

**Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет  
«Дніпровська політехніка»**

**Інститут електроенергетики  
Факультет інформаційних технологій  
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій**

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА  
кваліфікаційної роботи ступеню магістра**

студент Скорченко Антон Сергійович

академічної групи 172М–19–1

спеціальності 172 «Телекомунікації і радіотехніка»

за освітньо-професійною програмою Телекомунікації і радіотехніка

на тему: "Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із функціями Волша"

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи	Горєв В.М.			
розділів:				
спеціальний	Горєв В.М.			
економічний	Романюк Н.М.			
<b>Рецензент</b>	Шедловський І.А.			
<b>Норм. Контролер</b>	Гусєв О.Ю.			

**ЗАТВЕРДЖЕНО:**  
завідувач кафедри  
безпеки інформації та телекомунікацій

\_\_\_\_\_ В. І. Корнієнко  
(підпис)

«1» вересня 2020 року

## **ЗАВДАННЯ на кваліфікаційну роботу ступеня магістра**

студенту Скорченку А. С. академічної групи 172м-19-1

спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»

за освітньо-професійною програмою Телекомунікації і радіотехніка

на тему "Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із функціями Волша"

### **1 ПІДСТАВИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБОТИ**

Наказ ректора НТУ «Дніпровська політехніка» від \_\_\_\_\_ № \_\_\_\_\_

### **2 МЕТА ТА ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБІТ**

**Об'єкт досліджень:** фільтр Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку

**Предмет досліджень:** вагова функція даного фільтра

**Мета:** отримати невідому вагову функцію фільтра як наближений розв'язок інтегрального рівняння Вінера–Хопфа на основі розвинення за функціями Волша та порівняти результати з результатами поліноміальних наближень

### **Вихідні дані для проведення роботи**

1. В. Х. Багманов, А. М. Комиссаров, А. Х. Султанов, «Прогнозирование телетрафика на основе фрактальных фильтров», Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, т. 9, №6 (24), с. 217–222 (2007).

2. S. Miller and D. Childers, "Probability and Random Processes With Applications to Signal Processing and Communications. Second edition", Amsterdam, Elseiver/Academic Press (2012).

3. V. Gorev, A. Gusev and V. Korniienko, "Investigation of the Kolmogorov-Wiener filter for continous fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind", IAPGOS, No. 1, p. 58-61 (2020).

### **3 ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

**Новизна.** Наукова новизна результатів полягає у тому, що вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера шукається як наближений розв'язок інтегрального рівняння Вінера–Хопфа у вигляді обірваного розвинення у ряд за функціями Волша. Дослідження проводяться в рамках моделі, де телекомунікаційний трафік вважається випадковим

процесом зі степеневу структурною функцією. Показано, що в рамках даної моделі розв'язок на основі функцій Волша є кращим за поліноміальний.

**Практична цінність.** Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

#### **4 ВИМОГИ ДО РЕЗУЛЬТАТІВ ВИКОНАННЯ РОБОТИ**

У роботі мають бути знайдені результати для невідомої вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера у наближеннях до наближення 16 функцій Волша включно. Мають бути наведені відповідні графіки співпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для отриманих розв'язків. Результати мають бути порівняні з відповідними результатами поліноміальних наближень. Має бути зроблено висновок про те чи покращує результати використання функцій Волша замість поліномів.

#### **5 ЕТАПИ ВИКОНАННЯ РОБІТ**

<b>Найменування етапів робіт</b>	<b>Строки виконання робіт (початок-кінець)</b>
Огляд літератури з теми роботи	01.09.2020 – 30.09.2020
Розрахунок невідомої вагової функції на основі обірваного розвинення за функціями Волша. Порівняння результатів з результатами поліноміальних наближень.	01.10.2020 – 31.10.2020
Написання економічного розділу	01.11.2020–05.12.2020

#### **6 РЕАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ЕФЕКТИВНІСТЬ**

**Економічний ефект.** Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

**Соціальний ефект.** Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

#### **7 ДОДАТКОВІ ВИМОГИ**

відсутні

завдання видано

\_\_\_\_\_ (підпис керівника)

В. М. Горєв

Дата видачі 01.09.2020

Дата подання до екзаменаційної комісії

\_\_\_\_\_

Прийнято до виконання

\_\_\_\_\_ (підпис студента)

А. С. Скорченко

## РЕФЕРАТ

**Пояснювальна записка:** 67с., 23 рис., 2 табл., 5 додатків, 12 джерел.

**Об'єкт дослідження:** фільтр Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку.

**Предмет дослідження:** вагова функція відповідного фільтра.

**Мета роботи:** отримати наближений розв'язок для невідомої вагової функції фільтра на основі обірваного ряду за функціями Волша та порівняти результати з результатами поліноміальних наближень.

У першому розділі наведено огляд робіт попередників з теми роботи та обґрунтовано актуальність задачі, що ставиться перед даною кваліфікаційною роботою.

В спеціальній частині отримано вагову функцію фільтра Колмогорова–Вінера як наближений розв'язок відповідного інтегрального рівняння на основі обірваного розвинення за функціями Волша. Результати досліджено у наближеннях до 16 функцій Волша включно. Зроблено порівняння результатів з результатами поліноміальних наближень, отриманими у роботах попередників. Показано, що розв'язки на основі функцій Волша є кращими за поліноміальні у моделі, де трафік вважається випадковим процесом зі степеневою структурною функцією.

В економічній частині розраховано трудомісткість, що необхідна для отримання розв'язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку, заробітна плата інженера телекомунікацій та капітальні витрати.

Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

ФІЛЬТР КОЛМОГОРОВА–ВІНЕРА, ВАГОВА ФУНКЦІЯ, ФУНКЦІЇ ВОЛША, СТЕПЕНЕВА СТРУКТУРНА ФУНКЦІЯ.

## РЕФЕРАТ

**Пояснительная записка:** 67с., 23 рис., 2 табл., 5 приложений, 12 источников.

**Объект исследования:** фильтр Колмогорова-Винера для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика.

**Предмет исследования:** весовая функция соответствующего фильтра.

**Цель работы:** получить приближённое решение для неизвестной весовой функции фильтра на основе оборванного ряда по функциям Уолша и сравнить результаты с результатами полиномиальных приближений.

В первом разделе приведён обзор работ предшественников по теме работы и обоснована актуальность задачи, которая ставится перед данной квалификационной работой.

В специальной части получено весовую функцию фильтра Колмогорова-Винера как приближённое решение соответствующего интегрального уравнения на основе оборванного разложения по функциям Уолша. Результаты исследованы в приближениях к 16 функциям Уолша включительно. Сделано сравнение результатов с результатами полиномиальных приближений, полученными в работах предшественников. Показано, что решения на основе функций Уолша являются лучше полиномиальных в модели, где трафик считается случайным процессом со степенной структурной функцией

В экономической части рассчитано трудоёмкость, необходимая для получения решений для весовой функции фильтра Колмогорова-Винера для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика, заработная плата инженера телекоммуникаций и капитальные расходы.

Результаты работы могут быть использованы для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика в системах с пакетной передачей данных.

**ФИЛЬТР КОЛМОГОРОВА-ВИНЕРА, ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ, ФУНКЦИИ УОЛША, СТЕПЕННАЯ СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ**

## ABSTRACT

**Explanatory note:** 67 pages., 23 pic., 2 tab., 5 appendices, 12 references.

**Object of research:** Kolmogorov-Wiener filter for prediction stationary telecommunication traffic.

**Subject of research:** weight function of the relevant filter.

**The aim of the work:** obtain an approximate solution for the unknown weight function of the filter based on the discontinuous series of Walsh functions and compare the results with the results of polynomial approximations.

The first section provides an overview of the work of predecessors on the topic of work and substantiates the relevance of the task facing this qualifying work.

In the special part, the weight function of the Kolmogorov – Wiener filter is obtained as an approximate solution of the corresponding integral equation on the basis of the discontinuous development by the Volsh functions. The results are investigated in approximations to 16 Wolsh functions inclusive. A comparison of the results with the results of polynomial approximations obtained in the works of predecessors is made. It is shown that solutions based on the Walsh functions are better than polynomials in the model, where traffic is considered a random process with a power structural function.

In the economic part, the complexity required to obtain solutions for the weight function of the Kolmogorov-Wiener filter for forecasting stationary telecommunications traffic, the salary of a telecommunications engineer and capital costs are calculated.

The results of the work may be used to predict stationary telecommunications traffic in packet data systems.

KOLMOGOROV – WINER FILTER, WEIGHT FUNCTION, WOLSH FUNCTIONS, POWER STRUCTURAL FUNCTION.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
1 СТАН ПИТАННЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	9
1.1 Стан питання.....	9
1.1.1 Функції Уолша.....	9
1.1.2 Фільтр Колмогорова-Вінера.....	14
1.1.3 Дослідження вагової функції фільтра на основі поліноміальних розвинень.....	17
1.2 Постановка задачі.....	22
1.3 Висновки.....	23
2 СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА.....	24
2.1 Обчислення вагової функції фільтра на основі функцій Волша .....	24
2.2 Порівняння результатів з результатами поліноміальних розвинень.....	37
2.3 Висновки.....	39
3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ.....	40
3.1 Визначення трудомісткості розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова-Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку.....	40
3.2 Розрахунок капітальних витрат на розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова-Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку.....	41
3.3 Висновки.....	44
ВИСНОВКИ.....	45
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	47
ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи.....	49
ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії.....	50
ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica .....	51
ДОДАТОК Г. Відгук керівника економічного розділу.....	66
ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи.....	67

## ВСТУП

Роботу присвячено актуальній на наш час задачі прогнозування телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних. Як відомо [1,2], трафік в таких системах вважається фраткальним процесом, і існує безліч моделей опису трафіку. У найпростіших з них трафік вважається стаціонарним випадковим процесом. В даній роботі досліджується модель [3], де трафік вважається неперервним випадковим процесом зі степеневою структурною функцією.

