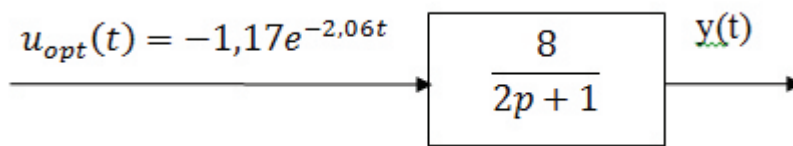


Рисунок 1.5 – Розімкнута оптимальна САК

На рис. 1.4 і 1.5 об'єкт керування задано передавальною функцією  $W(p) = \frac{8}{2p+1}$ , яка відповідає диференціальному рівнянню (1.7).

Виконаємо моделювання замкнутої і розімкнутої систем керування, зобразивши рівняння об'єкта керування (1.7) у просторі стану:

$$\dot{y} = -0,5y + 4u . \quad (1.33)$$

Структурні схеми систем керування в додатку Simulink ППІ MATLAB подано на рис.1.6.

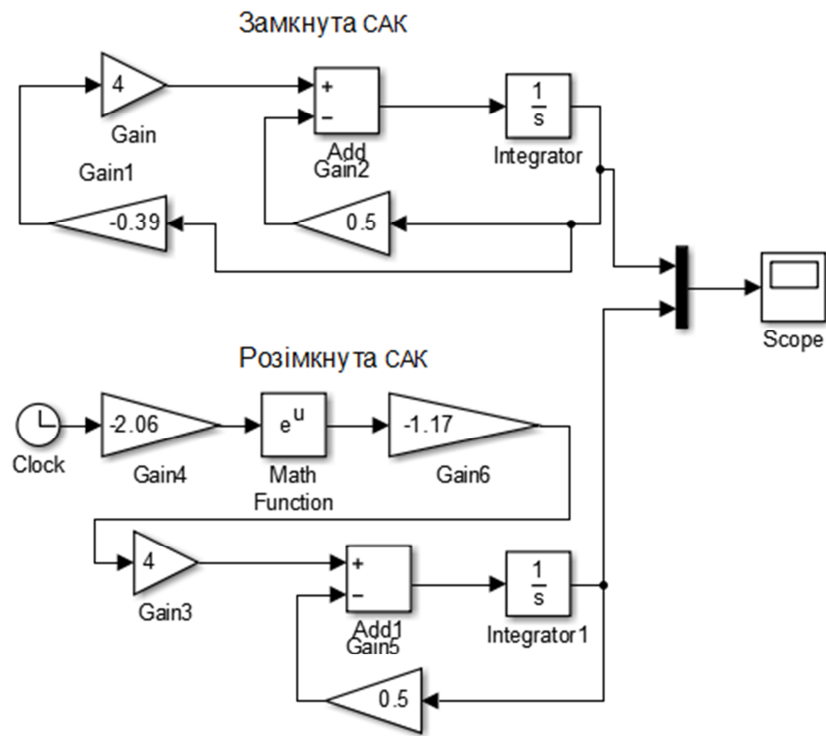


Рисунок 1.6 – Структурні схеми замкнутої і розімкнутої оптимальних САК

На рис. 1.7 показані графіки перехідних процесів в замкнутій і розімкнутій САК. Вони повністю збігаються.

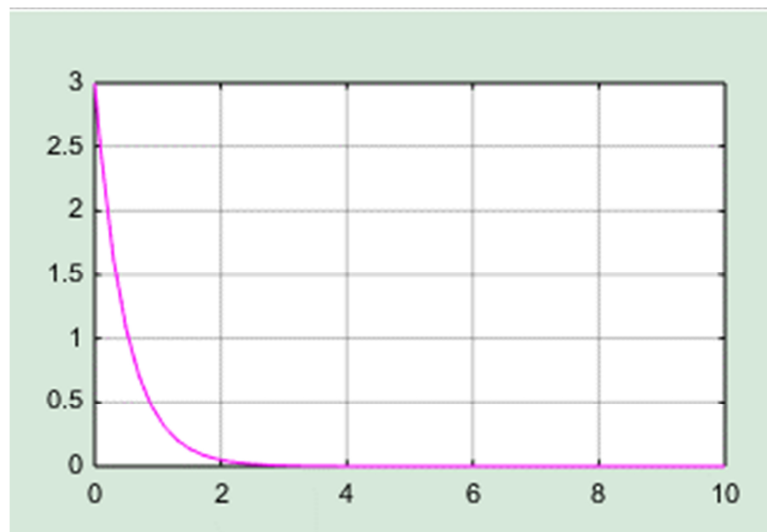


Рисунок 1.7 – Графіки перехідних процесів в досліджуваних САК

Продемонструємо, що визначені закони керування для замкнутої і розімкнутої САК забезпечують мінімальне значення критерію (1.8). Для цього побудуємо в додатку Simulink ППП MATLAB структурні схеми замкнутої і розімкнутої САК з елементами для розрахунку критерію керування (рис. 1.8 –

1.9). Результати обчислювальних досліджень наведено в табл. 1.3. На рис.1.10 подано графіки залежності критерію оптимізації від коефіцієнтів замкнутої (рис.10а) і розімкнутої (рис.10б) систем керування.

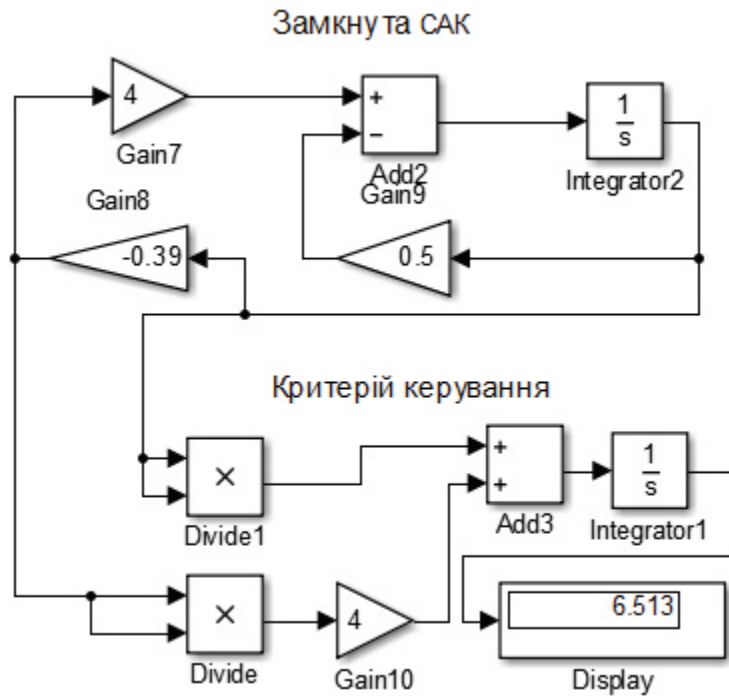


Рисунок 1.8 – Структурна схема досліджуваної замкнутої САК

Таблиця 1.3 – Результати дослідження САК

Замкнута САК	Коефіцієнт $K$	-0,19	-0,29	-0,38	<b>-0,39</b>	-0,40	-0,49	-0,59
	Критерій $I$	7,087	6,623	6,514	<b>6,513</b>	6,514	6,586	6,763
Розімкнута САК	Коефіцієнт $K$	-0,97	-1,07	-1,16	<b>-1,17</b>	-1,18	-1,27	-1,37
	Критерій $I$	6,674	6,554	6,514	<b>6,513</b>	6,514	6,553	6,673

Із аналізу даних табл. 1.3 і графіків на рис.10 випливає, що збільшення або зменшення розрахованих коефіцієнтів законів керування для замкнутої і розімкнутої САК спричиняють до збільшення критерію (1.8).

Отже, розрахунки є коректними, а отримані закони керування – оптимальними за заданим критерієм.

**Приклад 1.2.** Об'єкт другого порядку задано диференціальним рівнянням  $0,2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 1,2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t)$ . Визначити закон керування для переведення даного об'єкта із початкового стану  $y(0) = 6$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  в кінцевий стан  $y(\infty) = \dot{y}(\infty) = 0$  за умови, що  $I = \int_0^\infty (y^2(t) + 4u^2(t))dt \rightarrow \min$ .

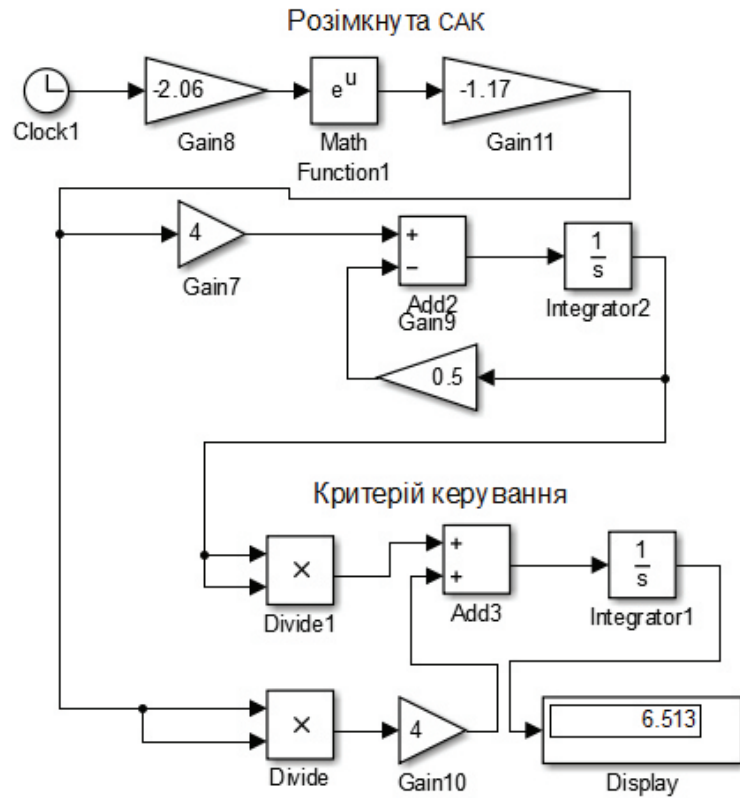


Рисунок 1.9 – Структурна схема досліджуваної розімкнутої САК

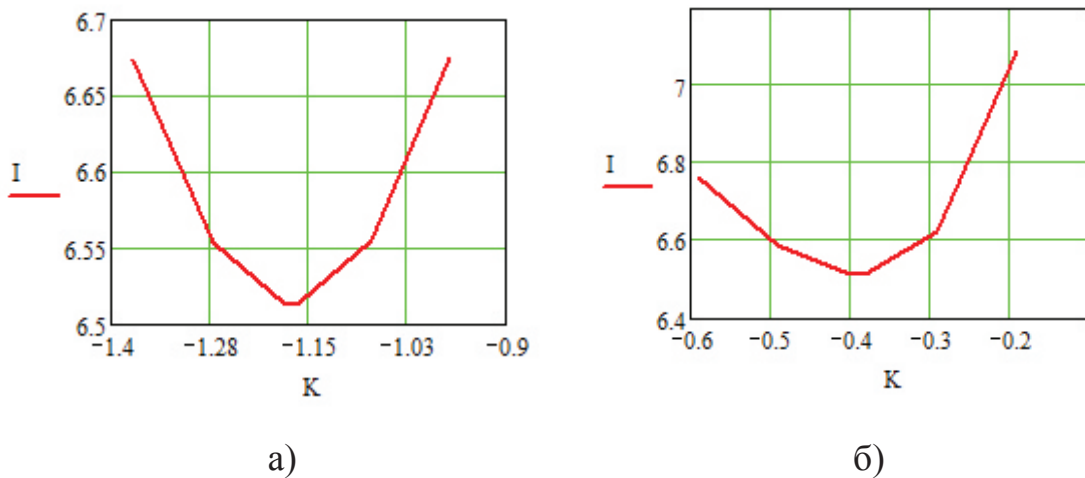


Рисунок 1.10 – Графіки залежності критерію оптимізації від коефіцієнтів  
 а) замкненої системи керування б) розімкненої системи керування

**Розв'язання.** Будемо використовувати метод невизначених множників Лагранжа. Представимо об'єкт у просторі станів, позначивши  $y(t) = z_1(t)$ . Тоді

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \frac{1}{0,2} (-z_1(t) - 1,2z_2(t) + 2u(t)) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \varphi_1(z_1(t), z_2(t), u(t)) = \dot{z}_1(t) - z_2(t) = 0 \\ \varphi_2(z_1(t), z_2(t), u(t)) = \dot{z}_2(t) - \frac{1}{0,2}(-z_1(t) - 1,2z_2(t) + 2u(t)) = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$\begin{aligned} L &= z_1^2(t) + 4u^2(t) + \lambda_1(t)\varphi_1(*) + \lambda_2(t)\varphi_2(*) = \\ &= z_1^2(t) + 4u^2(t) + \lambda_1(t)(\dot{z}_1(t) - z_2(t)) + \\ &+ \lambda_2(t) \left( \dot{z}_2(t) - \frac{1}{0,2}(-z_1(t) - 1,2z_2(t) + 2u(t)) \right) = \\ &= z_1^2(t) + 4u^2(t) + \lambda_1(t)(\dot{z}_1(t) - z_2(t)) + \\ &+ \lambda_2(t) \left( \dot{z}_2(t) - 5(-z_1(t) - 1,2z_2(t) + 2u(t)) \right) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Визначимо систему рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = 2z_1 + 5\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} = -\lambda_1(t) + 6\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_2(t) = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 8u(t) - 10\lambda_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Із третього рівняння системи знаходимо:

$$u(t) = \frac{10\lambda_2(t)}{8} = 1,25 \lambda_2(t). \quad (1.37)$$

Аби визначити оптимальний керувальний вплив, необхідно знати  $\lambda_2(t)$ .

До системи рівнянь (1.36) приєднаємо рівняння об'єкта (1.34), в якому замість  $u(t)$  підставимо рівний йому вираз із (1.37), що дорівнює цьому значенню.

