

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**



Д.Л. Колосов, В.Я. Кіба

**ОПР МАТЕРІАЛІВ
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАВДАННЯХ**

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ "ДП"
2021

УДК [620.17+539.3/5](075.8)
К61

Рекомендовано до видання вченою радою НТУ “Дніпровська політехніка” як навчальний посібник для бакалаврів, які навчаються за спеціальностями галузі знань 13 Механічна інженерія (протокол № 2 від 08.12.2020).

Рецензенти:

Л.М. Васильєв – д-р техн. наук, проф., провідний науковий співробітник ІГТМ ім. М.С. Полякова НАН України;

С.Т. Пацера – канд. техн. наук, професор кафедри технологій машинобудування і матеріалознавства Національного технічного університету “Дніпровська політехніка”.

Колосов Д.Л.

К 61 Опір матеріалів у прикладах та завданнях: навч. посіб. / Д.Л. Колосов, В.Я. Кіба ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т “Дніпровська політехніка”. – Дніпро : НТУ “ДП”, 2021. – 106 с.

Розглянуто стисло теоретичний матеріал та наведено приклади розрахунку елементів конструкцій на міцність з використанням таблиць сортаменту для стандартних профілів.

Все це дає можливість унаочнити процес засвоєння даного матеріалу.

Для студентів всіх форм навчання з напрямками підготовки, де викладається дисципліна «Опір матеріалів».

УДК [620.17+539.3/5](075.8)

© Д.Л. Колосов, В.Я. Кіба, 2021.

© НТУ “Дніпровська політехніка”, 2021.

Вступ

У сучасних умовах при проектуванні машин, механізмів та споруд необхідно враховувати показники міцності їх складових, які визначаються їх розрахунком. Безпека роботи машин потребує також розрахунків їх деталей на жорсткість та стійкість.

Опір матеріалів – це експериментально-теоретична наука про міцність, жорсткість та стійкість деталей (елементів машин, механізмів та споруд). При розрахунках враховується й економічна сторона питання, тобто при проектуванні висувається умова щодо найменших витрат матеріалів для виготовлення деталей.

Усе різноманіття елементів, що використовуються в машинах, механізмах та спорудах, за своїм призначенням можна поділити на декілька основних груп.

Стрижень (брус) – елемент, у якого один з розмірів значно перевищує обидва інших. До них відносяться профілі (кутник, швелер та ін.), вали, балки. Вони можуть бути однакового та різного перерізу, прямолінійні та криволінійні.

Оболонка – елемент, в якому обидва розміри значно перевищують третій. Це корпуса котлів, суден, купола.

Пластина – елемент, у якого уся поверхня плоска.

Масивне тіло – елемент, у якого усі три розміри одного порядку. Прикладом є суцільний фундамент.

В основі положень дисципліни “Опір матеріалів” лежать закони і теореми загальної механіки, переважно статички. Але на відміну від теоретичної механіки, де деформація тіл не враховується, в опорі матеріалів вона суттєво впливає на отримання результату під час розв’язання задач.

У посібнику розглянуті такі теми: розрахунок стрижнів при осьовому розтяганні – стисненні; аналіз напружено-деформованого стану тіла; а також розрахунки геометричних характеристик плоского перерізу, вала на кручення; балок на згин, статично невизначуваних рам і статично невизначуваних балок.

Кожна тема супроводжується конкретними прикладами у вигляді розв’язання задач.

1. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСНЕННЯ

1.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Головним елементом у спорудах та машинах є бруси, який витримує значне навантаження на міцність, жорсткість і стійкість.

Стрижнем або брусом називається тіло, в якому один розмір значно перевищує два інші розміри.

Розглянемо випадки навантаження бруса на розтягання – стиснення.

Розтяганням – стисненням називається вид опору, при якому в поперечних перерізах бруса виникає тільки внутрішня поздовжня сила N_i , спрямована вздовж його осі. Такий вид деформації виникає тоді, коли до бруса вздовж осі прикладені зовнішні сили. При цьому відбувається переміщення перерізів уздовж осі бруса.

При розтяганні брус подовжується, а при стисненні – вкорочується. У розрахунках визначають ті додаткові внутрішні сили, які виникають унаслідок навантажування тіла. Для виявлення і визначення внутрішніх сил застосовують метод перерізів, що виконується у такій послідовності:

- умовно перерізають брус на дві частини січною площиною;
- одну частину бруса відкидають;
- замінюють вплив відкинутої частини бруса на залишену частину бруса внутрішніми силами.

Зрівноважують внутрішні сили зовнішніми, що діють на залишену частину, визначаючи внутрішні сили з умов рівноваги системи сил, які діють на цю частину.

Враховуючи співвідношення внутрішніх сил і площу, на якій виникають сили, матимемо середню до площі інтенсивність внутрішніх сил. Таке співвідношення при осьовому розтяганні – стисненні називається напруженням. Отже, напруження – це інтенсивність внутрішніх сил, які діють на заданій площині у даній точці тіла. Вектор напружень має довільний напрямок до площини. Тому його розкладають на такі складові: нормальні напруження σ_i ,

дотичні або тангенціальні напруження τ_i . Нормальні напруження при осьовому розтяганні – стисненні у поперечному перерізі розраховуються за формулою

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i},$$

де N_i – поздовжня сила; F_i – площа поперечного перерізу бруса.

Графік, котрий відображує як змінюється внутрішній силовий фактор уздовж осьової лінії бруса, називається епюрою. Такі епюри будують як для поздовжніх сил N , так і для нормальних напружень σ .

У межах призматичної ділянки бруса довжиною l , у перерізах якої діють однакові поздовжні сили N , подовження кожної одиниці довжини однакові. Отже, абсолютне подовження бруса визначають як

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{N_i l_i}{E_i F_i},$$

де N_i – поздовжня сила; l_i – довжина ділянки бруса; E_i – модуль пружності (модуль Юнга першого роду) матеріалу бруса, який характеризує здатність матеріалу чинити опір деформуванню. Величину $E_i F_i$ називають жорсткістю бруса при осьовому розтяганні або стисненні.

Повну (абсолютну) деформацію бруса, що спостерігається на декількох ділянках, визначають як алгебраїчну суму деформацій усіх його ділянок.

На базі гіпотези плоских перерізів можна дійти до висновку, що усі волокна подовжуються на одну й ту саму величину та їхні відносні подовження ε – однакові, тобто

$$\varepsilon = \Delta l / l,$$

де l – довжина бруса.

При пружних деформаціях ця залежність лінійна і зв'язана з нормальним напруженням σ законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

За аналогією з поздовжньою деформацією можна розрахувати відносну поперечну деформацію як $\varepsilon' = \Delta b/b$, де b – ширина бруса.

Між поперечною та поздовжньою відносними деформаціями при розтяганні та стисненні у межах закону Гука існує співвідношення, абсолютне значення якого має назву коефіцієнта Пуассона μ .

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon;$$

$$\mu = |\varepsilon'/\varepsilon|.$$

Для ізотропних матеріалів $0 \leq \mu \leq 0,5$.

У разі розрахунку бруса на розтягання або стиснення знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень, і для таких перерізів умова міцності має вигляд

$$|\sigma|_{max} = \frac{|N|_{max}}{F} \leq [\sigma].$$

При розтяганні у праву частину умови підставляють допустимі напруження на розтяг $[\sigma_+]$, а при стисненні – допустимі напруження на стиск $[\sigma_-]$.

Допустиме нормальне напруження тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{неб}}{k},$$

де $\sigma_{неб}$ – небезпечне напруження, яке визначають експериментально;

k – коефіцієнт запасу міцності.

Для пластичних матеріалів $\sigma_{неб} = \sigma_t$ – границя плинності; для крихких матеріалів $\sigma_{неб} = \sigma_b$ – границя міцності.

Допустиму величину навантаження $|N| = P$ можна визначити з умови міцності

$$|N| = [\sigma] F,$$

а потрібну площу поперечного перерізу як

$$F_{\text{погр.}} = \frac{|N|}{[\sigma]}.$$

Умова міцності для бруса постійного поперечного перерізу з урахуванням власної ваги

$$|\sigma|_{\text{max}} = \left| \frac{N}{F} + \gamma l \right| \leq [\sigma].$$

Розпочинати розрахунок треба з встановлення ступеня статичної невизначеності розглянутої системи. При цьому від кількості невідомих зусиль і незалежних реакцій треба відняти кількість незалежних рівнянь статички.

Якщо система статично невизначувана, то для її розрахунку рівнянь статички недостатньо, і на основі розгляду деформації системи необхідно скласти додаткові рівняння – рівняння сумісності деформацій. Потрібна кількість додаткових рівнянь дорівнює ступеню статичної невизначеності.

1.2. Послідовність розв'язання задачі з урахуванням власної ваги

Ступінчастий брус перебуває під дією зосередженої зовнішньої сили P та власної ваги. При $a=2$ м, $b=1$ м, $c=4$ м, $d=3$ м, $F_1=0,2$ м², $F_2=0,4$ м², $P=50$ кН, $\gamma=78$ кН/м³, $E=2,0 \cdot 10^5$ МПа та, враховуючи власну вагу, потрібно:

а) побудувати епюру поздовжніх сил N ; б) визначити переміщення перерізу $A-A$ відносно жорсткого закріплення.

Розв'язування задачі

Брус, який розглядається на рисунку 1.1, a , має три ділянки. Кожну ділянку пронумеруємо римськими цифрами, і розрахунок внутрішніх зусиль N почнемо від вільного кінця (рисунок 1.1).

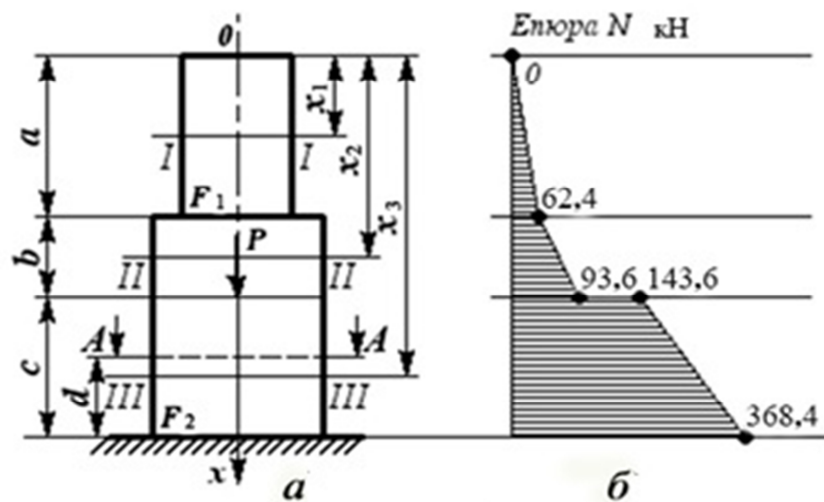


Рисунок 1.1. Схема для розрахунку навантаження бруса (а) та еюри внутрішніх зусиль(б)

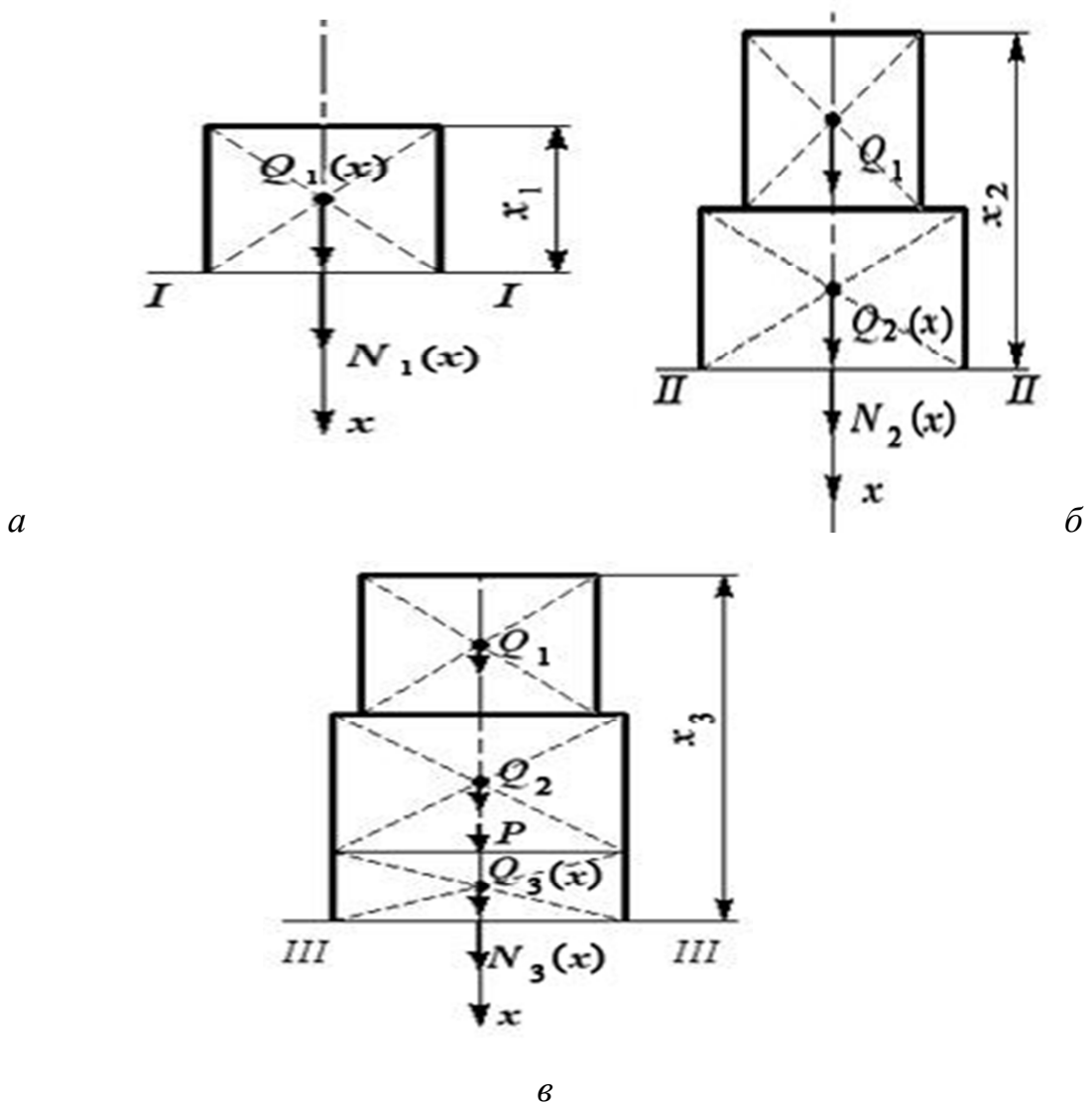


Рисунок 1.2. Розрахункові схеми ділянок I (а), II (б), III (в)

Ділянка I ($0 \leq x_1 \leq a, a = 2$ м), див. рисунок 1.2, а:

$$\sum x = N_1(x) + Q_1(x) = 0;$$

$$Q_1(x) = F_1 \gamma x_1;$$

$$N_1(x) = F_1 \gamma x_1.$$

При $x_1 = 0$ $N_{(0)} = -0,2 \cdot 78 \cdot 0 = 0$.

При $x_1 = 2$ м $N_{(2)} = -0,2 \cdot 78 \cdot 0 - 62,4 = -62,4$ кН;

$Q_1 = 0,2 \cdot 78 \cdot 4 = 62,4$ кН, це власна вага ділянки I.

Ділянка II ($2 \text{ м} \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$), див. рисунок 1.2, б:

$$\sum x = N_2(x) + Q_1 + Q_2(x) = 0;$$

$$Q_2(x) = \gamma F_2 (x_2 - a);$$

$$N_2(x) = -Q_1 - \gamma F_2 (x_2 - a).$$

При $x_2 = 2$ м $N_{(2)} = -62,47 - 8 \cdot 0,4 \cdot (2 - 2) = -62,4$ кН.

При $x_2 = 3$ м $N_{(3)} = -62,4 - 78 \cdot 0,4 \cdot (3 - 2) = -93,6$ кН.

$Q_2 = 78 \cdot 0,4 \cdot 1 = 31,2$ кН, це власна вага ділянки II.

Ділянка III ($3 \text{ м} \leq x_3 \leq 7 \text{ м}$), див. рисунок 1.2, в :

$$\sum x = N_3(x) + P + Q_1 + Q_2 + Q_3(x) = 0;$$

$$Q_2(x) = \gamma F_2 (x_3 - (a + b));$$

$$P_3(x) = P - Q_1 - Q_2 - \gamma F_2 (x_3 - (a + b)).$$

При $x_3 = 3$ м $N_3 = -50 - 62,4 - 31,2 = -143,6$ кН;

При $x_3 = 7$ м $N_{(7)} = -50 - 78 \cdot 0,4 \cdot (2 - 2) = -62,4$ кН.

$Q_3 = 78 \cdot 0,4 \cdot 4 = 124,8$ кН, це власна вага ділянки III.

За отриманими даними побудуємо епюру N (рисунок 1.1, б).

Переміщення перерізу $A-A$ відносно жорсткого закріплення (δ_{A-A}) визначимо як алгебраїчну суму абсолютних деформацій усіх частин бруса, розташованих між перерізом та закріпленням, тобто

$$\delta_{A-A} = -\frac{(P + Q_1 + Q_2 + Q_3^*) a}{EF_2} - \frac{Q_3^* d}{2EF_2},$$

де $Q_3^* = \gamma F_2 (c - d) = 78 \cdot 0,4(4 - 3) = 31,2$ кН.

Далі розглянемо розрахунок ваги нижньої ділянки III.

$$Q_3^{**} = \gamma \cdot F_2 \cdot d = 78 \cdot 0,4 \cdot 3 = 93,6 \text{ кН.}$$

Підставимо числові значення величин і отримаємо :

$$\begin{aligned} \delta_{A-A} &= -\frac{(50 + 62,4 + 31,2 + 31,2) \cdot 10^3 \cdot 3}{2,0 \cdot 10^{11} \cdot 0,4} - \\ &-\frac{93,6 \cdot 10^3 \cdot 3}{22,0 \cdot 10^{11} \cdot 0,4} = -0,731 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,00731 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Переміщення перерізу $A - A$ відносно жорсткого закріплення $\delta_{A-A} = -0,007$ мм

Висновок: за заданим у схемі зовнішнім навантаженням та, використовуючи метод перерізів, побудована епюра внутрішніх зусиль з урахуванням власної ваги кожної ділянки бруса.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. А.

2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БРУСА

2.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Напружено – деформованим станом називають сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють у всіх площинах, які проходять через розглянуту точку.

Якщо через розглянуту точку неможливо провести жодної площини, в якій нормальні та дотичні напруження дорівнювали б нулю, то така точка буде

знаходиться в напруженому стані. Коли в одній площині нормальні та дотичні напруження дорівнюють нулю, то у цій точці буде плоский напружений стан. Якщо на двох площинах діють нормальні та дотичні напруження, які проходять через розглянуту точку і дорівнюють нулю, то у такій точці виникає лінійний (одноосьовий) напружений стан.

У разі, коли на гранях елемента відсутні дотичні напруження, тобто $\tau = 0$, то такі площини називаються головними, а нормальні напруження, які діють на таких площинах, – головними напруженнями.

Якщо розглядаємо об'ємний напружений стан, то три головних напруження відрізняються від нуля і позначаються в алгебраїчному розумінні як $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Для плоского напруженого стану, коли в одній із площин напруження визивають розтягання, то будемо вважати їх додатними, а які визивають стиснення, – від'ємними. Дотичні напруження τ вважають додатними, якщо вони намагаються обернути розглянутий елемент за ходом годинникової стрілки, у протилежному напрямку обертання – від'ємними.

Враховуючи закон парності дотичних напружень $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, плоский напружений стан можна характеризувати двома головними напруженнями $\sigma_{max}, \sigma_{min}$, які діють на головних поверхнях, або трьома напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x$, які діють у довільно орієнтованих неголовних площинах.

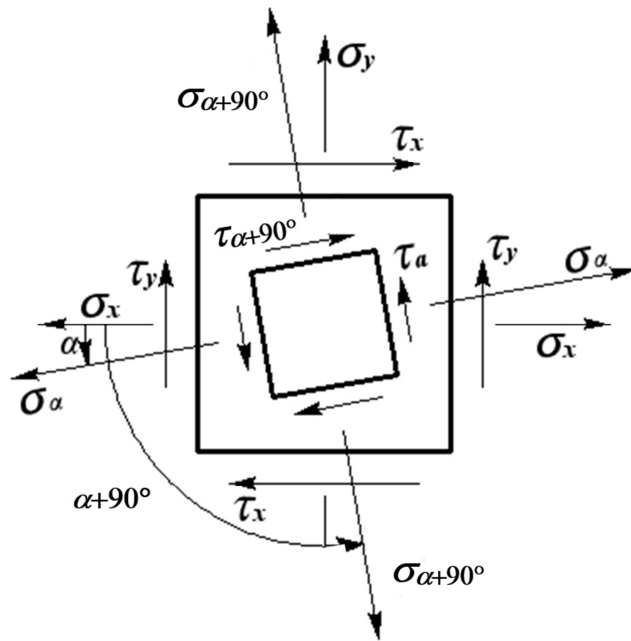


Рисунок 2.1. Схема для розрахунку напруженого стану елемента на похилих площинах

Напруження, які діють на довільних похилих площинах під кутами α та $\alpha = 90^\circ$ відносно початкових площин, визначаються за формулами :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha; \\ \sigma_{\alpha+90^\circ} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Кут α – вважається додатним, коли сторона призми, на якій діють напруження σ_x , обертається на цей кут проти ходу годинникової стрілки (рисунок 2.1).

Поверхні, на яких діють головні напруження, називаються головними, а максимальні та мінімальні нормальні напруження також називаються головними напруженнями і розраховуються як

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}.$$

Перед коренем знак «+» відповідає σ_{max} , а знак «-» відповідає σ_{min} . Враховуючи, що на головних поверхнях дотичні напруження дорівнюють нулю, то положення таких поверхонь розраховується так :

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Якщо $\alpha > 0$, то площини, на яких діють напруження σ_x, σ_y , треба повернути проти ходу годинникової стрілки (рисунок 2.1).

При плоскому напруженому стані сума нормальних напружень, які діють у двох довільних взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через розглянуту точку, буде постійною, тобто

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min}.$$

Тоді екстремальні дотичні напруження розраховуються за формулою

$$\tau_{max/min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Відносні деформації елемента для об'ємного напруженого стану за трьома головними напрямками згідно із законом Гука записуються так:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], \end{aligned} \right\}$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальні напруження, які діють на бокових гранях паралелепіпеда; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – відносні деформації ребер паралелепіпеда.

Таким чином, відносна об'ємна деформація елемента

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

а з урахуванням узагальненого закону Гука

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Виконуючи розрахунки плоского напруженого стану, для визначення $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_V$ слід задати, щоб відповідне нормальне напруження, при якому одне з трьох σ_x , або σ_y , або σ_z дорівнювало нулю.

2.2. Послідовність розв'язання задачі

Для сталевго кубика, на бокових гранях якого діють напруження σ_x, σ_y і $\tau_x = -\tau_y$, потрібно знайти: 1) головні напруження і положення головних площин; 2) екстремальні дотичні напруження; 3) відносні деформації у трьох головних напрямках; 4) відносне змінювання об'єму кубика; 5) питому потенціальну енергію деформації, якщо відомо що, $\sigma_x = 200$ МПа; $\sigma_y = -90$ МПа; $\tau_x = -\tau_y = -80$ МПа; $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Сталевий кубик знаходиться у плоскому напруженому стані; зображуємо його як плоский елемент, вказавши напрямки дії напружень (рисунок 2.2).

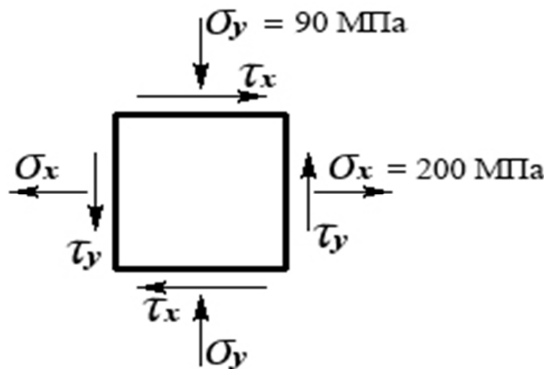


Рисунок 2.2. Схема для розрахунку плоского напруженого стану елемента

Положення головних площин та значення головних напружень визначимо за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-80)}{200 - (-90)} = 0,552.$$

Тоді

$$2\alpha = 28^\circ, \text{ а кут } \alpha = 14^\circ.$$

Напрямок дії головного напруження σ_{max} визначається за допомогою кута, див. рисунок 2.3,

$$\alpha + 90^\circ = \alpha_{min} = 104^\circ.$$

Головні напруження σ_{max} розраховуємо за такою формулою :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \\ &= \frac{200 + (-90)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200 - (-90)}{2}\right)^2 + 80^2} = (55 \pm 165) \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Тоді $\sigma_{max} = 220$ МПа, $\sigma_{min} = -110$ МПа.