Як відомо [4], для прогнозування стаціонарних процесів можна використовувати досить простий фільтр Колмогорова–Вінера, який є лінійним стаціонарним фільтром. Ідея використання цього фільтра є очевидною, проте вона досі не набула широкого поширення в літературі. На наш час відомі дослідження вагової функції даного фільтра для моделі трафіку зі степеневою структурною функцією [5–7], в основу яких покладено наближений пошук вагової функції фільтра у вигляді обірваного розвинення за ортогональними поліномами. Ряд поліноміальних наближень у [5–7] дає хороші результати, проте не всі наближення призводять до хорошого співпадіння лівої і правої частини інтегрального рівняння на невідому вагову функцію, а деякі з них взагалі призводять до повного неспівпадіння. Тому постає питання покращення результатів робіт [5–7], наприклад, за рахунок використання ортогональної системи не поліноміальних функцій.

В даній роботі в якості такої не поліноміальної системи функцій обрано систему функцій Волша. Невідома вагова функція шукається як наближений розв'язок відповідного інтегрального рівняння у вигляді обірваного розвинення за функціями Волша. Робиться порівняння розв'язків, отриманих на основі функцій Волша, та поліноміальних розв'язків, отриманих у роботах [5–7]. Показано, що для моделі трафіку як випадкового процесу зі степеневою структурною функцією розв'язки на основі функцій Волша є кращими за поліноміальні.



# 1. СТАН ПИТАННЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

## 1.1 Стан питання

### 1.1.1 Функції Уолша

Для формування сигналів управління з високою швидкістю перемикачів і стійких до зовнішнього впливу доцільно використовувати кусково-постійні ортогональні функції. Використання таких ортогональних функцій в якості базисних обумовлено ще й тим, що з застосуванням мікропроцесорної техніки кусочно-постійні функції мають переваги перед гармонійними (синусоїдальними і косинусоїдальними).

Функції Уолша - сімейство функцій, що утворюють ортогональну систему, що приймають на всій області визначення тільки значення 1 і мінус 1. Ці функції набули широкого поширення в радіозв'язку, де з їх допомогою здійснюється кодове розділення каналів. Система функцій Уолша є ортонормованим базисом і дозволяє розкласти сигнали довільної форми в узагальнений ряд Фур'є.

Існують різні способи визначення функцій Уолша. Розглянемо спосіб, заснований на взаємозв'язку функцій Уолша з функціями Радемахера.

Функції Радемахера, в свою чергу, виходять з синусоїдальних функцій за допомогою співвідношення:

$$r_k(\theta) = \text{sign}[\sin(2^k \times \pi \times \theta)], \quad 0 \leq \theta < 1 \quad (1.1)$$

де  $\theta = t/T_0$  - безрозмірний час, тобто час, нормований до довільного інтервалу  $T_0$ , а ціле позитивне число  $k$  - порядок функції. Символом  $\text{sign}$  (сігнум-функція) позначається функція:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Функції Радемахера мають вигляд меандру. Перші чотири функції Радемахера зображені на рис. 1.1. Функції Радемахера ортогональні і ортонормовані з одиничною ваговою функцією на інтервалі  $0 < \theta < 1$ . Дійсно, для будь-яких двох функцій  $r_m(\theta)$ ,  $r_n(\theta)$  має місце співвідношення: [8]

$$\int_0^1 r_m(\theta)r_n(\theta)d\theta = \begin{cases} 1, & \text{при } m = n \\ -1, & \text{при } m \neq n \end{cases} \quad (1.3)$$

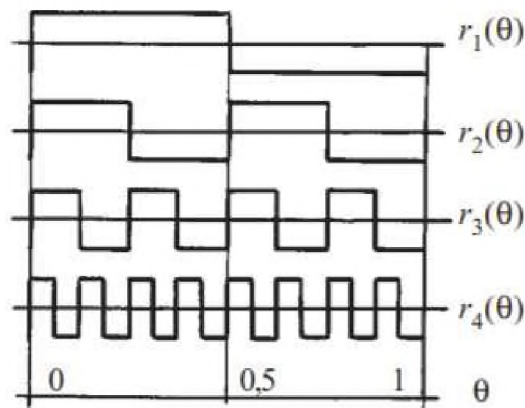


Рисунок 1.1 - Функції Радемахера

Всі функції Радемахера є непарними щодо середини інтервалу визначення і, отже, не можуть бути використані для апроксимації сигналів  $s(\theta)$ , парних щодо моменту  $\theta = 1/2$ . Іншими словами, система функцій Радемахера є неповною. [8]

Функції Уолша утворюють повну ортонормовану систему і можуть бути отримані шляхом перемноження ступенів відповідних функцій Радемахера. Перші вісім функцій Уолша зображені на рис. 1.2.

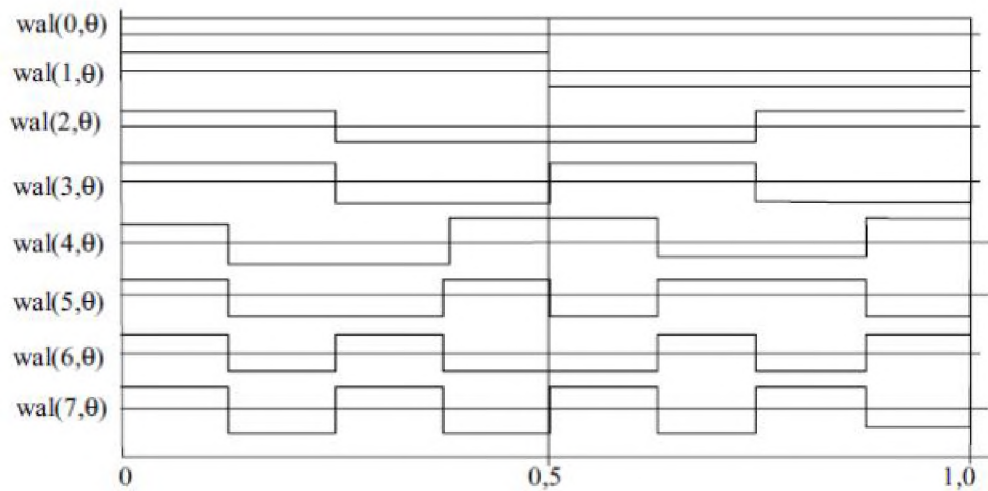


Рисунок 1.2 - Перші вісім функцій Уолша

Зіставлення цих функцій з функціями Радемахера дозволяє скласти для перших восьми функцій Уолша наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 wal(0, \theta) &= r_1^0(\theta) r_2^0(\theta), \\
 wal(1, \theta) &= r_1(\theta) r_2^0(\theta) = r_1(\theta), \\
 wal(2, \theta) &= r_1(\theta) r_2(\theta), \\
 wal(3, \theta) &= r_1^0(\theta) r_2(\theta) = r_2(\theta), \\
 wal(4, \theta) &= r_1^0(\theta) r_2(\theta) r_3(\theta) = r_2(\theta) r_3(\theta), \\
 wal(5, \theta) &= r_1(\theta) r_2(\theta) r_3(\theta), \\
 wal(6, \theta) &= r_1(\theta) r_2^0(\theta) r_3(\theta) = r_1(\theta) r_3(\theta), \\
 wal(7, \theta) &= r_1^0(\theta) r_2^0(\theta) r_3(\theta) = r_3(\theta)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Тому кожна функція Уолша  $wal(w, \theta)$ , що входить в систему з  $N = 2^n$  функцій, є добутком ступенів перших  $n$  функцій Радемахера. Принцип знаходження показників цих ступенів пояснюється на прикладі  $N = 2^n = 8$  (див. рис. 1.3). [9]

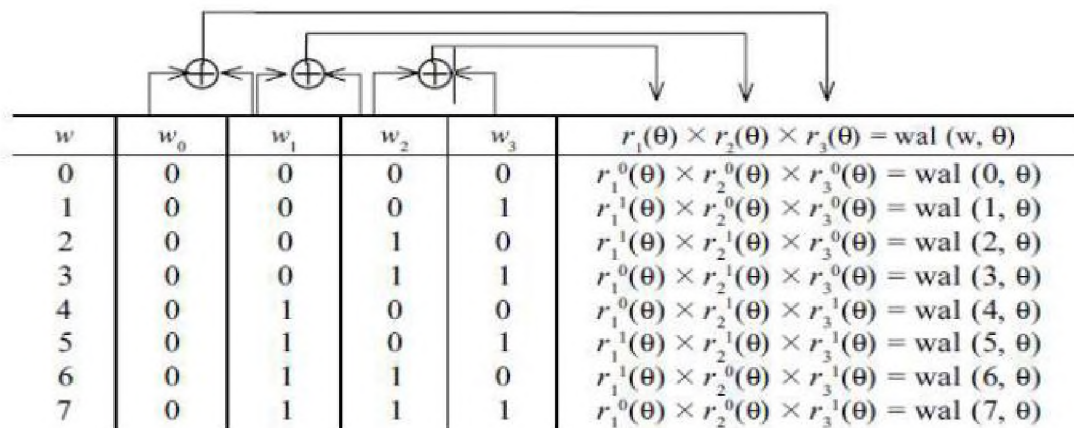


Рисунок 1.3 - Добуток ступенів перших  $n$  функцій Радемахера

де  $w$  – номер функції в системі;  $w_m$  –  $m$ -й розряд представлення числа  $w$  в двійковій системі числення,  $\oplus$  – символ розрядного підсумовування по модулю 2.