Дістанемо:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = 5(-z_1(t) - 1,2z_2(t) + 2,5\lambda_2(t)) \\ \dot{\lambda}_1(t) = 2z_1(t) + 5\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) + 6\lambda_2(t) \end{cases}. \quad (1.38)$$

Для розв'язання системи рівнянь (1.38) необхідно побудувати характеристичний визначник системи і знайти алгебраїчні доповнення мінорів.

Запишемо рівняння (1.38) у вигляді



$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = 0z_1(t) + 1z_2(t) + 0\lambda_1(t) + 0\lambda_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -5z_1(t) - 6z_2(t) + 0\lambda_1(t) + 12,5\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) = 2z_1(t) + 0z_2(t) + 0\lambda_1(t) + 5\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = 0z_1(t) + 0z_2(t) - \lambda_1(t) + 6\lambda_2(t) \end{cases} . \quad (1.39)$$

Далі складемо характеристичний визначник:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} (0-p) & 1 & 0 & 0 \\ -5 & (-6-p) & 0 & 12,5 \\ 2 & 0 & (0-p) & 5 \\ 0 & 0 & -1 & (6-p) \end{vmatrix} . \quad (1.40)$$

Розкриємо його за елементами першого рядку:

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & -p((-6-p)(-p)(6-p) - (-1) \cdot 5 \cdot (-6-p)) + \\ & + (-1)(-5(-p)(6-p) + (-1) \cdot 2 \cdot 12,5 - (-1) \cdot 5 \cdot (-5)) . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Після тотожних перетворень (1.41) дістанемо біквдратне характеристичне рівняння:

$$p^4 - 26p^2 + 50 = 0 . \quad (1.42)$$

Його розв'язанням є від'ємні корені  $p_1 = -4,89$ ;  $p_2 = -1,45$  і додатні корені  $p_3 = 4,89$ ;  $p_4 = 1,45$ . Останні два відкидаємо, оскільки вони належать нестійкій САК. Тоді розв'язання системи рівнянь (1.38) матиме вигляд:

$$\begin{cases} z_1(t) = \Delta_1(-4,89)C_1 e^{-4,89t} + \Delta_1(-1,45)C_2 e^{-1,45t} \\ z_2(t) = \Delta_2(-4,89)C_1 e^{-4,89t} + \Delta_2(-1,45)C_2 e^{-1,45t} \\ \lambda_1(t) = \Delta_3(-4,89)C_1 e^{-4,89t} + \Delta_3(-1,45)C_2 e^{-1,45t} \\ \lambda_2(t) = \Delta_4(-4,89)C_1 e^{-4,89t} + \Delta_4(-1,45)C_2 e^{-1,45t} \end{cases} , \quad (1.43)$$

де  $\Delta_i(-4,89)$  і  $\Delta_i(-1,45) - i = \overline{1,4}$  – алгебраїчні доповнення мінорів, що відповідають елементам одного із рядків визначника (1.40);  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування.

Визначимо алгебраїчні доповнення мінорів за елементами першого рядка визначника (1.40).

Підставимо в (1.40) замість  $p$  значення  $p_1 = -4,89$ . Дістанемо:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 4,89 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1,11 & 0 & 12,5 \\ 2 & 0 & 4,89 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10,89 \end{vmatrix} . \quad (1.44)$$

Розрахуємо  $\Delta_i(-4,89)$  за допомогою ППП МАТНСАД. Результати обчислень подано в табл.1.4.

Підставимо в (1.40) замість  $p$  значення  $p_2 = -1,45$ . Дістанемо:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1,45 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4,55 & 0 & 12,5 \\ 2 & 0 & 1,45 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7,45 \end{vmatrix}. \quad (1.45)$$

Розрахуємо  $\Delta_i(-1,45)$  за допомогою ППП МАТНСАД. Результати наведено в табл.1.4.

З огляду на дані табл.1.4 система рівнянь прийме вигляд:

$$\begin{cases} z_1(t) = -64,66 \cdot C_1 e^{-4,89t} - 71,901 \cdot C_2 e^{-1,45t} \\ z_2(t) = 316,26 \cdot C_1 e^{-4,89t} + 104,013 \cdot C_2 e^{-1,45t} \\ \lambda_1(t) = 24,176 \cdot C_1 e^{-4,89t} + 67,795 C_2 e^{-1,45t} \\ \lambda_2(t) = 2,22 \cdot C_1 e^{-4,89t} + 9,1 \cdot C_2 e^{-1,45t} \end{cases} \quad (1.46)$$

Таблиця 1.4 – Результати розрахунків алгебраїчних доповнень мінорів

Значення кореня	Мінор $M_{ij}$	Алгебраїчне доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$	$\Delta_i(p_k)$
$p_1 = -4,89$	$M_{11} = \begin{vmatrix} -1,11 & 0 & 12,5 \\ 0 & 4,89 & 5 \\ 0 & -1 & 10,89 \end{vmatrix}$	$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$ $A_{11} = -64,66$	$\Delta_1(-4,89) = -64,66$
	$M_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 12,5 \\ 2 & 4,89 & 5 \\ 0 & -1 & 10,89 \end{vmatrix}$	$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$ $A_{12} = 316,26$	$\Delta_2(-4,89) = 316,26$
	$M_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -1,11 & 12,5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10,89 \end{vmatrix}$	$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13}$ $A_{13} = 24,176$	$\Delta_3(-4,89) = 24,176$
	$M_{14} = \begin{vmatrix} -5 & -1,11 & 0 \\ 2 & 0 & 4,89 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot M_{14}$ $A_{14} = 2,22$	$\Delta_4(-4,89) = 2,22$
$p_2 = -1,45$	$M_{11} = \begin{vmatrix} -4,55 & 0 & 12,5 \\ 0 & 1,45 & 5 \\ 0 & -1 & 7,45 \end{vmatrix}$	$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$ $A_{11} = -71,901$	$\Delta_1(-1,45) = -71,901$
	$M_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 12,5 \\ 2 & 1,45 & 5 \\ 0 & -1 & 7,45 \end{vmatrix}$	$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$ $A_{12} = 104,013$	$\Delta_2(-1,45) = 104,013$
	$M_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -4,55 & 12,5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7,45 \end{vmatrix}$	$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13}$ $A_{13} = 67,795$	$\Delta_3(-1,45) = 67,795$
	$M_{14} = \begin{vmatrix} -5 & -4,55 & 0 \\ 2 & 0 & 1,45 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot M_{14}$ $A_{14} = 9,1$	$\Delta_4(-1,45) = 9,1$

Виключимо із (1.46) множники  $C_1 e^{-4,89t}$  і  $C_2 e^{-1,45t}$ . Для цього розв'яжемо перші два рівняння (1.46) відносно  $C_1 e^{-4,89t}$  і  $C_2 e^{-1,45t}$  і результати підставимо в третє і четверте рівняння (1.46).

За методом Крамера дістанемо:

$$C_1 e^{-4,89t} = \frac{104,013z_1(t) - (-71,901)z_2(t)}{-64,66 \cdot 104,013 - 316,26 \cdot (-71,90)} . \quad (1.47)$$

$$C_2 e^{-1,45t} = \frac{-64,66z_2(t) - 316,26z_1(t)}{-64,66 \cdot 104,013 - 316,26 \cdot (-71,90)} . \quad (1.48)$$

Після тотожних перетворень вирази 1.47 і 1.48 запишемо у вигляді:

$$C_1 e^{-4,89t} = 0,006z_1(t) + 0,004z_2(t) , \quad (1.49)$$

$$C_2 e^{-1,45t} = -0,019z_1(t) - 0,004z_2(t) . \quad (1.50)$$

Підставимо вирази (1.49) і (1.50) в четверте рівняння системи (1.46) і виконаємо тотожні перетворення. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) &= 2,22 \cdot (0,006z_1(t) + 0,004z_2(t)) + 9,1 \cdot \\ &\cdot (-0,019z_1(t) - 0,004z_2(t)) = -0,16 z_1(t) - 0,027z_2(t). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Зважаючи на (1.37), визначимо закон оптимального керування:

$$u(t) = 1,25 \cdot (-0,16 z_1(t) - 0,027z_2(t)) = -0,2z_1(t) - 0,03z_2(t). \quad (1.52)$$

Отже  $r_1 = -0,2$ ,  $r_2 = -0,03$ .

Відповідно до (1.34), (1.52) і з урахуванням критерію оптимізації на рис.1.11 подано структурну схему системи оптимального керування заданим об'єктом у додатку Simulink ППП MATLAB.

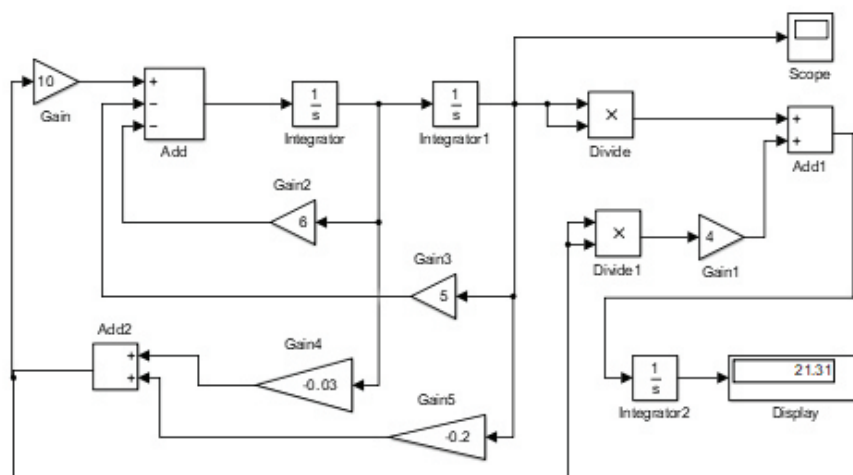


Рисунок 1.11 – Система оптимального керування

На рис. 1.12 наведено перехідний процес в системі автоматичного керування. Його графік вказує на те, що регулятор за певний час компенсує початкове відхилення від заданого значення. Після закінчення перехідного процесу відхилення дорівнює нулю.

Продемонструємо, що визначені коефіцієнти регулятора є оптимальними і забезпечують мінімальне значення критерію  $I = \int_0^{\infty} (y^2(t) + 4u^2(t))dt$ . Для цього будемо збільшувати і зменшувати коефіцієнти  $r_1$  і  $r_2$  і визначати значення критерію за методом обчислювального експерименту із застосуванням моделі САК (рис.1.11). Результати обчислювальних досліджень наведено в табл. 1.5.

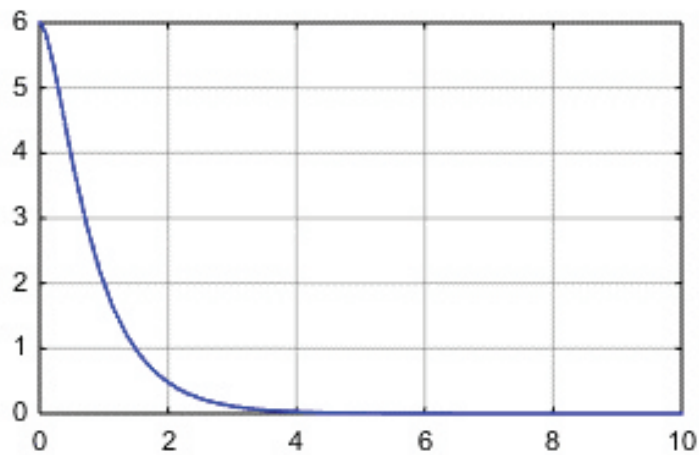
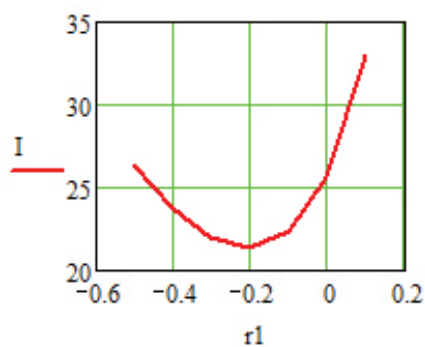


Рисунок 1.12 – Графік перехідного процесу в оптимальній системі керування

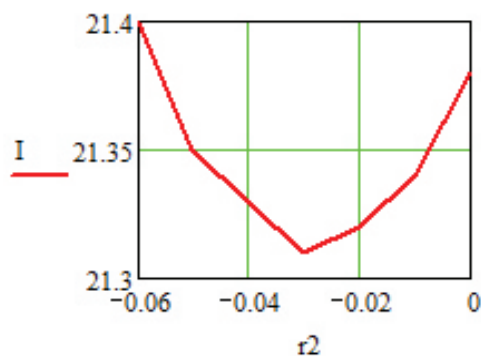
Таблиця 1.5 – Результати дослідження САК

$r_2 = -0,03$	Коефіцієнт $r_1$	0,1	0,0	-0,1	<b>-0,2</b>	-0,3	-0,4	-0,5
	Критерій $I$	32,93	25,59	22,26	<b>21,31</b>	21,95	23,71	26,34
$r_1 = -0,2$	Коефіцієнт $r_2$	0,0	-0,01	-0,02	<b>-0,03</b>	-0,04	-0,05	-0,06
	Критерій $I$	21,38	21,34	21,32	<b>21,31</b>	21,33	21,35	21,4

На рис.1.13 зображено графіки залежності критерію оптимізації від коефіцієнтів  $r_1$  (рис.1.13 а) і  $r_2$  (рис.1.13 б) системи керування.



а)



б)

Рисунок 1.13 – Графіки залежності критерію оптимізації від коефіцієнтів

а)  $r_1$ ; б)  $r_2$

Із аналізу даних табл. 1.5 і графіків на рис.1.13 випливає, що збільшення або зменшення коефіцієнтів  $r_1$  і  $r_2$  закону керування обумовлюють до збільшення критерію оптимальності.