Перевіримо виконання інваріантності суми нормальних напружень на перпендикулярних площинах:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min} = \text{const};$$

$$200 + (-90) = 220 + (-110);$$

$$110 = -110.$$

Дійсні напрямки напружень і розташування площин відносно довільних площин розглянуті на рисунку 2.3. Зв'язок між головними напруженнями при плоскому та об'ємному напруженому стані можна записати так:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = 220 \text{ МПа}; \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{min} = -110 \text{ МПа.}$$

Тоді екстремальне дотичне напруження

$$\tau_{\max} \\ \tau_{\min} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{220 - (-110)}{2} = \pm 165 \text{ МПа.}$$

Відносне змінювання об'єму кубика згідно із законом Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

або

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [220 - 0.3(0 + (-110))] = 9,35 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0.3(-110 + (-220))] = -1,65 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-110 - 0.3(220 + 0)] = -8,8 \cdot 10^{-4}.$$

Відносна об'ємна деформація кубика

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (9,35 - 1,65 - 8,8) \cdot 10^{-4} = 1,1 \cdot 10^{-4}.$$

Питома потенціальна енергія деформації

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)] =$$

$$= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3] = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \times$$

$$\times [220^2 + 110^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 220 \cdot (-110)] = 0,187 \text{ Дж/м}^3.$$

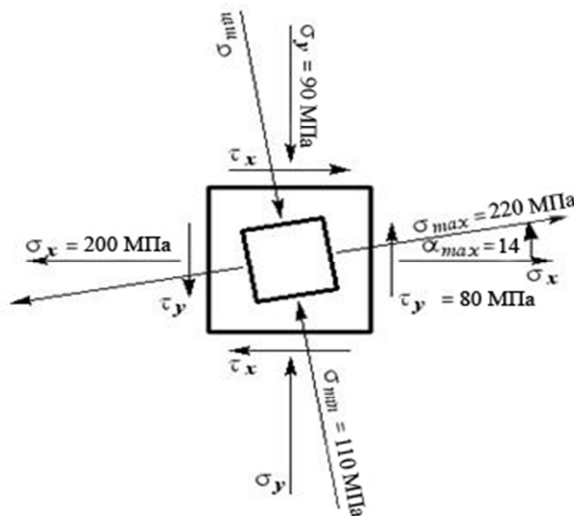


Рисунок 2.3. Схема для розрахунку напруженого стану довільних та нахилених площин

Висновок: виконано розрахунок напруженого стану сталевго кубика, на бокових гранях якого задані нормальні та дотичні напруження. Визначені головні напруження кубика при плоскому напруженому стані та положення похилих площин з урахуванням узагальненого закону Гука, а також відносні його деформації.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. В.

3. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

При розрахунках бруса, який отримує різні навантаження, його деформації залежать від форми поперечного перерізу, де він розглядається.

Розглянемо для довільного перерізу деякі геометричні характеристики, які зустрічаються при розрахунках.

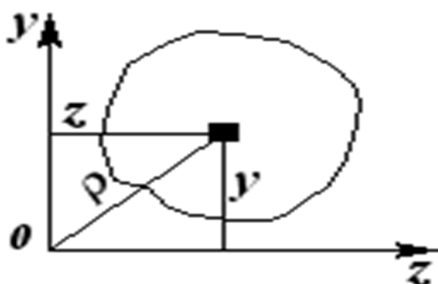


Рисунок 3.1. Картина координат довільного перерізу бруса

Площа перерізу

$$F = \int_F dF .$$

Статичні моменти відносно осей z, y (рисунок 3.1)

$$S_z = \int_F y dF ;$$

$$S_y = \int_F z dF .$$

Залежно від розташування осей статичні моменти бувають такими:

$S_z, S_y = 0$, якщо осі проходять через центр ваги перерізу, а якщо осі не проходять через центр ваги перерізу, то $S_z, S_y \geq 0$ або $S_z, S_y \leq 0$.

Щоб розрахувати статичні моменти складної фігури, її розбивають на кілька частин і визначають статичні моменти як суму частини кожної фігури, тобто

$$S_z = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i;$$

$$S_y = F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n = \sum_{i=1}^n F_i z_i.$$

У такому разі координати центра ваги перерізу (x_c, y_c) у системі xOy

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i};$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Моменти інерції довільної фігури (рисунок 3.2) відносно осей z, y

$$J_z = \int_F y^2 dF;$$

$$J_y = \int_F z^2 dF.$$

Полярний момент інерції фігури відносно полюса O (рисунок 3.1)

$$J_p = \int_F \rho^2 dF;$$

$$\rho^2 = z^2 + y^2.$$

Відцентрові моменти інерції перерізу відносно осей z, y

$$J_{zy} = \int_F zy \cdot dF.$$

Статичний момент інерції перерізу виражається в m^3 , а осьові відцентрові та полярні моменти інерції перерізу – в m^4 . Осьові та полярні моменти інерції можуть мати лише додатні значення $J_z, J_y, J_p > 0$, а статичні і відцентрові моменти інерції такі:

$$S_z, S_y, J_{zy} \geq 0 \text{ або } S_z, S_y, J_{zy} \leq 0.$$

При поступовому повороті осей можна знайти таке їх положення, при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю $J_{zy} = 0$. Такі осі називають головними. Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу – їх називають ще головними центральними осями інерції. У більшості розрахунків треба враховувати геометричні характеристики саме головних центральних осей, і слід пам'ятати, що вісь симетрії завжди є однією з головних центральних осей, а друга буде перпендикулярною до осі симетрії.

Згідно з цим:

– радіус інерції перерізу відносно осей z, y

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \text{ та}$$

виражається у метрах і приймає лише додатні значення ($i_z, i_y \geq 0$);

– осьовий момент опору перерізу відносно осей z, y

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{max}}, W_y = \frac{J_y}{|z|_{max}} \text{ та}$$

виражається у метрах кубічних і приймає тільки додатні значення ($W_z, W_y > 0$).

Тут J_z, J_y – осьові моменти інерції перерізу і $|y|_{max}, |z|_{max}$ – відстані до найвіддалених точок відносно осей z, y .

Полярний момент опору перерізу відносно полярного центра ваги

$$W_p = \frac{J_p}{|\rho|_{max}} \text{ та}$$

виражається у метрах кубічних і приймає додатні значення ($W_p > 0$).

Тут J_p – полярний момент інерції фігури і $|\rho|_{max}$ – відстань від початку координат до найвіддаленної точки перерізу.

Формули для визначення геометричних характеристик нестандартних перерізів наводяться у довідниках.

Для визначення геометричних характеристик використовують такі властивості.

При визначенні моментів інерції складних перерізів їх розбивають на прості частини з відомим моментом інерції. Враховуючи основні властивості інтегралу суми, момент інерції складної фігури буде дорівнювати сумі моментів інерції простих частин, тобто

$$J_z = \int_{F_1} y_1^2 \cdot dF + \int_{F_2} y_2^2 dF_2 + \dots + \int_{F_n} y_n^2 dF_n;$$

$$J_y = \int_{F_1} z_1^2 dF_1 + \int_{F_2} z_2^2 dF_2 + \dots + \int_{F_n} z_n^2 dF_n.$$

Сума моментів інерції відносно будь-яких осей, які проходять через початок координат, дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат (рисунок 3.2), а саме :

$$J_z + J_y = J_{z_1} + J_{y_2} = J_p.$$

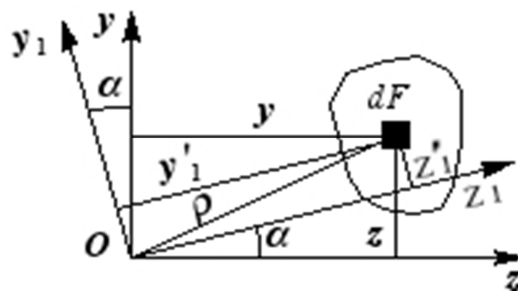


Рисунок 3.2. Схема для розрахунку положення довільних та повернутих осей

Осьовий момент інерції перерізу відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральних осей z_c, y_c , паралельних зображенням YZ , плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями (рисунок 3.3).

$$J_z = J_{z_c} + F \cdot a^2;$$

$$J_y = J_{y_c} + F \cdot b^2.$$

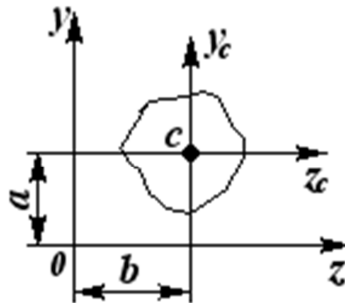


Рисунок 3.3. Схема для розрахунку положення заданих і довільних осей

Відцентровий момент інерції відносно довільної системи перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги на нових осях, тобто

$$J_{z_y} = J_{z_c y_c} + F \cdot a \cdot b.$$

Залежності між моментами інерції при повороті осей навколо початку координат (рисунок 3.3) мають вигляд :

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{z_y} \sin 2\alpha;$$

$$J_{y_1} = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{z_y} \sin 2\alpha;$$

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{z_y} \cos 2\alpha.$$

Головними центральними осями інерції фігури називаються такі взаємно перпендикулярні центральні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції мають екстремальні значення.

Положення головних осей U, V відносно центральних визначається кутом нахилу α за формулою

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2J_{z_c y_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}}.$$

Якщо кут буде додатним, то його відкладають відносно осі Z проти ходу годинникової стрілки, а якщо від'ємним – за ходом годинникової стрілки.

Розрахунок головних центральних осей інерції фігури виконують за формулою

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{z_c y_c}^2},$$

де J_{\max} – визначають зі знаком «+»;

J_{\min} – зі знаком «-».

3.2. Послідовність розв'язання задачі

Для заданого на рисунку 3.4 швелера з кутником 140x140x8 треба визначити:

- положення центра ваги;
- осьові і відцентрові моменти інерції перерізу відносно допоміжних осей x_c, y_c ;
- положення головних центральних моментів інерції U, V ;
- головні центральні осьові моменти інерції J_u, J_v ;
- осьові моменти опірності ;
- накреслити переріз швелера в масштабі з усіма розмірами та осями.

Зауваження до розв'язання задачі:

- для швелера і двотавра слід враховувати, що h – це їх висота, виражена в см;
- для рівнобедреного кутника L подвійне позначення складають дві ширини полиць та їх товщина у мм;

– власні геометричні характеристики перерізів прокатних профілів наведені у таблицях сортаменту; при виборі осьових моментів інерції необхідно звертати увагу на те, якому положенню осей перерізу відповідають центральні осі.

На рисунку 3.4 через центри ваги проводимо власні центральні осі. Для заданих осей моменти інерції кожного елемента беремо з таблиць сортаменту прокатних профілів.

Для кутника $L 140 \times 140 \times 8$ за таблицею сортаменту згідно з ГОСТ 8510-86 маємо: $F_1 = 27,33 \text{ см}^2$; $J_{x1} = 512,29 \text{ см}^4$; $J_{y1} = 512,29 \text{ см}^4$; $z_0 = 3,82 \text{ см}$; $J_{x1y1} = 301 \text{ см}^4$; $b_l = 140 \text{ мм}$; $t_l = 10 \text{ мм}$.

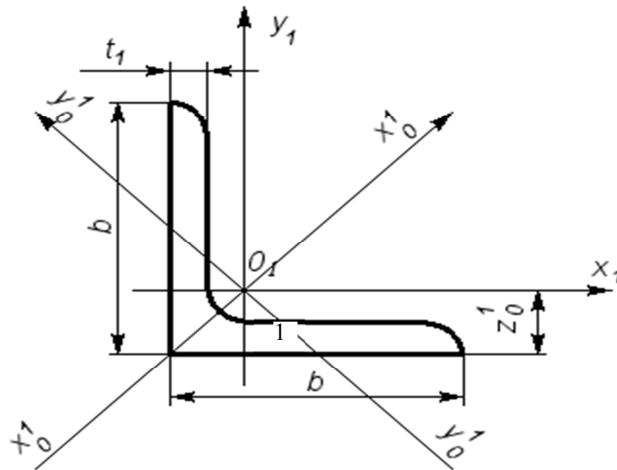


Рисунок 3.4. Схема для розрахунку кутника

Для швелера за таблицею сортаменту згідно з ГОСТ 8240-89 маємо:

$F_1 = 40,5 \text{ см}^2$; $J_{x1} = 5810 \text{ см}^4$; $J_{y2} = 327 \text{ см}^4$; $z_0^2 = 2,52 \text{ см}$; $h_2 = 300 \text{ мм}$; $b_2 = 100 \text{ мм}$. Відцентровий момент інерції $J_{x2y2} = 0$, оскільки одна з центральних осей перерізу – вісь симетрії.

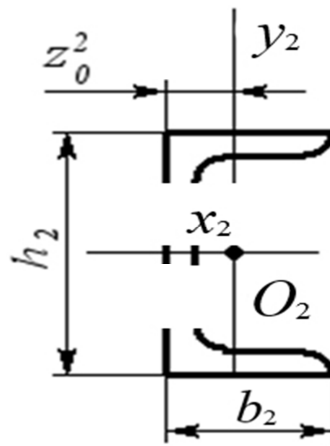


Рисунок 3.5. Схема для розрахунку швелера

Загальна площа усього перерізу

$$F = F_1 + F_2 = 27,33 + 40,5 = 67,83 \text{ см}^2.$$

Координати центра ваги відносно довільних осей x, y

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i},$$

де S_x, S_y – статичні моменти перерізу відносно осей x, y ;

F_i – площа перерізу;

x_i, y_i – координати центра ваги елемента відносно вихідних осей x, y .

Для визначення центра ваги складного перерізу виберемо початкові осі, які проходять через центр ваги швелера O_2, x_2, y_2 :

для кутника $x_2 = 3,82 + 2,52 = 6,34 \text{ см}$, $y_2 = -(15 - 3,82) = -11,18 \text{ см}$.

Координати центра ваги O відносно загальної системи координат x_1, y_1

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F} = \frac{27,33 \cdot 0 + 40,5 \cdot 6,34}{67,83} = 3,78 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F} = \frac{27,33 \cdot 0 + 40,5 \cdot (-11,18)}{67,83} = -6,67 \text{ см}.$$

З урахуванням масштабу відкладаємо центр ваги O і знаходимо відцентрові моменти інерції усього перерізу відносно нових осей x_c, y_c як

$$J_{xc} = \sum (J_{xi} + F_i a_i^2), \quad J_{yc} = \sum (J_{yi} + F_i b_i^2), \quad J_{xcyc} = \sum (J_{xiyi} + F_i a_i b_i),$$

де J_{xi}, J_{yi} – осьові моменти інерції перерізу відносно власних осей;

J_{xiyi} – відцентровий момент інерції відносно власних осей;

a_i, b_i – координати центра ваги у новій системі координат x_c, y_c .

З урахуванням нового положення центра ваги складного перерізу координати

$$a_1 = 5,15 \text{ см}, \quad a_2 = 6,67 \text{ см};$$

$$b_1 = 2,56 \text{ см}, \quad b_2 = -3,78 \text{ см}.$$

Осьові і відцентровий моменти інерції відносно центральних осей

$$\begin{aligned} J_{xc} &= J_{x1} + a_1^2 \cdot F_1 + J_{x2} + a_2^2 \cdot F_2 = \\ &= 512,29 + (-5,15)^2 \cdot 27,33 + 5810 + 6,67^2 \cdot 40,5 = 8848,95 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yc} &= J_{y1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{y2} + b_2^2 \cdot F_2 = \\ &= 512,29 + 2,56^2 \cdot 27,33 + 327 + (-3,78)^2 \cdot 40,5 = 1597,05 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xcyc} &= J_{x1y1} + F_1 a_1 b_1^2 + J_{x2y2} + F_2 a_2 b_2 = \\ &= 301 + 27,33 \cdot (-5,15) \cdot 2,56 + 0 + 40,5 \cdot 6,67 \cdot (-3,78) \\ &= -108043 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Як свідчать розрахунки, відцентровий момент інерції не дорівнює нулю і центральні осі не є головними. Розрахуємо відносно однієї з головних центральних осей кут α .

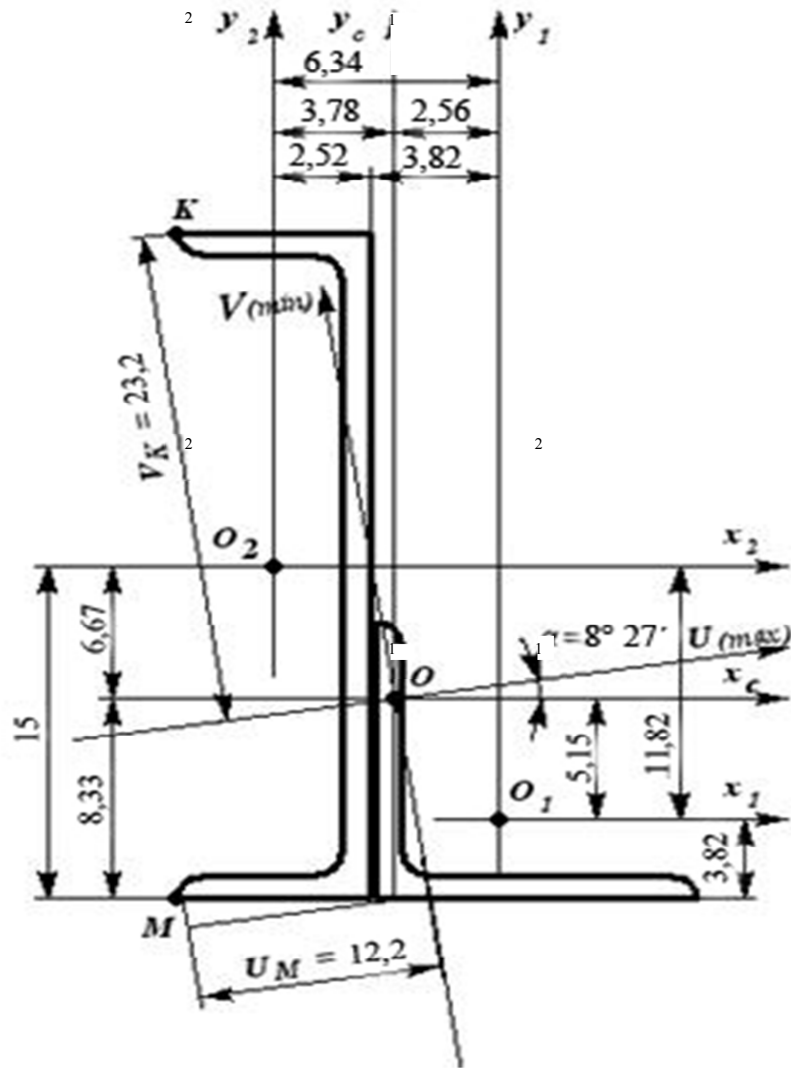


Рисунок 3.6. Схема розташування швелера та кутника, а також відповідно положення центра ваги

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot J_{xyc}}{J_{xc} - J_{yc}} = \frac{2 \cdot (-1080,43)}{8848,95 - 1597,05} = 0,297;$$

$$2\alpha = 16^{\circ}54';$$

Тоді

$$\alpha = 8^{\circ}27'.$$

Враховуючи, що відносно будь-яких головних осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю, перевіримо точність розрахунку кута α :

$$J_{UV} = \frac{J_{Xc} - J_{Yc}}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{XcYc} \cdot \cos 2\alpha = 0;$$

$$J_{UV} = \frac{8848,95 - 1597,05}{2} \cdot 0,2847 + (-1080,43) \cdot 0,9586 =$$

$$= 1032,3 - 1035,3 \approx 0.$$

Відносно осі x_c під кутами α та $\alpha + 90^\circ$ проводимо центральні осі U та V . Враховуючи, що кут α додатний, то відкладаємо його на осі x_c проти ходу годинникової стрілки.

Встановимо, яка з центральних осей відповідає осі U_{\max} , а яка – осі U_{\min} . З розрахунку був отриманий відцентровий момент інерції $J_{xc} < 0$, у такому разі вісь U_{\max} пройде через перший та третій квадранти, а вісь V_{\min} – через другий та четвертий.

Для розглянутого складного перерізу вісь U відповідає осі \max , а вісь V відповідає осі \min . Розрахуємо головні центральні моменти інерції за формулою

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_{Xc} - J_{Yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{Xc} - J_{Yc}}{2}\right)^2 + J_{XcYc}^2} =$$

$$= \frac{8848,95 + 1597,05}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8848,95 - 1597,05}{2}\right)^2 + (-1080,43)^2} =$$

$$= (5223 \pm 3783) \text{ см}^4,$$

тоді

$$J_{\max} = J_u = 9006 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = J_v = 1440 \text{ см}^4.$$

Перевіримо теорему постійності суми осьових моментів інерції відносно будь-яких осей, які проходять через задану точку:

$$\begin{aligned}
 J_X + J_{Yc} &= J_{max} + J_{min} = \\
 &= 8848,95 + 1597,05 = 9006 + 1440; \\
 &10446 = 10446.
 \end{aligned}$$

Теорема виконується.

Враховуючи нове положення осей U, V , з рисунку 3.6 знаходимо, що відносно осі U найвіддаленою точкою є K з координатою $|V|_{max} = V_K = 23,2$ см, а відносно осі V – точка M з координатою $|U|_{max} = U_M = 12,2$ см.

Тепер, враховуючи найвіддалені координати складного перерізу відносно головних центральних осей U, V , розрахуємо осьові моменти опірності як

$$W_U = \frac{J_U}{|V|_{max}} = \frac{J_{max}}{V_K} = \frac{9006}{23,2} = 388 \text{ см}^3;$$

$$W_V = \frac{J_V}{|U|_{max}} = \frac{J_{min}}{U_M} = \frac{1440}{12,2} = 118 \text{ см}^3.$$

Тоді радіус інерції складного перерізу відносно головних центральних осей

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}} = \sqrt{\frac{9006}{67,83}} = 11,52 \text{ см};$$

$$i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}} = \sqrt{\frac{1440}{67,83}} = 4,6 \text{ см}.$$

Висновок: для розглянутого поперечного перерізу конструкції розраховані небезпечні точки всього перерізу відносно головних осей.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. С.

4. КРУЧЕННЯ

4.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Під крученням розуміють такий вид простого опору, коли у поперечних перерізах стрижня виникає тільки один силовий фактор – крутний момент $M_{кр}$.

Його створюють зовнішні пари сил, площини яких перпендикулярні осі тіла. Такі пари сил називаються закручувальними моментами.

Стрижні, які сприймають деформацію кручення, називаються валом. Найпоширені – вали круглого поперечного перерізу.

Оскільки крутний момент – єдиний внутрішній силовий фактор, то вважають, що у поперечному перерізі стрижня виникають тільки дотичні напруження τ .

Між дотичними напруженнями та крутним моментом існує така інтегральна залежність, котра зумовлює у поперечному перерізі крутний момент

$$M_{кр} = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF,$$

де ρ – відстань від дії елементарної сили τdF до центра перерізу (рисунок 4.1).

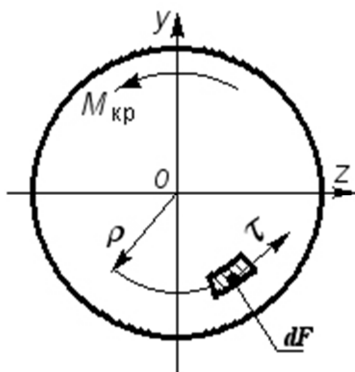


Рисунок 4.1. Схема для розрахунку координат та дії сили в довільній точці

Враховуючи закон Гука при зсуві у випадку кручення стрижнів із круглим поперечним перерізом, дотичні напруження змінюються вздовж радіуса за лінійним законом

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho, \quad (4.1)$$

де $\theta = d\varphi/dz$ – відносний кут закручування.

Таким чином, крутний момент

$$M_{кр} = G \cdot \theta \cdot J_p,$$

або

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}, \quad (4.2)$$

де GJ_p – жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні.

Підставляючи вираз (4.2) у (4.1), отримуємо формулу для обчислення дотичних напружень у будь-якій точці круглого поперечного перерізу, яка має такий вигляд:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho, \quad (4.3)$$

де $M_{кр}$ – крутний момент у перерізі;

J_p – полярний момент інерції круглого поперечного перерізу стрижня;

ρ – радіус – вектор розглянутої точки.

Згідно з формулою (4.3) епюра дотичних напружень буде лінійною, як на схемі епюр дотичних напружень вала (рисунок 4.2).

$$\tau = f(\rho).$$

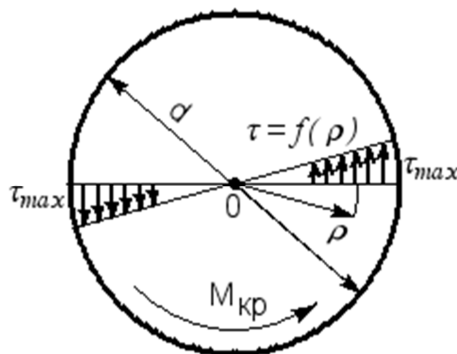


Рисунок 4.2. Схема для розрахунку епюр дотичних напружень вала

З рисунку 4.2 видно, що максимальні дотичні напруження виникають у найвіддалених від центра ваги точках перерізу :

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр} d}{J_p 2} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (4.4)$$

де W_p – полярний момент опору при крученні, який визначається за такою формулою:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{2J_p}{d}.$$

Для круглого поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для трубчатого круглого поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3 (1 - \alpha^4)}{16}.$$

Враховуючи формулу (4.4), запишемо умову міцності при крученні:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр.max}}{W_p} \leq [\tau],$$

де $M_{кр.max}$ – абсолютне значення найбільшого крутного моменту в небезпечному поперечному перерізі, беруть з епюри $M_{кр}$, де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні.

Умова жорсткості на кручення, враховуючи вираз (4.3), має вигляд

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування, вимірюється в рад/м, звідки

$$J_p \geq \frac{M_{кр}}{G[\theta]}.$$

Полярний момент інерції суцільного круглого поперечного перерізу вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

для кільцевого перерізу

$$J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4).$$

З урахуванням рівняння (4.4) діаметр суцільного круглого вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi[\tau]}}.$$

Тоді діаметр зовнішнього кільця можна розрахувати як

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}},$$

де α – коефіцієнт співвідношення внутрішнього і зовнішнього діаметрів, який визначаються так :

$$\alpha = \frac{d_B}{d_3}.$$

4.2. Послідовність розв'язання задачі

До сталевого вала прикладені три відомі крутних моменти M_1, M_2, M_3 (рисунок 4.3). Необхідно: 1) визначити, при якому значенні моменту M_x кут повороту правого перерізу вала дорівнює нулю; 2) з урахуванням крутного моменту M_x побудувати епюру крутних моментів; 3) з умови міцності розрахувати діаметр вала, якщо значення допустимого напруження $[\tau]$ задано, та округлити його до найближчого значення: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 4) побудувати епюру кутів закручування, якщо модуль пружності сталі при зсуві $G=0,8 \cdot 10^8$ кН/м²; 5) обчислити максимальне значення відносного кута закручування.