Спосіб нумерації функцій в системі називається упорядкуванням. На практиці доцільно користуватися іншими способами впорядкування. Часто застосовуються функції Уолша, впорядковані по Адамару і по Пелі. Розглянемо більш детально впорядкування по Адамара, тому що воно набуло широкого поширення. [8]

Функції  $had(h, \theta)$  можна сформувати за допомогою матриць Адамара. Матрицею Адамара  $H_N$  порядку  $N = 2^n$  є квадратна матриця розміру  $N \times M$  з елементами  $\pm 1$ , така, що:

$$H_N \times H_N^\tau = NI \quad (1.5)$$

де  $I$  - одинична матриця,  $\tau$  - знак транспонування.

Нормовану матрицю Адамара порядку  $N$  можна побудувати рекурсивно [10], а саме:

$$H_N = \begin{pmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

при  $H_1 = 1$ .

Функція Уолша є послідовністю прямокутних імпульсів з одиничними амплітудами і полярностями, відповідними знаками елементів  $h$ -го рядка матриці Адамара. Під тривалістю імпульсів розуміється  $(1/N)$ -та частка інтервалу  $[0,1]$ .

Нумерація перших шістнадцяти функцій Уолша при різних способах упорядкування дана в таблиці на рис. 1.4.

Введені вище упорядкування впливають з властивості симетричності матриці Адамара, що полягає в тому, що транспонована матриця збігається з вихідною. Також упорядкування відповідають симетричності відповідних їм матриць. [11-12]

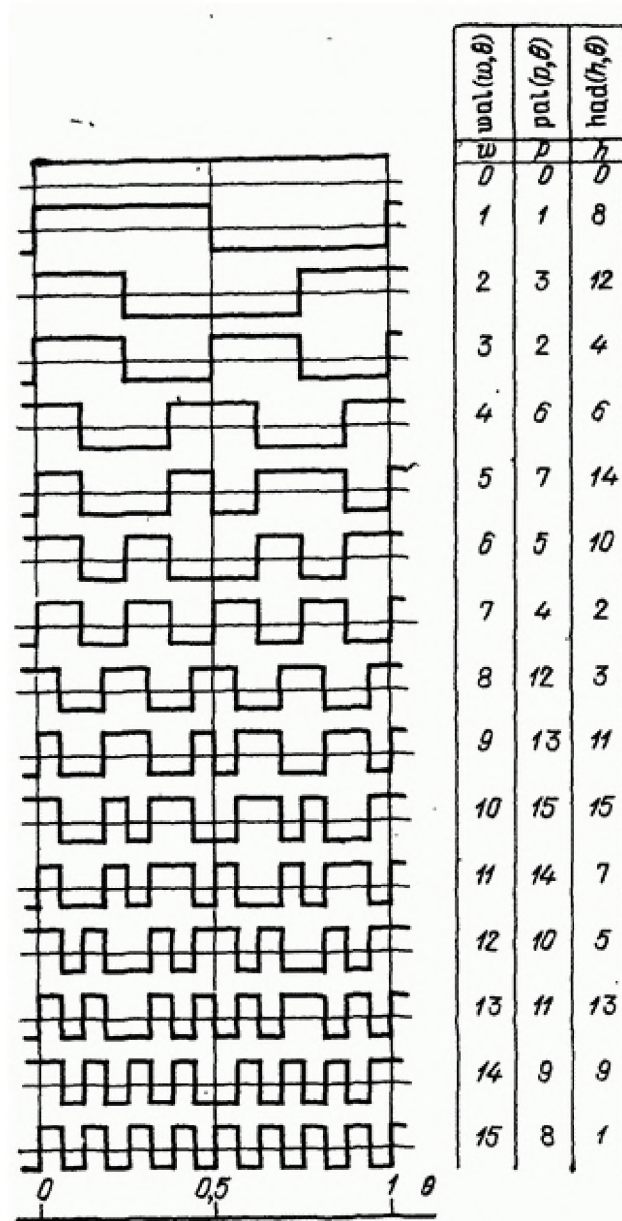


Рисунок 1.4 - Нумерація функцій Уолша при різних способах упорядкування.

### 1.1.2 Фільтр Колмогорова–Вінера

Фільтр Колмогорова–Вінера є лінійним стаціонарним фільтром, що може розв'язувати дві задачі – задачу виділення корисного сигналу з суми корисного сигналу та шуму, та задачу прогнозування. Так як фільтр Колмогорова–Вінера є лінійним та стаціонарним, то вихід фільтру  $x(t)$  та вхід  $x(t)$  пов'язані співвідношенням

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (1.7)$$

де  $h(\tau)$  є ваговою функцією фільтра, що через принцип причинності має властивість [7]

$$h(\tau < 0) = 0, \quad (1.8)$$

що дає змогу переписати (1.7) як

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (1.9)$$

Вхідний сигнал  $x(t)$  даного фільтра є стаціонарним випадковим процесом, який є сумою корисного сигналу  $s(t)$  та шуму  $n(t)$ :

$$x(t) = n(t) + s(t). \quad (1.10)$$

Задача фільтра є наступною – мінімізувати середньоквадратичне відхилення виходу фільтра  $y(t)$  та корисного сигналу у момент часу  $t+k$ , де  $k$  – часовий інтервал, на який робиться прогноз:

$$\langle (y(t) - s(t+k))^2 \rangle \rightarrow \min. \quad (1.11)$$

При цьому відомими вважаються автокореляційна функція вхідного сигналу  $R_x(t)$  та взаємна кореляційна функція вхідного сигналу та шуму

$R_{xx}(t)$ . Як відомо [5], для того, щоб виконалось (1.11), вагова функція має задовольняти наступному інтегральному рівнянню:

$$R_{xx}(t+k) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.12)$$

яке має назву інтегрального рівняння Вінера–Хопфа.

Все, що написано до сих пір, стосується неперервних нескінченних у часі процесів. Якщо процеси є дискретними, та вхід фільтра задано лише для моментів часу  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ , то рівняння для вагової функції фільтра буде наступним:

$$R_{xx}(t+k) = \sum_{\tau=0}^T h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.13)$$

а вихід фільтра обчислюється за формулою

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^T h(\tau) x(t-\tau). \quad (1.14)$$

У дискретному випадку маємо не неперервну вагову функцію, а набір вагових коефіцієнтів. Фактично, (1.13) є системою лінійних рівнянь на вагові коефіцієнти фільтра.

У випадку неперервних, проте обмежених у часі процесів, маємо наступне. Якщо вхід фільтра – неперервний процес, визначеним при  $t \in [0, T]$ , то маємо наступне рівняння на вагову функцію фільтра:

$$R_{xx}(t+k) = \int_0^T d\tau h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.15)$$



та вихід фільтра обчислюється за формулою

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (1.16)$$

Тож для реалізації фільтра Колмогорова–Вінера для неперервних скінчених у часі процесів треба вміти розв'язувати рівняння (1.15).

### **1.1.3 Дослідження вагової функції фільтра на основі поліноміальних розвинень**

Фільтр Колмогорова – Вінера розглядається для прогнозування даних для безперервного фракталу процесів. У наш час фрактальні процеси відбуваються у величезній різноманітності різних систем. Проблема пошуку вагової функції Колмогорова – Вінера для неперервного фрактальні процеси з функцією степенно-структурної структури викладені в [4]. У цій роботі така модель може бути придатною для опису телетрафіку в IEEE 802.11b і для маршрутизаторів між внутрішніми мережами та Інтернетом. Насправді інтегральне рівняння Вінера-Хопфа є інтегральним рівнянням Фредгольма першого виду. У [4] замість Фредгольма використовується спрощене інтегральне рівняння Вольтерри і описана ідея рішення інтегрального рівняння Вольтерри. Нарешті, точне аналітичне рішення для відповідного рівняння було отримано в [5].

Можливо, в деяких спрощених випадках інтегральне рівняння Вольтерри дійсно може бути застосовано до дослідження прогнозу даних у реальних системах. Але в загальному випадку це так не застосовується і інтегральне рівняння Фредгольма слід вирішувати замість Вольтерра одна. На відміну від інтегрального рівняння Вольтерри, точне аналітичне рішення для інтегрального рівняння Фредгольма виникають труднощі. Таким чином, приблизне рішення для шукається відповідне рівняння.[5]

Метод усіченого ортогонального многочлена розширення досить популярне в літературі, щоб отримати приблизний рішення інтегрального рівняння Фредгольма першого виду, див., наприклад, відповідне дослідження в рамках статистичної фізики [7]. У роботі [6] такий метод був застосований до розглянутої проблеми.