Відтак розрахунки є коректними, а отриманий закон керування – оптимальним за заданим критерієм.

#### 1.5. Склад звіту:

- вихідні дані;
- функція Лагранжа з урахуванням обмежень і критерію керування;
- система рівнянь Ейлера;
- розв'язання системи рівнянь Ейлера;
- оптимальний закон керування;
- значення функціонала для значень коефіцієнтів оптимального і неоптимальних впливів;
- графіки перехідних процесів в системах автоматичного керування;
- графіки залежності критерію оптимізації від параметрів керувального впливу.

#### 1.6. Контрольні запитання

1. Що називається оптимальною системою керування?
2. Що таке оптимальний керувальний вплив?
3. Що таке функціонал?

4. Які критерії оптимального керування Ви знаєте?
5. Що таке екстремаль?
6. Що таке аргумент функціонала?
7. Що таке варіація аргументу?
8. Що таке варіація функціонала?
9. Який вигляд має рівняння Ейлера?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

### ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ЗА МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

#### 2.1. Мета роботи

Поглибити знання студентів при вивченні розділу «Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів (оптимальних зворотних зв'язків) методом динамічного програмування»

У процесі виконання роботи вони мусять вміти:

- складати рівняння об'єкта керування у формі Коші;
- складати рівняння Беллмана для динамічного об'єкта з урахуванням критерію оптимізації;
- визначати оптимальний керувальний вплив;
- виконувати моделювання системи оптимального керування.

#### 2.2 Вихідні дані:

- структурна схема та числові параметри об'єктів керування і функціонала (рис. 2.1, 2.2, табл. 2.1, 2.2);
- ППП MathCAD, MATLAB для розрахунків та моделювання автоматичних систем на ЕОМ.

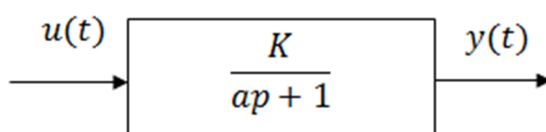


Рис. 2.1 – Структурна схема об'єкта керування першого порядку

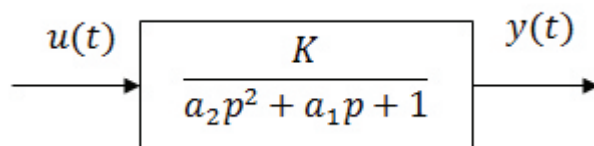


Рис. 2.2 – Структурна схема об'єкта керування другого порядку

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для об'єкта керування першого порядку

Варіант №	Об'єкт керування				Функціонал $\int_0^{\infty} (by^2 + cu^2)dt$	
	Параметри		Початковий стан			
	$k$	$a$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$b$	$c$
1	7	3	3	0	1	3
2	2	6	6	0	2	2
3	3	3	8	0	4	6
4	5	2	2	0	3	4
5	3	6	6	0	5	3
6	4	7	7	0	1	2
7	2	3	3	0	1	5
8	3	4	7	0	3	3
9	3	6	5	0	4	2
10	3	4	7	0	3	3
11	2	3	3	0	1	5
12	3	4	7	0	3	3
13	2	5	3	0	4	2
14	4	7	7	0	1	2
15	4	2	4	0	6	3
16	5	2	2	0	3	4
17	3	3	8	0	4	6
18	2	6	6	0	2	2
19	5	1	2	0	3	2
20	2	4	3	0	2	1

Таблиця 2.2 – Вихідні дані для об'єкта керування другого порядку

Варіант №	Об'єкт керування					Функціонал $\int_0^{\infty} (by^2 + cu^2)dt$	
	Параметри			Початковий стан			
	$k$	$a_1$	$a_2$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$b$	$c$
1	2	1,6	0,4	3	0	2	2
2	4	1,5	0,3	4	0	4	4
3	5	1,6	0,2	5	0	3	6
4	5	1,8	0,3	6	0	2	5
5	3	2,3	0,5	7	0	4	4

Варіант №	Об'єкт керування					Функціонал $\int_0^{\infty} (by^2 + cu^2)dt$	
	Параметри			Початковий стан		$b$	$c$
	$k$	$a_1$	$a_2$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$		
6	6	2,6	0,9	8	0	6	5
7	5	2,4	0,5	9	0	5	4
8	2	1,9	0,6	8	0	4	3
9	2	2,1	0,8	7	0	5	5
10	4	2,2	0,6	6	0	3	3
11	5	2,6	0,4	5	0	2	5
12	3	2,2	0,3	4	0	4	4
13	4	2,8	0,7	3	0	3	5
14	3	1,8	0,2	2	0	5	3
15	2	2,2	0,9	3	0	3	3
16	3	2,9	0,8	4	0	2	2
17	5	3,1	0,6	5	0	4	4
18	3	2,1	0,8	6	0	6	3
19	2	2,6	0,6	7	0	5	5
20	4	2,7	0,9	8	0	3	3

### 2.3. Порядок виконання роботи

- записати рівняння об'єкта керування у формі Коші;
- скласти рівняння Беллмана;
- розв'язати рівняння Беллмана;
- скласти структурну схему системи автоматичного керування з оптимальним законом керування;
- промоделювати роботу оптимальної системи автоматичного керування в середовищі ППП MATLAB.

### 2.4. Методичні пояснення

В методі динамічного програмування розглядаються багатостадійні задачі прийняття оптимальних рішень. Головним тут є розбиття процесу на ряд етапів. Рішення, прийняте на кожному з них, може бути і не оптимальним, але воно мусить відповідати процесу в цілому. Існують статичні і динамічні задачі динамічного програмування.



Для об'єкта керування першого порядку задача динамічного програмування формулюється наступним чином. Нехай задана математична модель керованого об'єкта за формою Коші

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u),$$

тут  $y$  – керована величина,  $u$  – керувальний вплив.

Необхідно перевести об'єкт із стану  $y_0$  в момент часу  $t_0 = 0$  у стан  $y_k = 0$  за кінцевий інтервал часу  $t_k$  таким чином, щоб функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} G(y, u) dt \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

тут  $G(y, u)$  – аргумент функціонала.

Розв'язанням цієї задачі є закон зміни керувального впливу, який є оптимальним.

Беллман сформулював принцип розв'язання сформульованої задачі, який полягає у наступному: якщо об'єкт переходить із одного стану в інший з оптимальною траєкторією, то будь-яка її ділянка є теж оптимальною і зовсім не важливо яким чином об'єкт опинився на ній. Використовуючи цей принцип для розв'язання задачі пошуку оптимального керувального впливу для об'єкта першого порядку за умови досягнення мінімуму функціонала (2.1) Беллман дістав наступне рівняння:

$$f(y, u) \frac{\partial G(y, u)}{\partial u} = G(y, u) \frac{\partial f(y, u)}{\partial u}. \quad (2.2)$$

Воно не має аналітичного розв'язку щодо керувального впливу  $u$ , оскільки він залежить від конкретного вигляду функцій  $f(y, u)$  і  $G(y, u)$ .

**Приклад 2.1** Об'єкт керування задано диференціальним рівнянням  $4 \frac{dy}{dt} + y = 2u$ . Визначити оптимальний керувальний вплив  $u_{opt}$  для переведення об'єкта із стану  $y_0 = 5$  в момент часу  $t_0 = 0$  у стан  $y_k = 0$  за кінцевий інтервал часу  $t_k$  таким чином, щоб функціонал  $I = \int_0^{\infty} (3y^2 + 2u^2) dt \rightarrow \min$ .

**Розв'язання.** Модель об'єкта керування за формою Коші має вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) = -0,25y + 0,5u . \quad (2.3)$$

Аргумент функціонала

$$G(y, u) = 3y^2 + 2u^2. \quad (2.4)$$

Визначимо  $\frac{\partial f(y,u)}{\partial u}$  і  $\frac{\partial G(y,u)}{\partial u}$ :

$$\frac{\partial f(y, u)}{\partial u} = 0,5. \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial G(y, u)}{\partial u} = 4u. \quad (2.6)$$

Підставимо (2.3) – (2.6) в (2.2). Дістанемо рівняння Беллмана:

$$(-0,25y + 0,5u)4u = (3y^2 + 2u^2)0,5. \quad (2.7)$$

$$-yu + 2u^2 = 1,5y^2 + u^2. \quad (2.8)$$

$$u^2 - yu - 1,5y^2 = 0. \quad (2.9)$$

Розв'яжемо квадратне рівняння (2.9) відносно  $u$ :

$$D = y^2 - 4 * (-1,5y^2) = 7y^2. \quad (2.10)$$

тут  $D$  – дискримінант квадратного рівняння.

$$u_{1,2} = \frac{y \pm y\sqrt{7}}{2} = \frac{y(1 \pm \sqrt{7})}{2} = \frac{y(1 \pm 2,65)}{2}. \quad (2.11)$$

Отже, маємо  $u_1 \approx 1,83y$ ,  $u_2 \approx -0,83y$ . Розв'язок  $u_1 \approx 1,83y$  відкидаємо, оскільки він відповідає нестійкій системі. Тоді

$$u_{opt} = u_2 \approx -0,83y. \quad (2.12)$$

Розв'язок (2.12) належить замкнутій системі автоматичного керування (рис. 2.2). Тут модель об'єкта керування зображено передавальною функцією  $W(p) = \frac{2}{4p+1}$ , яка відповідає диференціальному рівнянню за умовою прикладу.

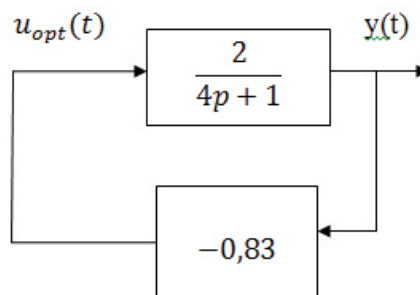


Рисунок 2.2 – Замкнута оптимальна САК

Виконаємо моделювання оптимальної системи керування, враховуючи (2.3). Її структурну схему в додатку Simulink ППП MATLAB представлена на рис. 2.3.

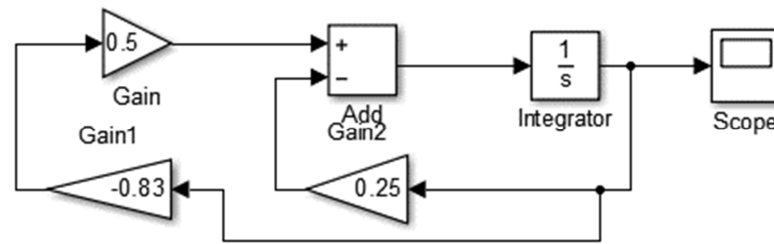


Рисунок 2.3 – Структурна схема замкнутої оптимальної САК

На рис. 2.4 продемонстровано графік перехідного процесу в замкнутій САК.

Покажемо, що визначений закон керування для замкнутої САК забезпечує мінімальне значення функціонала. Для цього побудуємо в додатку Simulink ППП MATLAB структурну схему замкнутої САК з елементами для розрахунку функціонала (рис. 2.5). Результати обчислювальних досліджень наведено в табл. 2.2. На рис. .6 зображено графік залежності функціонала від коефіцієнта зворотного зв'язку замкнутої системи керування.

Із аналізу даних табл. 2.3 і графіка на рис. 2.6 випливає, що збільшення або зменшення розрахованого коефіцієнта закону керування для замкнутої САК веде до збільшення функціонала.

Отже, розрахунки є коректними, а отриманий закон керування – ОПТИМАЛЬНИМ.

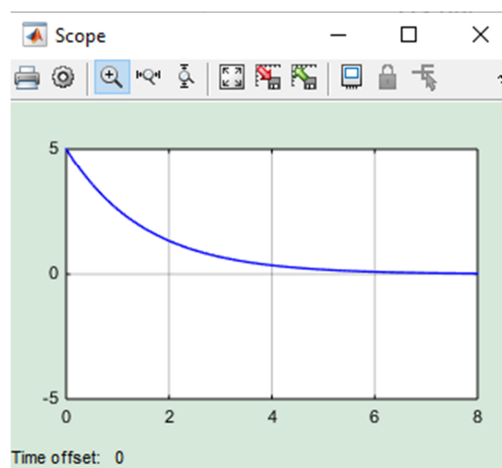


Рисунок 2.4 – Графік перехідного процесу в досліджуваній САК

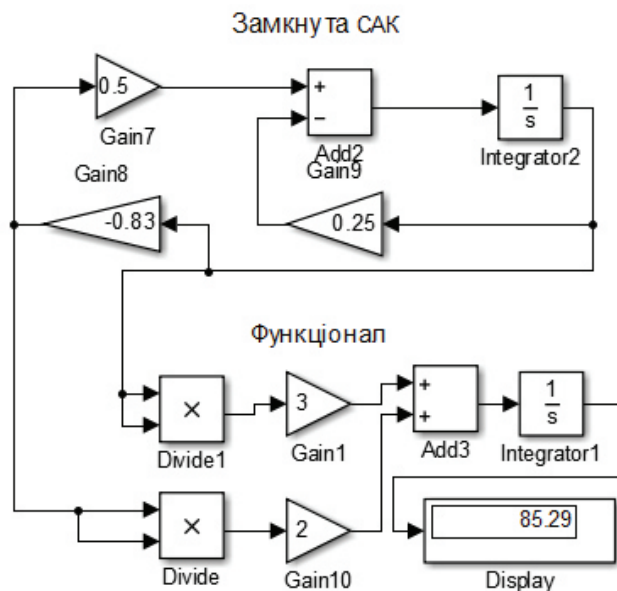


Рисунок 2.5 – Структурна схема досліджуваної замкнутої САК

Таблиця 2.3 – Результати дослідження замкнутої САК

Коефіцієнт $K$	-0,53	-0,63	-0,73	<b>-0,83</b>	-0,93	-1,03	-1,13
Функціонал $I$	89,45	86,93	85,64	<b>85,29</b>	85,69	86,69	88,18

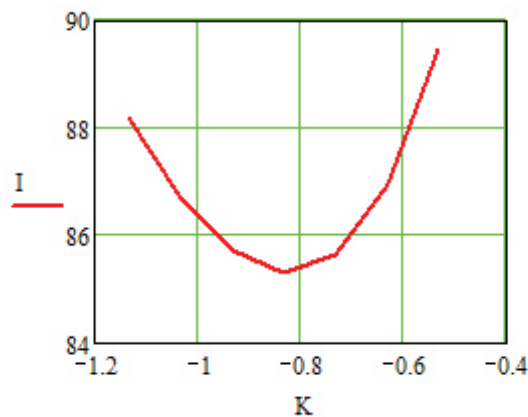


Рисунок 2.6 – Графік залежності функціонала від коефіцієнта зворотного зв'язку

Якщо об'єкт керування має порядок більше одного і заданий системою нормальних рівнянь Коші, то рівняння Беллмана має вигляд:

$$\min_{u \in M} [G(\vec{z}, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} f_i(\vec{z}, u)] = 0, \quad (2.13)$$

тут  $M$  – множина керувальних впливів;  $S$  – функція Ляпунова;  $\vec{z}$  – вектор змінних стану;  $z_i$  –  $i$ -змінна стану;  $f_i$  –  $i$ -рівняння системи нормальних рівнянь Коші;  $n$  – порядок об'єкта керування.