Числові значення відомих крутних моментів такі: $M_1=2,8$ кН·м; $M_2=2,5$ кН·м; $M_3=2,4$ кН·м; $[\tau]=90$ МПа.

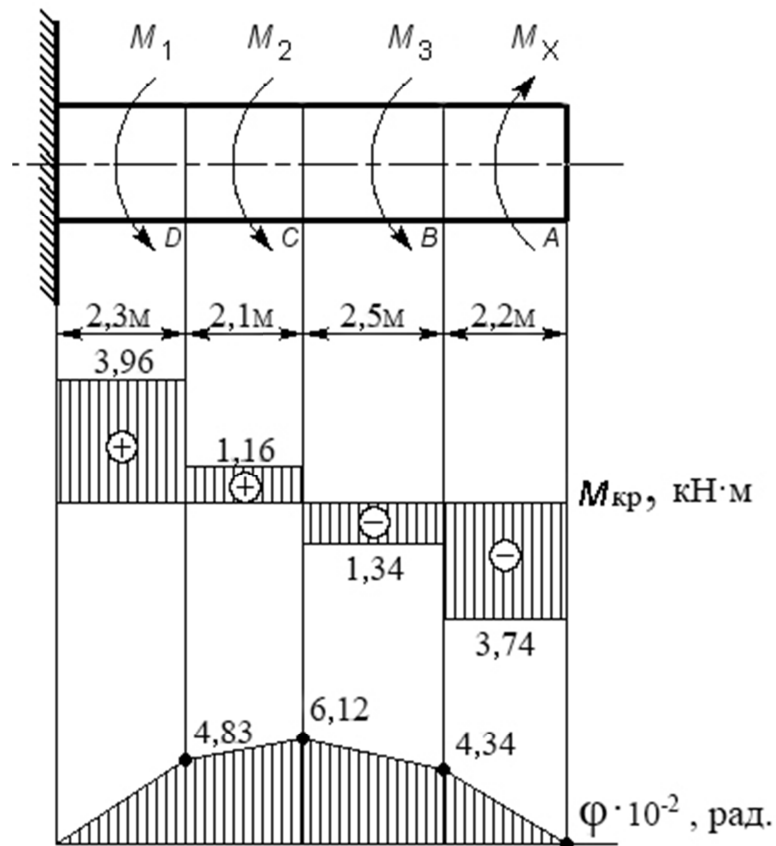


Рисунок 4.3. Схема для розрахунку навантаження вала та епюри крутного моменту і кутів повороту

Визначаємо величину крутного моменту M_x , при якому кут повороту правого перерізу буде дорівнювати нулю.

Кут повороту такого перерізу знайдемо за формулою

$$\varphi_{A-B} = \frac{I}{GJ_p} (-M_x \cdot 9,1 + M_3 \cdot 6,9 + M_2 \cdot 4,4 + M_1 \cdot 2,3) = 0.$$

Підставивши задані вихідні дані крутних моментів та скоротивши на GJ_p , маємо

$$9,1 \cdot M_x = 34, \text{ тоді } M_x = 3,74 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Використовуючи метод перерізів, розрахуємо крутні моменти у характерних перерізах вала. На ділянках вала моменти будуть такими:

$$M_{кр,AB} = -3,74 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр. BC} = -3,74 + 2,4 = -1,34 \text{ кН}\cdot\text{м} ;$$

$$M_{кр. CD} = -3,74 + 2,5 = -1,16 \text{ кН}\cdot\text{м} ;$$

$$M_{кр. DE} = 1,16 + 2,8 = 3,96 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

За отриманими даними будемо епюру крутних моментів (рисунок 4.3).

Найбільший крутний момент виникає у перерізі на ділянці DE , тобто

$$M_{кр. max} = 3,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розрахуємо діаметр вала з умови міцності:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр. max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Враховуючи, що для круглого перерізу вала полярний момент опору при крученні

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} ;$$

$$\frac{16 M_{кр. max}}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

то діаметр цього вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр. max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3,96}{3,14 \cdot 9 \cdot 10^4}} = 0,0607 \text{ м} = 60,7 \text{ мм}.$$

З урахуванням стандартного ряду розмірів приймаємо $d = 70 \text{ мм}$.

Полярний момент інерції для круглого перерізу

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14}{32} (7,0 \cdot 10^{-2})^4 = 235,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Тоді жорсткість поперечного перерізу вала при крученні

$$GJ_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 235,5 \cdot 10^{-8} = 188,4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Використовуючи значення $M_{кр}$ та l для різних ділянок вала, знайдемо

кути кручення вала на кожній ділянці, враховуючи, що

$$GJ_p = \text{const},$$

а переріз E на всій довжині вала незмінний:

$$\varphi_E = 0;$$

$$\varphi_{DE} = \varphi_E + \frac{M_{\text{кр.ED}} \cdot l_{ED}}{GJ_p} = \frac{3,96 \cdot 2,3}{188,4} = 4,83 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CE} = \varphi_D + \frac{M_{\text{кр.DC}} \cdot l_{DC}}{GJ_p} = 4,83 \cdot 10^{-2} + \frac{1,16 \cdot 2,1}{188,4} = 6,12 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{BE} = \varphi_C - \frac{M_{\text{кр.CB}} \cdot l_{CB}}{GJ_p} = 6,12 \cdot 10^{-2} + \frac{1,34 \cdot 2,5}{188,4} = 4,34 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{AD} = \varphi_B - \frac{M_{\text{кр.BA}} \cdot l_{BA}}{GJ_p} = 4,34 \cdot 10^{-2} - \frac{3,74 \cdot 2,2}{188,4} = 0.$$

За результатами цих обчислень будуюмо епюру кутів кручення вала (рисунок 4.3). Максимальне значення відносного кута кручення буде на відріжку ED, тобто

$$\theta_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр.ED}}}{GJ_p} = \frac{3,96}{188,4} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м.}$$

Висновок: згідно із заданими значеннями крутних моментів розрахований кут повороту вільного поперечного перерізу та для нього підібраний діаметр вала із стандартного ряду.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. D.

5. ЗГИН. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК

5.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Згин – це такий вид деформації, коли у поперечних перерізах певної ділянки балки виникає тільки згинальний момент. Найчастіше такий вид деформації зазнають балки, які працюють на згин.

Вісь балки – це лінія, яка з'єднує центри ваги усіх поперечних перерізів.

Лінія перетину нейтрального шару з поперечним перерізом, називається нейтральною.

Нейтральний шар – це сукупність нейтральних волокон уздовж ширини балки .

Чисте плоске згинання характеризується наявністю у поперечному перерізі балки тільки одного внутрішнього силового фактора: згинального моменту, площа дії якого збігається з головною центральною віссю перерізу.

Лінію перетину силової площини з поперечним перерізом балки називають силовою. При чистому плоскому згинанні силова лінія збігається з однією із головних центральних осей поперечного перерізу.

Розрахунки будь-яких статично визначуваних балок розпочинають з визначення реакцій в'язів, використовуючи рівняння статички.

Взагалі при плоскому згині балки у будь-яких точках перерізу виникають нормальні σ та дотичні τ напруження, які зводяться до двох внутрішніх силових факторів: згинального моменту M та дії поперечної сили Q .

Поперечна сила є рівнодієюю дотичних складових внутрішніх сил у поперечному перерізі балки. Така сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути частину балки за ходом годинникової стрілки, та від'ємною, якщо вона намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки (рисунок 5.1).

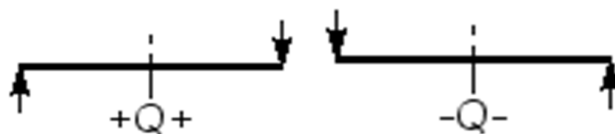


Рисунок 5.1. Схема правил знаків для поперечних сил

Згинальний – це момент усіх нормальних складових внутрішніх сил у перерізі балки відносно нейтральної осі. Момент вважається додатним, якщо він спричиняє розтягання нижніх волокон балки, та від’ємним, якщо він спричиняє розтягання верхніх волокон (рисунок 5.2).



Рисунок 5.2. Схема правил знаків для моменту

Внутрішні зусилля у балці при згинанні визначаються за допомогою методу перерізів згідно з такими правилами. Поперечна сила у будь-якому перерізі балки визначається як алгебраїчна сума всіх зовнішніх поперечних сил, що діють з розташованих з одного боку від перерізу. При складанні виразу для поперечних сил слід враховувати знаки (рисунок 5.2). Згинальний момент у поперечному перерізі визначається як алгебраїчна сума моментів від дії зовнішніх сил з одного боку від перерізу. При складанні виразу для розрахунку моменту слід враховувати правило знаків (рисунок 5.2).

При розрахунках та побудові епюр M і Q слід враховувати диференціальні залежності між M , Q та q (диференціальні залежності Д.І. Журавського) :

$$\frac{dQ}{dz} = q;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q;$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q.$$

Епюри M та Q будують для визначення положення небезпечних перерізів балки.

Епюрами називається графічне зображення законів зміни поперечних сил та моментів уздовж балки.

Правила розрахунків та побудови епюр для балок при згинанні такі:

- спочатку знаходять реакції опору балки;
- визначають ділянки балок. Слід врахувати, що межами ділянок є перерізи, у яких задані зовнішні зосереджені сили і моменти, а також початок та кінець розподілу навантаження;
- для кожної ділянки балки складають вирази поперечних сил та моментів;
- знаходять значення Q та M у перерізах балки, враховуючи межі ділянок;
- відкладають отримані значення Q та M на осі епюри та будують відповідні епюри .

При плоскому поперечному згинанні нормальні напруження у будь-яких точках перерізу

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z},$$

де M – згинальний момент у перерізі балки; y – ордината точки, в якій визначається напруження ; J_z – осьовий момент інерції поперечного перерізу відносно головної осі Z .

Максимальні нормальні напруження $|\sigma|_{max}$ при згинанні мають місце у найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах відносно горизонтальної осі Z у небезпечних точках при $y = |y|_{max}$:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M| \cdot |y|_{max}}{J_z}.$$

Відношення $J_z / |y|_{max} = W_z$ називається осьовим моментом опору, виражається у m^3 . Тоді

$$|\sigma|_{max} = \frac{M}{W_z}$$

Осьовий момент опору для балки прямокутного перерізу

$$W_z = \frac{bh^2}{6},$$

де b – ширина прямокутника, а h – його висота. Для круглого перерізу

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32},$$

де D – діаметр перерізу. Для прокатних профілів (двотавр, швелер, кутник) осьові моменти опору знаходять за таблицями сортаменту.

Умова міцності при плоскому поперечному згинанні записується так:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_z} \leq [\sigma],$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження;

$|M|_{max}$ – найбільший згинальний момент.

5.2. Послідовність розв'язання задачі

Для заданих розрахункових схем навантаження балок необхідно :

- скласти вирази для розрахунку Q та M , а також для кожної ділянки;
- побудувати епюри Q та M ;
- знайти небезпечний переріз балки;
- для вибраної схеми (рисунок 5.3, а) підібрати дерев'яну балку круглого перерізу, якщо $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$;
- для вибраної схеми (рисунок 5.4, б) підібрати двотаврову сталеву балку, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- перевірити на міцність двотаврову балку за нормальними напруженнями.

Розрахунок консольної балки (рисунок 5.3)

Згідно з даними таблиці треба скласти рівняння для визначення Q та M з урахуванням кожної ділянки балки, побудувати епюри, розрахувати

найбільший згинальний момент M_{max} , а також підібрати дерев'яну балку круглого перерізу, якщо $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.

Вихідні дані

$l_1 = 40 \text{ м}$	$\frac{a_1}{a_2} = 9$	$\frac{a_2}{a} = 8$	$M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$	$P = 50 \text{ кН}$	$q = 40 \text{ кН/м}$
----------------------	-----------------------	---------------------	------------------------------------	---------------------	-----------------------

Для заданої консольної балки опорні реакції можна розрахувати за умови, якщо внутрішні фактори (поперечні сили та згинальні моменти) почати визначати з вільного кінця балки.

Знайдемо координати ділянок балки :

$$x_1 = 0,4 \cdot 9 = 3,6 \text{ м}; x_2 = 0,4 \cdot 8 = 3,2 \text{ м}$$

Починаючи з вільного кінця балки, розглянемо кожну ділянку балки у заданих інтервалах та запишемо вирази для розрахунку Q та M .

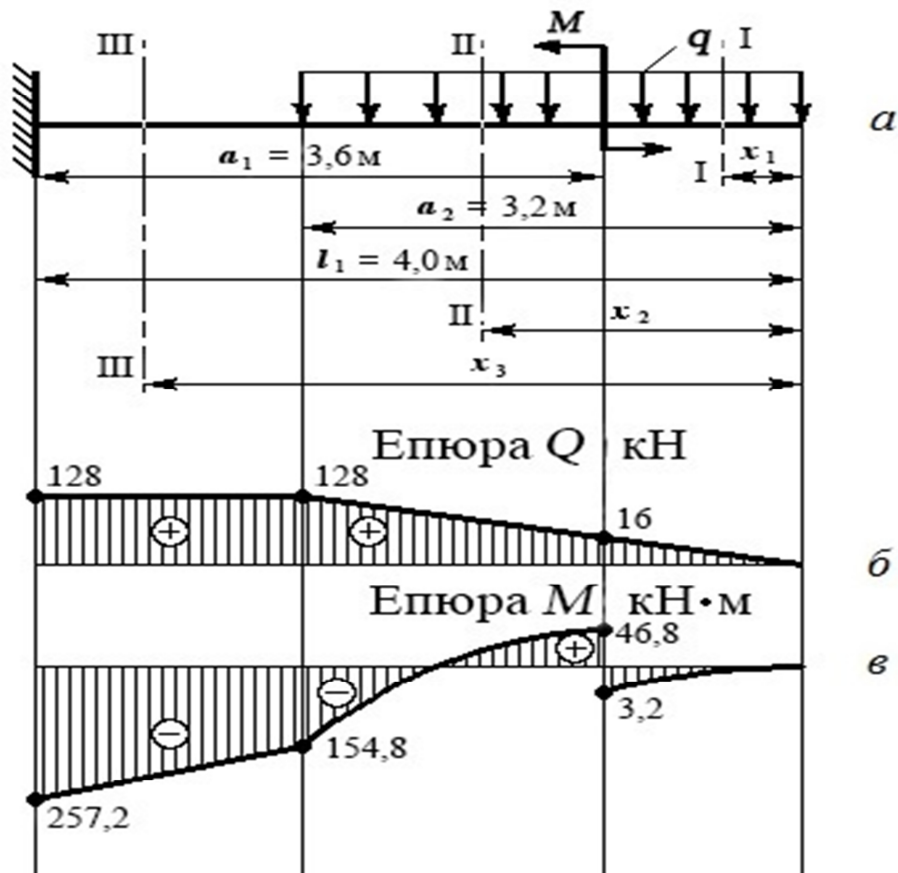


Рисунок 5.3. Схема для розрахунку навантаження консольної балки та епюри внутрішніх зусиль

Ділянка I ($0 \leq x_1 \leq 0,4 \text{ м}$)

Запишемо вирази для обчислення зрізувальних сил Q та згинальних моментів

M :

$$Q_{(x_1)} = q \cdot x_1;$$

$$M_{(x_1)} = -q \cdot \frac{x_1^2}{2}.$$

Тоді при $x_1 = 0$

$$Q_{(0)} = 0; M_{(0)} = 0, \text{ а}$$

$$\text{при } x_1 = 0,4 \text{ м} \quad Q_{(0,4)} = 40 \cdot 0,4 = 16 \text{ кН};$$

$$M_{(0,4)} = -40 \cdot \frac{0,4^2}{2} = -3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II ($0,4 \text{ м} \leq x_2 \leq 3,2 \text{ м}$)

Відповідно

$$Q_{(x_2)} = q \cdot x_2;$$

$$M_{(x_2)} = -q \cdot \frac{x_2^2}{2} + M.$$

Тоді при $x_2 = 0,4 \text{ м}$

$$Q_{(0,4)} = 40 \cdot 0,4 = 16 \text{ кН};$$

$$M_{(0,4)} = -40 \cdot \frac{0,4^2}{2} + 50 = 46,8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \text{ а}$$

$$\text{при } x_2 = 3,2 \text{ м} \quad Q_{(3,2)} = 40 \cdot 3,2 = 128 \text{ кН};$$

$$M_{(3,2)} = 40 \cdot \frac{3,2^2}{2} + 50 = -154,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III ($3,2\text{ м} \leq x_3 \leq 4,0\text{ м}$)

Відповідно

$$Q_{(x_3)} = q \cdot 3,2;$$

$$M_{(x_3)} = -q \cdot 3,2 \cdot (x_3 - 1,6) + M.$$

Тоді при $x_3 = 3,2\text{ м}$

$$Q_{(3,2)} = 40 \cdot 3,2 = 128\text{ кН};$$

$$M_{(3,2)} = -40 \cdot 3,2 \cdot (3,2 - 1,6) + 50 = -154,8\text{ кН}\cdot\text{м}, \text{ а}$$

при $x_3 = 4,0\text{ м}$

$$Q_{(4,0)} = 40 \cdot 3,2 = 128\text{ кН};$$

$$M_{(4,0)} = -40 \cdot 3,2 \cdot (4,0 - 1,6) + 50 = -257,2\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рисунку 5.3,б,в наведено епюри Q та M , які побудовані за розрахованими значеннями координат кожної ділянки.

Згідно з епюрою згинальних моментів встановлюємо небезпечний переріз, у якому $|M|_{max} = 257,2\text{ кН}\cdot\text{м}$.

Діаметр круглого перерізу балки визначимо з умови міцності за нормальним напруженням для найбільш напружених її точок:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Враховуючи осьовий момент опору балки круглого перерізу, запишемо

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}.$$

Тоді її діаметр

$$\text{потр. } D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M|_{max}}{\pi [\sigma]}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 257,2}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^3}} \geq 0,69\text{ м}.$$

Приймаємо $D = 0,7\text{ м}$.

Розрахунок двоопорної балки

Для зображеної статично визначуваної балки скласти рівняння для поперечних сил Q та згинальних моментів M ; побудувати відповідні епюри; розрахувати M_{max} та підібрати сталеву прокатну двоопорну балку (матеріал – Ст.3 – з допустимим напруженням $[\sigma]=160\text{МПа}$).

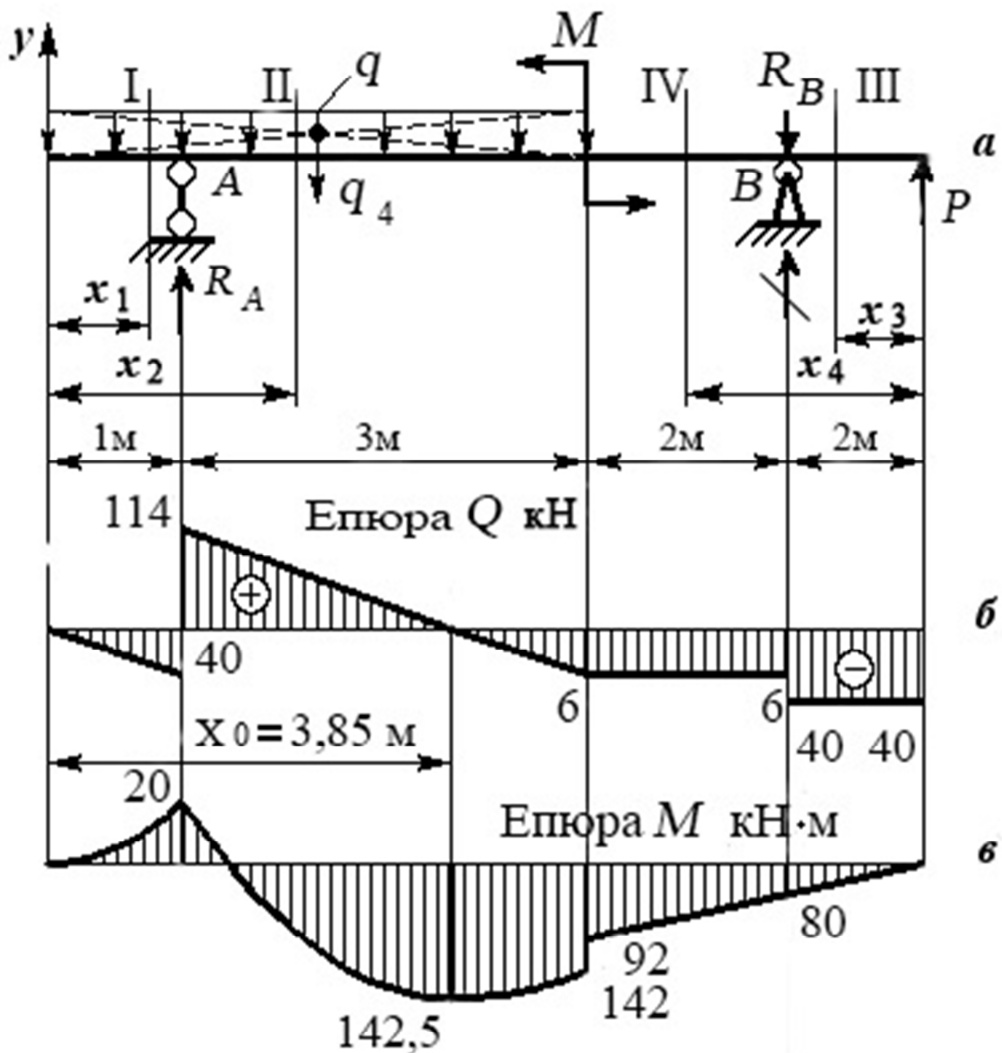


Рисунок 5.4. Схема для розрахунку навантаження балки на шарнірах та епюри внутрішніх зусиль

Замінімо шарнірні опори у точках A і B на довільно вибрані опорні реакції R_A і R_B та визначимо їх, використовуючи рівняння статички, див. рисунок 5.4, a :

$$\sum M_A = 0: -q \cdot 4 \cdot 1 + M + R_B \cdot 5 + P \cdot 7 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 1 - M - P \cdot 7}{5} = \frac{40 \cdot 4 \cdot 1 - 50 - 40 \cdot 7}{50} = -34 \text{ кН.}$$

Від'ємний знак у відповіді вказує на помилковий вибір реакції R_B .
Замінімо напрямок реакції на протилежний, див., рисунок 5.4, а.

$$\sum M_B = 0: q \cdot 4 \cdot 4 - R_A \cdot 5 + M + P \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + M + P \cdot 2}{5} = \frac{40 \cdot 16 + 50 + 40 \cdot 2}{5} = 154 \text{ кН.}$$

Для перевірки правильності визначення реакцій складемо рівняння рівноваги з урахуванням вибраної осі y , тобто

$$\sum F_y = 0 \text{ або}$$

$$-q \cdot 4 + R_A - R_B + P = -40 \cdot 4 + 154 - 34 + 40 = -194 + 194 = 0.$$

Початок осі абсцис для ділянок I, II вибираємо на лівому кінці балки, а для ділянок III, IV – на правому. Така послідовність дозволяє отримати прості вирази для розрахунку Q та M .

Розглянемо кожну ділянку окремо.

Ділянка I ($0 \leq x_1 \leq 1$ м)

Запишемо вирази для розрахунку зрізувальних сил Q та згинальних моментів M :

$$Q_{(x_1)} = -q \cdot x_1;$$

$$M_{(x_1)} = -q \cdot \frac{x^2}{2}. \text{ Тоді}$$

при $x_1 = 0$ м

$$Q_{(0)} = 0; , M_{(0)} = 0, \text{ а}$$

при $x_1 = 1$ м

$$Q_{(1)} = -q \cdot x_1;$$

$$M_{(1)} = -q \cdot \frac{x^2}{2} \text{ або}$$

$$Q_1 = -40 \cdot 1 = -40 \text{ кН.}$$

Ділянка II ($1 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$)

Відповідно .

При $x_2 = 1 \text{ м}$

$$Q_2 = -q \cdot x_2 + R_A;$$

$$M_{(x_2)} = -q \cdot x^2 + R_A(x_2 - 1) \text{ або}$$

$$Q_1 = -40 \cdot 1 + 154 = 114 \text{ кН;}$$

$$M_{(1)} = -40 \cdot \frac{1^2}{2} + 154(1 - 1) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

При $x_2 = 4 \text{ м}$

$$Q_2 = -q \cdot x_2 + R_A;$$

$$M_{(x_2)} = -q \cdot x^2 + R_A(x_2 - 1) \text{ або}$$

$$Q_{(4)} = -40 \cdot 4 + 154 = -6 \text{ кН ;}$$

$$M_{(4)} = -40 \cdot \frac{4^2}{2} + 154(4 - 1) = 142 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На ділянці II виникає екстремум згинального моменту в координаті x_0 .