Набір поліномів, які є ортогональними без ваги, використано в [5]. Показано, що хоча метод може дати надійні результати в досить широкому діапазоні параметрів, він має деякі недоліки у випадку функції степенно-правової структури. Найзначніші недоліком є той факт, що точність методу не обов'язково збільшується з кількістю багаточленів. Для деяких чисел поліномів метод дає надійні результати, але для інших цифр може не вдатися. Швидше за все, причина в тому відповідна кореляційна функція, яка є ядром інтегралу Вінера – Хопфа рівняння, не є позитивно визначеною функцією, тому збіжність методу є не гарантовано, див. подібне обговорення в рамках статистичної фізики у [5].

Але виникає наступне питання: нехай результати будуть кращими, якщо ми використаємо інший поліном встановити? Чи однакова поведінка поліноміальних розв'язків для різних наборів поліноми? Це цікаве питання слід дослідити, оскільки воно досить важке запропонувати інший аналітичний метод рішення відповідного Вінера - Рівняння Хопфа. У цій роботі ми використовуємо набір багаточленів Чебишева другого вид. Отже, метою цієї роботи є отримання функції ваги фільтра Колмогорова – Вінера на основі усіченого розкладання в поліномах Чебишева другого виду та порівняти результати з результатами роботи [5].

Ми розглядаємо стаціонарні неперервні фрактальні процеси з функцією степенно-законної структури. Кореляційна функція таких процесів має вигляд:

$$R(t) = \sigma^2 - \frac{\alpha}{2} |t|^{2H} \quad (1.17)$$

де  $\sigma$  - дисперсія процесу,  $H$  - показник Херста,  $\alpha$  - константа. Нехай вхідний сигнал фільтра визначається для  $t \in [0, T]$ . в такому випадку функція ваги фільтра Колмогорова – Вінера  $h(t)$  є рішенням наступного Інтегральне рівняння Вінера – Хопфа

$$\int_0^T d\tau h(\tau)R(t-\tau) = R(t+k) \quad (1.18)$$

де  $k \in T$  - інтервал часу, на який складається прогноз. Таке рівняння навряд чи можна точно вирішити, тому слід знайти приблизне рішення. У роботі [4] використовується метод усіченого поліноміального розкладання та наступне поліноми беруться:

$$S_n(\tau) = \frac{S'_n(\tau)}{\sqrt{\int_0^T dt (S'_n(\tau))^2}} \quad (1.19)$$

Де

$$S'_n(\tau) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & \tau & \tau^2 & \cdots & \tau^n \end{vmatrix}, \mu_n = \int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1} \quad (1.20)$$

Такі поліноми є ортогональними без зважування на  $t \in [0, T]$ :

$$\int_0^T dt S_n(t) S_m(t) = \delta_{mn} \quad (1.21)$$

де  $\delta_{mn}$  - дельта Кронекера. У цій роботі ми беремо інший поліноміальний набір. Ми використовуємо поліноми Чебишева другого виду. Їх явні вирази [4]

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n+1}^{2k+1} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \quad (1.22)$$

де  $\lfloor n/2 \rfloor$  - ціла частина  $n/2$ . Вони ортогональні на  $x \in [-1, 1]$  з умова ортогональності:

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} = \begin{cases} \pi/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.23)$$

Але нам потрібна поліноміальна множина, яка є ортогональною на  $t \in [0, T]$ . Вносячи наступну зміну змінних:

$$z = x + 1, y = zT / 2 \quad (1.24)$$

ви можете відобразити такий вираз:

$$\int_0^T U_n\left(\frac{2y}{T} - 1\right) U_m\left(\frac{2y}{T} - 1\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{T} - 1\right)^2} dy = \frac{T\pi}{4} \delta_{mn} \quad (1.25)$$

Отже, поліноми  $U_n\left(\frac{2y}{T} - 1\right)$  є ортогональними на  $y \in [0, T]$  з вагою

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{T} - 1\right)^2}.$$

Отже, наближене рішення інтегрального рівняння шукаємо в формі

$$h(\tau) = \sum_{s \geq 0} g_s U_s\left(\frac{2\tau}{T} - 1\right) \quad (1.26)$$

Після заміни (1.26) можна отримати

$$\sum_{s \geq 0} g_s \int_0^T d\tau U_n \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau) = R(t + k) \quad (1.27)$$

який після множення на  $U_n \left( \frac{2y}{T} - 1 \right)$  та інтегрування над  $t$  веде до

$$\sum_{s \geq 0} g_s \int_0^T \int_0^T d\tau U_n \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) U_s \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau) = \int_0^T dt U_n \left( \frac{2t}{T} - 1 \right) R(t + k) \quad (1.28)$$

Позначаючи

$$G_{ns} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau U_n \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) U_s \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau), \quad b_n = \int_0^T dt U_n \left( \frac{2t}{T} - 1 \right) R(t + k) \quad (1.29)$$

можна переписати (1.28) як

$$\sum_{s \geq 0} g_s G_{ns} = b_n, \quad n \geq 0 \quad (1.30)$$

Як видно, (1.30) - це нескінченний набір лінійних рівнянь у невідомих коефіцієнтах  $g_s$ . Цей набір навряд чи піддається лікуванню, тому його слід штучно скоротити до скінченного кількості рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{l-1} g_s G_{ns} = b_n, \quad n = \overline{0, l-1} \quad (1.31)$$

Функція ваги фільтра Колмогорова – Вінера

$$h(\tau) = \sum_{s=0}^{l-1} g_s U_s \left( \frac{2\tau}{T} - 1 \right) \quad (1.32)$$

де коефіцієнти  $g_s$  є розв'язками (1.32) - вагова функція в  $l$  -поліноміальне наближення. Тут і надалі величини  $G_{ns}$  називаються інтегральними дужками.

На основі (1.29) після внесення наступної зміни змінних:

$$x = \frac{2\tau}{T} - 1, y = \frac{2t}{T} - 1 \quad (1.33)$$

можна отримати такий вираз для інтегральних дужок:

$$G_{ns} = \frac{T^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy U_n(x) U_s(y) R\left(\frac{T}{2}y - \frac{T}{2}x\right) \quad (1.34)$$

Слід підкреслити, що такий вибір многочленів досить зручний. Як може бути як видно з (1.32), поліноми  $U_n(x)$  підпорядковуються властивості

$$U_n(x) = \begin{cases} U_n(-x), n:2 \\ -U_n(-x), n:2 \end{cases} \quad (1.35)$$

Отже, фільтр Колмогорова-Вінера може застосовуватися для прогнозування стаціонарних процесів, а оскільки фрактальний Гаусів шум та процес зі степеневу структурною функцією – це стаціонарні процеси, то в теорії фільтр Колмогорова-Вінера може бути застосований для прогнозування фрактального телекомунікаційного трафіку.

## 1.2 Постановка задачі

Постановка задачі до даної кваліфікаційної роботи є наступною: отримати вагову функцію фільтра Колмогорова-Вінера для прогнозування телекомунікаційного трафіку як стаціонарного процесу зі степеневу структурною функцією на основі обірваних розвинень за функціями Волша та порівняти результати з результатами поліноміальних розвинень.

### **1.3 Висновки**

Висновком до першого розділу є те, що задача, поставлена перед даною кваліфікаційною роботою, є актуальною.

## 2 СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА

### 2.1 Обчислення вагової функції фільтра на основі функцій Волша

У цій частині треба знайти розв'язок інтегрального рівняння (1.18) з кореляційною функцією.

$$2H(2H-1)\sigma^2|t+k|^{2H-2} = 2H(2H-1)\sigma^2 \int_0^T d\tau h(\tau)|t-\tau|^{2H-2} \quad (2.1)$$

що після скорочення однакових множників у лівій та правій частинах призведе до рівняння

$$\int_0^T d\tau h(\tau)|t-\tau|^{2H-2} = |t+k|^{2H-2} \quad (2.2)$$

а так як  $t+k > 0$ , то рівняння (2.2) переписується у просту форму:

$$\int_0^T d\tau h(\tau)|t-\tau|^{2H-2} = (t+k)^{2H-2} \quad (2.3)$$

Тому вагова функція фільтра Колмогорова-Вінера  $h(\tau)$  шукається на основі рівняння (2.3). Розв'язок шукається у вигляді обірваного розвинення за функціями Уолша:

$$h(\tau) = \sum_{s=1}^n g_s wal_s(\tau) \quad (2.4)$$

Цей вираз записано у наближенні  $n$  функцій Уолша,  $g_s$  - коефіцієнти, які потрібні знайти. Підставимо (2.4) у (2.3):



$$\int_0^T d\tau \sum_{s=1}^n g_s wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} = (t+k)^{2H-2} \quad (2.5)$$

Інтеграл від суми є сумою інтегралів, тому:

$$\sum_{s=1}^n g_s \int_0^T d\tau wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} = (t+k)^{2H-2} \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) помножимо на  $wal_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  :

$$wal_i(t) \sum_{s=1}^n g_s \int_0^T d\tau wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} = wal_i(t) (t+k)^{2H-2} \quad (2.7)$$

після візьмемо інтеграл за  $t$  з лівої та правої частин рівняння (2.7):

$$\int_0^T dt wal_i(t) \sum_{s=1}^n g_s \int_0^T d\tau wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} = \int_0^T dt wal_i(t) (t+k)^{2H-2} \quad (2.8)$$

це призводить до:

$$\sum_{s=1}^n g_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau wal_i(t) wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} = \int_0^T dt wal_i(t) (t+k)^{2H-2} \quad (2.9)$$

Введемо наступні позначення для інтегралів у рівнянні (2.9):

$$G_{is} = \int_0^T dt \int_0^T d\tau wal_i(t) wal_s(\tau) |t-\tau|^{2H-2} \quad (2.10)$$

$$B_i = \int_0^T dt wal_i(t) (t+k)^{2H-2} \quad (2.11)$$

Величина  $G_{is}$  називається інтегральними дужками. Рівняння (2.9) після цього переписується наступним чином:

$$\sum_{s=1}^n G_{is} g_s = B_i \quad (2.12)$$

де  $i = \overline{1, n}$ .