Розв'язання рівняння (2.13) базується на понятті функції Ляпунова, котра є знаковизначеною додатною.

**Приклад 2.2** Об'єкт керування заданий диференціальним рівнянням  $3,4 \frac{d^2y}{dt^2} + 3,57 \frac{dy}{dt} + y = 0,86u$ . Визначити оптимальний керувальний вплив  $u_{opt}$  для переведення об'єкта із стану  $y_0 = 6$  в момент часу  $t_0 = 0$  у стан  $y_k = 0$  за кінцевий інтервал часу  $t_k$  таким чином, щоб функціонал  $I = \int_0^\infty (3y^2 + 2u^2)dt \rightarrow \min$ .

**Розв'язання.** Позначимо  $z_1 = y$ ;  $\frac{dz_1}{dt} = z_2$ . Тоді модель об'єкта керування у формі Коші прийме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{3,4}z_1 - \frac{3,57}{3,4}z_2 + \frac{0,86}{3,4}u. \end{cases} \quad (2.14)$$

Або:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = -0,29z_1 - 1,05z_2 + 0,25u. \end{cases} \quad (2.15)$$

Із (2.15) маємо:

$$f_1(y, u) = z_2. \quad (2.16)$$

$$f_2(y, u) = -0,29z_1 - 1,05z_2 + 0,25u. \quad (2.17)$$

Аргумент функціонала має вигляд:

$$G(y, u) = 3z_1^2 + 2u^2. \quad (2.18)$$

Підставимо в (2.13) вирази із (2.16) – (2.18):

$$3z_1^2 + 2u^2 + \frac{\partial S}{\partial z_1}z_2 + \frac{\partial S}{\partial z_2}(-0,29z_1 - 1,05z_2 + 0,25u) = 0. \quad (2.19)$$

Визначимо частинну похідну виразу (2.19) за  $du$ :

$$4u + \frac{\partial S}{\partial z_1}0 + \frac{\partial S}{\partial z_2}0,25 = 0. \quad (2.20)$$

Із (2.20) визначимо  $u$ :

$$u = -\frac{0,25}{4} \frac{\partial S}{\partial z_2} = -0,06 \frac{\partial S}{\partial z_2} . \quad (2.21)$$

Підставимо (2.21) в (2.19):

$$3z_1^2 + 2(-0,06 \frac{\partial S}{\partial z_2})^2 + \frac{\partial S}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial S}{\partial z_2} \left( -0,29z_1 - 1,05z_2 + 0,25 \left( -0,06 \frac{\partial S}{\partial z_2} \right) \right) = 0. \quad (2.22)$$

Після тотожних перетворень (2.22) дістанемо:

$$3z_1^2 + \frac{\partial S}{\partial z_1} z_2 - 0,29z_1 \frac{\partial S}{\partial z_2} - 1,05z_2 \frac{\partial S}{\partial z_2} - 0,01 \left( \frac{\partial S}{\partial z_2} \right)^2 = 0. \quad (2.23)$$

Для подальших розрахунків застосуємо функцію Ляпунова у вигляді:

$$S = A_{11}z_1^2 + A_{12}z_1z_2 + A_{22}z_2^2. \quad (2.24)$$

Тоді:

$$\frac{\partial S}{\partial z_1} = 2A_{11}z_1 + A_{12}z_2. \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_2} = 2A_{22}z_2 + A_{12}z_1. \quad (2.26)$$

Підставимо (2.25), (2.26) в (2.23):

$$3z_1^2 + (2A_{11}z_1 + A_{12}z_2)z_2 - 0,29(2A_{22}z_2 + A_{12}z_1)z_1 - 1,05(2A_{22}z_2 + A_{12}z_1)z_2 - 0,01(2A_{22}z_2 + A_{12}z_1)^2 = 0. \quad (2.27)$$

Після тотожних перетворень (2.27) дістанемо:

$$(3 - 0,29A_{12} - 0,01A_{12}^2)z_1^2 + (2A_{11} - 0,58A_{22} - 1,05A_{12} - 0,04A_{22}A_{12})z_1z_2 + (A_{12} - 2,1A_{22} - 0,04A_{22}^2)z_2^2 = 0. \quad (2.28)$$

Вираз (2.28) дорівнюватиме нулю, якщо коефіцієнти при змінних стану і їхніх взаємодій становитиме нуль. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3 - 0,29A_{12} - 0,01A_{12}^2 = 0 \\ 2A_{11} - 0,58A_{22} - 1,05A_{12} - 0,04A_{22}A_{12} = 0 . \\ A_{12} - 2,1A_{22} - 0,04A_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Вона є нелінійною. Для її розв'язання застосуємо функцію *Minerr* в ППП MathCAD. Текст послідовності розрахунків з зазначеною функцією і їх

результати наведено нижче (рис. 2.7). За результатами обчислень маємо  $A_{11} = 5,88$ ;  $A_{12} = 8,09$ ;  $A_{22} = 3,6$ . Тоді згідно з (2.21) і (2.26) визначимо оптимальний закон керування:

$$u_{opt} = -0,06(2 \cdot 3,6z_2 + 8,09z_1) = -0,5z_1 - 0,43z_2 . \quad (2.30)$$

Отже,  $r_1 = -0,5$ ,  $r_2 = -0,43$ .

Відповідно до (2.15), (2.30) і з урахуванням заданого в умові прикладу функціонала на рис. 2.8 наведено структурну схему системи оптимального керування заданим об'єктом у додатку Simulink ППП MATLAB.

$$\begin{aligned} A11 &:= 1 & A12 &:= 1 & A22 &:= 1 \\ & \text{Given} \\ 3 - 0.29 \cdot A12 - 0.01 \cdot A12^2 &= 0 \\ 2 \cdot A11 - 0.58 \cdot A22 - 1.05 \cdot A12 - 0.04A22 \cdot A12 &= 0 \\ A12 - 2.1 \cdot A22 - 0.04 \cdot A22^2 &= 0 \\ z &:= \text{Minerr}(A11, A12, A22) \\ z &= \begin{pmatrix} 5.875 \\ 8.089 \\ 3.604 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рисунок 2.7 – Текст послідовності розрахунків в MathCAD

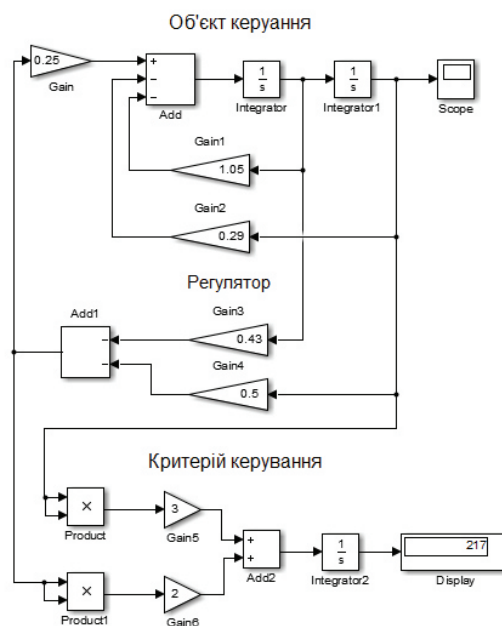


Рисунок 2.8 – Структурна схема оптимальної системи керування

На рис. 2.9 зображено перехідний процес в системі автоматичного керування. Графік вказує на те, що регулятор за деякий час компенсує початкове відхилення від заданого значення. Після закінчення перехідного процесу відхилення дорівнює нулю.

Покажемо, що визначені коефіцієнти регулятора є оптимальними і забезпечують мінімальне значення функціонала  $I = \int_0^{\infty} (3y^2(t) + 2u^2(t))dt$ . Для цього будемо збільшувати і зменшувати коефіцієнти  $r_1$  і  $r_2$  і встановлювати значення критерію за методом обчислювального експерименту із застосуванням моделі САК (рис. 2.8). Результати обчислювальних досліджень наведено в табл. 2.4.

На рис. 2.10 подано графіки залежності функціонала від коефіцієнтів  $r_1$  (рис. 2.10 а) і  $r_2$  (рис. 2.10 б) системи керування.

Із аналізу даних табл. 2.4 і графіків рис.2.10 випливає, що збільшення або зменшення коефіцієнтів  $r_1$  і  $r_2$  закону керування веде до збільшення функціоналу.

Відтак, розрахунки є коректними, а отриманий закон керування забезпечує мінімум функціоналу.

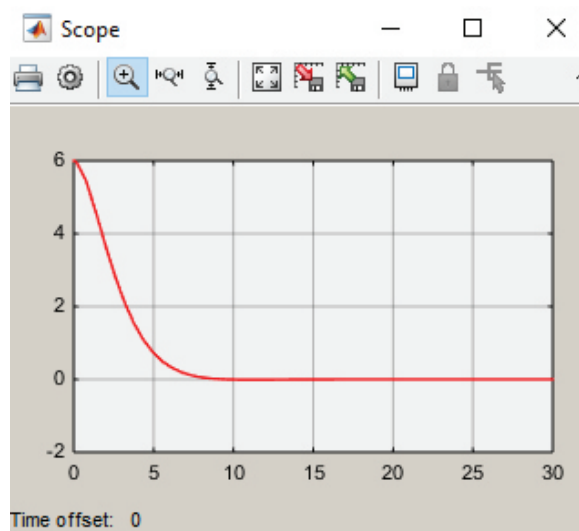
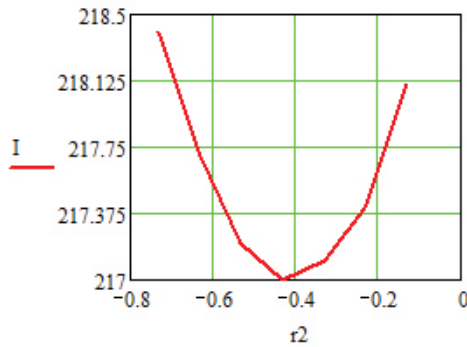


Рисунок 2.9 – Графік перехідного процесу в оптимальній системі керування

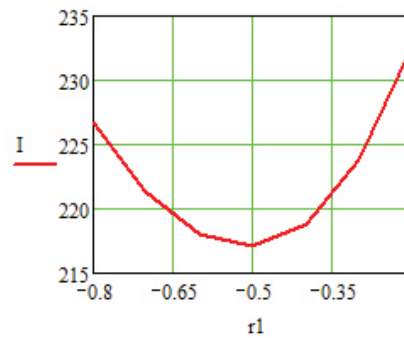


Таблиця 2.4 – Результати дослідження САК

$r_2 = -0,43$	Коефіцієнт $r_1$	-0,2	-0,3	-0,4	<b>-0,5</b>	-0,6	-0,7	-0,8
	Критерій $I$	232,4	223,8	218,8	<b>217</b>	217,9	221,2	226,6
$r_1 = -0,5$	Коефіцієнт $r_2$	-0,13	-0,23	-0,33	<b>-0,43</b>	-0,53	-0,63	-0,73
	Критерій $I$	218,1	217,4	217,1	<b>217</b>	217,2	217,7	218,4



а)



б)

Рисунок 2.10 – Графіки залежності критерія оптимізації від коефіцієнтів

а)  $r_1$ ; б)  $r_2$

## 2.5. Склад звіту:

- вихідні дані;
- рівняння об'єкта керування у формі Коші;
- рівняння Беллмана;
- розв'язання рівняння Беллмана;
- структурні схеми для дослідження оптимальної замкнутої САК;
- графік перехідного процесу для оптимальної САК;
- значення функціонала для оптимального і неоптимальних керувальних впливів;
- графіки залежності функціонала від коефіцієнтів зворотного зв'язку.

## 2.6. Контрольні запитання

1. В чому сутність методу динамічного програмування?
2. Які кроки треба виконати, щоб знайти оптимальний розв'язок за методом Беллмана?

3. Яка різниця між статичними і динамічними задачами динамічного програмування?
4. Чи можна динамічні задачі розв'язувати як статичні за методом Беллмана?
5. В чому полягає сутність принципу Беллмана для неперервних систем?
6. Який вигляд має рівняння Беллмана для об'єкта керування першого порядку?
7. Який вигляд має рівняння Беллмана для об'єкта керування будь-якого порядку?
8. За результатом розв'язку рівняння Беллмана синтезують розімкнуту чи замкнуту оптимальну САК?
9. Чи можна синтезований за методом Беллмана регулятор у вигляді зворотного зв'язку фізично реалізувати?