Тоді $Q_2 = 0$

$$\text{або } Q_2(x=x_0) = -q \cdot x_0 + R_A = 0.$$

Звідки

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{154}{40} = 3,85 \text{ м.}$$

Розрахуємо екстремальний згинальний момент M_{max}

При $x = x_0 = 3,85 \text{ м}$

$$M_{max(x_0)} = -40 \frac{3.85^2}{2} + 154 \cdot (3.85 - 1) = 142,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Ділянка III ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$)

$$Q_3 = -P;$$

$$M(x_3) = P \cdot x_3.$$

При $x_3 = 0$

$$Q_0 = -40 \text{ кН};$$

$$M_{(0)} = 0, \text{ а}$$

при $x_3 = 2 \text{ м}$

$$Q_2 = -P = -40 \text{ кН};$$

$$M_{(2)} = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка IV ($2 \text{ м} \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$)

При $x_4 = 2 \text{ м}$

$$Q_4 = -P + P_B = -40 + 34 = -6 \text{ кН};$$

$$M_{(x_4)} = P \cdot x_4 - R_B \cdot (x_4 - 2);$$

$$M_{(2)} = 40 \cdot 2 - 34 \cdot (2 - 2) = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}, \text{ а}$$

при $x_4 = 4 \text{ м}$

$$Q_4 = -P + P_B = -40 + 34 = -6 \text{ кН};$$

$$M_{(x_4)} = P \cdot x_4 - R_B \cdot (x_4 - 2);$$

$$M_{(4)} = 40 \cdot 4 - 34 \cdot (4 - 2) = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На базі отриманих результатів будемо епюри Q та M для кожної ділянки (рисунок 5.4, б, в).

Небезпечний переріз визначаємо за головними напруженнями. За нормальним напруженням з епюри моментів встановлюємо, що $|M|_{max} = 142 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (правіше від опори A на відстані 3м).

Розрахувавши небезпечний переріз, згідно з умовами міцності за нормальним напруженням для найбільш напружених точок балки двотаврової форми запишемо

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Тоді потрібний момент опору перерізу балки

$$W_{x.nopr.} = \frac{|M|_{max}}{[\sigma]}.$$

Враховуючи матеріал балки – Ст.3 та задані допустимі напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, отримуємо

$$W_{x.nopr.} = \frac{142 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 887 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 887 \text{ см}^3.$$

З таблиці сортаменту прокатної сталі знаходимо №40 з $W_x = 953 \text{ см}^3$.

Перевіряємо

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} = \frac{142 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 149 \text{ МПа}.$$

Висновок: для різних схем навантаження балки складені вирази для розрахунку зрізувальних сил та згинальних моментів. Побудовані епюри внутрішніх зусиль і визначений небезпечний переріз для кожної схеми навантаження балки.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. Е.

6. ПОЗАЦЕНТРОВЕ РОЗТЯГАННЯ (СТИСНЕННЯ) ПРЯМОГО БРУСА

6.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Позацентровим розтяганням – стисненням бруса називається такий вид складного опору, при якому брус розтягається або стискується таким чином, що рівнодійна цих сил не збігалася з головними осями бруса, а проходила через полюс сил (рисунок 6.1).

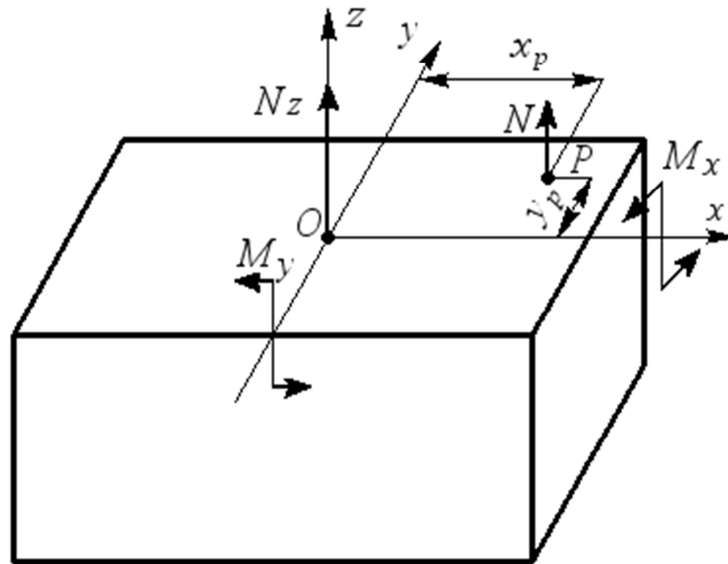


Рисунок 6.1. Схема для розрахунку бруса позацентровою силою

При позацентровому розтяганні-стисненні у будь-якому поперечному перерізі бруса виникають такі внутрішні силові фактори:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kz} = 0; N_z = N; \\ \sum M_x = 0; M_x = N \cdot y_p; \\ \sum M_y = 0; M_y = N \cdot x_p. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Таким чином, маємо випадок складного опору, який являє собою комбінацію осевого розтягання (стиснення) N_z та двох згинальних моментів M_x та M_y .

Враховуючи принцип суперпозиції, сумарне нормальне напруження у довільній точці бруса з координатами x, y обчислюється як

$$\sigma = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x.$$

Якщо врахувати внутрішні силові фактори, які виникають у брусі, то з формули (6.1) отримаємо

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot y_p}{J_x} \cdot y + \frac{N \cdot x_p}{J_y} \cdot x. \quad (6.2)$$

Враховуючи радіус інерції перерізу ix^2, iy^2 , вираз (6.2) можна записати і так:

$$ix^2 = \frac{I_x}{F};$$

$$iy^2 = \frac{I_y}{F};$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \left[1 + \frac{y_p}{ix^2} \cdot y + \frac{x_p}{iy^2} \cdot x \right]. \quad (6.3)$$

Для встановлення небезпечних точок перерізів бруса доцільно провести нейтральну лінію перерізу. небезпечними будуть найвіддалені точки відносно нейтральної лінії. Враховуючи, що на нейтральній лінії напруження $\sigma = 0$, то вираз у дужках формули (6.3) буде дорівнювати нулю. Таке геометричне рівняння являє собою нейтральну лінію перерізу такому вигляді:

$$\frac{y_p}{ix^2} \cdot y + \frac{x_p}{iy^2} \cdot x = -1. \quad (6.4)$$

Положення нейтральної лінії (н.л.) знайдемо, побудувавши пряму у відрізках на координатних осях (рисунок 6.2.), тобто

при $y=0 \quad x_n = -\frac{iy^2}{x_p},$ (6.5)

а при $x=0 \quad y_n = -\frac{ix^2}{y_p}.$

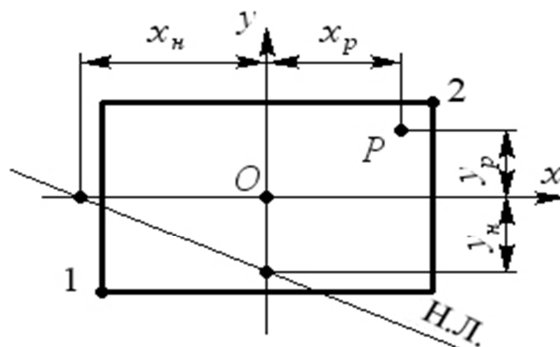


Рисунок 6.2. Схема для розрахунку положення нейтральної лінії відносно позацентрної сили

Оскільки у рівняннях (6.5) значення радіуса інерції ix^2, iy^2 завжди додатні, а координати полюса x_p, y_p і точок x_n та y_n завжди мають протилежні знаки, то бачимо, що полюс P та нейтральна лінія знаходяться на різних сторонах від центра ваги перерізу (рисунок 6.2). Небезпечними точками перерізу (рисунок 6.3) будуть точка 1 з напруженням σ_{max1} і точка 2 з напруженням σ_{max2} . Напруження у цих точках можна визначити, знайшовши координати головних осей x, y за формулами

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_2 + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_2 \right) \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_1 + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_1 \right) \leq [\sigma_-].$$

Епюра сумарних напружень у поперечному перерізі при стисненні позацентрною силою N у небезпечних точках зображена на рисунку 6.3.

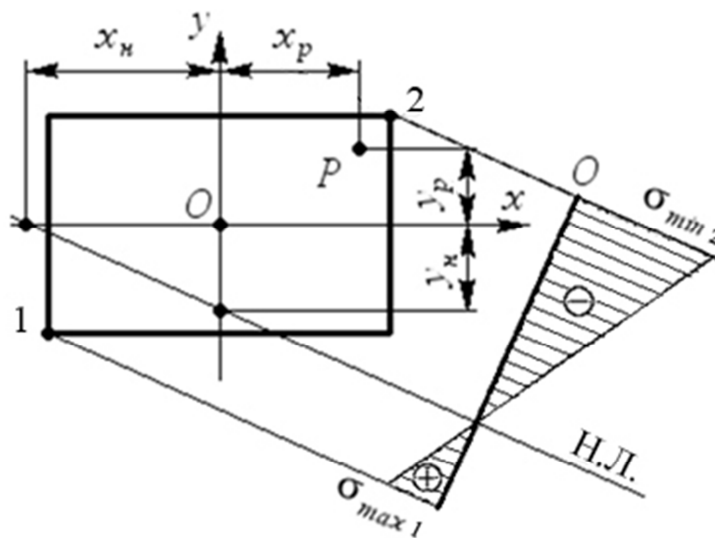


Рисунок 6.3. Епюра нормальних напружень для небезпечних точок

Найвіддаленими точками перерізів від нейтральної лінії будуть кутові точки 1 та 2 з координатами відносно центральних осей x, y , а осьовий момент опору перерізу запишеться так :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$

Тоді умова міцності при позацентровому стисненні буде мати вигляд

$$\sigma_{max/min} = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_{\pm}],$$

де M_x, M_y – згинальні моменти в небезпечному перерізі.

6.2. Послідовність розв'язання задачі

Умова задачі. Чавунний короткий стрижень, поперечний переріз якого зображений на рисунку 6.4, стискається поздовжньою силою P , що знаходяться у точці A . Треба :

– визначити найбільше розтягувальне та найбільше стискувальне напруження у поперечному перерізі;

– розрахувати допустиме навантаження P при заданих розмірах перерізу та допустимих напруженнях для чавунка на стиснення $[\sigma_c]$ і розтягання $[\sigma_p]$.

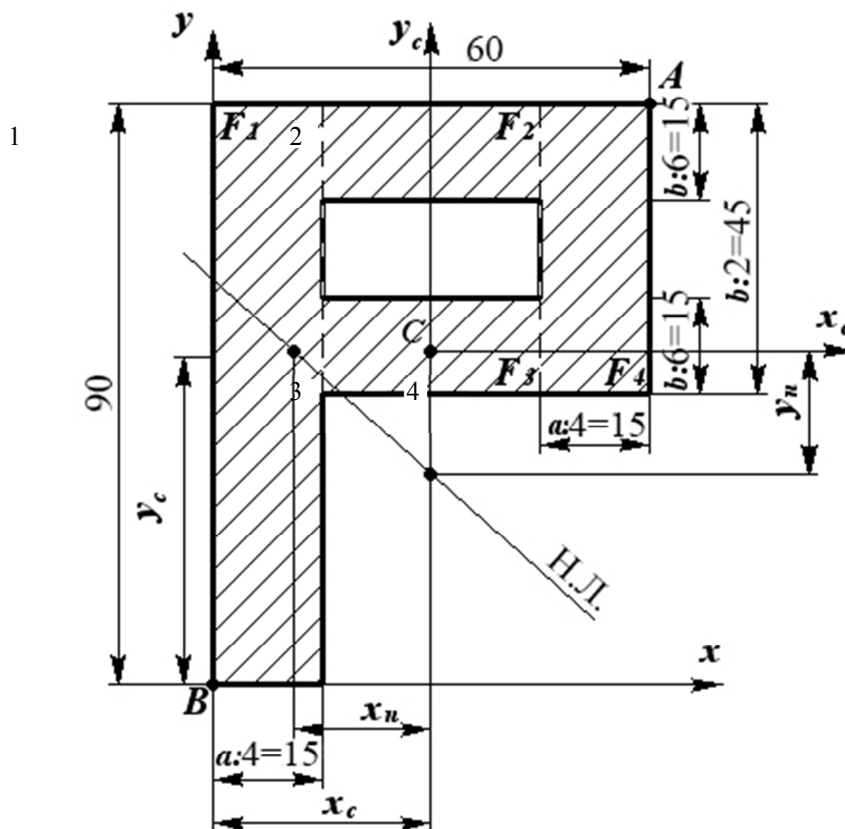


Рисунок 6.4. Схема для розрахунку перерізу стрижня , на який впливає позацентрова сила

Вихідні дані:

$$x_A = 60 \text{ см}; y_A = 90 \text{ см}; [\sigma_{cm}] = 30 \cdot 10^6 \text{ МПа}; a/4 = 15 \text{ см}; b/2 = 45 \text{ см}.$$

Етапи розрахунку.

Розіб'ємо увесь переріз на прості фігури з площами:

$$F_1 = 90 \cdot 15 = 1350 \text{ см}^2;$$

$$F_2 = F_3 = 30 \cdot 15 = 450 \text{ см}^2;$$

$$F_4 = 15 \cdot 45 = 675 \text{ см}^2.$$

Загальна площа

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1350 + 450 + 450 + 675 = 2925 \text{ см}^2 .$$

Виберемо випадкові осі $xу$, відносно яких визначимо координати центра ваги :

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3 + F_4 \cdot y_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} =$$

$$= \frac{1350 \cdot 45 + 450 \cdot 52,5 + 675 \cdot 67,5}{1350 + 450 + 450 + 675} = \frac{167062,5}{2925} = 57,1 \text{ см};$$

$$x_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot x_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} =$$

$$= \frac{1350 \cdot 7,5 + 450 \cdot 30 + 450 \cdot 30 + 675 \cdot 52,5}{1350 + 450 + 450 + 675} = \frac{72562,5}{2925} = 24,8 \text{ см}.$$

Відкладаємо координати x_c, y_c відносно допоміжних осей $xоу$.

Через отриманий центр ваги проведемо головні центральні осі та розрахуємо головні центральні моменти інерції, враховуючи, що переріз складається з чотирьох прямокутників:

$$I_{x_c} = \sum I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} + I_{x_c}^{III} + I_{x_c}^{IV} = I_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 + I_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 + I_{x_3} +$$

$$+ a_3^2 \cdot F_3 + I_{x_4} + a_4^2 \cdot F_4 = \frac{15 \cdot 45^3}{12} + 10,4^2 \cdot 675 = 1108903,5 +$$

$$+ 298759,5 + 17959,5 + 186914,25 = 1642536,75 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = \sum I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} + I_{y_c}^{III} + I_{y_c}^{IV} = I_{y_1} + b_1^2 \cdot F_1 + I_{y_2} + b_2^2 \cdot F_2 + I_{y_3} +$$

$$+ I_{y_3} + b_3^2 \cdot F_3 + I_{y_4} + b_4^2 \cdot F_4 = \frac{90 \cdot 15^3}{12} + 17,3^2 \cdot 1350 + \frac{15 \cdot 30^3}{12} +$$

$$+ 5,2^2 \cdot 450 + \frac{15 \cdot 30^3}{12} + 5,2^2 \cdot 450 + \frac{45 \cdot 15^3}{12} + 27,7^2 \cdot 675 =$$

$$= 438750 + 45918 + 45918 + 530577 = 1061163 \text{ см}^4 .$$

Відносно головних центральних осей знайдемо координати точки прикладеного навантаження P :

$$x_p = x_A - 24,8 = 60 - 24,8 = 35,2 \text{ см};$$

$$y_p = y_A - 57,1 = 90 - 57,1 = 32,9 \text{ см}.$$

Визначимо відрізки x_n та y_n , які будуть лежати на осях x_c, y_c , для побудови нейтральної лінії,

$$x_H = -\frac{iy^2}{x_p};$$

$$y_H = -\frac{ix^2}{y_p}.$$

де ix^2, iy^2 – радіус інерції перерізу, розраховуються за такою формулою:

$$iy^2 = \frac{I_{y_c}}{F} = \frac{1061163}{2925} = 362,8 \text{ см}^2;$$

тоді

$$x_H = -\frac{iy^2}{x_p} = -\frac{362,8}{35,2} = -10,3 \text{ см};$$

$$y_H = -\frac{ix^2}{y_p} = -\frac{551}{32,9} = -16,7 \text{ см}.$$

За допомогою нейтральної лінії знаходимо найвіддалені точки перерізу A та B , у яких виникають найбільші розтягувальні та найбільші стискувальні напруження. Розрахуємо у цих точках напруження :

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_A}{i_x^2} + \frac{y_p \cdot y_A}{iy^2} \right) = -\frac{P}{2925} \left(1 + \frac{32,9 \cdot 32,9}{551,3} + \frac{35,2 \cdot 35,2}{362,8} \right) =$$

$$= -0,0022P \text{ Н/см}^2 = -22P \text{ Н/м}^2 ;$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_B}{ix^2} + \frac{y_p \cdot y_A}{iy^2} \right) = -\frac{P}{2925} \left(1 + \frac{32,9 \cdot -(57,1)}{551,3} + \frac{35,2 \cdot (-24,8)}{362,8} \right) =$$

$$= +0,0016P \text{ Н/м}^2 .$$

Використовуючи умову міцності при позацентровому розтягуванні (стисненні) бруса, для небезпечних точок перерізу A та B визначимо допустиме навантаження P .

При стисненні

$$\sigma_A \leq [\sigma_{cm}] ;$$

$$22P \leq 30 \cdot 10^6 ;$$

$$P_{ct} \leq 1363 \text{ кН} .$$

При розтяганні

$$\sigma_B \leq [\sigma_p] ;$$

$$16P \leq 15 \cdot 10^6 ;$$

$$P_{rost} \leq 937 \text{ кН} .$$

Допустиме навантаження для розглянутого перерізу відповідає умові $P_{rost} \leq 937 \text{ кН}$.

Висновок: згідно з позацентровою поздовжньою стискальною силою розраховано положення нейтральної лінії, відносно якої визначені небезпечні точки перерізу.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. F.

7. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ

7.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Статично невизначуваною називають таку геометрично незмінювану систему, в якій для визначення внутрішніх зусиль в її елементах та опорних реакцій рівнянь статики недостатньо.

У такій системі в'язів більше, ніж це необхідно для її рівноваги та геометричної незмінності. Зайві в'язі використовують для збільшення міцності і жорсткості конструкції. Для нерозрізної балки ступінь статичної невизначуваності системи дорівнює кількості проміжних шарнірно-рухомих опор.

Для розрахунку невизначуваної системи необхідно задану систему перетворити в основну шляхом відкидання зайвих в'язів та заміни їх дії невідомими реакціями або зусиллями. Основна система має бути статично визначуваною та геометрично незмінною. Нерозрізними називають такі балки, які опираються більш ніж на дві опори і не мають проміжних шарнірів.

Основну систему для нерозрізної балки можна отримати із заданої, якщо у проміжні опори ввести шарніри. У такому разі основними невідомими балки будуть опорні моменти. Таким чином, основна система нерозрізної балки буде складати сукупність статично визначуваних, шарнірно – опорних балок. Для визначення невідомих опорних згинальних моментів складають рівняння сумісності деформацій, у яких кути повороту перерізів зліва та справа від шарнірної опори мають дорівнювати нулю.

Для нерозрізних балок рівняння сумісності деформацій для n -ї проміжної опори складають з виразів трьох моментів, тобто

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot a_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

де M_{n-1}, M_n, M_{n+1} – невідомі опорні моменти ; l_n, l_{n+1} – довжини прогинів, які прилягають зліва та справа до n -ї опори (опори нумеруються зліва направо) ; ω_n, ω_{n+1} – площі епюр від заданого навантаження на n та $(n+1)$ прогинах ; a_n, a_{n+1} – відстані центрів ваги площ від лівої та правої опор. Кількість рівнянь дорівнює кількості введених шарнірів при складанні основної системи.

Після визначення невідомих опорних моментів (M_{n-1}, M_n, M_{n+1}) будують епюри Q та M для усієї системи, і кожен прогин нерозрізної балки розглядають як звичайну шарнірно – оперту балку, яка навантажена заданими силами та знайденими опорними моментами.

Опорні реакції нерозрізної балки визначаються як алгебраїчна сума відповідних реакцій прогинів балки в основній системі, які прилягають до розглядуваної опори.

7.2. Послідовність розв’язання задачі

Умова задачі: для балки, зображеної на рисунку 7.1, необхідно: 1) визначити згинальний момент M на лівій опорі; 2) побудувати епюри поперечної сили Q та згинальних моментів M , якщо $q=10$ кН/м, $P=30$ кН, $M=20$ кН·м, $l=5$ м.

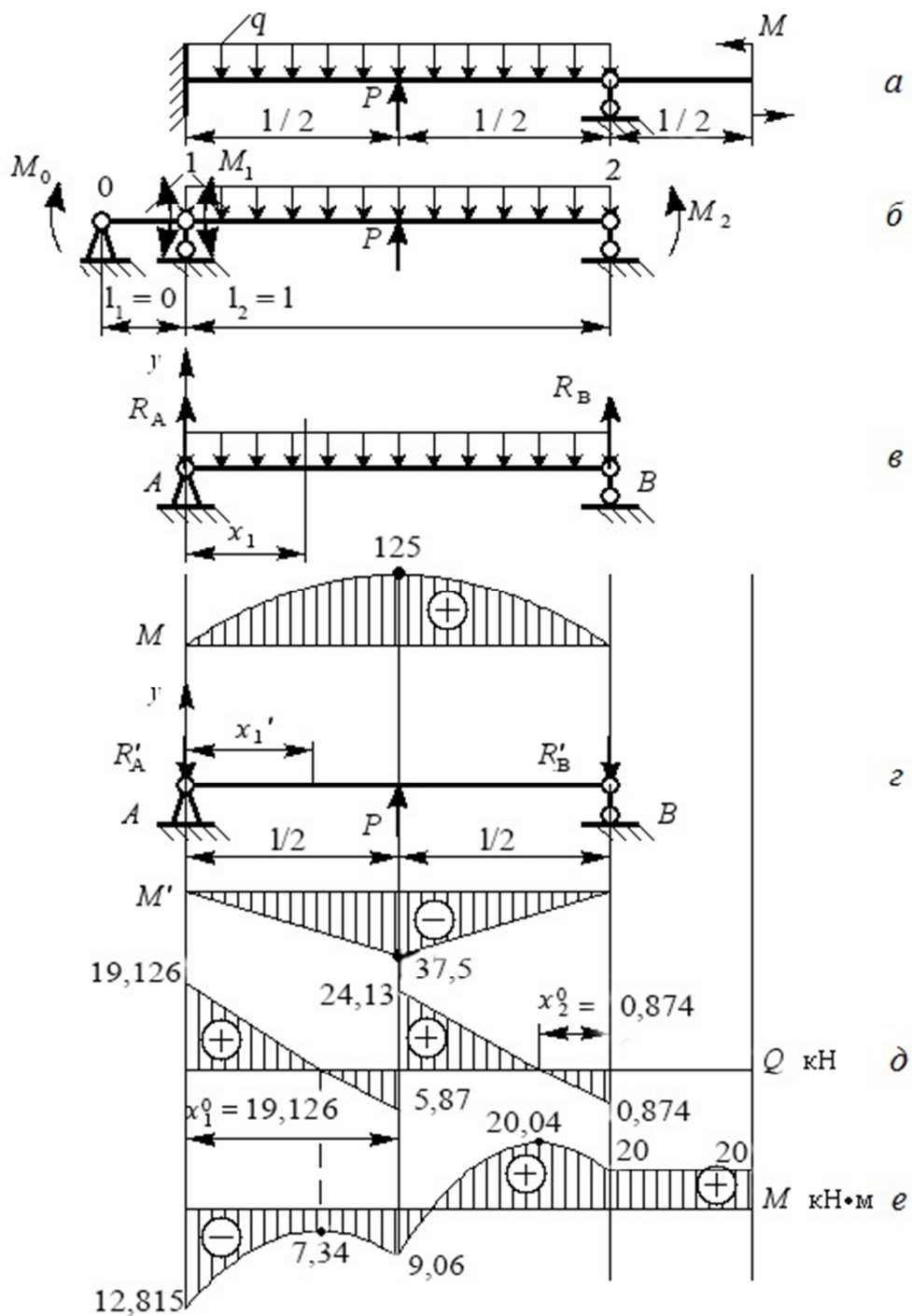


Рисунок 7.1. Схема для розрахунку навантаження нерозрізної балки (а), розрахункові схеми (б,в) та епюри внутрішніх зусиль (г,д,е)

Етапи розрахунку .

Складемо систему навантаження задагої балки та перейдемо до еквівалентної системи (рисунок 7.1,б), замінивши затиснення лівого кінця

балки додатковим прогином l_1 . Розрахуємо ступінь статичної невизначуваності балки як

$$n=3-2=1.$$

Складемо рівняння трьох моментів при $n=1$:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 a_2}{l_2} \right)^*$$

де M_0, M_1, M_2 – опорні моменти ; ω_1, ω_2 – площі епюр моментів від заданого навантаження і a_1, a_2 – центри ваги площ.

Побудуємо епюри згинальних моментів від заданих навантажень (рисунок 7.1, в, з.).

Для схеми на рисунку 7.1, в спочатку визначимо реакції опор:

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ кН.}$$

Для прикладу розглянемо такі ділянки балки (рисунок 7.1)

Ділянка I-I

Так, для ділянки балки в інтервалі $0 \leq x_1 \leq l$ або $0 \leq x_1 \leq 5$ м внутрішній згинальний момент

$$M_{x_1} = R_A \cdot x_1 - \frac{qx_1^2}{2}.$$

Тоді

при $x_1 = 0$

$$M_{(0)} = 0;$$

при $x_1 = 0,5l = 2,5$ м

$$M_{(2,5)} = 25 \cdot 2,5 - \frac{10 \cdot 2,5^2}{2} = 31,25 \text{ кН} \cdot \text{м}, \text{ а}$$

при $x_1 = l = 5$ м

$$M_{(5)} = 0.$$

Для схеми, зображеної на рисунку 7.1, з, реакції опор такі:

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$R'_A = R'_B = \frac{P}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ кН}.$$

Для ділянки балки в інтервалі $0 \leq x'_1 \leq \frac{l}{2}$ або $0 \leq x_1 \leq 2,5 \text{ м}$ відповідно

внутрішній згинальний момент:

при $x_1 = 0$

$$M_{(0)} = 0 ;$$

при $x_1 = 0,5l = 2,5 \text{ м}$

$$M_{(2.5)} = -15 \cdot 2,5 = -37,5 \text{ кН} \cdot \text{м} , \text{ а}$$

при $x_1 = l = 5 \text{ м}$

$$M_{(5)} = 0.$$

Епюри згинальних моментів наведені на рисунку 7.1, з – е .