Рівняння (2.12) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь на невідомі коефіцієнти  $g_s$ . Величини  $G_{is}$  та  $B_i$  можна обчислити за формулами (2.10) і (2.11), отже ці величини є відомими. Система рівнянь (2.12) переписується у наступному матричному вигляді:

$$G_g = B \quad (2.13)$$

де  $i = \overline{1, n}$ ,  $G$  - матриця інтегральних дужок:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$g$  є вектором-стовпцем з невідомих коефіцієнтів при функціях Уолша:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$B$  є вектором-стовпцем з вільних членів:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Отже, розв'язок (2.12) у матричному вигляді має наступний вигляд:

$$g = G^{-1}B \quad (2.17)$$

Для отримання наближеного розв'язку для вагової функції фільтра Колмогорова-Вінера у наближенні  $n$  функцій Уолша знайдені коефіцієнти  $g$ , тож після цього їх можна підставити у формулу (2.4).

У даній роботі визьмемо дослідження розв'язків до наближення 16 функцій Уолша включно. Найскладнішою та найбільш громіздкою частиною обчислень є обчислення інтегральних дужок (2.10). Хоча вирази (2.10) допускають виведення аналітичних результатів для інтегральних дужок, у наближеннях досить великої кількості функцій Уолша аналітичні обчислення стають надто громіздкими.

Розіб'ємо інтервал  $(0, T)$  на 16 однакових інтервалів та після цього розіб'ємо вираз (2.10) на суму інтегралів:

$$G_{is} = \sum_{i,j=0}^{15} \int_{\frac{iT}{16}}^{\frac{(i+1)T}{16}} dt \int_{\frac{jT}{16}}^{\frac{(j+1)T}{16}} d\tau wal_i(t) wal_s(\tau) |t - \tau|^{2H-2} \quad (2.18)$$

Оскільки на відповідних інтервалах функції Уолша є постійними, то суму у правій частині виразу (2.18) представимо так:

$$G_{is} = \sum_{i,j=0}^{15} \xi_{il} \theta_{sj} \int_{\frac{iT}{16}}^{\frac{(i+1)T}{16}} dt \int_{\frac{jT}{16}}^{\frac{(j+1)T}{16}} d\tau |t-\tau|^{2H-2} \quad (2.19)$$

де  $\xi_{il} = \pm 1$  - значення функції  $wal_i(t)$  та  $\theta_{sj}$  - значення функції  $wal_s(\tau)$ .

Позначимо інтеграли у виразі (2.19) так:

$$W_{ij} = \int_{\frac{iT}{16}}^{\frac{(i+1)T}{16}} dt \int_{\frac{jT}{16}}^{\frac{(j+1)T}{16}} d\tau |t-\tau|^{2H-2} \quad (2.20)$$

Тоді інтегральні дужки рахуються наступним чином:

$$G_{is} = \sum_{i,j=0}^{15} \xi_{il} \theta_{sj} W_{ij} \quad (2.21)$$

Отже, інтегральні дужки обчислюються швидко, тому є змога обчислювати їх для наближень більшої кількості функцій Уолша. Даний алгоритм є перспективним, та на його основі можна отримувати інтегральні дужки для наближень, наприклад, 32, 64 і більше функцій Уолша.

Обчислення вагової функції фільтра проводилось у математичному пакеті Wolfram Mathematica 11.0. У роботі обчислення проводилися для наступних параметрів:

$$T = 100, z = 3, \alpha = 3 \cdot 10^{-3}, \sigma = 1,2, H = 0,8. \quad (2.22)$$

Для заданих конкретних параметрів ми матимемо змогу порівняти між собою поліноміальні розв'язки та розв'язки на основі функцій Уолша. Обчислені числові значення для коефіцієнтів при функціях Уолша для даних параметрів наведено у Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Числові значення для коефіцієнтів при функціях Уолша для даних параметрів

Кількість $n$ функцій	Чисельні значення коефіцієнтів $g$ , округлені до трьох значущих цифр
1	7,22
2	7,22; 5,75
3	7,45; 5,8; 5,15
4	7,45; 4,84; 5,15; 5,11
5	7,5; 4,84; 5,35; 5,11; 3,92
6	7,5; 5,67; 5,35; 4,82; 3,92; 3,99
7	7,59; 5,67; 4,55; 4,82; 4,02; 3,99; 4,35
8	7,59; 5,33; 4,55; 4,55; 4,02; 3,77; 4,35; 4,24
9	7,62; 5,33; 4,59; 4,55; 4,09; 3,77; 4,41; 4,24; 2,81
10	7,62; 5,54; 4,59; 4,45; 4,09; 3,98; 4,41; 4,15; 2,81; 2,81
11	7,66; 5,54; 4,92; 4,45; 4,15; 3,98; 4,11; 4,15; 2,87; 2,81; 3,07
12	7,66; 5,42; 4,92; 4,96; 4,15; 3,87; 4,11; 4,04; 2,87; 2,72; 3,07; 2,96
13	7,68; 5,42; 4,97; 4,96; 3,55; 3,87; 4,16; 4,04; 2,92; 2,72; 3,13; 2,96; 3,17
14	7,68; 5,63; 4,97; 4,83; 3,55; 3,45; 4,16; 3,93; 2,92; 2,91; 3,13; 2,86; 3,17; 3,14
15	7,70; 5,63; 4,66; 4,83; 3,59; 3,45; 3,88; 3,93; 2,96; 2,91; 2,88; 2,86; 3,22; 3,14; 3,35
16	7,70; 5,50; 4,66; 4,72; 3,59; 3,35; 3,88; 3,82; 2,96; 2,82; 2,88; 2,76; 3,22; 3,04; 3,35; 3,24

На основі отриманих числових значень коефіцієнтів при функціях Уолша побудовано графіки порівняння лівої та правої частин інтегрального рівняння (2.3). Відповідні частини інтегрального рівняння виглядають наступним чином:

$$Left(t) = \int_0^T d\tau h(\tau) |t - \tau|^{2H-2} = \int_0^t d\tau h(\tau) (t - \tau)^{2H-2} + \int_t^T d\tau h(\tau) (\tau - t)^{2H-2} \quad (2.23)$$

$$Right(t) = (t + k)^{2H-2} \quad (2.24)$$

Аналітично перевірити якість отриманих розв'язків дуже важко, тому якість результатів для вагової функції була перевірена побудовою відповідних графіків порівняння лівої та правої частин інтегрального рівняння, розв'язкам якого має бути вагова функція фільтра.

На графіках пунктиром позначено ліву частину інтегрального рівняння для кореляційної функції та чисельних даних при наближенні заданої кількості гармонік, а суцільною лінією позначається права частина відповідного інтегрального рівняння.

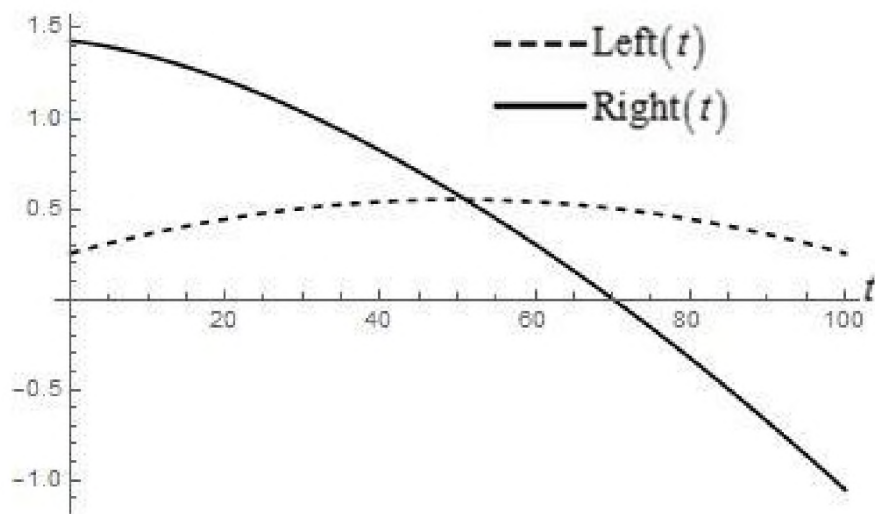


Рисунок 2.1 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 1 функції Уолша