### **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3**

#### **ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗА ШВИДКОДІЄЮ (ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА)**

##### 3.1. Мета роботи

Поглибити знання студентів при вивченні розділу «Принцип максимуму Понтрягіна»

У процесі виконання роботи студенти повинні вміти:

- визначити кількості інтервалів керування і перемикаць керувального впливу;
- застосувати метод стикування розв'язання диференціальних рівнянь для визначення моментів перемикання керувального впливу включно із моментом закінчення керування;
- розв'язати систему трансцендентних рівнянь для визначення моментів перемикання керувального впливу включно із моментом закінчення керування;
- виконати моделювання системи оптимального керування.

### 3.2. Вихідні данні:

– структурна схема та числові параметри об'єкта керування (рис. 3.1; табл. 3.1, 3.2);

– ППП MathCAD, MATLAB для розрахунку та моделювання автоматичних систем на ЕОМ.

### 3.3. Порядок виконання роботи:

– за теоремою про n-інтервалів визначити кількості інтервалів і перемикачів керувального впливу;

– записати модель об'єкта керування у диференціальній формі;

– скласти системи рівнянь для кожного інтервалу керування;

– виконати стикування розв'язань диференціальних рівнянь за методом Ю.Г. Антомонова;

– визначити моменти перемикачів керувальної величини;

– перевірити роботу системи оптимального за швидкодією керування тепловим об'єктом на лабораторному стенді;

– методом моделювання на ЕОМ системи оптимального за швидкодією керування перевірити коректність розрахунків моментів перемикачів керувального впливу;

– зробити висновки.

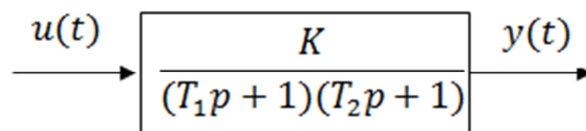


Рисунок 3.1 – Структурна схема об'єкта керування

Таблиця 3.1 – Вихідні данні

Тепловий об'єкт керування			Керувальний вплив		Час роботи в усталеному режимі
$K$	$T_1$	$T_2$	$u_{max}, mA$	$u_{min}, mA$	
0,85	0,59	0,51	20	4	
Варіант №	Зміна стану об'єкта керування $y(t)$			$\Delta t, c$	
	$\Delta y_1$	$\Delta y_2$	$\Delta y_3$	120	
1	5	2	-3	110	
2	7	-2	10	130	
3	10	-4	2	140	
4	3	6	-1	150	
5	2	10	-5	140	
6	4	4	-1	130	
7	5	3	-4	120	
8	6	1	-2	110	
9	3	9	-6	120	
10	8	1	-2	130	
11	2	5	4	140	
12	5	2	3	150	
13	6	3	5	140	
14	1	6	4	130	
15	7	4	6	120	
16	3	5	5	110	
17	4	2	1	120	
18	3	7	8	130	
19	2	6	7	140	
20	1	9	6	150	

Таблиця 3.2 – Вихідні данні

Початковий стан об'єкту керування $y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = -1$						
Варіант №	Параметри об'єкта керування			Кінцевий стан		Керувальний вплив
	$T_1$	$T_2$	$K$	$y(t_k)$	$\dot{y}(t_k)$	$u_{max} = -u_{min}$
1	0,5	3,1	2	5	0	20
2	0,2	4,8	4	2	0	30
3	0,3	3,2	6	7	0	40
4	1,9	1,5	5	5	0	50
5	1,1	1,9	3	4	0	60
6	0,3	3,7	6	8	0	70
7	0,2	4,2	5	4	0	60
8	0,1	5,9	3	2	0	50

Початковий стан об'єкту керування $y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = -1$						
Варіант №	Параметри об'єкта керування			Кінцевий стан		Керувальний вплив
	$T_1$	$T_2$	$K$	$y(t_k)$	$\dot{y}(t_k)$	$u_{max} = -u_{min}$
9	0,5	3,2	2	6	0	40
10	4,5	1,3	4	7	0	30
11	0,5	3,1	5	5	0	20
12	0,2	4,8	3	3	0	30
13	0,3	3,2	5	2	0	40
14	1,9	1,5	3	8	0	50
15	1,1	1,9	2	6	0	60
16	0,3	3,7	3	4	0	70
17	0,2	4,2	5	3	0	60
18	0,1	5,9	3	5	0	50
19	0,5	3,2	2	4	0	40
20	4,5	1,3	4	6	0	30

### 3.4. Методичні пояснення:

При використанні методів варіаційного числення і динамічного програмування дістаємо керувальні дії у вигляді неперервних функцій. Застосування ж принципу максимуму Понтрягіна (ПМП) дає можливість реалізувати керувальному дію у вигляді релейної функції (рис. 3.2).

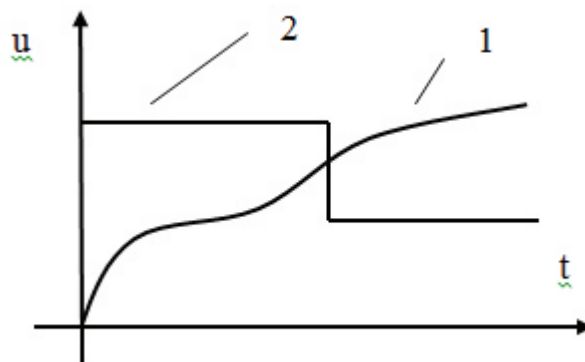


Рисунок 3.2 – Види керувальних дій

- 1) неперервна керувальна дія
- 2) релейна керувальна дія

З технічної точки зору реалізація релейної керувальної дії є більш ефективною.

При застосуванні ПМП слід виконати наступне:

1. Зобразити об'єкт керування у формі Коші.
2. Ввести координату  $z_0(t)$ , яка характеризує критерій оптимізації.
3. Скласти систему ортогональних рівнянь релейних функцій у такий спосіб:

$$\frac{d\Psi_j(t)}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(t)}{\partial z_j(t)} \Psi_i(t). \quad (3.1)$$

тут  $d\Psi_j(t)$  – перемикальна релейна функція;  $j = \overline{0, n}$ ;  $f_i(t)$  – права частина  $i$ -го рівняння в системі рівнянь об'єкта у формі Коші з додатково введеною координатою  $z_0(t)$ .

Необхідно визначити всі  $\Psi_j(t)$  за рівнянням (3.1).

4. Побудувати із визначених функцій  $\Psi_j(t)$  Гомельтоніан:

$$H = \sum_{j=0}^n \Psi_j(t) f_j(z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)). \quad (3.2)$$

тут  $z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t)$  – змінні стану;  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  – керувальні впливи.

5. Виділити частину Гомельтоніана  $\tilde{H}$ , яка залежить від керувальних дій  $u_2(t), \dots, u_m(t)$  і називається Понтрягіаном.
6. За аналізом Понтрягіана визначити оптимальні керувальні дії таким чином, щоб  $\tilde{H}$  було максимальним в будь-який момент часу.

Одним із методів визначення моментів часу, в які необхідно змінювати знак керувальної дії, є стикування розв'язань диференціальних рівнянь, запропонований Ю.Г. Антомоновим.

Розглянемо його сутність на прикладі пошуку оптимального за швидкодією керувального впливу тепловим об'єктом, який є складовою лабораторного стенда, розробленого на кафедрі автоматизації та приладобудування Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». Даний об'єкт має другий порядок з від'ємними дійсними коренями характеристичного рівняння.

Тепловий об'єкт складається із ємності, яка продувається, у вигляді прямокутного паралелепіпеда, відцентрового вентилятора, всмоктувальної труби, електричного нагрівача, заслінки і терморезистора. Відцентровий вентилятор і всмоктувальна труба розташовані на протилежних сторонах ємності. Між ними знаходяться електричний нагрівач, заслінка і термоопір.

Відцентровий вентилятор забезпечує безперервну подачу холодного повітря з навколишнього середовища всередину теплового об'єкта. Залежно від положення заслінки, частоти обертання двигуна всмоктувального вентилятора і електричної потужності, що підводиться до нагрівального елемента, повітря нагрівається до певної температури. Її зміна контролюється термоопором.

Апаратна частина системи автоматичного керування створена на базі програмованого логічного контролера (ПЛК) VIPA System 200 V. Її структура наведена на рис. 3.3. ПЛК в системі автоматичного керування виступає як модуль віддаленого аналогового вводу-виводу.

Програмна частина САК включає в себе програмований логічний контролер, для організації обчислювальних процесів і персональний комп'ютер на основі HMI / SCADA системи Zenon Supervisor 7.0 для реалізації людино-машинного інтерфейсу і різних типів регуляторів.

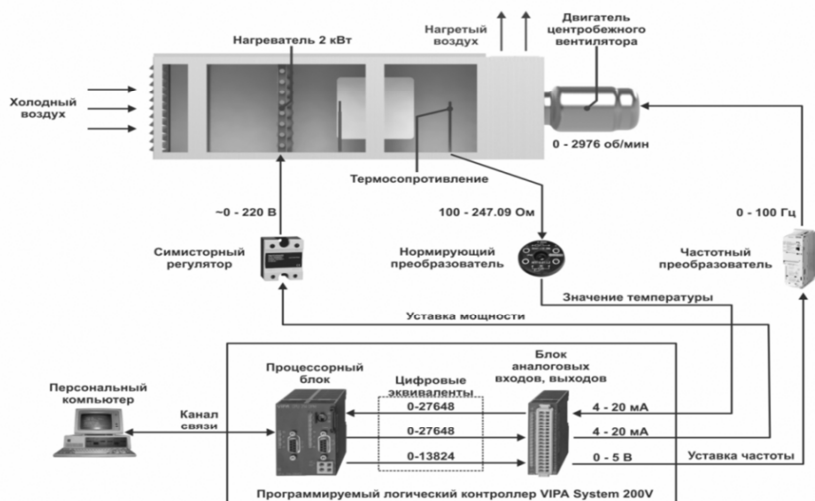


Рисунок 3.3 – Структура системи автоматичного керування

**Приклад 3.1.** Об'єкт керування задано диференціальним рівнянням  $3,362 \frac{d^2y}{dt^2} + 3,677 \frac{dy}{dt} + y = 0,845u$ . Визначити оптимальний керувальний вплив  $u_{opt}$  для переведення об'єкта послідовно з  $0^\circ\text{C}$  до  $5^\circ\text{C}$ , із  $5^\circ\text{C}$  до  $10^\circ\text{C}$  і з  $10^\circ\text{C}$  до  $7^\circ\text{C}$  з фіксацією сталих режимів в плинні часу  $\Delta t$  за кінцевий інтервал  $T$  таким чином, щоб функціонал

$$I = \int_0^T dt = T \rightarrow \min. \quad (3.3)$$

**Розв'язання.** Тепловий об'єкт описується динамічним рівнянням другого порядку, тому для керування ним, відповідно до теореми про  $n$ -інтервали, досить двох інтервалів керування (одне перемикання керувального впливу). Причому  $U_{min} = 0$ , поза як в тепловому об'єкті відсутні виконавчі механізми, що здатні охолоджувати повітря.

На рис. 3.4а та 3.4б показані зміни вихідної величини  $y_{вих}$  та керувального впливу  $u$  відповідно для випадку, коли  $y_k > y_n$ , а на рис. 3.5а и 3.5б – для випадку, коли  $y_k < y_n$ . Тут  $y_k, y_n$  – кінцеве і початкове значення вихідної величини. Запишемо закони зміни вихідної величини  $y_{вих}$  и та її похідної  $\dot{y}_{вих}$  в моменти часу  $t = 0, t = t_1$  и  $t = t_2$ .

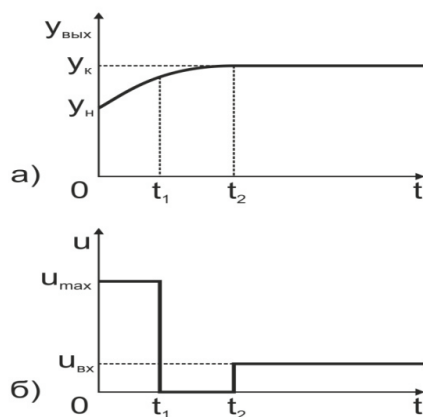


Рисунок 3.4 – Керування об'єктом при

$$y_k > y_n$$

а) зміна вихідної величини

б) зміна керувального впливу

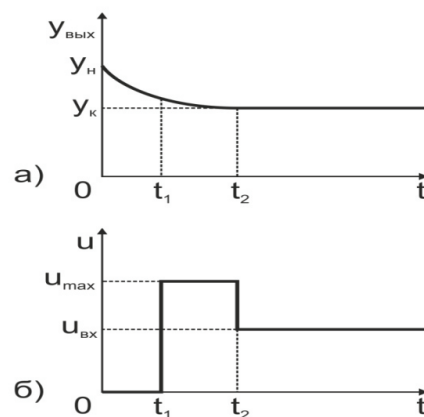


Рисунок 3.5 – Керування об'єктом

$$y_k < y_n$$

а) зміна вихідної величини

б) зміна керувального впливу



В кінці другого інтервалу керування (момент часу  $t = t_2$ ):

$$\begin{cases} y_{\text{вих}} = U_{\min(\max)} + C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} + C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \\ \dot{y}_{\text{вих}} = -\alpha_1 C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \end{cases} \quad (3.4)$$

тут  $U_{\min(\max)}$  – мінімальне або максимальне значення керувального впливу;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – корені характеристичного рівняння теплового об'єкта;  $C_1^2$ ,  $C_2^2$  – постійні інтегрування в кінці другого інтервалу керування.

Оскільки перехідний процес в кінці другого інтервалу керування має закінчитися, то  $y_{\text{вих}} = y_k$ , а  $\dot{y}_{\text{вих}} = 0$ . Тоді система рівнянь (3.4) прийме вигляд:

$$\begin{cases} y_k = kU_{\min(\max)} + C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} + C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \\ 0 = -\alpha_1 C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \end{cases} \quad (3.5)$$

На початку першого інтервалу керування (момент часу  $t = 0$ ):

$$\begin{cases} y_{\text{вих}} = kU_{\max(\min)} + C_1^1 e^{-\alpha_1 \cdot 0} + C_2^1 e^{-\alpha_2 \cdot 0} \\ \dot{y}_{\text{вих}} = -\alpha_1 C_1^1 e^{-\alpha_1 \cdot 0} - \alpha_2 C_2^1 e^{-\alpha_2 \cdot 0} \end{cases} \quad (3.6)$$

тут  $C_1^1$ ,  $C_2^1$  – постійні інтегрування в кінці першого інтервалу керування.