Розрахуємо праву частину виразу * у дужках:

$$\omega_2 \cdot a_2 = \frac{2}{3} \cdot 31,25 \cdot 5 \cdot 2,5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot 37,5 = 26,05.$$

Опорні моменти

$$M_2 = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тоді цей вираз матиме вигляд

$$2M_1 \cdot l_1 + 20 = -6 \left(\frac{26,5}{5} \right), \text{ або}$$

$$2M_1 = -20 - 31,26 ;$$

$$2M_1 = -25,63 \text{ кНм} = M_1 = -12,815 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У разі, якщо момент M_1 згідно з обчисленням – від’ємний, то змінюємо його попередній напрямок на протилежний (рисунок 7.1,б).

Визначимо реакції опор з урахуванням їх моментів, а також навантаженого побудуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів (рисунок 7.2) .

$$\sum M_A = 0; M_1 + M_2 + R_B \cdot l + P \cdot 0,5l - \frac{ql^2}{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{l}{l - (M_1 - M_2 - P \cdot 0,5 \cdot l + ql^2 \cdot 0,5)} =$$

$$= 1/5(-12,815 - 20 - 30 \cdot 0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 10^2 = 0,874) \text{ кН};$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$R_A + R_B + P - q \cdot l = 0;$$

$$R_A = ql - R_B - P = 10 \cdot 5 - 0,874 - 30 = 19,126 \text{ кН}.$$

Для підтвердження правильності цих виразів скористаємося числовими значеннями :

$$\sum M_B = 0;$$

$$M_1 + M_2 + q \cdot \frac{l^2}{2} - P \cdot 2,5 - R_A \cdot 5 =$$

$$= 12,815 + 20 + \frac{10 \cdot 5^2}{2} - 30 \cdot 2,5 - 19,126 \cdot 5 =$$

$$= 170,63 - 170,63 = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq 0,5l;$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,5 \text{ м};$$

$$Q_{x_1} = R_A - q \cdot x_1;$$

$$M_{x_1} = -M + R_A \cdot x_1 - \frac{q \cdot x_1^2}{2}.$$

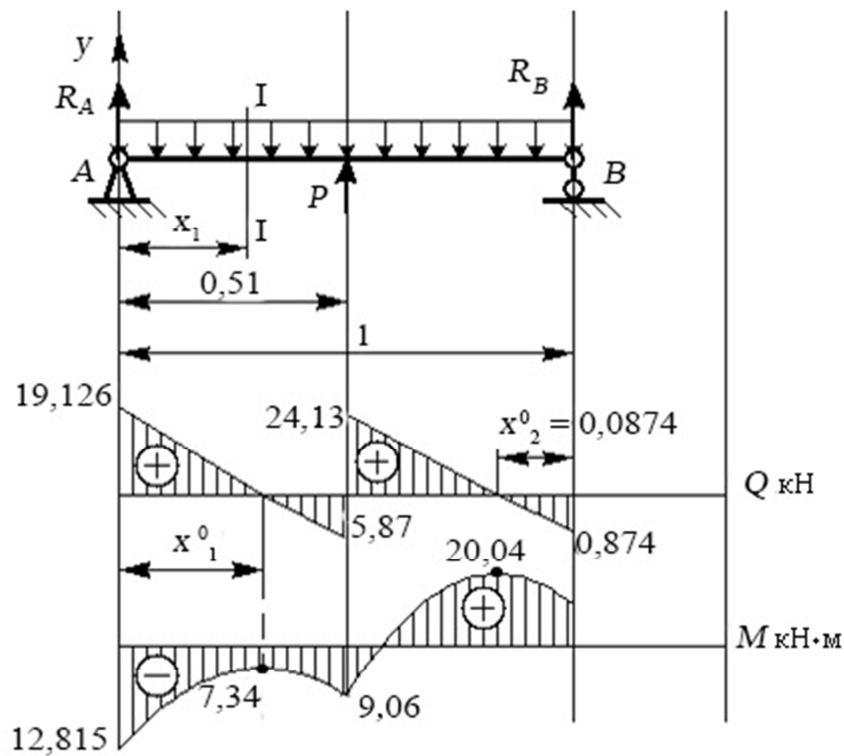


Рисунок 7.2. Схема для розрахунку балки та епюри внутрішніх зусиль

Ділянка II–II

Для ділянки балки в інтервалі $0 \leq x_1 \leq 0,5l$, або $0 \leq x_1 \leq 2,5$ м зрізувальна сила та внутрішній згинальний момент відповідно:

при $x_1 = 0$

$$Q_{(0)} = R_A = 19,126 \text{ кН};$$

$$M_{(0)} = -M_1 = -12,815 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $x_1 = 2,5$ м

$$Q_{(2,5)} = 19,126 - 10 \cdot 2,5 = -5,87 \text{ кН};$$

$$M_{(2,5)} = 12,815 + 19,126 \cdot 2,5 - 10 \cdot 2,5 \cdot 2,5 / 2 = -9,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Якщо розглядати інтервал $0 \leq x_2 \leq 0,5l$, або $0 \leq x_2 \leq 2,5$ м, то розрахунок виконуємо з правого кінця балки.

Тоді зрізувальна сила

$$Q_{x_2} = -R_B + qx_2, \text{ а згинальний момент}$$

$$M_{x_2} = M_2 + R_B \cdot x_2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} .$$

Так ,

при $x_2 = 0$

$$Q_{(0)} = -R_B = -0,874 \text{ кН} ;$$

$$M_{(0)} = M_2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} , \text{ а}$$

при $x_2 = 2,5 \text{ м}$

$$Q_{(2,5)} = -0,874 + 10 \cdot 2,5 = 24,13 \text{ кН} ;$$

$$M_{(2,5)} = 20 + 0,874 \cdot 2,5 - 10 \cdot 2,5 \cdot 2,5 / 2 = -9,06 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Враховуючи диференціальні залежності Журавського, розрахуємо екстремальний згинальний момент у координатах:

$$x_1^0 = 1,9126 \text{ м};$$

$$x_2^0 = 0,0874 \text{ м};$$

$$x_1^0 = \frac{R_A}{q} = \frac{19,126}{10} = 1,9126 \text{ м};$$

$$x_2^0 = \frac{R_B}{q} = \frac{0,874}{10} = 0,0874 \text{ м} .$$

При $Q=0$ екстремальні значення згинальних моментів :

$$\begin{aligned} M_{max_1^0} &= -M_1 + R_A \cdot x_1^0 - q \cdot x_1^0 = -12,815 + 19,126 \cdot 1,9126 - \frac{10 \cdot 1,9126^2}{2} = \\ &= -7,34 \text{ кН} \cdot \text{м} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{max_2^0} &= M_2 + R_B \cdot x_2^0 - q \cdot x_2^0 \cdot \frac{x_2^0}{2} = 20 + 0,874 \cdot 0,0874 - 10 \cdot 0,0874 \cdot \frac{0,0874}{2} = \\ &= 20,04 \text{ кН} \cdot \text{м} . \end{aligned}$$

За отриманими значеннями внутрішніх зусиль будуюмо епюри Q і M (рисунок 7.1. д,е).

Висновок: для статично невизначуваної балки розраховано ступінь статичної невизначуваності балки. Складено додаткові рівняння переміщень осі балки та з урахуванням опорних моментів побудовано епюри внутрішніх зусиль.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. G.

8. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ РАМИ

8.1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Рамою називається система прямолінійних стрижнів, поєднаних вузлами. Горизонтальні стрижні називають ще ригель, а вертикальні стрижні стояк. Якщо рама навантажена зовнішніми силами, то в перерізах виникають внутрішні силові фактори : поперечні сили , поздовжні сили та згинальні моменти.

Згинальні сили Q визначають як суму проєкцій сил, розташованих з одного боку від перерізу. Згинальні сили вважаються додатними, якщо — вони повертають стрижень за ходом годинникової стрілки.

Поздовжні сили N визначають як суму проєкцій усіх сил, розташованих з одного боку від перерізу. Такі сили вважають додатними, якщо вони викликають деформацію розтягання, від'ємними, якщо стиснення.

Згинальні моменти M визначають як суму моментів усіх сил, що діють на раму з одного боку від перерізу.

При розрахунку рами згинальні моменти задають довільно, а на епюрах координати відкладають на розтягнутих волокнах.

Розрахунки рам починають з обчислення реакцій в'язів, після чого будують графіки (епюри) внутрішніх зусиль .

У практичних розрахунках розглядають ту частину рами, на яку діє менша кількість зовнішніх сил та для якої простіше скласти систему рівнянь і виконати обчислення.

Таким чином, для побудови епюр внутрішніх зусиль раму розбивать на окремі ділянки, а межами ділянок будуть:

- місця з'єднання стрижнів;
- місця, в яких прикладені зосереджені сили або згинальні моменти;
- місця початку та закінчення дії розподілених навантажень.

Перевірку побудови епюр виконують або, аналізуючи рівновагу вузлів, або за допомогою розрахункової схеми, де беруть до уваги зовнішні навантаження, внутрішні зусилля, котрі вибирають з епюр.

8.2. Послідовність розв'язання задачі: розрахунок параметрів рами

Для заданої рами:

- визначити реакції в'язів ;
- розрахувати внутрішні зусилля на всіх ділянках рами та побудувати епюри N, Q, M ;
- виконати перевірку ;
- підібрати двотавровий переріз рами за заданими допустимими напруженнями.

Вихідні дані :

$$P=20 \text{ кН} ; M=30 \text{ кН}\cdot\text{м} ; q=4 \text{ кН}\cdot\text{м} ; a=4 \text{ м} ; b=3 \text{ м} ; [\sigma]=1,6\cdot 10^5 \text{ кН}/\text{м}^2.$$

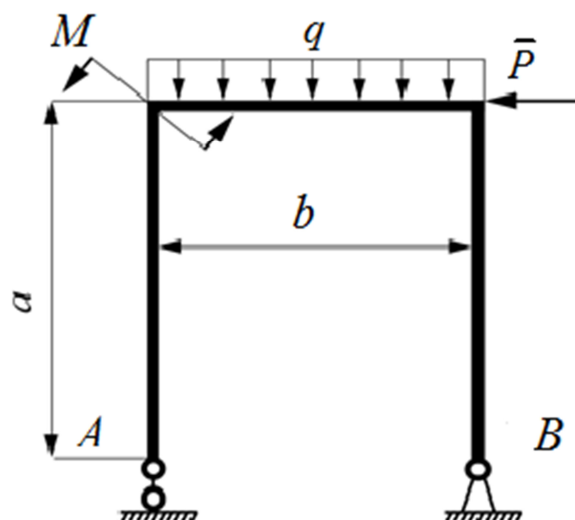


Рисунок 8.1. Схема для розрахунку навантаження рами

Перш за все знайдемо реакції опірності. Внизу лівого стояка розташований рухомий опорний шарнір A , в якому виникає лише одна вертикальна реакція R_A , внизу правого стояка – нерухомий опорний шарнір B , в якому буде дві складові реакції – вертикальна R_{By} та горизонтальна R_{Bx} . Дійсні напрямки цих реакцій ще невідомі, тому спрямовуємо їх поки що довільно.

Для визначення трьох невідомих реакцій R_A, R_{Bx}, R_{By} запишемо аналітичні умови рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_{kx} &= 0; \\ \sum \bar{F}_{ky} &= 0; \\ \sum M_{(\bar{F}_k)} &= 0.\end{aligned}$$

Для перших двох рівнянь виберемо плоску систему координат XU , третє рівняння моментів складемо відносно точки, через яку проходить більша кількість сил. Такою точкою буде B , тоді відносно неї і складемо систему рівнянь (рисунок 8.2).

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_{kx} &= R_{Bx} - P = 0; \\ \sum \bar{F}_{ky} &= R_{By} - R_A - q \cdot 3 = 0; \\ \sum M_{(\bar{F})B} &= P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + M - R_A \cdot 3 = 0.\end{aligned}$$

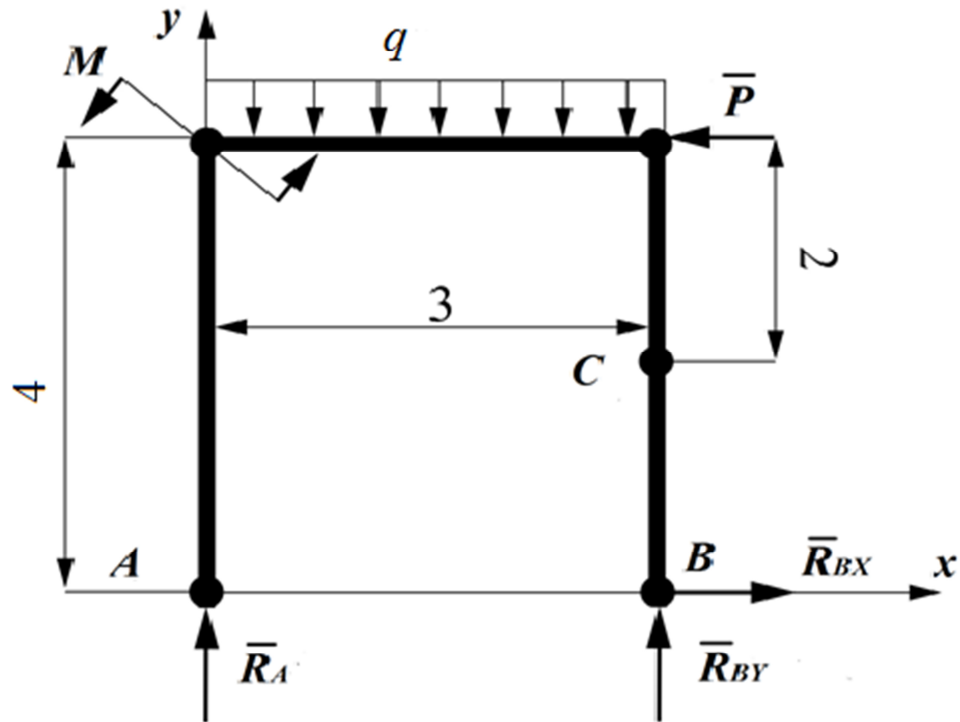


Рисунок 8.2. Розрахункова схема для рами

З третього рівняння визначимо реакцію як

$$\bar{R}_A = \frac{\bar{P} \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{3} = \frac{20 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30}{3} = 42,66 \text{ кН.}$$

Тепер із першого і другого рівнянні запишемо, що реакція

$$R_{Bx} = P = 20 \text{ кН;}$$

$$R_{By} = q \cdot 3 - R_A = 4 \cdot 3 - 42,66 = -30,66 \text{ кН.}$$

Реакції R_A та R_{Bx} виявилися додатними, отже вони дійсно спрямовані так, це було вибрано спочатку: R_A – вгору, R_{Bx} – праворуч, реакція R_{By} від'ємна, отже, має напрямок, протилежний вибраному, а саме: реакція R_{By} спрямована вниз. Змінимо на рисунку 8.2 напрямок реакції R_{By} на протилежний, і вважаємо всі реакції додатними:

$$R_A = 47,33 \text{ кН; } R_{Bx} = 20 \text{ кН; } R_{By} = 30,66 \text{ кН.}$$

Тепер визначену опірність реакцій слід перевірити, для цього складемо суму моментів всіх діючих на раму сил (з урахуванням визначених реакцій в'язів) відносно довільної точки (рисунок 8.2).

$$\begin{aligned} \sum M_{(\bar{F}_k)_C} &= -R_A \cdot 3 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 2 + R_{Bx} \cdot 2 = \\ &= -42,66 \cdot 3 + 30 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 128 - 128 = 0. \end{aligned}$$

Як бачимо, реакції визначені правильно.

З урахуванням визначених реакцій в'язів (рисунок 8.3) покажемо їх дійсний напрямок з урахуванням опірності, оскільки рама знаходиться в рівновазі при всіх діючих на неї зовнішніх сил.

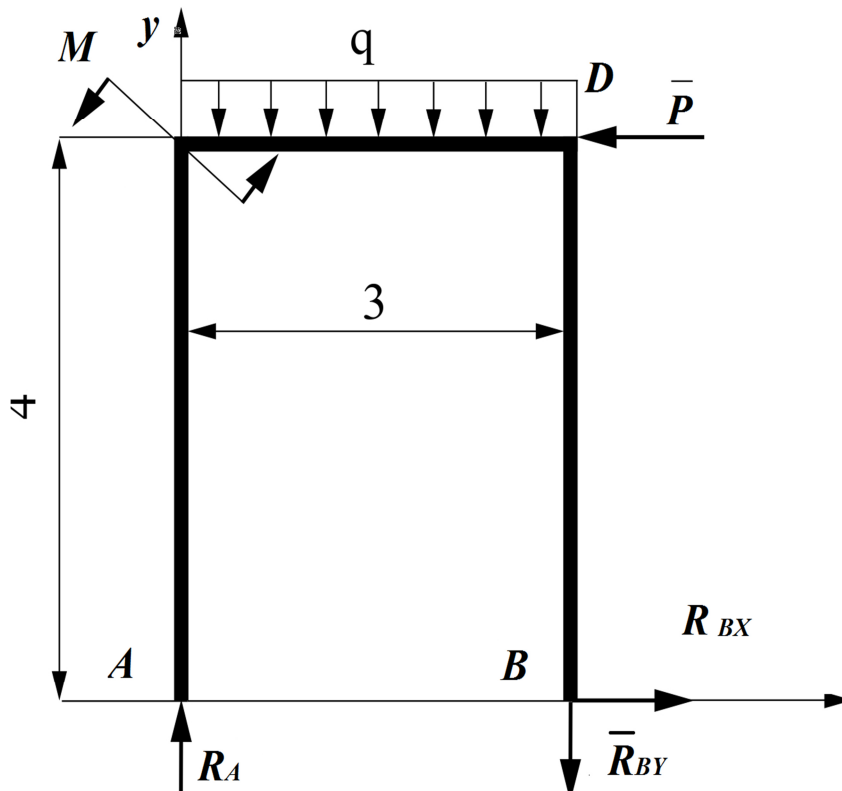


Рисунок 8.3. Схема для розрахунку характерних ділянок рами

Для розрахунку внутрішніх зусиль у перерізах рами застосуємо метод перерізів, вказуючи напрямок головного вектора та головного моменту внутрішніх зусиль, враховуючи при цьому рівновагу однієї частини рами.

Для заданої схеми навантаження рами маємо три характерних ділянки: лівий стоек AE , правий стоек BD , верхній горизонтальний ригель DE .

Розглянемо кожен ділянку рами, враховуючи всі зовнішні навантаження і використовуючи координати перерізів.

Ділянка AE :

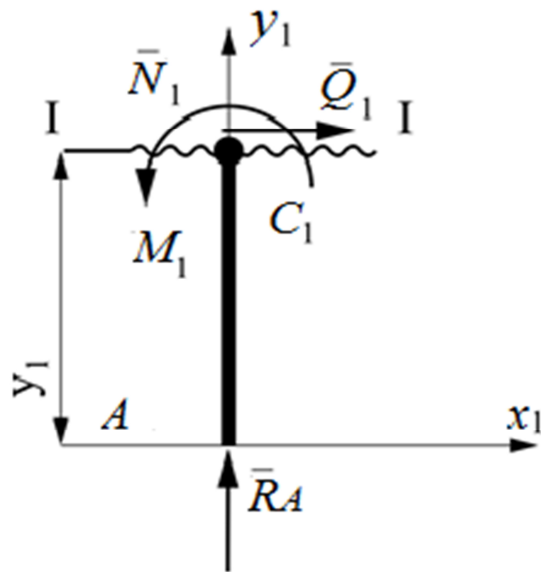


Рисунок 8.4.Схема для розрахунку ділянки AE

$$0_1 \leq y_1 \leq 4 \text{ м};$$

$$\sum F_{кx_1} = 0; Q_1 = 0;$$

$$\sum F_{кy_1} = 0; N_1 + R_A = 0; N_1 = -42,66 \text{ кН};$$

$$\sum M_{(\bar{F}_k)(C_1)} = 0; M_1 = 0.$$

Розраховані значення N_1 та Q_1 на епюрах можна відкласти з довільної сторони стояка, вказуючи знаки в кружечках.

Для горизонтально росташованого ригеля – це ділянка ED (рисунок 8.5).

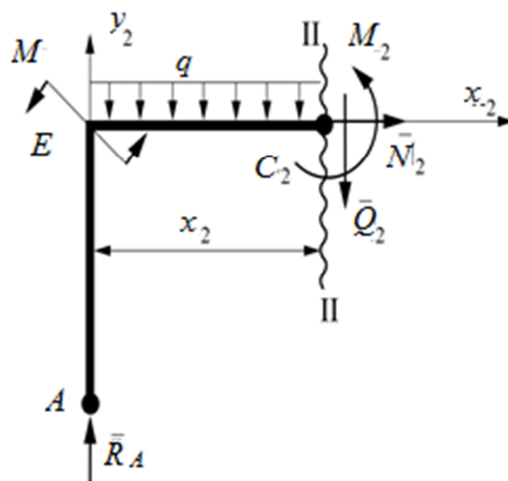


Рисунок 8.5.Схема для розрахунку ділянки ригеля ED

Розглянемо схему навантаження ригеля ED з координатою x_2 . Внутрішні зусилля N_2, Q_2 нехай будуть додатними відносно перерізу, а згинальний момент M_2 виберемо довільно.

$$0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м.}$$

$$\text{Тоді } \sum F_{kx_2} = 0; N_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky_2} = 0; R_A - q \cdot x_2 - Q_2 = 0,$$

$$\text{а } Q_2 = R_A - q \cdot x_2.$$

Наприклад,

$$\text{при } x_2 = 0 \quad Q_0 = R_A = 42,66 \text{ кН, а}$$

$$\text{при } x_2 = 3 \text{ м} \quad Q_3 = R_A = 42,66 - 4 \cdot 3 = 30,66 \text{ кН.}$$

$$\text{До того ж, якщо } \sum M_{(\bar{F}_k)c_2} = 0, \text{ то } -R_A \cdot x_2 + M + q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} + M_2 = 0$$

$$\text{і } M_2 = R_A \cdot x_2 - M - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2}.$$

Тому відповідно можна записати, що

$$\text{при } x_2 = 0 \quad M_0 = 42,66 \cdot 0 - 30 - 4 \cdot 0 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м, а}$$

$$\text{при } x_2 = 3 \text{ м} \quad M_3 = 42,66 \cdot 3 - 30 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cong +80 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Враховуючи рівняння квадратичної параболи, для згинальних моментів будемо епюру за двома крайніми координатами, які змінюють знак на протилежний в узлах. Так, в узлі E – розтягнені верхні волокна, в узлі D – нижні (рисунок 8.5).

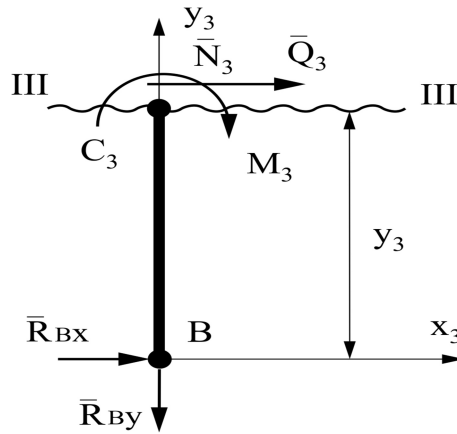


Рисунок 8.6. Схема для розрахунку ділянки стояка BD

Завершуємо побудову епюр рами на правому стояку ділянки BD , тобто $0 \leq x_3 \leq 4$ м, див. рисунок 8.6.

$$\text{При} \quad \sum \bar{F}_{kx} = 0 \quad Q_3 + R_{Bx} = 0$$

$$Q_3 = -R_{Bx} = -20 \text{ кН}.$$

$$\text{При} \quad \sum \bar{F}_{ky} = 0 \quad N_3 - R_{By} = 0;$$

$$N_3 = R_{By} = 30,66 \text{ кН}.$$

$$\text{При} \quad \sum M_{(\bar{F})(c_3)} = 0 \quad R_{Bx} \cdot y_3 - M_3 = 0 \text{ або}$$

$$M_3 = R_{Bx} \cdot y_3.$$

$$\text{Якщо} \quad y_3 = 0, \quad \text{то} \quad M_3 = 0.$$

$$\text{Якщо} \quad y_3 = 4, \quad \text{то} \quad M_3 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перевірка розрахунків внутрішніх зусиль та побудова епюр

Розглянемо в рівновазі вузол E , де діє заданий момент M , а на стояку та ригелі виникають внутрішні зусилля N_1, Q_2, M_2 .

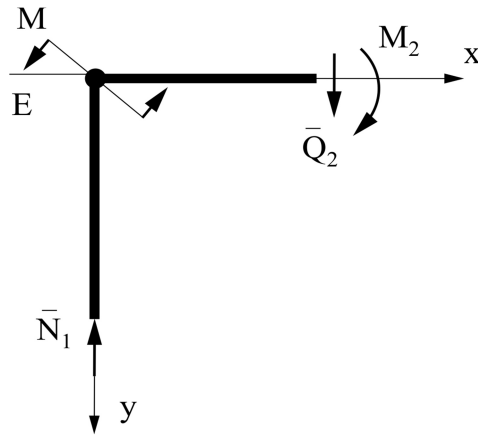


Рисунок 8.7. Схема рівноваги вузла E

Виберемо локальну систему координат для вузла E та запишемо умови рівноваги діючої системи сил:

$$\sum \bar{F}_{kx} = 0 \text{ (діючі зусилля відсутні) ;}$$

$$\sum \bar{F}_{ky} = 0, Q_2 - N_1 = 42,66 - 42,66 = 0;$$

$$\sum M_{(\bar{F}_k)} = 0, M - M_2 = 30 - 30 = 0.$$

Рівняння рівноваги виконуються, тобто вузол E знаходиться в рівновазі.

