УДК 517.9 Штельма О. М.[1] Стешенко В. Ю.[2]

ЗНАХОДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ТОЧОК ФУНКЦІЇ МЕТОДОМ ЯКОБІ

Процес дослідження функції на наявність стаціонарних точок, а також їх перебування є одним з важливих елементів оптимізаційних методів. Стаціонарною вважається точка, де похідна функції дорівнює нулю [1].

Одним з оптимальних варіантів визначення стаціонарних точок функції є метод Якобі. Визначення стаціонарних точок цим методом у задачі мінімізації при обмеженнях у вигляді рівності полягає у розв’язанні системи, що складається з *n* рівнянь, серед яких *m* визначаються обмеженнями задачі змінні, а останні *p*=*n*-*m* – необхідними умовами для точки локального мінімуму [2]:

$$\begin{cases} f_i(\overline{S},\overline{t}) = 0, i = \overline{1,m} \\ \dfrac{\delta y}{\delta t_j} = 0, j = \overline{1,p} \end{cases}$$

За допомогою методу Якобі визначимо стаціонарні точки функції для наступної задачі:

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \underset{\bar{x} \in \Omega}{min};$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1^2 x_2 - 1 = 0 \\ f_2 = x_1 x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Будемо вважати залежними змінними – x_2 і x_3, а незалежними – x_1.

Знайдемо вектор умовних похідних за незалежними змінними:

$$\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right) W^{\ 1} \cdot C, \qquad (1)$$

де $\bar{t}$ – вектор не залежних змінних; $\bar{S}$ – вектор залежних змінних.

$$\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right) = \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} =$$

$$= 4x_1 - \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} & \frac{-1}{x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - 4x_1 - \frac{x_3}{x_1 x_2}$$

---

[1] Штельма О.М. , ст. викладач кафедри КНтаІТ, ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

[2] Стешенко В.Ю., студент групи КН 2019-1 ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

Далі складемо для даного прикладу систему рівнянь типу:

$$\begin{cases} 4x_1 - \dfrac{x_3}{x_1 x_2} = 0; \\ x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ x_1 x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок $\bar{x}^{(0)} = \left[\frac{1}{2}\ 4\ 4\right]$ і є стаціонарною точкою.

Доведемо, що стаціонарна точка $\bar{x}^{(0)} = \left[\frac{1}{2}\ 4\ 4\right]$ є точкою локального мінімуму, тобто $\bar{x}^{(0)} = \bar{x}^{*}$. Стаціонарна точка функції $y\ (\bar{x})$ з обмеженнями на зміні *fi* $(\bar{x})=0$ є точкою локального мінімуму, якщо матриця позитивно визначена.

$$S = P_{tt} - P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C - (P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C) + (W^{-1} \cdot C) P_{ss} \cdot W^{-1} \cdot C \qquad (2)$$

У виразі (2) P_{tt}, P_{ts}, Ps_s подматриці матриці

$$P = \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{st} \\ P_{ts} & P_{tt} \end{bmatrix} = H_0 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_j,$$

де H_0 – матриця Гесса;
λ_j – коефіцієнти чутливості;
H_j – матриця других похідних функції.

Для розглянутого прикладу маємо:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2x_3}{x_2^3} & \dfrac{1}{x_2^2} \\ 0 & \dfrac{1}{x_2^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{16} \\ 0 & \dfrac{1}{16} & 0 \end{bmatrix};$$

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

При визначенні матриць H_1 та H_2 візьмемо другі похідні функцій.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = 4 - \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} +$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

Таким чином, стаціонарна точка $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$ є точкою локального мінімуму

$\bar{x}^{(0)} = \bar{x}^*$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Попов В. В. Методи обчислень. – К., 2012. – 303 с
2. Штельма О.М. Курс лекцій з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі»”. – Х.: ХНУМГ, 2020. – 43 с.