На початку першого інтервалу керування  $y_{\text{вих}} = y_p$ , а  $\dot{y}_{\text{вих}} = 0$ . Тому система рівнянь (3.6) прийме вигляд:

$$\begin{cases} y_p = kU_{\max(\min)} + C_1^1 + C_2^1 \\ 0 = -\alpha_1 C_1^1 - \alpha_2 C_2^1 \end{cases} \quad (3.7)$$

В момент часу  $t = t_1$  (кінець першого і початок другого інтервалу керування) значення  $y_{\text{вих}}$  розраховане за виразом (3.5) або за виразом (3.7) мають бути однаковими. Однаковими мають бути і значення  $\dot{y}_{\text{вих}}$ . Тоді:

$$\begin{cases} kU_{\max(\min)} + C_1^1 e^{-\alpha_1 t_1} + C_2^1 e^{-\alpha_2 t_1} = kU_{\min(\max)} + C_1^2 e^{-\alpha_1 t_1} + C_2^2 e^{-\alpha_2 t_1} \\ -\alpha_1 C_1^1 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2^1 e^{-\alpha_2 t_1} = -\alpha_1 C_1^2 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2^2 e^{-\alpha_2 t_1} \end{cases} \quad (3.8)$$

В формулах (3.4) – (3.8) в дужках зазначено індекс керувального впливу для випадку, коли  $y_k < y_p$ .

Виключимо із систем (3.4), (3.6) і (3.7) постійні інтегрування  $C_1^1$ ,  $C_2^1$ ,  $C_1^2$  та  $C_2^2$  і враховуючи, що  $U_{\min} = 0$ , дістанемо наступні системи рівнянь для визначення моментів часу  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{y_H}{kU_{\max}}\right) + \frac{y_K e^{\alpha_1 t_2}}{kU_{\max}} - e^{\alpha_1 t_1} = 0 \\ \left(1 - \frac{y_H}{kU_{\max}}\right) + \frac{y_K e^{\alpha_2 t_2}}{kU_{\max}} - e^{\alpha_2 t_1} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

i

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{y_K}{kU_{\max}}\right) e^{\alpha_1 t_2} - e^{\alpha_1 t_1} + \frac{y_H}{kU_{\max}} = 0 \\ \left(1 - \frac{y_K}{kU_{\max}}\right) e^{\alpha_2 t_2} - e^{\alpha_2 t_1} + \frac{y_H}{kU_{\max}} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Система рівнянь (3.9) отримана для випадку  $y_K > y_H$ , а (3.10) – для випадку  $y_K < y_H$ . В кінці другого інтервалу керування вихідна величина  $y$  прийме задане значення  $y_K$ , а керувальна величина  $U$  – значення:

$$U_k = \frac{y_K}{k} \quad (3.11)$$

Перевірка математичних виразів (3.8) – (3.10) виконана при керуванні тепловим об'єктом. Як вихідна величина прийнята температура  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) нагрітого всередині ємності повітря, а як керувальний вплив – величина струму  $i$  (mA) перетворювача потужності електричного нагрівача. Залежність між величиною струму  $i$  і величиною відносної потужності  $P$  (%) має наступний вигляд:

$$P = 6,25i - 25. \quad (3.12)$$

Максимальне  $i_{\max} = 20 \text{ mA}$ , і мінімальне  $i_{\min} = 4 \text{ mA}$ . значення струму дорівнюють. Передавальна функція даного об'єкта по каналу "величина струму – температура повітря" має вигляд  $W(p) = 0,845/(3,362p^2 + 3,677p + 1)$ . Корені характеристичного рівняння відповідно становлять:  $-\alpha_1 = -0,59$  и  $-\alpha_2 = -0,51$ . Температуру повітря в тепловому об'єкті необхідно було змінювати послідовно з  $0^{\circ}\text{C}$  до  $5^{\circ}\text{C}$ , з  $5^{\circ}\text{C}$  до  $10^{\circ}\text{C}$  і з  $10^{\circ}\text{C}$  до  $7^{\circ}\text{C}$  з фіксацією встановлених значень температури протягом часу  $\Delta t$  для оцінки значень похідних вихідної величини в кінці другого інтервалу керування. В табл. 3.3 наведені вихідні дані для проведення експерименту на лабораторному стенді ( $i_k$  – значення керувального впливу в кінці другого інтервалу керування).

Таблиця 3.3 Вихідні дані для проведення експерименту

Зміна $T$ с $0^{\circ}\text{C}$ до $5^{\circ}\text{C}$				Зміна $T$ с $5^{\circ}\text{C}$ до $10^{\circ}\text{C}$				Зміна $T$ с $10^{\circ}\text{C}$ до $7^{\circ}\text{C}$			
$t_1$ , хв	$t_2$ , хв	$\Delta t$ , хв	$i_k$ , мА	$t_1$ , хв	$t_2$ , хв	$\Delta t$ , хв	$i_k$ , мА	$t_1$ , хв	$t_2$ , хв	$\Delta t$ , хв	$i_k$ , мА
1,51	2,69	2,31	5,92	2,37	2,93	2,07	11,83	1,77	2,29	2,72	8,28

Результати експерименту, зареєстровані безпосередньо на об'єкті керування, наведені на рис. 4.

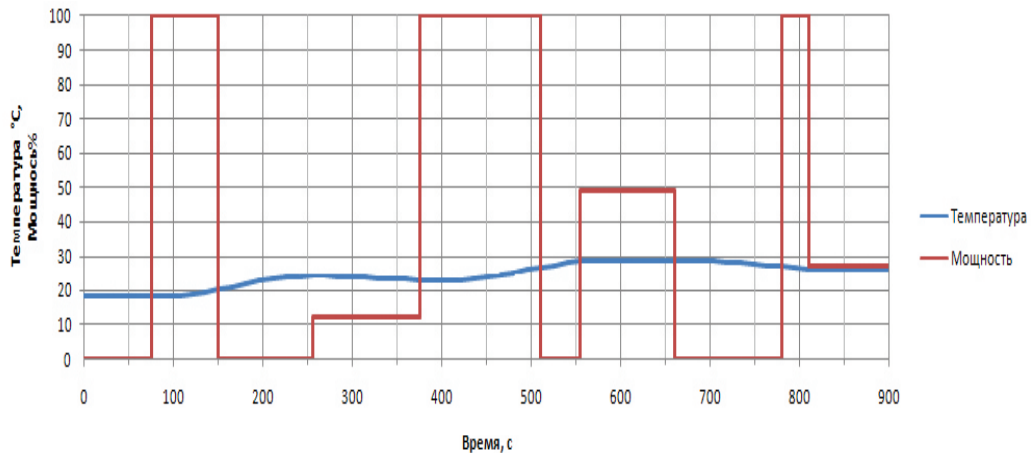


Рисунок 3.6 – Графіки змін температури і потужності в ході експерименту

Як випливає із графіка на рис. 3.6 результати керування тепловим об'єктом свідчать про добру узгодженість теоретичних розрахунків і даних експериментів. Після закінченню другого інтервалу керування зміни вихідної величини  $T$  відсутні, а її значення із завершенням перехідних процесів відповідають розрахунковим (з урахуванням початкового значення температури повітря всередині ємності  $T_{\text{п}} = 18,4^{\circ}\text{C}$ ).

**Приклад 3.2.** Технологічний тепловий об'єкт (паровий котел, регенеративний підігрівач питної води тощо), який перебуває у стані  $y_{t=0} = 15$  од.,  $\dot{y}_{t=0} = 0$ , починає вільно охолоджуватися (керувальний вплив дорівнює нулю ( $u = 0$ )). Після 7хв з початку охолодження об'єкт необхідно перевести у стан  $y_{t=t_k} = 5$  од.,  $\dot{y}_{t=t_k} = 0$ . Передавальна функція об'єкта керування  $W(p) = 2/(3p^2 + 4p + 1)$ , керувальний вплив  $u$  змінюється в інтервалі  $0 \div 10$  од.

**Розв'язання.** Маємо об'єкт другого порядку. Корені характеристичного рівняння  $-\lambda_1 = -\frac{1}{3}$  і  $-\lambda_2 = -1$ . Для переведення об'єкту із початкового стану в кінцевий за мінімальний час достатньо двох інтервалів керування і однієї зміни значення керувального впливу (рис. 3.7).

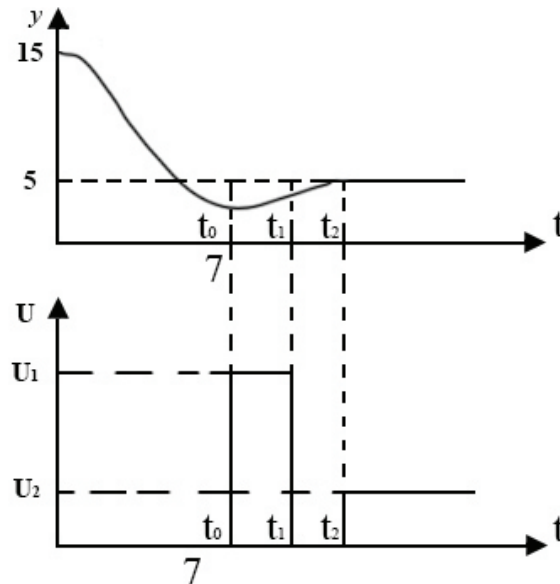


Рис.3.7 Графіки до розв'язання задачі.

Визначимо значення вихідної величини  $y$  і її похідної  $\dot{y}$  в момент часу  $t_0 = 7$  хв. Запишемо залежність вихідної і вхідної величин у вигляді диференціального рівняння:

$$3 \frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = 2u. \quad (3.13)$$

Оскільки  $u = 0$ , то рівняння (3.13) однорідне і його розв'язання має вигляд:

$$y = A_1 e^{-\frac{1}{3}t} + A_2 e^{-t}. \quad (3.14)$$

Для визначення сталих інтегрування складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 15 = A_1 e^{-\frac{1}{3}t} + A_2 e^{-t} \\ 0 = -\frac{1}{3}A_1 e^{-\frac{1}{3}t} - A_2 e^{-t} \end{cases} \quad (3.15)$$

Розв'язавши її, дістанемо  $A_1 = 22,5$  і  $A_2 = -7,5$ .

Розрахуємо значення вихідної величини  $y$  і її похідної  $\dot{y}$  в момент часу  $t_0 = 7$  хв:

$$y = 22,5e^{-\frac{7}{3}} + 7,5e^{-7} = 2,175$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{3} \times 22,5e^{-\frac{7}{3}} + 7,5e^{-7} = -0,72. \quad (3.16)$$

Отже, в момент часу  $t_0 = 7$  хв має бути  $u = 10$  од. Визначимо моменти часу  $t_1$  (зміна значення керувального впливу) і  $t_2$  (кінець другого інтервалу керування). Для спрощення розрахунків перенесемо  $t_0$  в початок координат.

Складемо систему рівнянь для моменту часу  $t_2$  (кінець другого інтервалу керування):

$$\begin{cases} 5 = C_1^2 e^{-\frac{1}{3}t_2} + C_2^2 e^{-t_2} \\ 0 = -\frac{1}{3}C_1^2 e^{-\frac{1}{3}t_2} - C_2^2 e^{-t_2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Із системи рівнянь (3.17) визначимо сталі інтегрування  $C_1^2$  і  $C_2^2$ :

$$C_1^2 = 7,5e^{\frac{1}{3}t_2}. \quad (3.18)$$

$$C_2^2 = -2,5e^{t_2}. \quad (3.19)$$

Складемо систему рівнянь для моменту часу  $t = 0$  (початок першого інтервалу керування):

$$\begin{cases} 2,175 = 20 + C_1^1 + C_2^1 \\ -0,72 = -\frac{1}{3}C_1^1 - C_2^1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Із системи рівнянь (3.20) визначимо  $C_1^1$  і  $C_2^1$ :

$$C_1^1 = -27,818. \quad (3.21)$$

$$C_2^1 = 9,993. \quad (3.22)$$

Для моменту часу  $t_1$  виконаємо стикування розв'язків диференціальних рівнянь для керованої величини і її похідної на кінці першого і початку другого інтервалів керування. Складемо рівняння для керованої величини:

$$20 + C_1^1 e^{-\frac{1}{3}t_1} + C_2^1 e^{-t_1} = C_1^2 e^{-\frac{1}{3}t_1} + C_2^2 e^{-t_1}. \quad (3.23)$$

Після тотожних перетворень вираз (3.23) матиме вигляд:

$$-20 = e^{-\frac{1}{3}t_1}(C_1^1 - C_1^2) + e^{-t_1}(C_2^1 - C_2^2). \quad (3.24)$$

Складемо рівняння для похідної керованої величини в момент часу  $t_1$ :

$$-\frac{1}{3}C_1^1 e^{-\frac{1}{3}t_1} - C_2^1 e^{-t_1} = -\frac{1}{3}C_1^2 e^{-\frac{1}{3}t_1} - C_2^2 e^{-t_1}. \quad (3.25)$$

Після тотожних перетворень вираз (3.25) матиме вигляд:

$$-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t_1}(C_1^1 - C_1^2) - e^{-t_1}(C_2^1 - C_2^2) = 0. \quad (3.26)$$

Із (3.24) і (3.26) складемо систему рівнянь для моменту часу  $t_1$ :

$$\begin{cases} -20 = e^{-\frac{1}{3}t_1}(C_1^1 - C_1^2) + e^{-t_1}(C_2^1 - C_2^2) \\ -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t_1}(C_1^1 - C_1^2) - e^{-t_1}(C_2^1 - C_2^2) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (3.27) відносно  $(C_1^1 - C_1^2)$  і  $(C_2^1 - C_2^2)$ :

$$(C_1^1 - C_1^2) = -30e^{\frac{1}{3}t_1}. \quad (3.28)$$

$$(C_2^1 - C_2^2) = 10e^{t_1}. \quad (3.29)$$

Враховуючи визначені раніше сталі інтегрування  $C_1^1$ ,  $C_1^2$ ,  $C_2^1$  і  $C_2^2$  рівняння (3.28) і (3.29) маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -27,818 - 7,5e^{\frac{1}{3}t_2} = -30e^{\frac{1}{3}t_1} \\ 9,993 + 2,5e^{t_2} = 10e^{t_1} \end{cases} \quad (3.30)$$

Система рівнянь (3.30) трансцендентна і не має аналітичного розв'язку.