Таким чином, епюри внутрішніх зусиль для рами побудовані правильно.

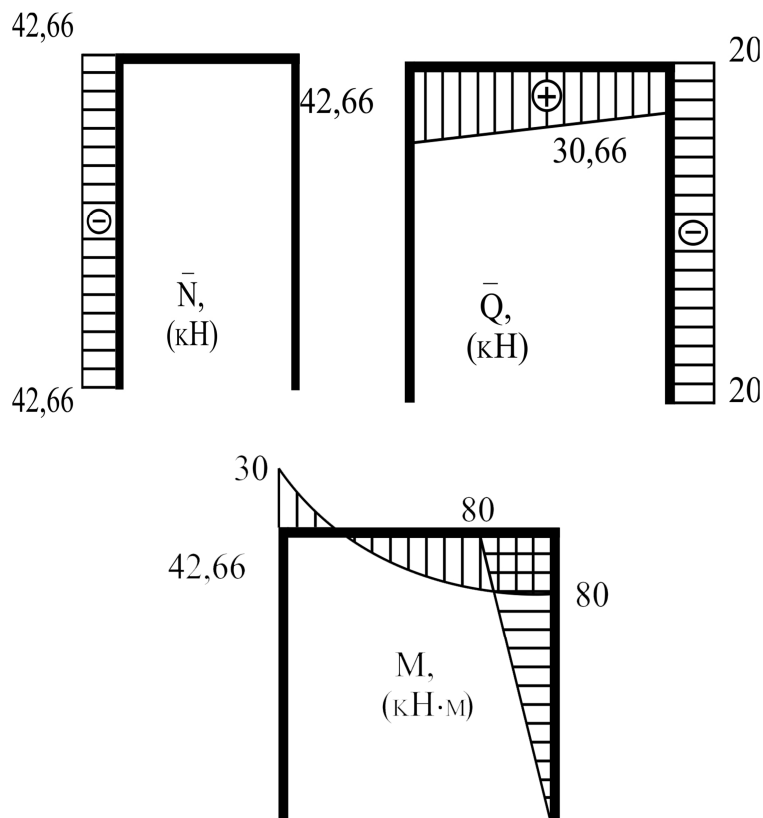


Рисунок 8.8. Схема для розрахунку епюр внутрішніх зусиль N, Q, M

Остаточні епюри внутрішніх зусиль розглянуті на рисунку 8.8.

Висновок: для заданої схеми навантаження рами розрахувати ступінь статичної визначуваності . Використовуючи додаткові рівняння методу сил, графоаналітичним способом обчислено внутрішні зусилля в рамі та побудовано епюри.

Завдання до самостійної роботи наведені в дод. Н.

9. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ РАМИ

9.1. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Для розрахунку статично невизначуваної рами застосуємо метод сил.

Цей метод полягає в тому, що задану систему звільняють від зайвих в'язів, а їх дію замінюють невідомими силами, які неможливо визначити за допомогою рівнянь статики. Такі сили розраховують за допомогою додаткових рівнянь, які замінюють відкинуті зайві в'язі. У таких рівняннях невідомими виявляються сили, звідки й назва – метод сил.

Послідовність розрахунку за методом сил складається з таких етапів:

встановлюють ступінь статичної невизначуваності рами за формулою $n = R - S$, де R – кількість невідомих реакцій зовнішніх в'язів ;

S – кількість рівнянь статики, котрі складаються з умов рівноваги рами ;

складають основну систему рівнянь шляхом відкидання зайвих в'язів.

Така система повинна бути статично визначуваною та геометрично незмінною;

формують еквівалентну систему шляхом уведення невідомих зусиль,

прикладених замість відкинутих в'язів. Такі невідомі зусилля позначають X_i , де

i – номер невідомого зайвого зусилля ;

складають рівняння сумісності деформацій, виходячи з умов, що переміщення, які неможливі у заданій системі, не повинні виникати і в еквівалентній системі під дією активного навантаження та невідомих зайвих зусиль.

Систему рівнянь записують у канонічній формі :

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

де $x_i = 1$ – невідоме одиничне зусилля; δ_{ik} – одиничне переміщення перерізу, яке відбувається у напрямку i –одиничної сили від дії k –одиничної сили, тобто δ_{11} – одиничне переміщення перерізу, де прикладена сила x_1 в напрямку від дії першої одиничної сили l_1 ; δ_{21} – одиничне переміщення перерізу у напрямку x_1 від дії другої одиничної сили l_2 ; Δ_{ip} – повне переміщення перерізу в напрямку сили x_1 від дії усього зовнішнього навантаження. Одиничні переміщення з однаковими індексами називають головними коефіцієнтами системи канонічних рівнянь, а з різними індексами – другорядними, при цьому $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Кожне окреме рівняння системи відображає, що переміщення перерізу, де відкинута зайву в'язь, є неможливим у напрямку реакції під дією заданого навантаження та невідомих сил x_1, x_2 .

Загальна кількість рівнянь сумісності переміщень дорівнює кількості невідомих зусиль, або ступеню статичної невизначуваності систем.

Розрахунок коефіцієнтів та вільних членів системи рівнянь доцільно виконувати за допомогою формул енергетичного методу.

Невідомі зусилля визначають шляхом розв'язання системи рівнянь відносно невідомих x_i , розкриваючи статичну невизначуваність системи.

Усі наступні розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість здійснюють аналогічно, оскільки це стосується статично визначуваних систем.

9.2. Послідовність розв'язання задачі: розрахунок параметрів рами

Для заданої статично невизначуваної рами необхідно :

розкрити статичну невизначуваність ;

визначити реакції в'язів ;

побудувати епюри поздовжніх N та поперечних Q сил, а також згинальних моментів M ;

перевірити результати розрахунків, якщо відомо, що $q=40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $P=30 \text{ кН}$; $M=50 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

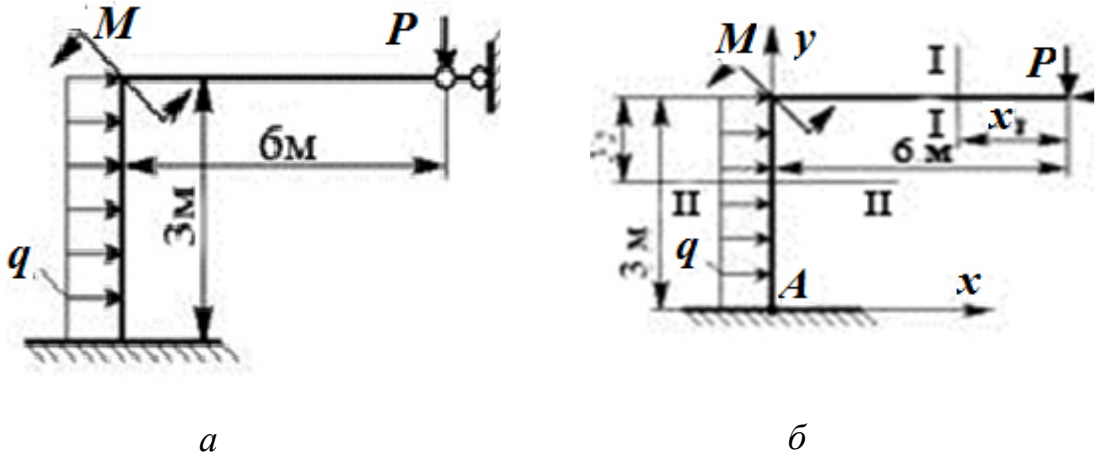


Рисунок 9.1. Схема навантаження (а) та розрахункова (б) схема

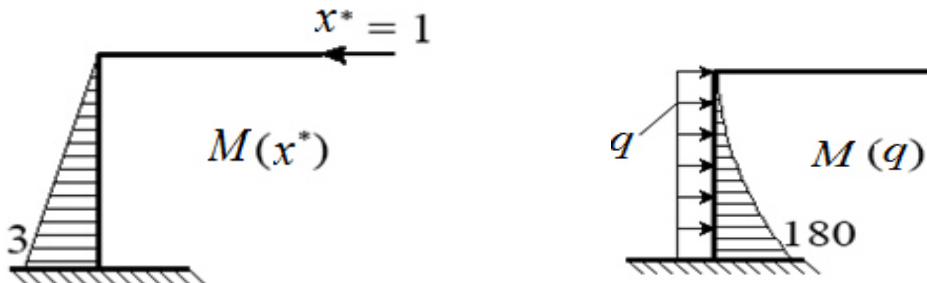
Етапи розрахунку.

Розрахуємо ступінь статичної невизначуваності рами як

$$n=4-3=1.$$

Складемо основну систему рівнянь, замінивши шарнірні опори на реакцію в'язів x^* .

Побудуємо епюри згинальних моментів відносно заданих навантажень та реакції x^* , використовуючи метод перерізів.



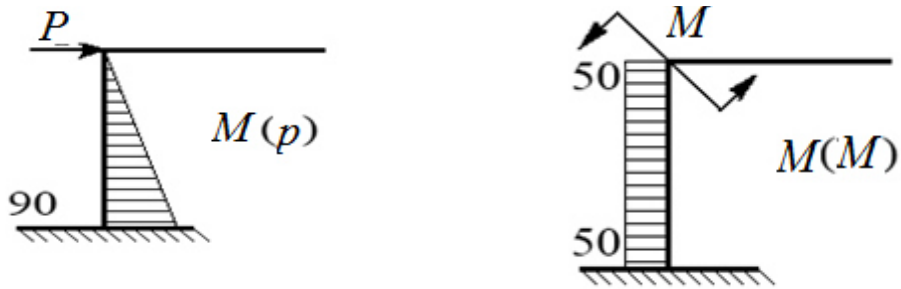


Рисунок 9.2. Схеми для розрахунку епюр моментів

Будемо умовно будувати епюри моментів на стиснених волокнах (рисунок 9.2).

Розглянемо такі ділянки .

Ділянка I – I (ригеля)

При $0 \leq x_1 \leq 6$ м

згинальний момент від x^* запишеться так :

$$M_{(x^*)} = 0 , \text{ а відповідно від } q, p \text{ та } M \text{ як}$$

$$M_{(q)} = 0 , M_{(p)} = 0 \text{ та } M_{(M)} = 0 .$$

Ділянка II–II (стояка)

При $0 \leq x_2 \leq 3$ м

згинальний момент запишеться так:

$$M_{(x^*)} = x^* \cdot y_2 .$$

Тоді при $y_2 = 0$

$$M_{(0)} = 1 \cdot 0 = 0 , \text{ а}$$

при $y_2 = 3$ м

$$M_{(3)} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_{(q)} = q \cdot y_2 \cdot \frac{y_2}{2} .$$

Тоді при $y_2 = 0$

$$M_{(0)} = 40 \cdot 0 \cdot 0 = 0, \text{ а}$$

при $y_2 = 3 \text{ м}$

$$M_{(3)} = 40 \cdot 3 \cdot 1,5 = 180 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(p)} = P \cdot y_2.$$

При $y_2 = 0$ $M_{(0)} = 0$, а

при $y_2 = 3 \text{ м}$ $M_{(3)} = 30 \cdot 3 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м};$

$$M_{(M)} = M.$$

При $y_2 = 0$ $M_{(0)} = M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а

при $y_2 = 3 \text{ м}$ $M_{(3)} = M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Складемо канонічне рівняння для методу сил:

$$\delta_{11} x^* + \Delta_{ip} = 0.$$

Розрахуємо одиничні δ_{11} та повні Δ_{ip} переміщення за правилом

Верещагіна, перемножуючи між собою епюри моментів:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_1 \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EJ};$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \vec{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \right. \\ \left. 2 + 50 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{135}{EJ}.$$

Враховуючи, що жорсткість $EJ = \text{const}$, то канонічні рівняння можна спростити до такого вигляду:

$$x^* \cdot \frac{9}{EJ} - \frac{135}{EJ} = 0.$$

Тоді

$$x^* = \frac{135}{9} = 15 \text{ кН.}$$

Оскільки реакцію x^* отримали додатною, то її напрямок залишається, і з урахуванням цього будуюмо епюри внутрішніх зусиль N, Q, M , див. рисунок 9.3.

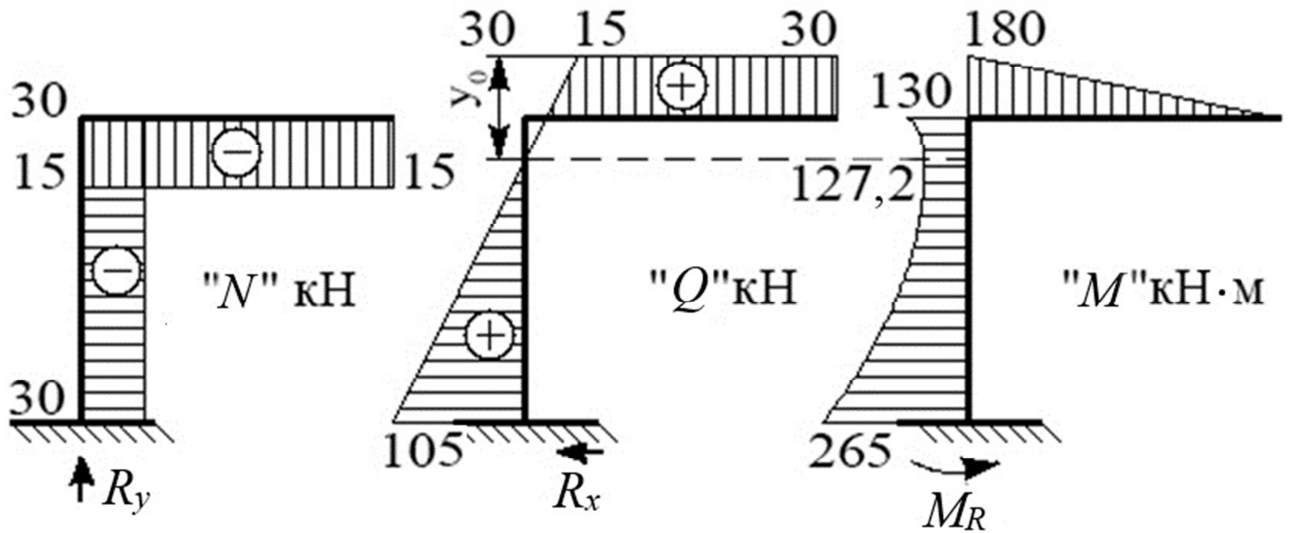
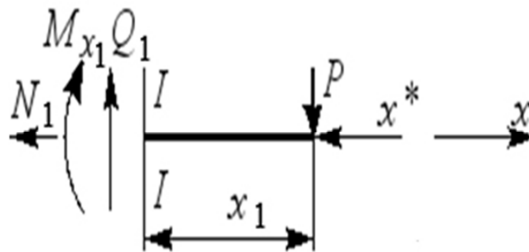


Рисунок 9.3. Епюри внутрішніх зусиль

Ділянка I-I (рігеля)



Розрахункова схема

При $0 \leq x_1 \leq 6 \text{ м}$

$$\sum F_{kx} = 0 ;$$

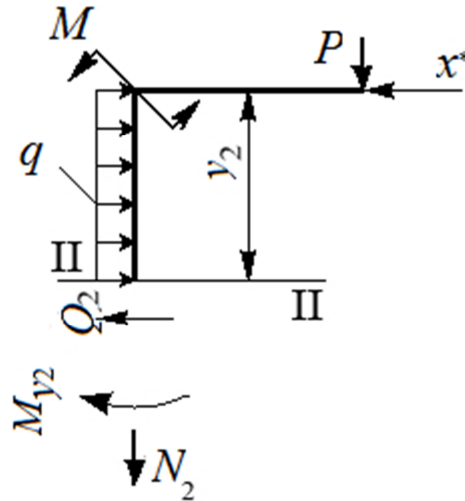
$$-N_1 - x^* = 0 ;$$

$$Mx_1 = -P \cdot x_1 .$$

При $x_1 = 0$ $M_{(0)} = 0$; $N_1 = -x^* = -15 \text{ кН}$, а

при $x_1 = 6 \text{ м}$ $M_{(6)} = -30 \cdot 6 = -180 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $Q_1 = P = 30 \text{ кН}$.

Ділянка II-II (стояка)



Розрахункова схема

При $0 \leq y_2 \leq 3 \text{ м}$

$$\sum F_{ky} = 0 ;$$

$$-N_2 - P = 0 ;$$

$$N_2 = -P = -30 \text{ кН};$$

$$Q_2 = -x^* + q \cdot y_2 .$$

При $y_2 = 0$ $Q_{(0)} = -x^* = -15 \text{ кН}$, а

при $y_2 = 3 \text{ м}$ $Q_{(3)} = -15 + 40 \cdot 3 = -105 \text{ кН}$.

Визначимо координату екстремуму згинальних моментів:

$$0 = x^* - q \cdot y_0 ;$$

$$y_0 = \frac{x^*}{q} = \frac{15}{40} = 0,375 \text{ м} ;$$

$$M_{y_2} = x^* \cdot y_2 - P \cdot 6 + M - q \cdot y_2 \cdot \frac{y_2}{2} .$$

При $y_2 = 0$ $M_{(0)} = -30 \cdot 6 + 50 = -130 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а

При $y_2 = 3 \text{ м}$ $M_{(3)} = 15 \cdot 3 - 30 \cdot 6 + 50 - 40 \cdot 3 \cdot 1.5 = -265 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Тоді при $y_0 = 0,375 \text{ м}$

$$M_{(max)} = 15 \cdot 0,375 - 30 \cdot 6 + 50 - 40 \cdot 0,375 \cdot \frac{0,375}{2} = -127,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перевірка розрахунків.

Враховуючи, що в защепленні виникають реакції в'язів R_x, R_y, M_r , то виконуємо перевірку отриманих результатів тільки для вузла:

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-x^* + q \cdot 3 - R_x = 0;$$

$$-15 + 40 \cdot 3 - 105 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-P + R_y = 0;$$

$$-30 + 30 = 0;$$

$$\sum M(F_i)_A = 0;$$

$$-P \cdot 6 + x^* \cdot 3 + M \cdot q \cdot 3 \cdot 1,5 + M_R = 0;$$

$$-30 \cdot 6 + 15 \cdot 3 + 50 - 40 \cdot 3 \cdot 1,5 + 265 = 0.$$

Висновок: для заданої схеми навантаження рами розраховано ступінь статичної невизначуваності. Використовуючи додаткові рівняння методу сил, графоаналітичним способом обчислено внутрішні зусилля в рамі та побудовано епюри.

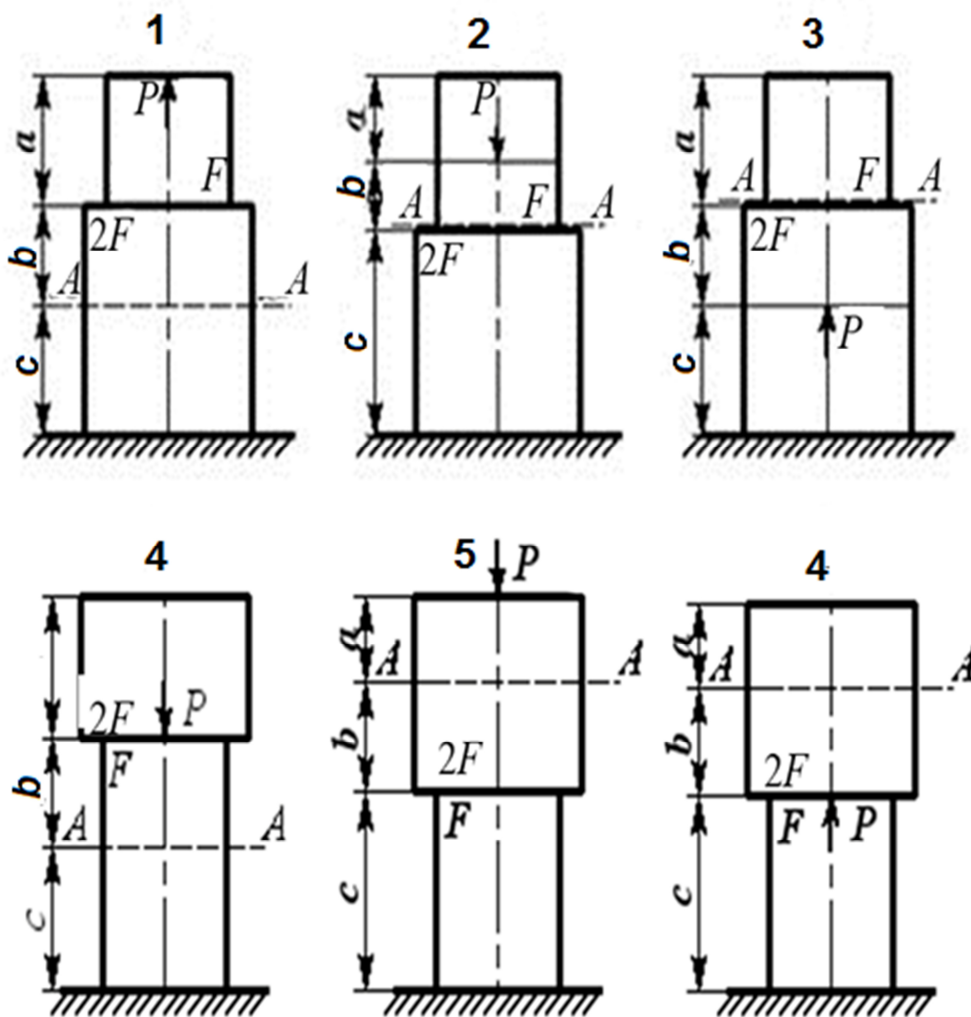
Завдання до самостійної роботи наведені в дод. І.

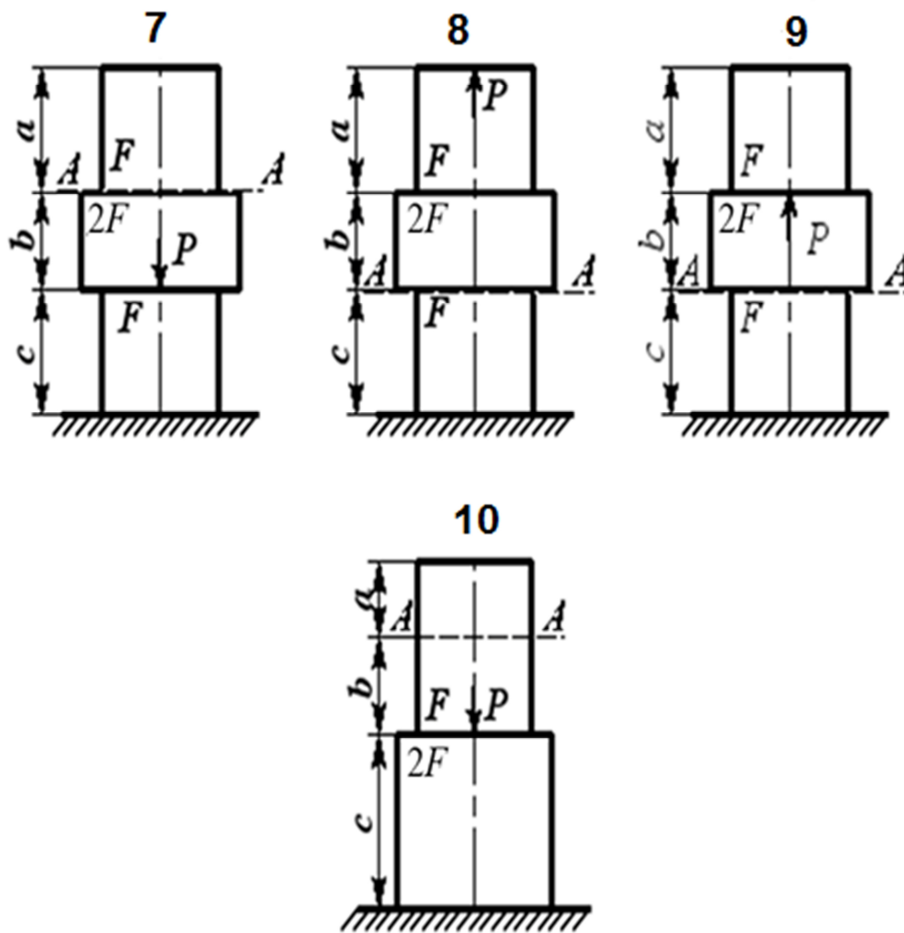
Додатки до виконання самостійної роботи з опору матеріалів

Додаток А

Для заданого ступінчатого стрижня, який перебуває під дією поздовжніх сил P та власної ваги :

побудувати епюру поздовжніх сил N , якщо $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$;
 визначити переміщення перерізу $A-A$ відносно жорсткого закріплення.
 Стрижень – сталевий, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.