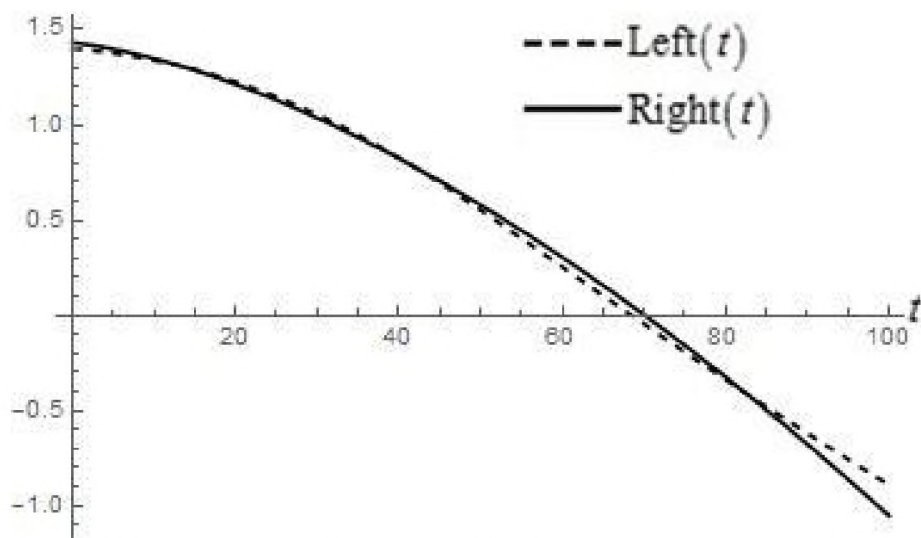


Рисунок 2.2 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 2 функцій Уолша

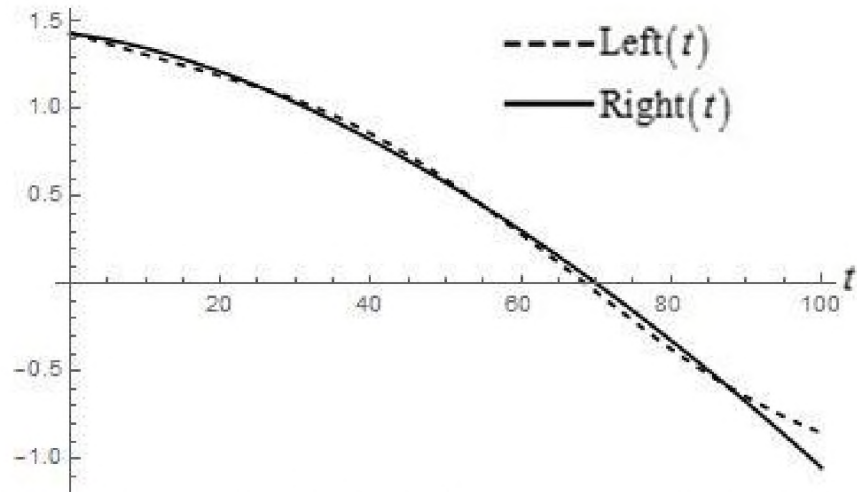


Рисунок 2.3 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 3 функцій Уолша

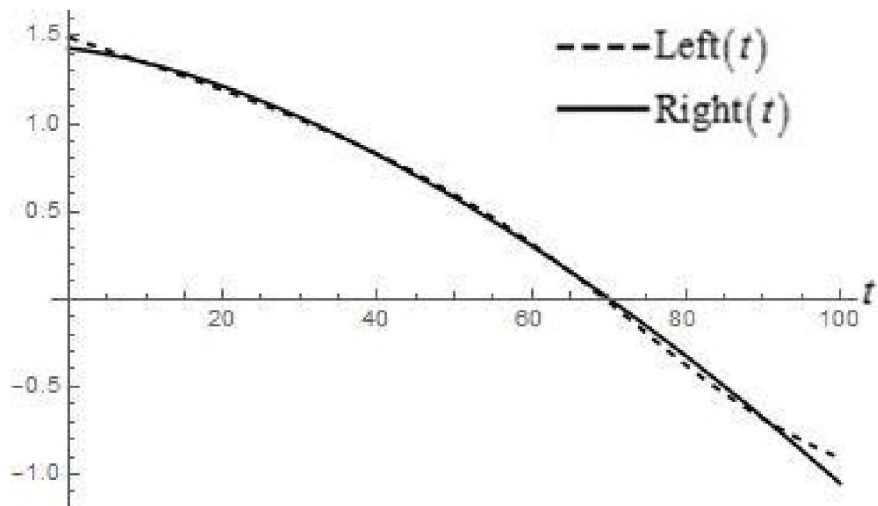


Рисунок 2.4 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 4 функцій Уолша

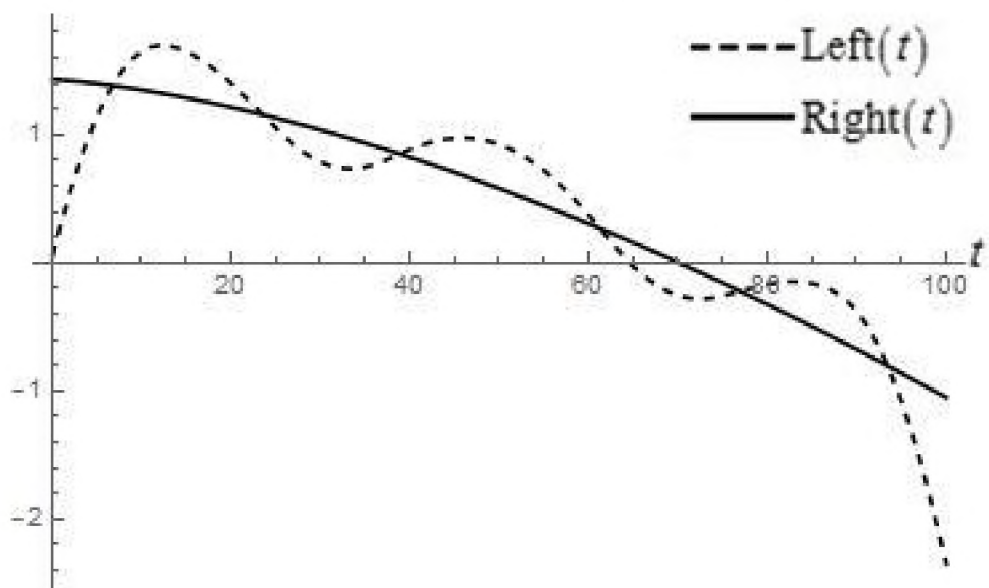


Рисунок 2.5 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 5 функцій Уолша

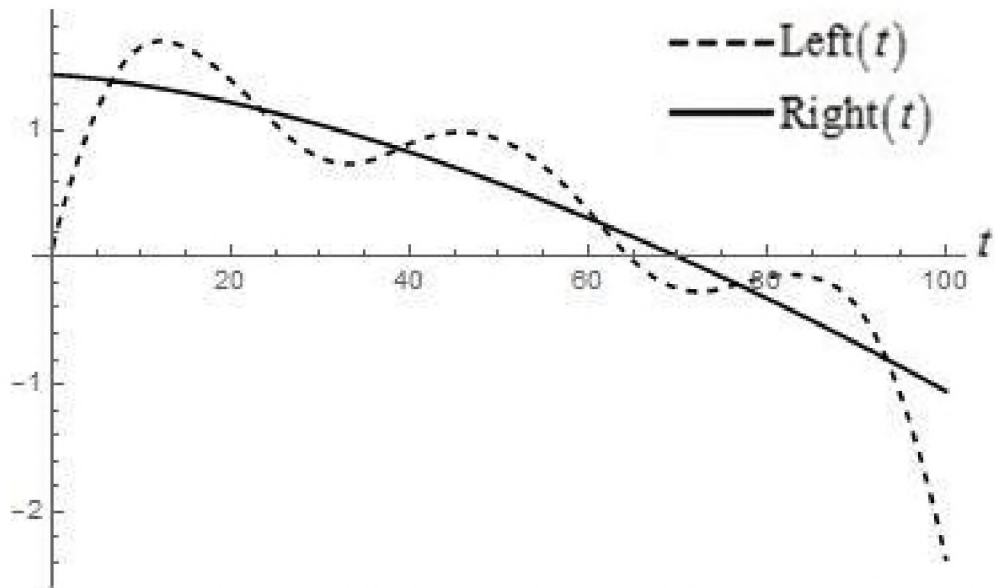


Рисунок 2.6 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 6 функцій Уолша

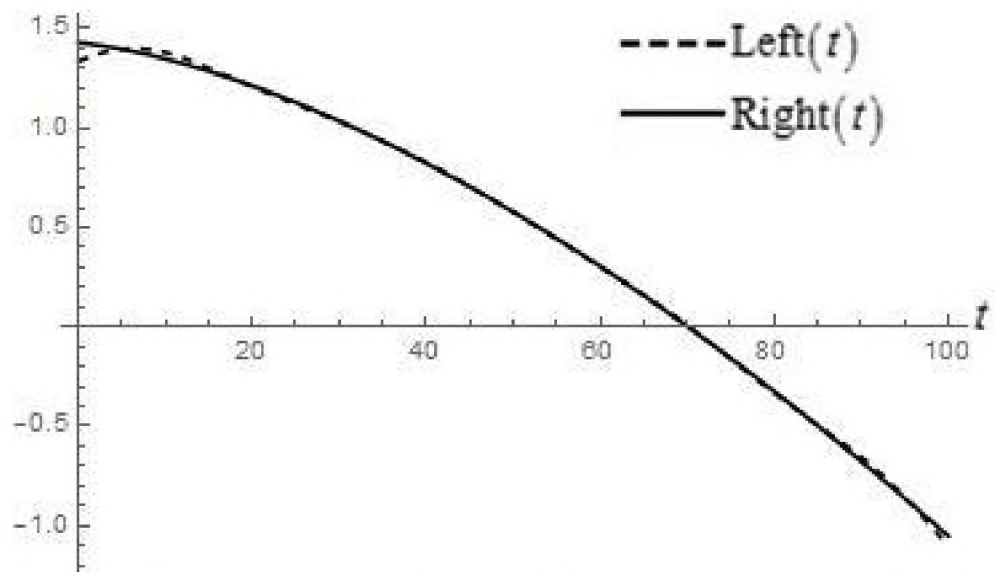


Рисунок 2.7 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 7 функцій Уолша