Числове розв'язання (3.30) можливо виконати, наприклад, в ППП MathCAD.

Для розв'язання системи подамо її у вигляді:

$$\begin{cases} 30e^{\frac{1}{3}t_1} - 7,5e^{\frac{1}{3}t_2} - 27,818 = 0 \\ -10e^{t_1} + 2,5e^{t_2} + 9,993 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Нижче наведено послідовність операторів MathCAD для розв'язання (3.31):

$$\begin{aligned} & t1 := 1 \quad t2 := 1 \\ & \text{Given} \\ & \left( \begin{array}{cc} t1 & t2 \\ 30 \cdot e^{\frac{t1}{3}} - 7,5 \cdot e^{\frac{t2}{3}} - 27,818 & = 0 \\ -10 \cdot e^{t1} + 2,5 \cdot e^{t2} + 9,993 & = 0 \end{array} \right) \\ & t2 > t1 \\ & z := \text{Minerr}(t1, t2) \\ & z = \begin{pmatrix} 1,032 \\ 1,979 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc} 1,032 & 1,979 \\ 30 \cdot e^{\frac{1,032}{3}} - 7,5 \cdot e^{\frac{1,979}{3}} - 27,818 & = -6,747 \times 10^{-3} \\ -10 \cdot e^{1,032} + 2,5 \cdot e^{1,979} + 9,993 & = 0,015 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Відтак  $t_1 \approx 1,032$ , а  $t_2 \approx 1,979$ . Перший інтервал керування має розпочатися в момент часу  $t_0 = 7$  хв, зміна керувального впливу в момент  $t_1^* = 7 \text{ хв} + 1,032 \approx 8,032$  хв, кінець другого інтервалу керування в момент  $t_2^* = 7 \text{ хв} + 1,979 \approx 8,979$  хв.

Отже, час перехідного процесу буде дорівнювати 1,979 хв.

Перевірка отриманих результатів виконана методом моделювання в ППП MATLAB в додатку Simulink. Структурна схема системи наведена на рис.

3.8. Об'єкт керування подано у просторі стану:

$$z_1 = y. \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{1}{3}z_1 - \frac{4}{3}z_2 + \frac{2}{3}u \end{cases} \quad (3.33)$$

тут  $z_1, z_2$  – змінні стану.

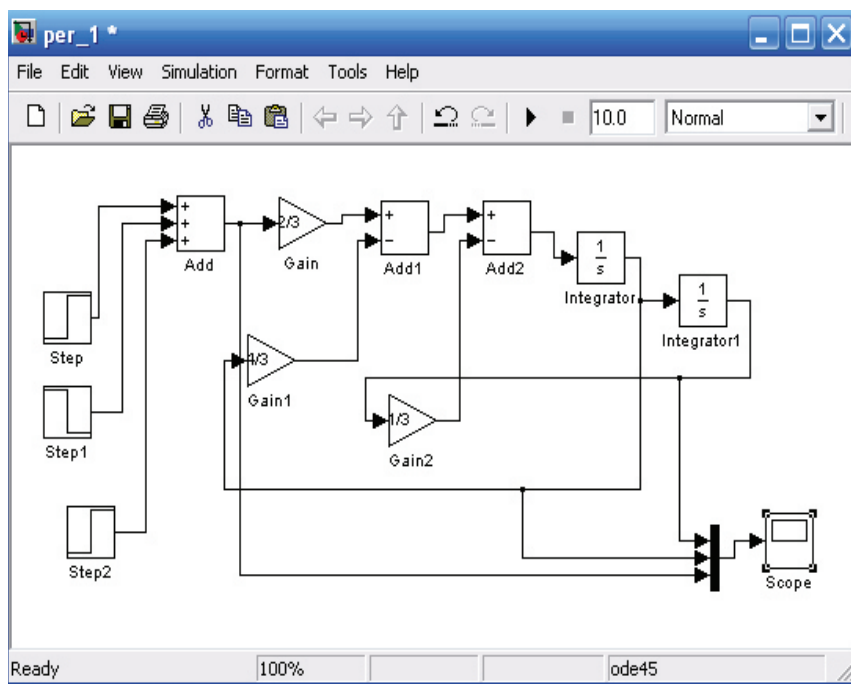


Рисунок 3.8 – Структурна схема моделі оптимальної САК.

Результати моделювання наведені на рис. 3.9.

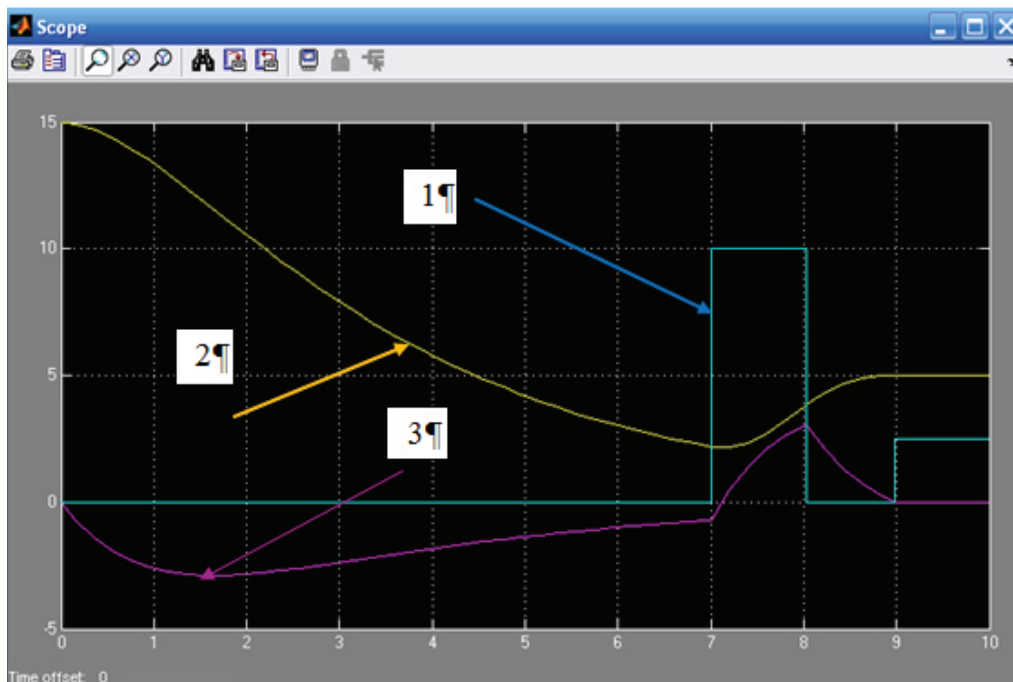


Рисунок 3.9 – Графік змін керувальної величини, керованої величини і похідної керованої величини.

- 1 – керувальний вплив – синій колір;
- 2 – керована величина – жовтий колір;
- 3 – похідна керованої величини – фіолетовий колір.

Із графіка на рис.3.9 видно, що керована величина під дією релейного керувального впливу переходить із поточного стану в момент часу  $t = 7$  хв у стан  $y_{t=t_k} = 5$  од.,  $\dot{y}_{t=t_k} = 0$  без перерегулювання і коливань.

### 3.5. Склад звіту:

- вихідні дані;
- системи рівнянь об'єктів керування у нормальній формі;
- системи рівнянь для відповідних інтервалів керування;
- система рівнянь в точці стикування за методом Ю.Г. Антомонова;
- текст програми розв'язання системи рівнянь для визначення моментів перемикання керуючих величин;
- результати моделювання оптимальних систем керування;
- висновки.



### 3.6 Контрольні запитання

1. Яка система називається оптимальною за швидкодією ?
2. Який вигляд має критерій системи автоматичного керування оптимальної за швидкодією?
3. В чому сутність принципу максимуму Понтрягіна?
4. Яка послідовність розрахунку оптимального керувального впливу за принципом максимуму Понтрягіна?
5. Що таке Гомельтоніан?
6. Що таке Понтрягіан?
7. Як визначити кількість перемикачів керувального впливу на інтервалі керування?
8. Як визначити знак керувального впливу на першому інтервалі керування?
9. В чому сутність метода стиковки розв'язків диференціальних рівнянь, запропонованого Ю.Г. Антомоновим?

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4 ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

### 4.1. Мета роботи

Поглибити знання студентів при вивченні розділу «Квазіоптимальні системи керування».

У процесі виконання роботи студенти повинні вміти:

- скласти системи рівнянь для розрахунку тривалості першого інтервалу керування квазіоптимальної САК за швидкодією з використанням принципу максимуму Понтрягіна (ПМП);
- визначити перший інтервал керування для різних значень величини перевищення значення керованої величини над її усталеним значення;

– встановлювати залежність тривалості першого інтервалу керування від величини перевищення значення керованої величини над її усталеним значення;

– виконати моделювання систем квазіоптимального керування.

#### 4.2. Вихідні дані

– структурна схема та числові параметри об'єкта керування (рис. 4.1, табл. 4.1);

– ППП MathCAD, MATLAB для розрахунку та моделювання автоматичних систем керування на ЕОМ.

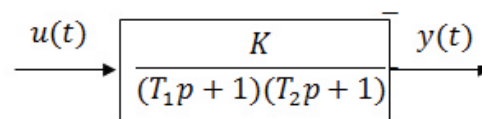


Рисунок 4.1 – Структурна схема об'єкта керування

Таблиця 4.1 – Вихідні данні

Варіант №	Параметри об'єкта керування		
	$T_1$	$T_2$	$K$
1	0,5	3,1	2
2	0,2	4,8	4
3	0,3	3,2	6
4	1,9	1,5	5
5	1,1	1,9	3
6	0,3	3,7	6
7	0,2	4,2	5
8	0,1	5,9	3
9	0,5	3,2	2
10	4,5	1,3	4
11	0,5	3,1	5
12	0,2	4,8	3
13	0,3	3,2	5
14	1,9	1,5	3
15	1,1	1,9	2
16	0,3	3,7	3
17	0,2	4,2	5
18	0,1	5,9	3
19	0,5	3,2	2
20	4,5	1,3	4

#### 4.3. Порядок виконання роботи:

- за теоремою про  $n$ -інтервалів визначити кількість інтервалів і кількість перемикачів керувального впливу;
- записати модель об'єкта керування в диференціальній формі;
- скласти системи рівнянь для кожного інтервалу керування, враховуючи величину перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням;
- виконати стикування розв'язань диференціальних рівнянь за методом Ю.Г. Антомонова;
- зменшити кількість інтервалів керування;
- визначити моменти перемикачів керувальної величини в залежності від величини перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням;
- визначити залежність першого інтервалу керування від величини перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням;
- побудувати графіки теоретичної і експериментальної залежності першого інтервалу керування і величини перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням;
- методом моделювання на ЕОМ системи квазіоптимального за швидкодією керування перевірити коректність розрахунків моментів перемикачів керувального впливу;
- зробити висновки.

#### 4.4. Методичні пояснення

Квазіоптимальне за швидкодією керування технологічним об'єктом виникає, якщо:

- необхідно знизити порядок диференціального рівняння об'єкта керування;
- виключити інтервали керування настільки малої тривалості, що практична реалізація їх неможлива.

У першому випадку об'єкт керування розбивають на окремі ланки і виключають ті з них, які мають малі постійні часу. Ці ланки запасують малі кількості енергії або речовини і дуже слабо впливають на перехідний процес. У другому випадку виключення інтервалів керування малої тривалості не призведе до більших помилок керування внаслідок малих енергій, що припадають на ці інтервали.

Разом з тим можна виключати і інтервали великої тривалості за умови дотримання обмежень стосовно величини перерегулювання  $\sigma$ . В цьому випадку перехідний процес буде нескінченної тривалості, але відхилення вихідної величини буде в заданих межах.

**Приклад 4.1.** Об'єкт керування заданий диференціальним рівнянням другого порядку  $3,362 \frac{d^2y}{dt^2} + 3,677 \frac{dy}{dt} + y = 0,845u$ . Застосовуючи ПМП і виключивши один інтервал керування, визначити оптимальний за швидкістю керувальний вплив  $u_{opt}$  для переведення об'єкта із початкового стану  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  в кінцевий стан  $y(T) = 5$  таким чином, щоб перевищення вихідної величини  $\Delta u$  над її кінцевим значенням було в межах  $\Delta u \leq \Delta u_{max}$ . Розрахувати залежність  $T_{кер} = f(\Delta u_{max})$ .

**Розв'язання.** Розглянемо керування тепловим об'єктом другого порядку з одним інтервалом керування, де враховується максимальне значення перевищення вихідної величини  $\Delta u_{max}$  над ustalеним значенням  $y_{уст}$ . Позначимо через  $t_2$  інтервал часу, за який вихідна величина досягне максимального значення  $y_{уст} + \Delta u_{max}$ , а через  $t_1$  момент часу переключення керувального впливу (рис. 4.2). Скористаємося стикуванням рішень.