Схеми навантаження стрижнів

Вихідні дані

№ строки	№ рисунка	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>P</i> , кН	<i>F</i> , м ²
		м				
1	1	2	4	3	50	0,1
2	2	3	2	5	80	0,15
3	3	5	6	3	100	0,2
4	4	3	4	2	120	0,25
5	5	6	3	2	150	0,3
6	6	2	5	6	170	0,35
7	7	5	4	2	200	0,4
8	8	6	5	7	220	0,45
9	9	7	2	3	250	0,5
10	10	8	3	4	300	0,55
	<i>e</i>	<i>в</i>	<i>z</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>z</i>

Додаток В

Для сталевого кубика, в якому на бокові грані діють нормальні σ_x, σ_y та дотичні $\tau_x = -\tau_y$ напруження, потрібно :

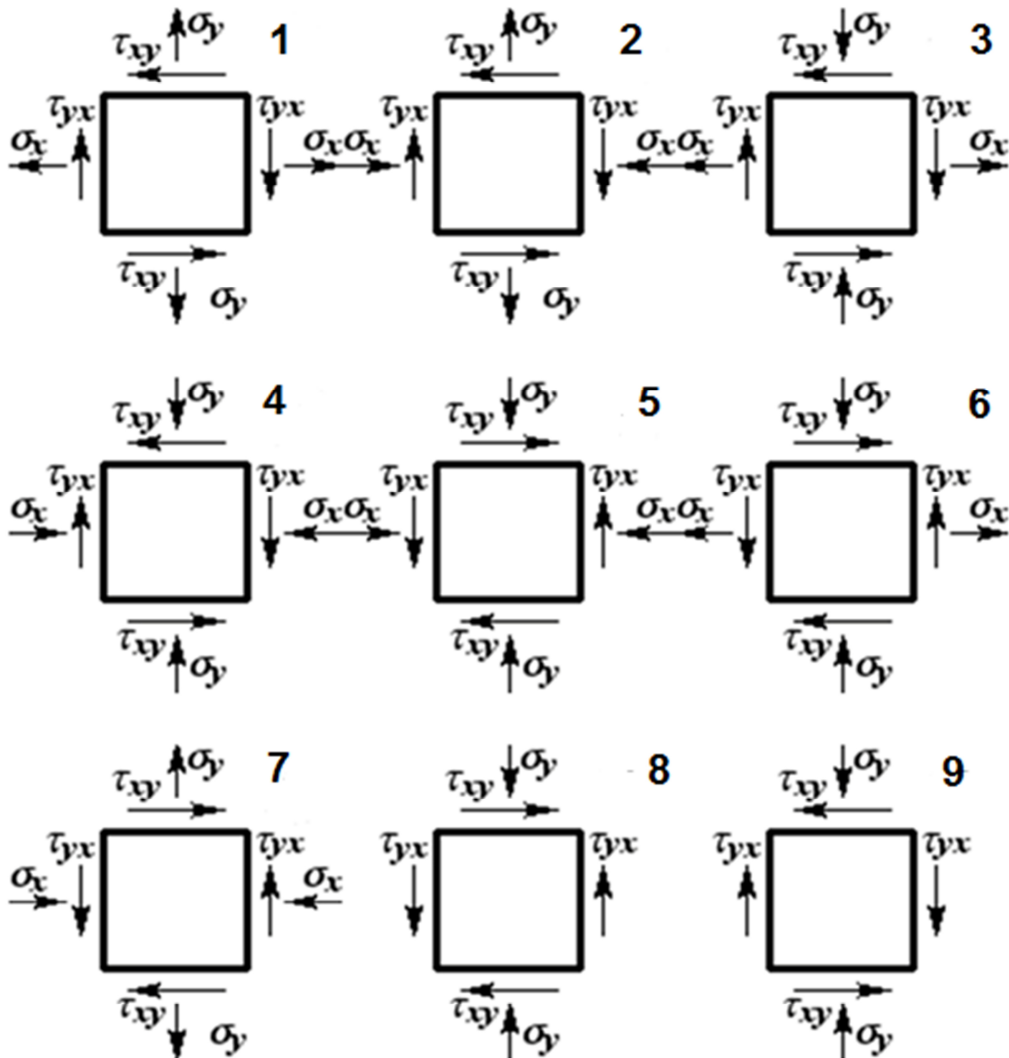
знайти положення головних площадок та розрахувати значення головних напружень;

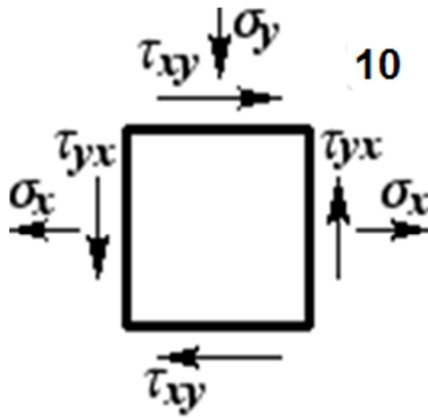
розрахувати екстремальні дотичні напруження, які дорівнюють піврізниці головних напружень;

визначити відносні деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ у трьох головних напрямках;

розрахувати відносне змінювання об'єму кубика;

обчислити питому потенціальну енергію деформації.





Схеми напруженого стану сталевого кубика

Вихідні дані

№ строки	№ рисунка	E , МПа	σ_x МПа	σ_y МПа	$\tau_{x,y}$ МПа
1	1	$2 \cdot 10^5$	70	50	80
2	2	-//-	60	40	90
3	3	-//-	80	90	20
4	4	-//-	40	30	100
5	5	-//-	50	20	80
6	6	-//-	30	70	20
7	7	-//-	20	80	40
8	8	-//-	100	60	30
9	9	-//-	90	100	50
10	10	-//-	60	30	70
			<i>a</i>	<i>б</i>	<i>з</i>

Додаток С

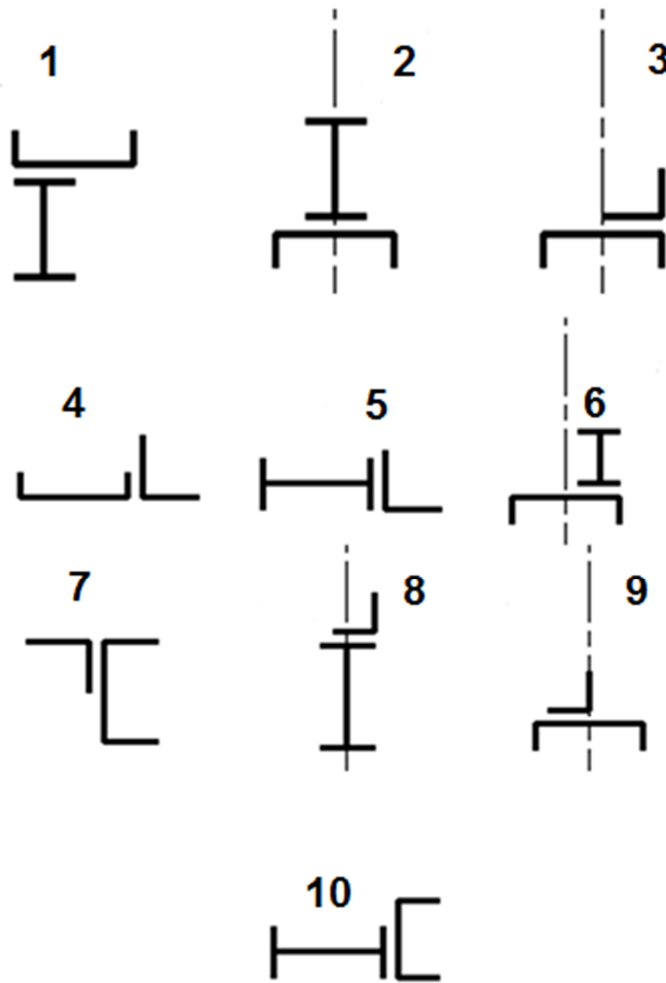
Для заданого поперечного перерізу визначити (рисунок 3) :

координати центра ваги (x_2, y_c) ;

моменти інерції перерізу відносно допоміжних центральних осей;

положення головних центральних осей інерції U, V відносно допоміжних центральних осей (x_c, y_c) ;

розрахувати головні центральні осьові моменти інерції J_u, J_v , осьові моменти опору (W_u, W_v) .



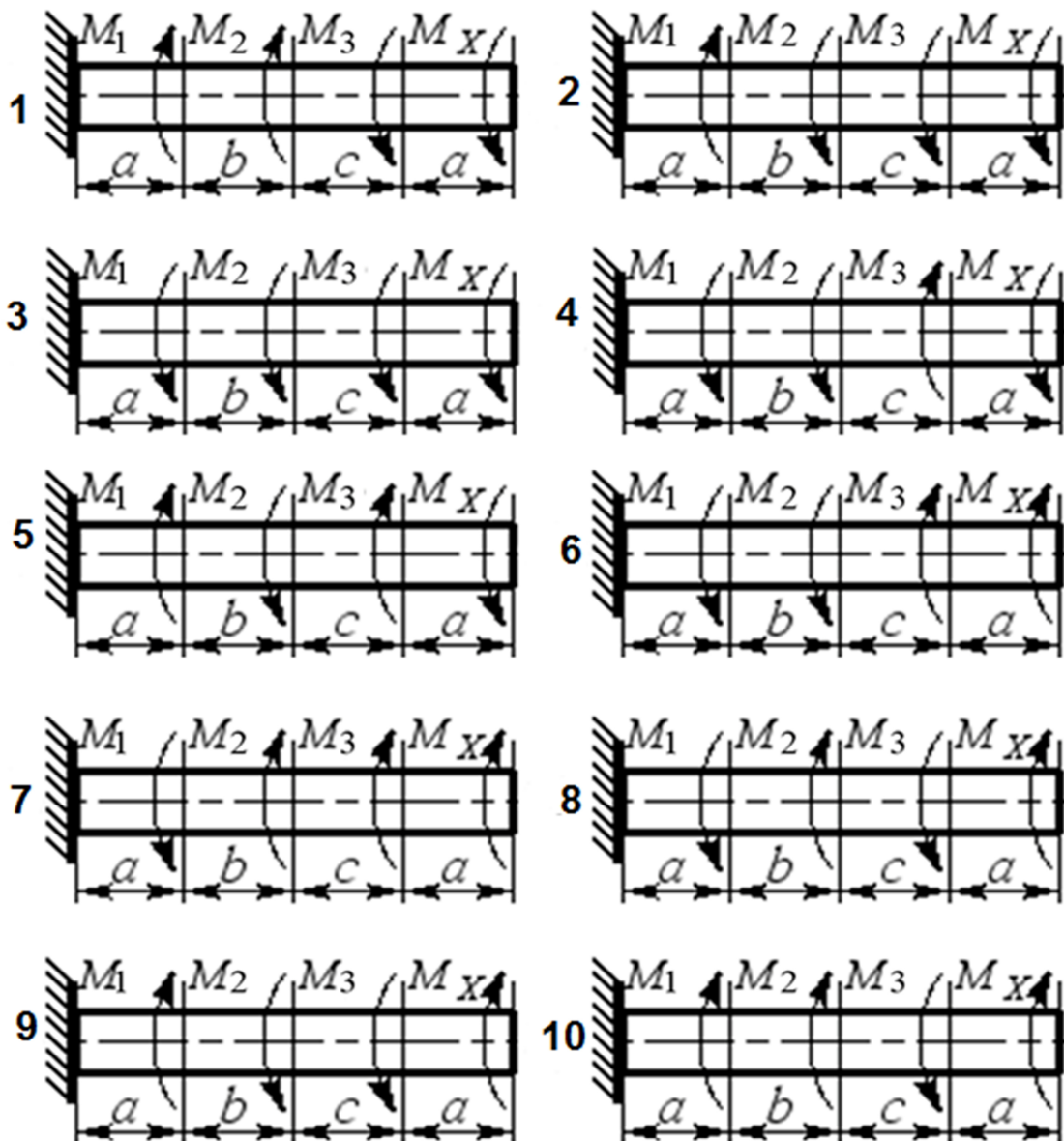
Схеми перерізів

Вихідні дані

№ строки	Тип перерізу	Двотавр	Швелер	Розмір кутника
1	1	10	14	40x40x4
2	2	12	16	50x50x5
3	3	14	18	60x60x8
4	4	16	20	70x70x5
5	5	18	22	80x80x10
6	6	20 ^a	24	90x90x7
7	7	20	30	100x100x12
8	8	24	33	110x110x7
9	9	30	36	120x120x10
10	10	30	40	140x140x12
	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>

Додаток D

Сталевий вал навантажений трьома крутними моментами: M_1, M_2, M_3 (рисунок 4. Треба : а) знайти значення моменту M_x , при якому кут повороту правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю; б) з урахуванням крутного моменту M_x побудувати епюру крутних моментів; в) з умови міцності визначити діаметр вала при заданому $[\tau]$ і округлити його до найбільшого значення: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм ; г) побудувати епюру кутів закручування, враховуючи, що модуль пружності сталі при зсуві $G=0.8 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; д) обчислити найбільший відносний кут закручування (на 1 м).



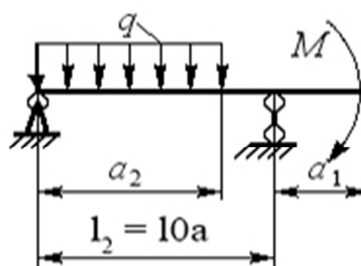
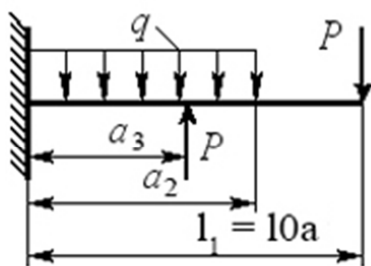
Схеми навантаження вала

Вихідні дані

№ строк и	№ рису нка	Відстань, м			Моменти, кН·м			[τ], МПа
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	M_1	M_2	M_3	
1	1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	30
2	2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	35
3	3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	40
4	4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	45
5	5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	50
6	6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	55
7	7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	60
8	8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	65
9	9	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9	70
10	10	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	75
	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>в</i>

Додаток Е

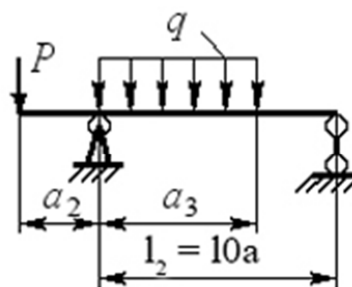
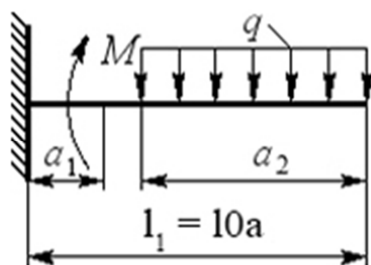
Перевірити міцність двотаврової балки за нормальними напруженнями.



1

a

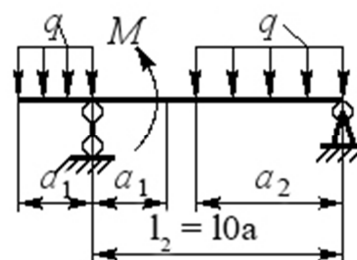
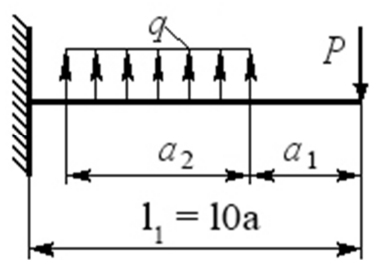
б



2

a

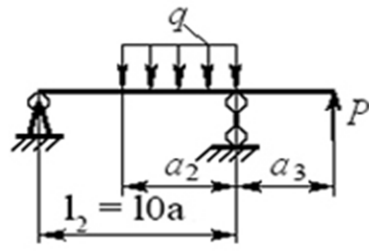
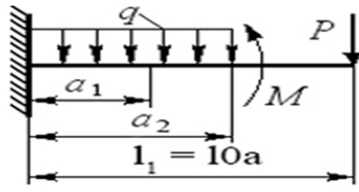
б



3

a

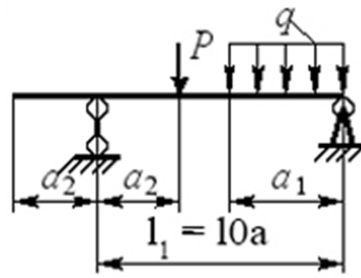
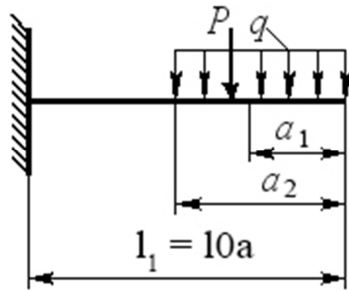
б



4

a

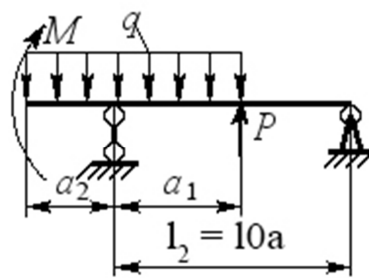
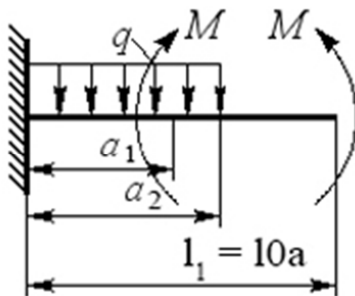
б



5

a

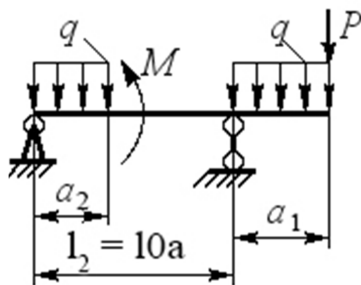
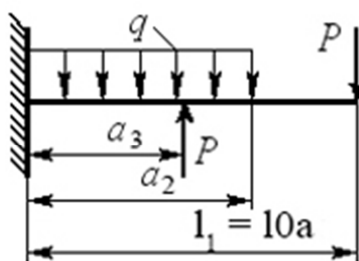
б



6

a

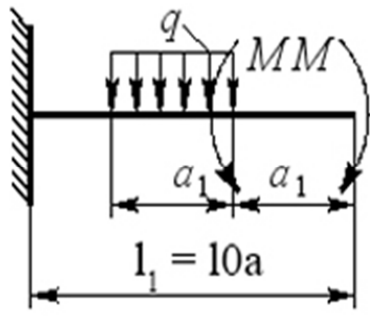
б



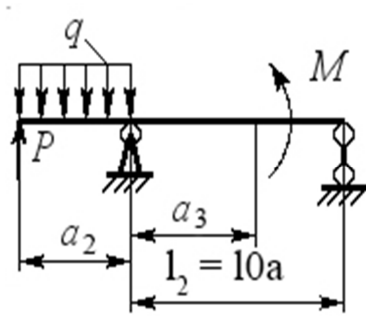
7

a

б

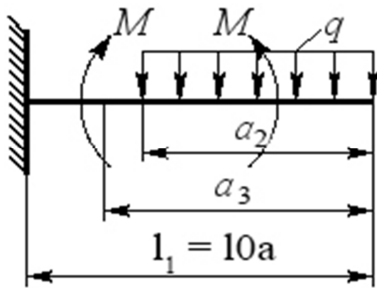


a

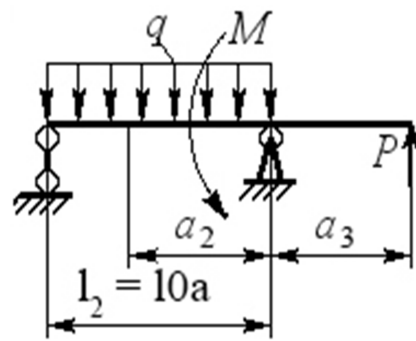


б

8

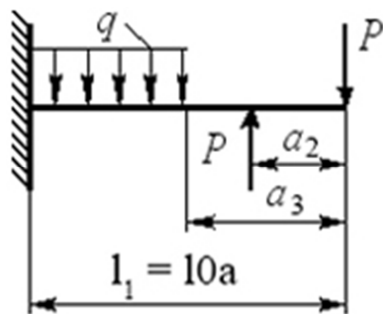


a

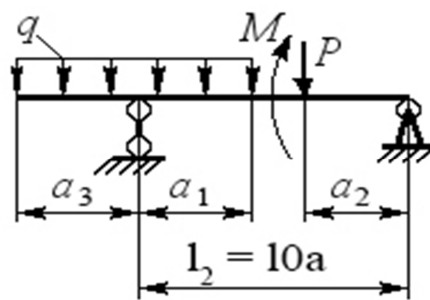


б

9



a



б

10

Схеми навантаження балок

Вихідних дані

№ строки	№ рисунка	l_1 м	l_l м	$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$	M , кН·м	P , кН	Q , кН·м
1	1	1,1	4	2	8	4	15	40	10
2	2	1,2	7	4	5	3	50	10	20
3	3	1,3	5	1	3	2	15	30	40
4	4	1,4	2	3	4	5	10	15	30
5	5	1,5	6	2	7	1	25	20	10
6	6	1,6	3	5	6	2	40	10	15
7	7	1,7	4	6	1	4	30	50	40
8	8	1,8	5	1	5	3	20	25	10
9	9	1,9	2	2	7	1	50	15	40
10	10	2,0	7	6	3	5	10	40	25

Для заданих розрахункових схем навантаження балок необхідно :

скласти вирази для розрахунку Q та M на кожній ділянці;

побудувати епюри Q та M ;

знайти небезпечний переріз балки;

для схеми а) підібрати дерев'яну балку круглого перерізу, якщо $[\sigma]=8\text{МПа}$;

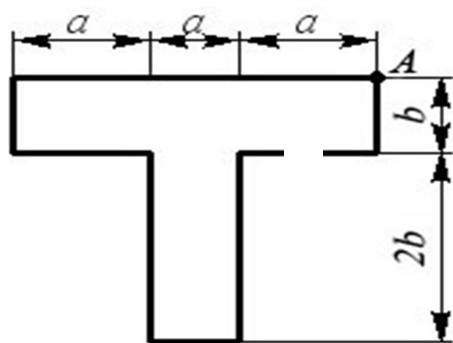
для схеми б) підібрати двотаврову сталеву балку, якщо $[\sigma]=160\text{МПа}$

Додаток F

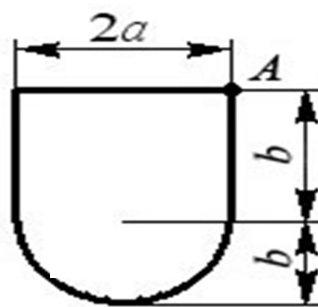
Чавунний стрижень стискається поздовжньою силою P , прикладеною в точці A . Необхідно:

обчислити найбільше розтягальне та найбільше стискальне напруження у поперечному перерізі, а також площу поперечного перерізу;

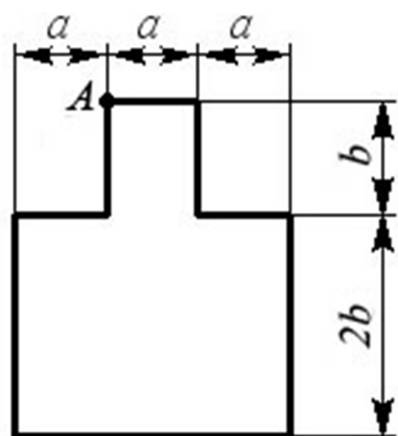
визначити допустиме навантаження P у заданому перерізі та допустимі напруження для чавуна на стиснення $[\sigma_{cm}]$ та на розтягання $[\sigma_p]$.