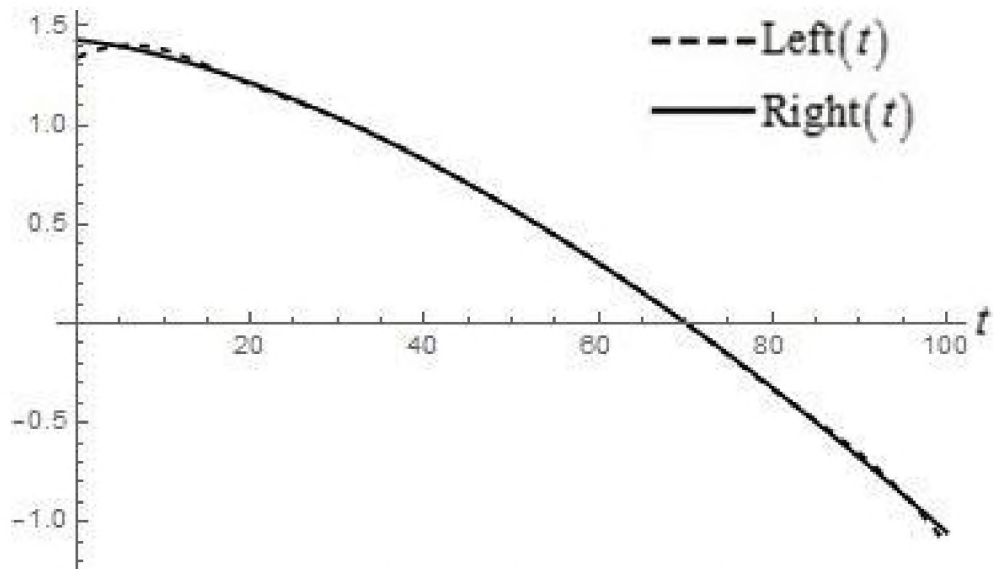


Рисунок 2.8 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 8 функцій Уолша

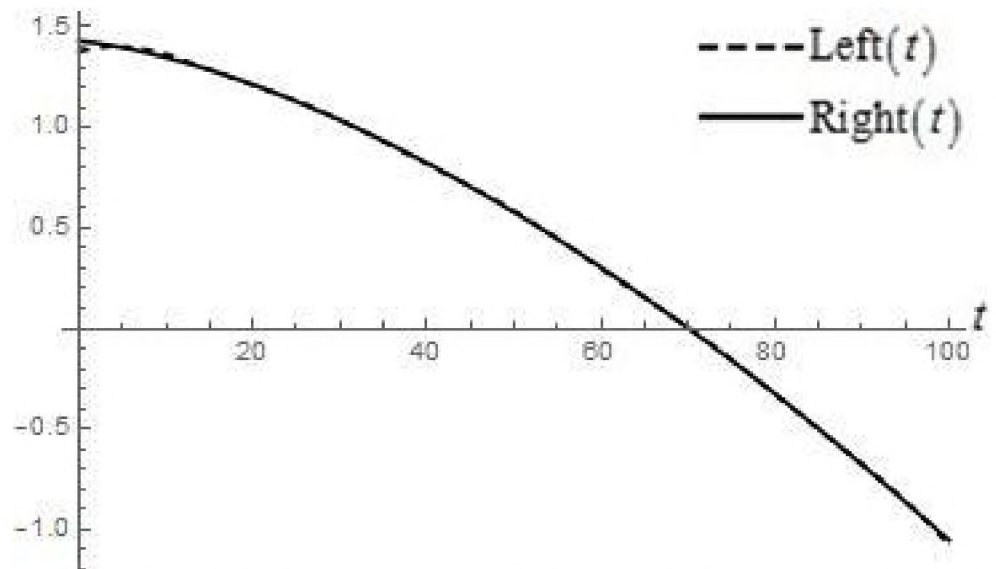


Рисунок 2.9 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 9 функцій Уолша

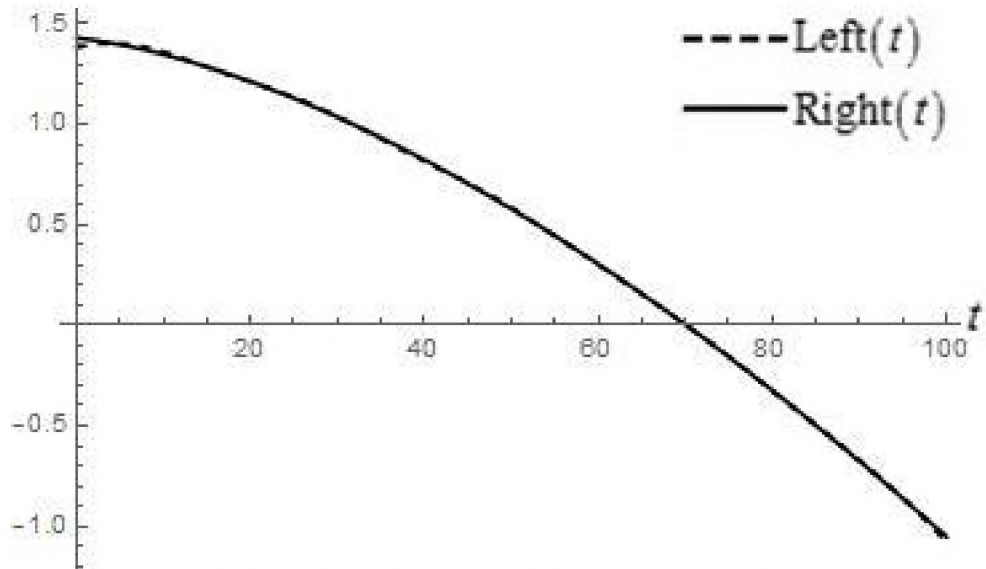


Рисунок 2.10 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 10 функцій Уолша

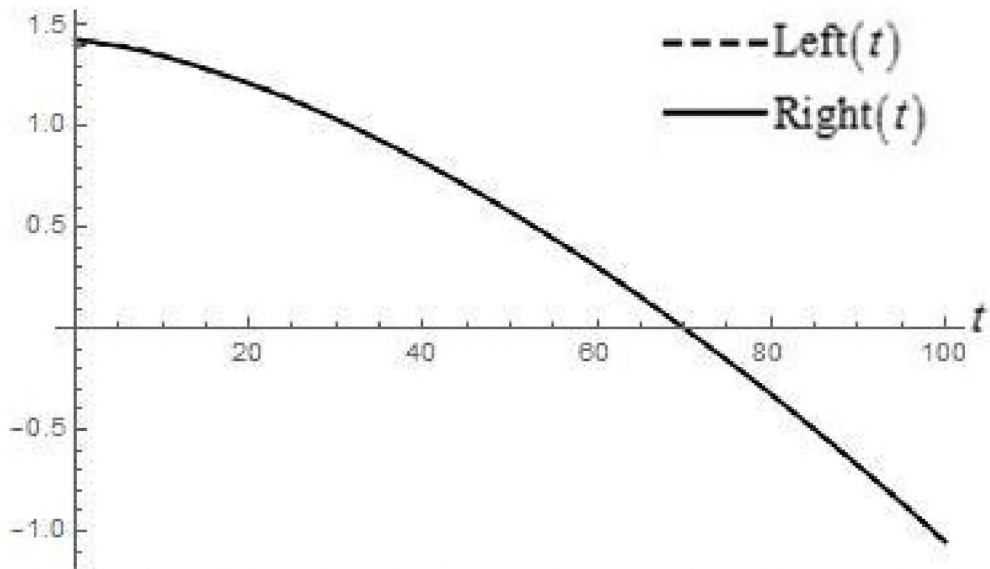


Рисунок 2.11 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 11 функцій Уолша

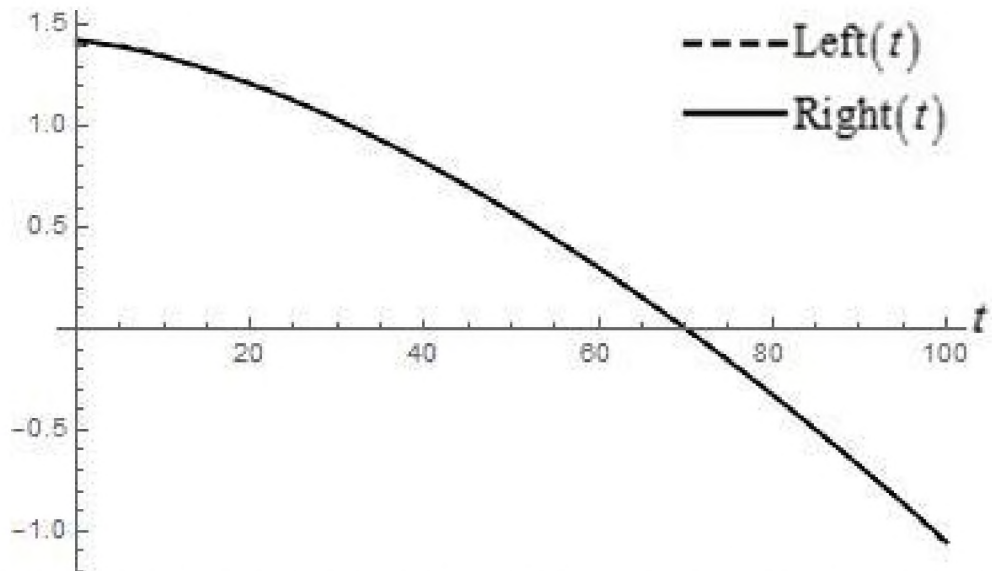


Рисунок 2.12 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 12 функцій Уолша