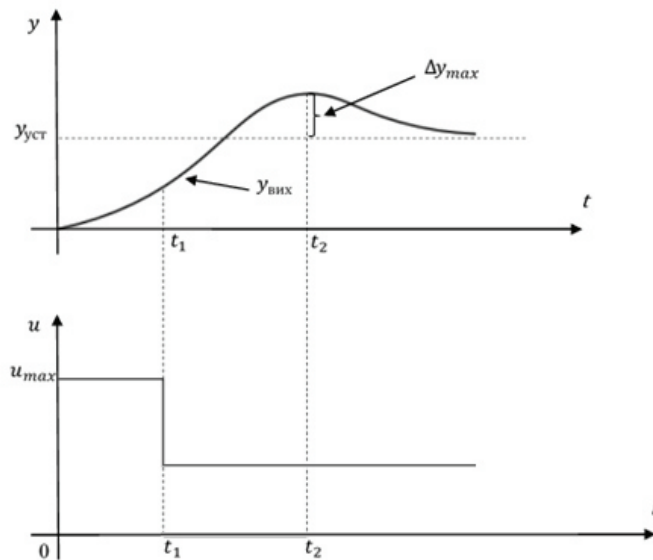


Рисунок 4.2 – Графіки до розв’язання задачі

У загальному випадку розв’язок диференціального рівняння в момент  $t_2$  має вигляд:

$$\begin{cases} y_{уст} + \Delta y_{max} = kU + C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} + C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \\ 0 = -\alpha_1 C_1^2 e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2^2 e^{-\alpha_2 t_2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут  $k$  – коефіцієнт підсилення динамічної моделі;  $U$  – значення керувальної величини в момент часу  $t_2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2$  – корені характеристичного рівняння динамічної моделі,  $C_1^2, C_2^2$  – сталі інтегрування.

Розв’язок на момент часу  $t = 0$ :

$$\begin{cases} 0 = kU_{max} + C_1^1 + C_2^1 \\ 0 = -\alpha_1 C_1^1 - \alpha_2 C_2^1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Тут  $C_1^1, C_2^1$  – сталі інтегрування.

В результаті стикування розв’язків (4.1) і (4.2) на момент часу  $t_1$  дістанемо:

$$\begin{cases} kU_{max} + C_1^1 e^{-\alpha_1 t_1} + C_2^1 e^{-\alpha_2 t_1} = kU + C_1^2 e^{-\alpha_1 t_1} + C_2^2 e^{-\alpha_2 t_1} \\ -\alpha_1 C_1^1 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2^1 e^{-\alpha_2 t_1} = -\alpha_1 C_1^2 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2^2 e^{-\alpha_2 t_1} \end{cases} \quad (4.3)$$

Визначивши сталі інтегрування  $C_1^2, C_2^2, C_1^1$  і  $C_2^1$  із систем (4.1), (4.2) і підставивши їх математичні вирази в (4.3), після тотожних перетворень дістанемо систему рівнянь з двома невідомими  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\begin{cases} \frac{y_{уст} + \Delta y_{max} - kU}{kU_{max}} e^{-\alpha_1 t_2} - \left(1 - \frac{U}{U_{max}}\right) e^{-\alpha_1 t_1} + 1 = 0 \\ \frac{y_{уст} + \Delta y_{max} - kU}{kU_{max}} e^{-\alpha_2 t_2} - \left(1 - \frac{U}{U_{max}}\right) e^{-\alpha_2 t_1} + 1 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Вона є трансцендентною. А її розв'язанням є значення значення  $t_1$  і  $t_2$ , із яких суттєвим є  $t_1$ . В табл. 4.2 наведені результати розв'язання системи (4.4) відносно  $t_1$  і  $t_2$ , виконаних у програмному середовищі Mathcad з використанням функції *Minerr* для  $y_{уст} = 5$  і різних значень перевищення вихідної величини  $\Delta y_{max}$ .

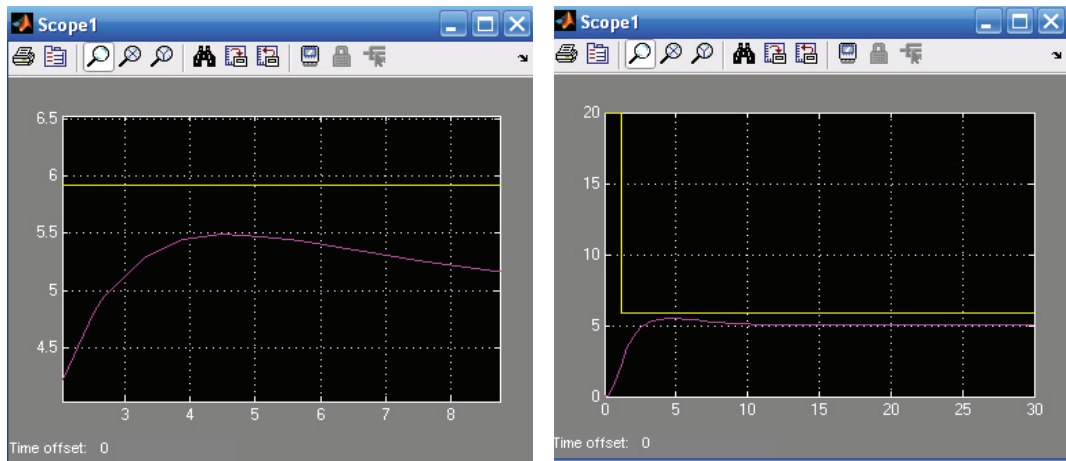
В табл. 4.2 у другому рядку наведена величина перерегулювання  $\sigma$ , яка розрахована за формулою:

$$\sigma = \frac{\Delta y_{max}}{y_{уст}} \cdot 100\% \quad (4.5)$$

Таблиця 4.2 – Результати розрахунків інтервалів керування

Перевищення $\Delta y_{max}$	0,05	0,15	0,25	0,5	1,0	2,0
Величина перерегулювання $\sigma$ , %	1	3	5	10	20	40
Інтервал керування $t_1$ , хв	0,888	0,987	1,058	1,201	1,44	1,869
Час досягнення максимального значення вихідної величини величини $t_2$ , хв	7,049	5,726	5,18	4,539	4,055	3,81

Графік перехідного процесу, отриманого моделюванням в додатку SIMULINK Matlab для  $\Delta y_{max} = 0,5$ , наведений на рис. 4.3. Як видно параметри перехідного процесу відповідають розрахованим значенням в табл. 4.2.



а)

б)

Рисунок 4.3 – Графіки змін керувального впливу і керованої величини при  $\Delta u_{max} = 0,5$ ;  $\sigma = 10\%$ : а) загальний вигляд перехідного процесу і керування б) максимальне перевищення  $\Delta u_{max}$

За даними табл. 4.2 виконаний розрахунок нормованого коефіцієнта кореляції  $r_{\Delta u_{max}, t_1}$  для перевірки наявності лінійного зв'язку між величинами  $\Delta u_{max}$  и  $t_1$  за методикою. Результати розрахунків наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Результати розрахунку нормованого коефіцієнта кореляції

	Середн є $\frac{\Delta u_{max}}{t_1}$	Середньоквадратич не відхилення, $\sigma_{\Delta u_{max}}, \sigma_{t_1}$	Дисперсі я, $D_{\Delta u_{max}},$ $D_{t_1}$	Коефіцієн т кореляції, $R_{\Delta u_{max}, t_1}$	Нормовани й коефіцієнт кореляції, $r_{\Delta u_{max}, t_1}$
Перевищен ня $\Delta u_{max}$	0,66	0,69	0,47	0,25	0,99
Інтервал керування $t_1$ хв	1,23	0,36	0,13		

Нормований коефіцієнт кореляції  $r_{\Delta u_{max}, t_1}$  наближений до одиниці, що відповідає наявності лінійного зв'язку між величинами  $\Delta u_{max}$  и  $t_1$ . Лінійний зв'язок  $t_1 = f(\Delta u_{max})$  визначається із наступного виразу:

$$t_1 - \bar{t}_1 = r_{\Delta T, t_1} \frac{\sigma_{t_1}}{\sigma_{\Delta T}} (\Delta u_{max} - \overline{\Delta u_{max}}). \quad (4.6)$$

Після підстановки в (4.6) значень параметрів із табл. 4.3 дістанемо:

$$t_1 - 1,23 = 0,99 \frac{0,36}{0,69} (\Delta y_{max} - 0,66). \quad (4.7)$$

В результаті тотожних перетворень остаточно маємо:

$$t_1 = 0,89 + 0,52\Delta y_{max}. \quad (4.8)$$

На рис. 4.4 наведено графіки експериментальної (згідно з табл. 4.2) і теоретичної (у відповідності до (4.8) залежності. Як бачимо теоретична пряма добре описує експериментальні дані.

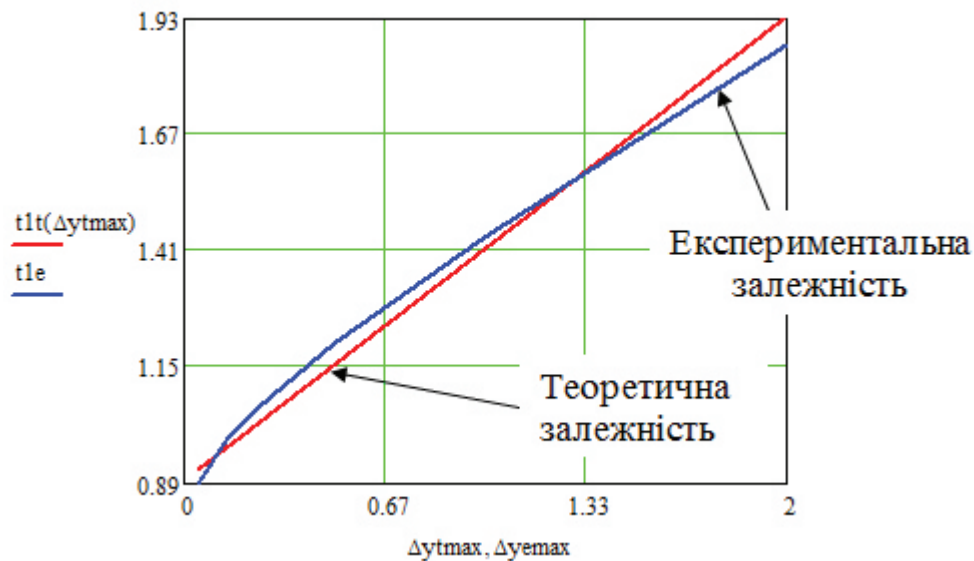


Рисунок 4.4 – Графіки залежності  $t_1 = f(\Delta y_{max})$

#### 4.5. Зміст звіту

- вихідні дані;
- системи диференціальних рівнянь для моментів часу  $t = 0$ ,  $t = t_1$ ,  $t = t_2$ ;
- трансцендентна система рівнянь для визначення інтервалів керування;
- графік перехідного процесу з одним інтервалом керування для однієї із величин перевищення значення керованої величини над її усталеним значенням;



– залежність між першим інтервалом керування і величиною перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням;

– графіки теоретичної і експериментальної залежності першого інтервалу керування від величини перевищення значення керованої величини над її ustalеним значенням.

#### 4.6. Контрольні запитання:

1. Що таке квазіоптимальна система автоматичного керування?
2. Чи відрізняються критерії оптимізації в оптимальній і квазіоптимальній за швидкодією системах автоматичного керування?
3. У яких випадках можливо понизити кількість інтервалів керування?
4. Який час триває перехідний процес в квазіоптимальній за швидкодією системі автоматичного керування?
5. На який показник якості системи автоматичного керування впливає тривалість першого інтервалу керування?
6. Чи відбувається зміна керованої величини на другому інтервалі керування?
7. Чому дорівнює керована величина після закінчення другого інтервалу керування?
8. Чому дорівнює похідна керованої величини в кінці другого інтервалу керування?
9. Як визначити наявність лінійного зв'язку між параметрами квазіоптимальної системи автоматичного керування?

## СПИСОК ПОСИЛАНЬ

1. Основы теории оптимального управления. Под ред. В.Ф.Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 429 с.
2. Оптимальне керування системами: навчальний посібник Л. Р. Ладієва. – К.:НМЦ ВО, 2000, – 187с.
3. Варіаційне числення та методи оптимізації: Навчальний посібник Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В, Ловейкін Ю.В.. – К.: КНУ. – 2010. – 121 с.
4. Actual problems of science. Monograph: edited by Skyba M., Topolinski T., Musial J., Polishcuk O. – 2019. – 342. Monograph is prepared at the Khmelnytskyi University in cooperation with UTP University of Science and Technology, Bydgoszcz, Poland.
5. Tryputen Myk., Complex training of specialist in the field of automation using a laboratory bench / Tryputen Myk., Kuznetsova Y., Kuznetsov V., Tryputen Mak., Kuznetsova A. Pp. 267 – 276.
6. Tryputen Nikolay, Kuznetsov Vitaliy, Kuznetsova Yevheniia (2019). About the Possibility of Researching the Optimal Automatic Control System on a Physical Model of a Thermal Object. 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering Lviv, Ukraine, July 2 – 6, 2019, pp. 1244 – 1248.
7. Mykola Tryputen, Serdiuk Tatiana, Vitaliy Kuznetsov, Alisa Kuznetsova, Maksym Tryputen and Mykola Babyak One Approach to Quasi-Optimal Control of Direct Current Motor .2019 IEEE 5th International Conference “Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments”(APUAVD) .October 22 – 24, 2019. Kyiv, Ukraine. Pp. 190 – 193.

**Трипутень** Микола Мусійович  
**Воскобойник** Євген Костянтинович

**ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ**  
**(класичні методи)**

Методичні рекомендації  
до виконання лабораторних робіт  
для студентів напряму підготовки  
151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Видано в редакції авторів

Підписано до друку 01.03.2021. Формат 30x42/4.  
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,7.  
Обл.-вид. арк. 2,7. Тираж 20 пр. Зам. №

Національний технічний університет  
“Дніпровська політехніка”.  
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.