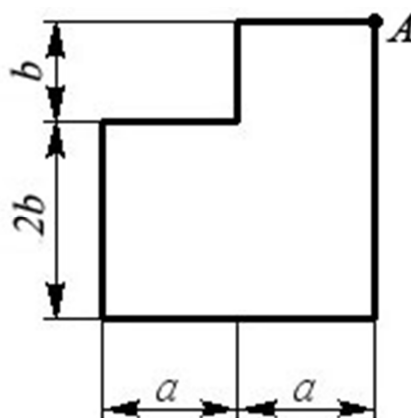
1



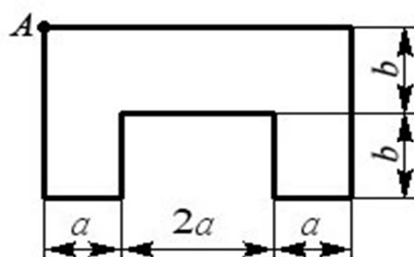
2



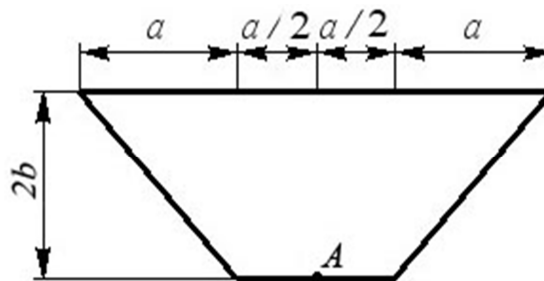
3



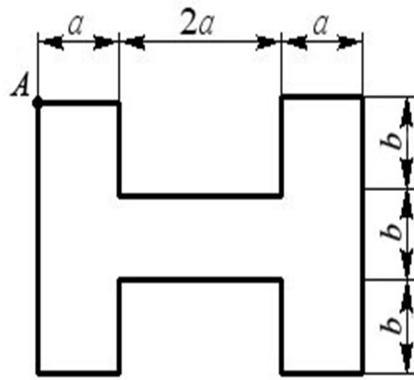
4



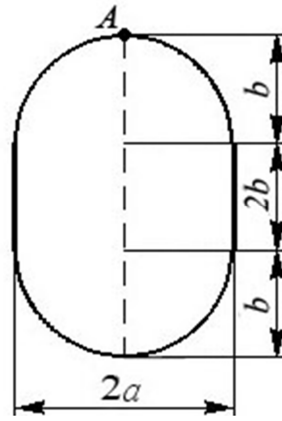
5



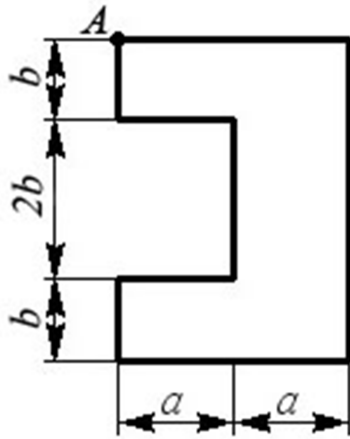
6



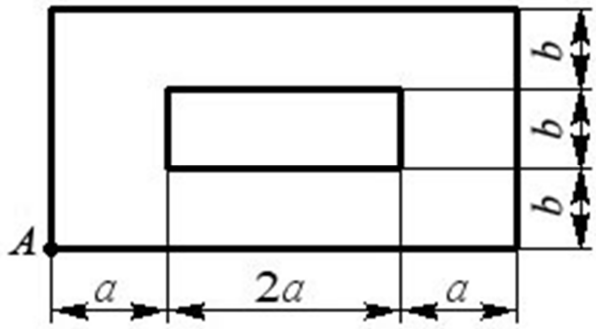
7



8



9



10

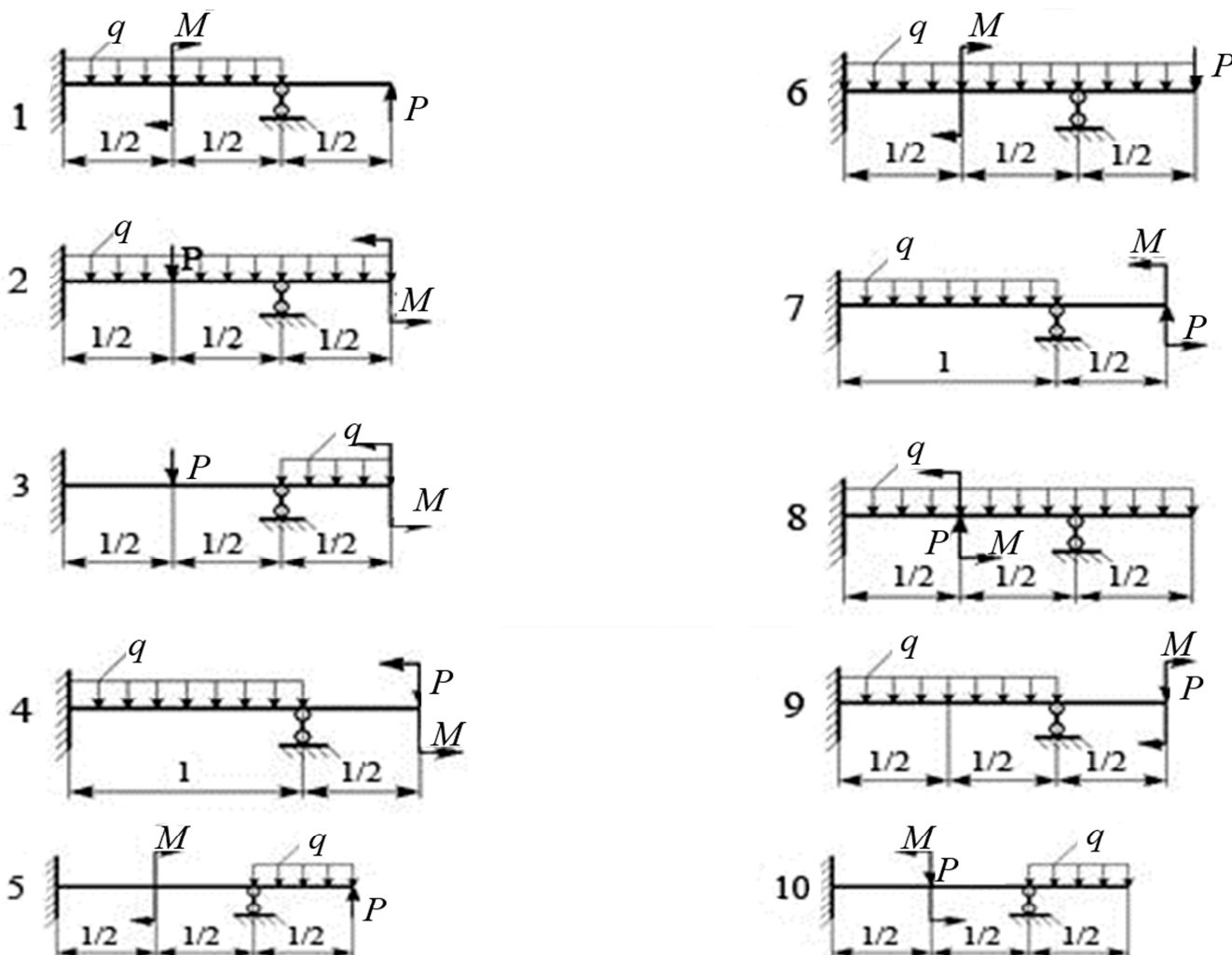
Схеми перерізу при позacentровому навантаженні

Вихідні дані

№ строки	№ рисунка	a , см	b , см	$[\sigma_{cm}]$, МПа	$[\sigma_p]$, МПа
1	1	50	50	90	30
2	2	20	20	80	25
3	3	40	40	70	40
4	4	70	70	100	35
5	5	30	30	50	20
6	6	60	60	110	45
7	7	80	80	120	50
8	8	20	20	50	15
9	9	50	50	60	17
10	10	30	30	90	22
	e	e	δ	e	δ

Додаток Г

Для нерозрізної балки, зображеної на рисунку 6, необхідно :
 визначити ступінь статичної невизначуваності балки;
 обчислити згинальний момент на лівій опорі;
 побудувати епюри поперечних сил Q та згинального моменту M .



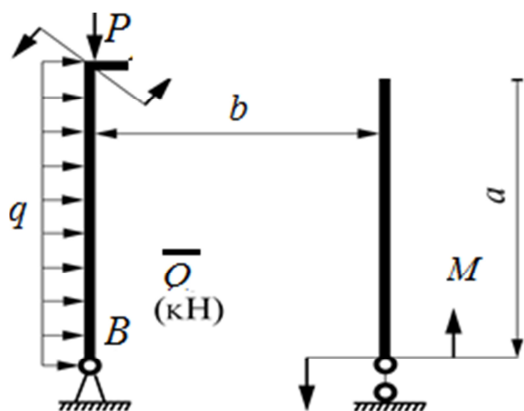
Схеми навантаження нерозрізних балок

Вихідні дані

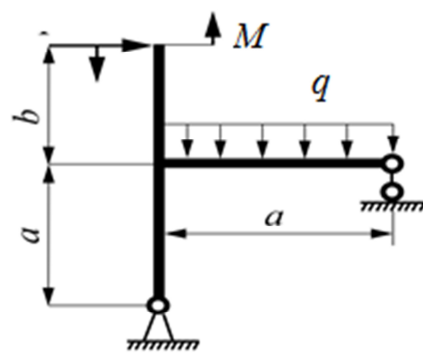
№ строки	№ рисунка	q , кН м	M , кН м	P , кН	l , м
1	1	5	10	40	2
2	2	20	15	10	3
3	3	10	5	20	4
4	4	15	20	30	5
5	5	30	30	5	6
6	6	4	40	15	7
7	7	8	4	25	8
8	8	40	8	35	9
9	9	2	35	8	10
10	10	25	6	4	1
	в	е	в	з	д

Додаток Н

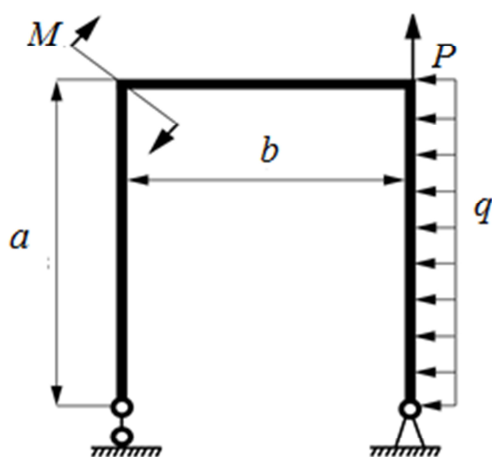
Для заданої рами :
розрахувати реакції в'язів на шарнірних опорах;
визначити внутрішні зусилля на всіх ділянках рами з урахуванням реакцій в'язів;
побудувати епюри внутрішніх зусиль N , Q , M ;
виконати перевірку розрахунків ;
підібрати двотавровий переріз рами за заданим допустимим напруженням $[\sigma]=160\text{МПа}$.



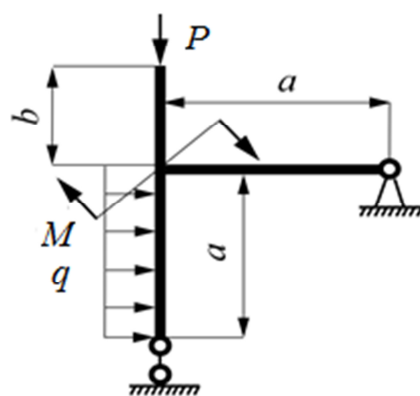
1



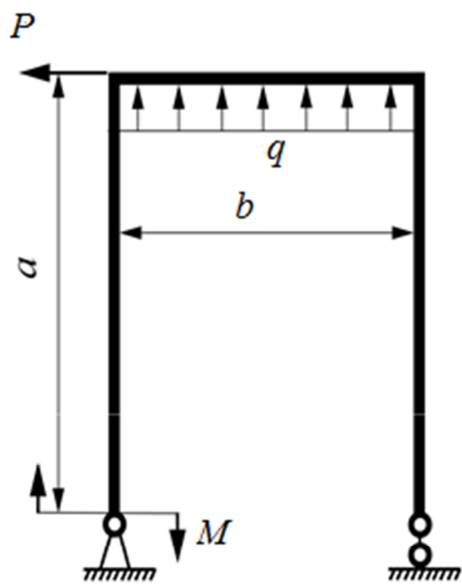
2



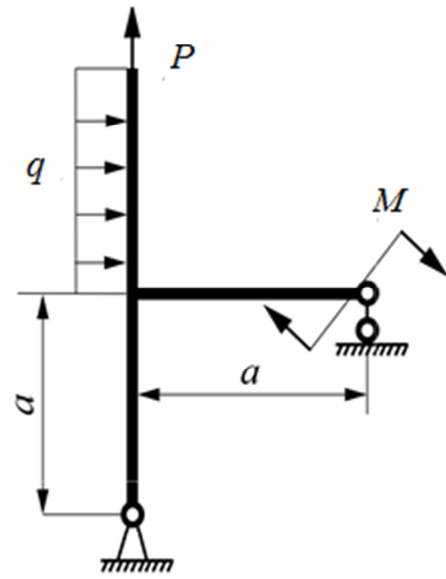
3



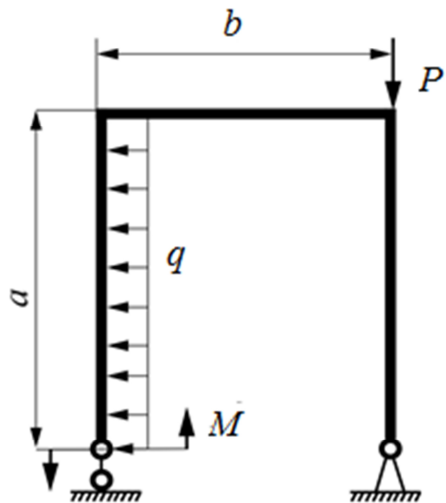
4



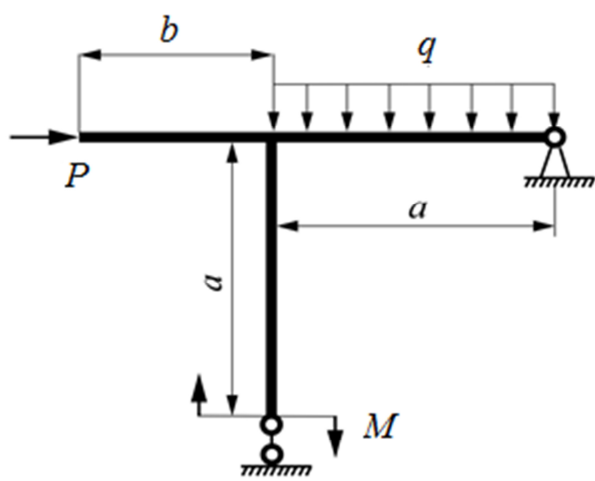
5



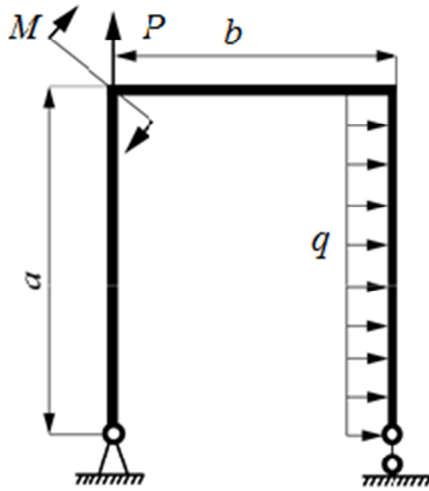
6



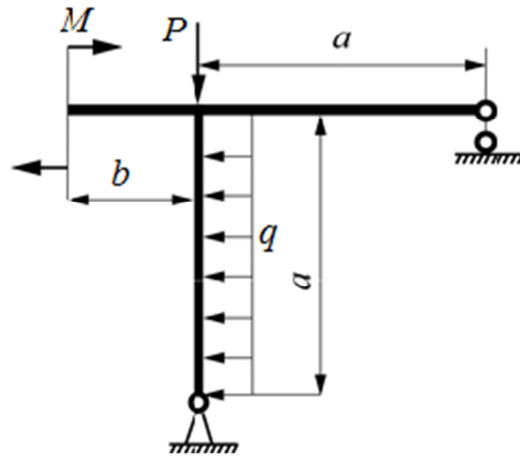
7



8



9



10

Схеми навантаження рами

Вихідні дані

№ строки	№ рисунка	M , кН·м	P , кН	q , кН/м	a , м	b , м
1	1	50	15	5	5	2
2	2	20	70	10	4	6
3	3	10	80	4	3	4
4	4	70	20	20	2	5
5	5	40	60	2	5	4
6	6	80	10	8	6	3
7	7	15	35	6	7	3
8	8	35	45	15	4	6
9	9	55	5	2	6	2
10	10	5	65	12	2	5

Додаток I

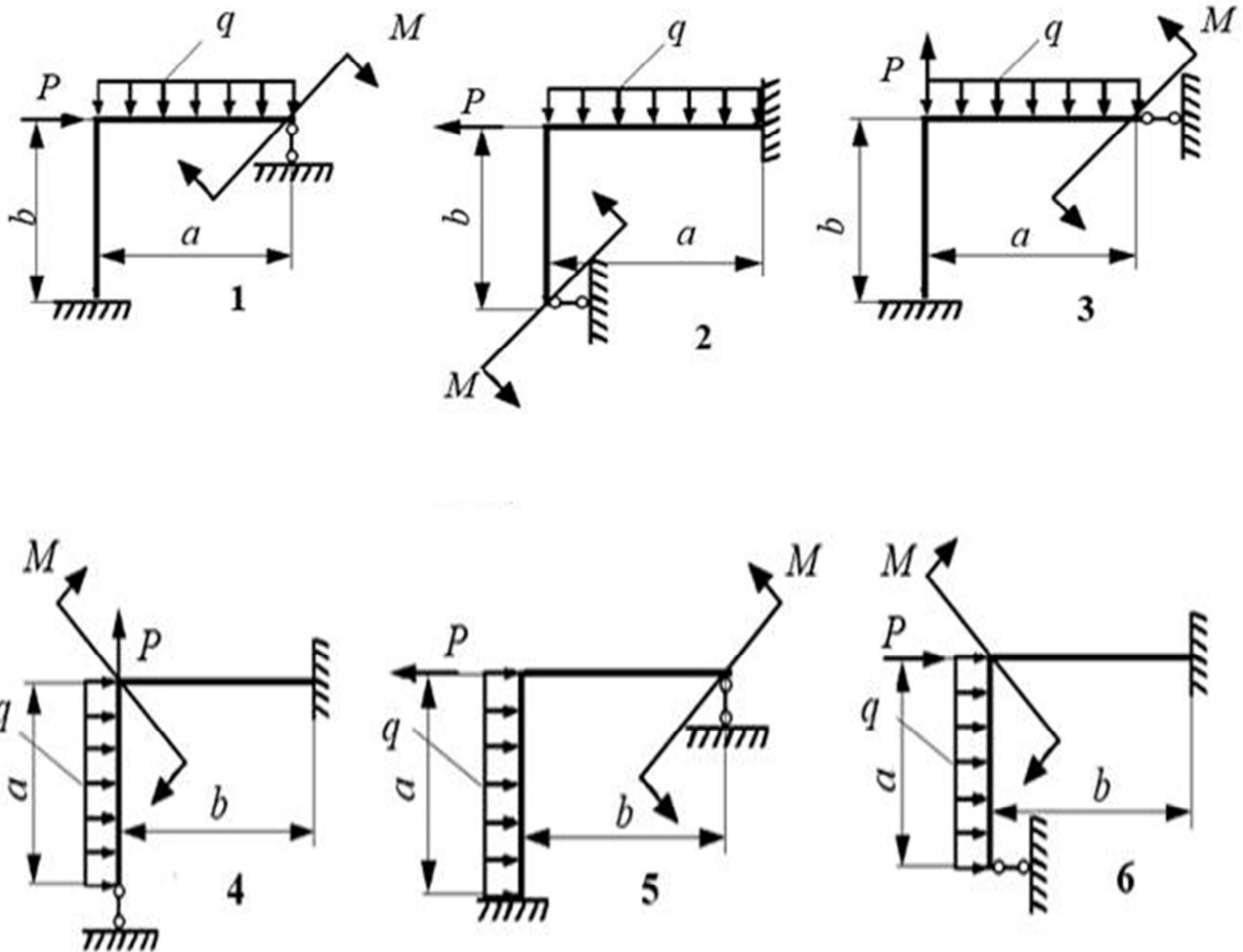
Для заданої рами :

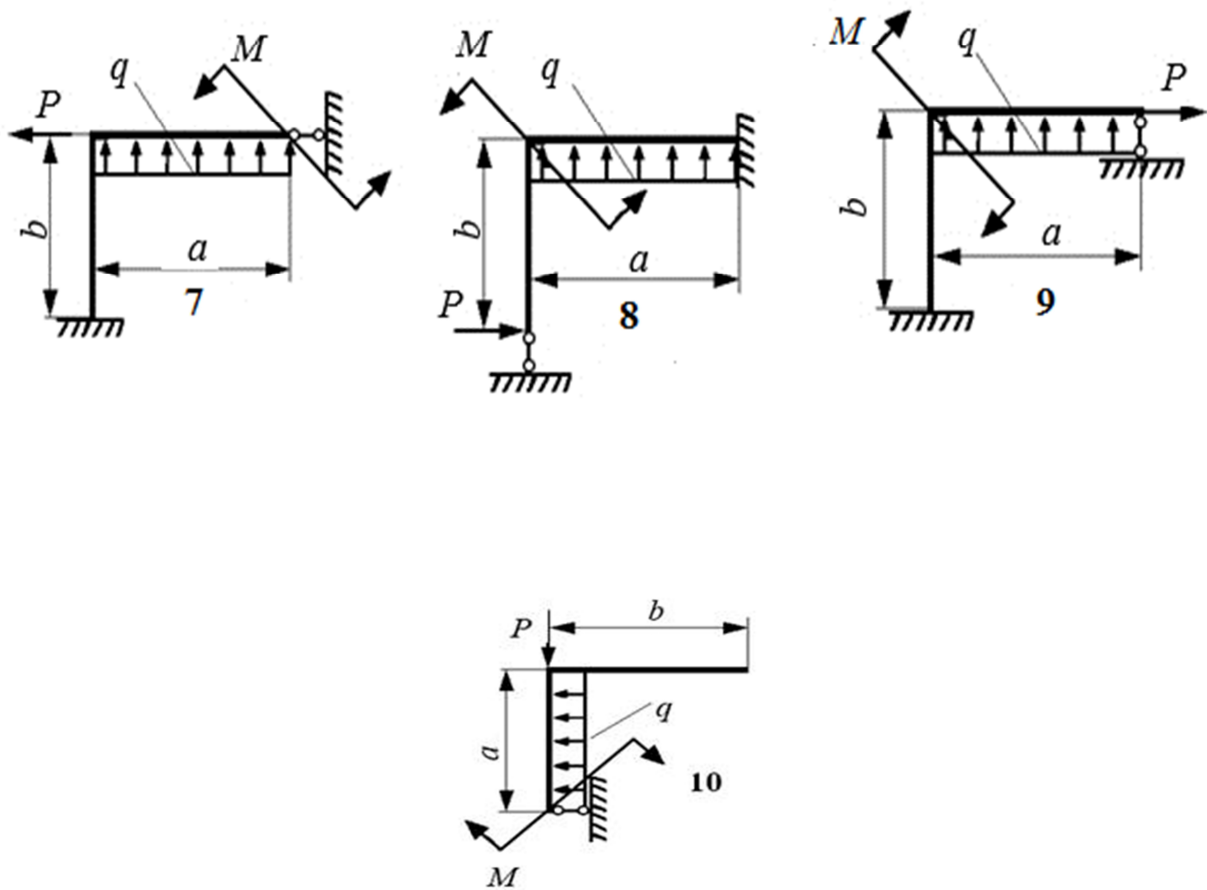
визначити показник статичної невизначуваності ;

скласти канонічні рівняння;

побудувати епюри поздовжніх N та поперечних Q сил, а також згинальних моментів M ;

виконати перевірку розрахунків.





Схеми навантаження невизначуваних рам

Вихідні дані

№ строки	№ рисунка	a , м	b , м	M , кН·м	P , кН	q , кН·м
1	1	3	4	5	2	2
2	2	4	3	10	5	2
3	3	5	3	6	2	4
4	4	3	5	8	3	2
5	5	2	4	2	6	5
6	6	4	2	4	8	3
7	7	4	6	3	10	2
8	8	6	4	7	9	6
9	9	3	6	9	7	4
10	10	6	3	1	6	5
	е	в	г	д	е	в

Рекомендації до виконання контрольних робіт

1. На обкладинці контрольної роботи мають бути наведені такі дані: назва дисципліни, прізвище, ім'я та по батькові, група та номер шифру (номер залікової книжки).

2. Перед розв'язуванням кожної задачі необхідно записати її умову та числові значення за номером свого шифру, вибрати відповідний рисунок з усіма літерними і числовими значеннями, які будуть використовуватися під час розрахунку.

3. Розв'язування задачі супроводжується поясненнями та рисунками, де взяті ті чи інші величини.

4. При розрахунках у формулу спочатку підставляють ,вибрані з таблиці числові значення і далі записується кінцевий результат з указанням одиниць виміру.

5. Кожен студент виконує свою контрольну роботу відповідно до свого шифру (номер залікової книжки) в учнівських зошитах з наведенням необхідних рисунків, формул і висновків.

6. Рисунки та числові значення до кожної задачі студент вибирає з таблиць відповідно до свого номеру (шифру) за такою схемою:

шифр – 5 3 4 8 1 7;

букви –а б в г д є.

Із кожної колонки таблиці, що знаходиться в нижньому рядку, необхідно вибрати одне число, розташоване в тій горизонтальній строчці, де номер співпадає з номером літери.

Список літератури

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – 2-ге вид., допов. та випр.– Київ. :Вища шк., 2004.– 655 с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – Москва : Наука, 1976, – 608 с.
3. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин, Н.М. Беляев . – Москва : Наука, 1970 . – 432с.
4. Дарков А.В. Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высш.шк.,1989. – 624 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
РОЗДІЛ 1. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ	4
1.1. Теоретичні положення	4
1.2. Послідовність розв'язання задачі з урахуванням власної ваги	7
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БРУСА	10
2.1. Теоретичні положення	10
2.2. Послідовність розв'язання задач	14
РОЗДІЛ 3. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів	17
3.1. Теоретичні положення	17
3.2. Послідовність розв'язання задачі	22
РОЗДІЛ 4. Кручення	29
4.1. Теоретичні положення	29
4.2. Послідовність розв'язання задачі	32
РОЗДІЛ 5. Згин. розрахунок статично визначуваних балок	36
5.1. Теоретичні положення	36
5.2. Послідовність розв'язання задачі	39
РОЗДІЛ 6. Позацентрове розтягання (стиснення) прямого бруса	48
6.1. Теоретичні положення	48
6.2. Послідовність розв'язання задачі	51
РОЗДІЛ 7. Розрахунок статично невизначуваних систем нерозрізної балки	56
7.1. Теоретичні положення	56
7.2. Послідовність розв'язання задачі	57
РОЗДІЛ 8. Розрахунок статично визначуваної рами	64
8.1. Теоретичні положення	64
8.2. Послідовність розв'язання задачі: розрахунок параметрів рами	65
РОЗДІЛ 9. Розрахунок статично невизначуваної рами	73
9.1. Теоретичні положення	
9.2. Послідовність розв'язання задачі: розрахунок параметрів рами	74

ДОДАТКИ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ОПОРУ	
МАТЕРІАЛІВ	81
Додаток А	82
Додаток В	84
Додаток С	86
Додаток D	88
Додаток Е	91
Додаток F	94
Додаток G	96
Додаток H	97
Додаток I	100
Рекомендації до виконання контрольних робіт	102
Список літератури	103

Навчальне видання

Колосов Дмитро Леонідович
Кіба Вячеслав Яковлевич

ОПР МАТЕРІАЛІВ
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАВДАННЯХ

Навчальний посібник

Редактор Л.О. Чуїщева

Підписано до друку 16.02.2021. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія Ум. друк. арк. 5.8.
Обл.-вид. арк. 6,1. Тираж 30 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
у Національному технічному університеті “Дніпровська політехніка”.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.