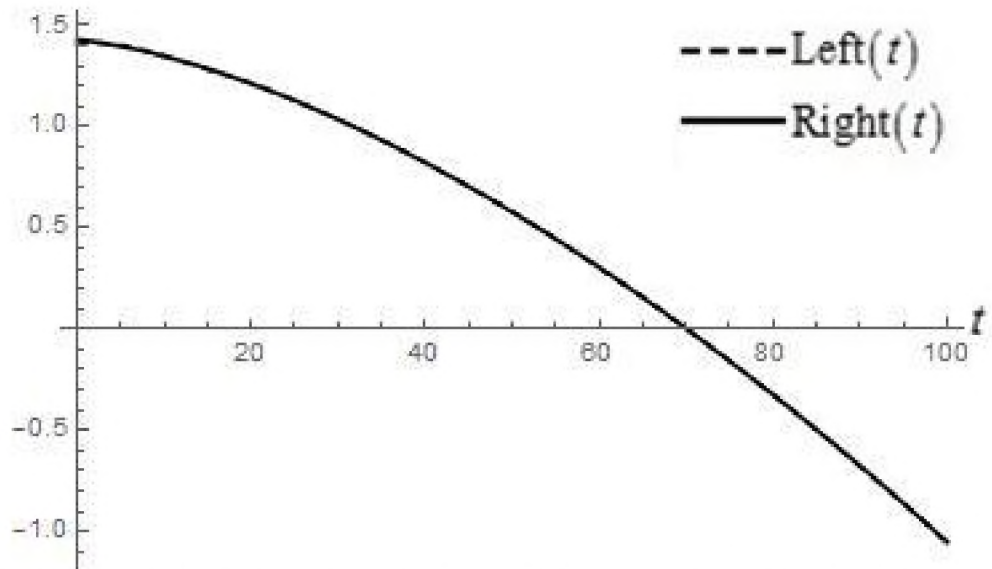


Рисунок 2.13 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 13 функцій Уолша

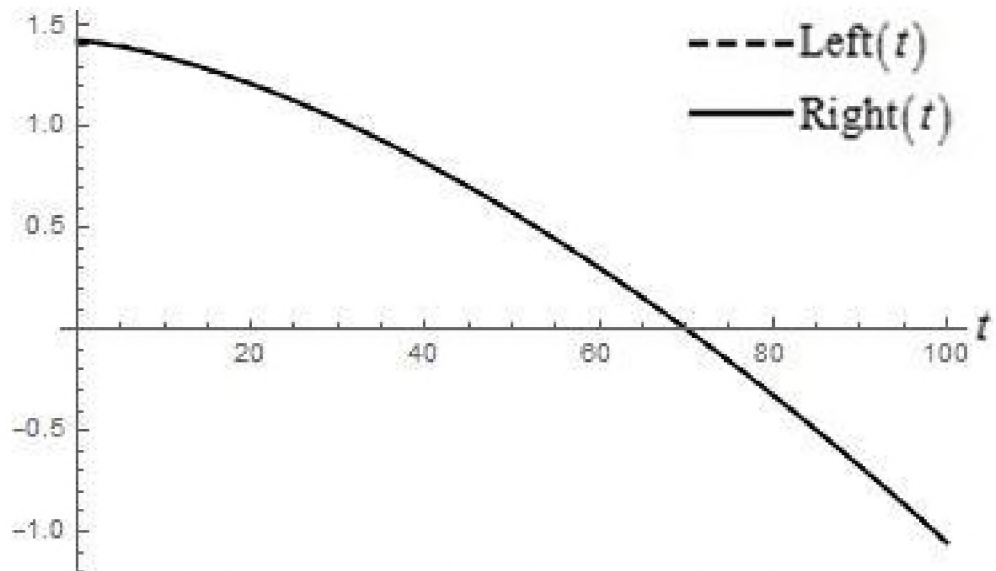


Рисунок 2.14 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 14 функцій Уолша

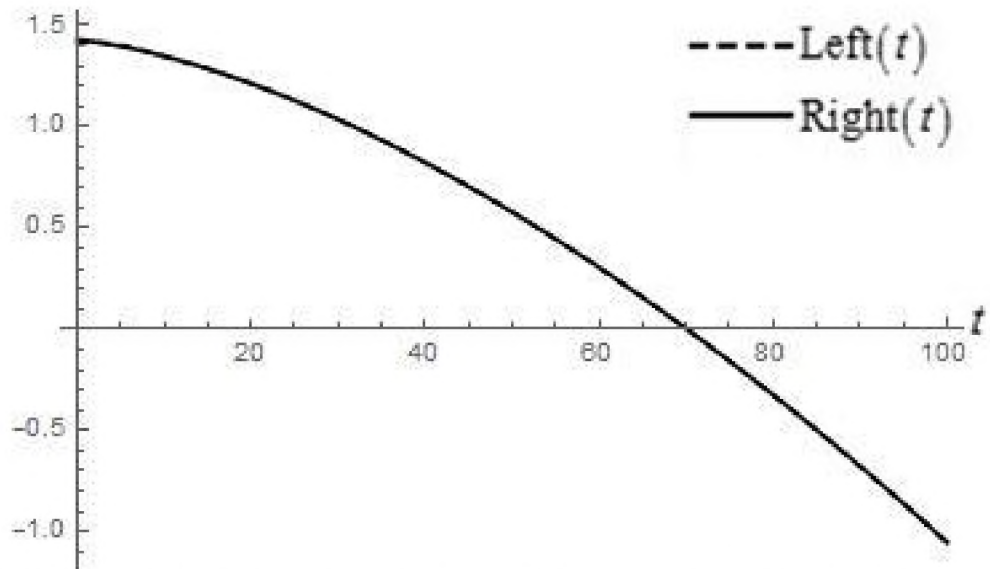


Рисунок 2.15 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 15 функцій Уолша

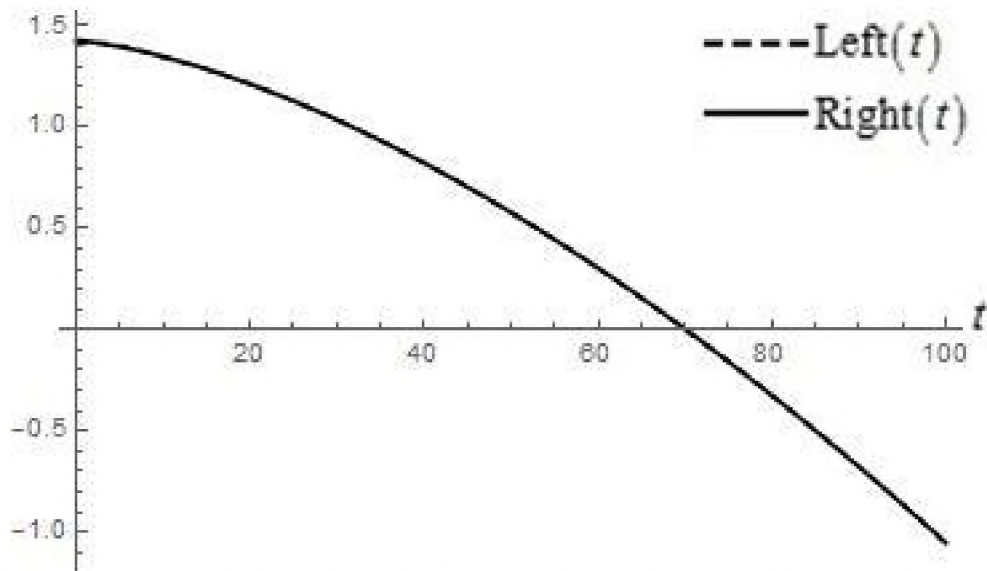


Рисунок 2.16 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 16 функцій Уолша

Отже, з вище поданих рисунків стає зрозуміло, що наближення у вісьми випадках або не є точним, або майже збігається, але ще не задовольняє заданій умові. У двох наступних випадках наближення функцій функцій Уолша майже збіглись, але з невеликою розбіжністю, та в останніх шести випадках результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові.

## 2.2 Порівняння результатів з результатами поліноміальних розвинень

Для порівняння розв'язків наведено декілька графіків порівняння для поліноміальних розв'язків з роботи [5].

У випадку малої кількості поліномів як підхід на основі функцій Уолша, так і підхід на основі ортогональних поліномів не призводять до хорошого співпадіння лівої та правої частин інтегрального рівняння. Наближення 8 поліномів є точним – криві лівої та правої частин інтегрального рівняння збігаються. Проте надалі для наближень дев'яти і більше поліномів точність методу не відповідає вимогам у зв'язку зі збільшенням кількості поліномів.

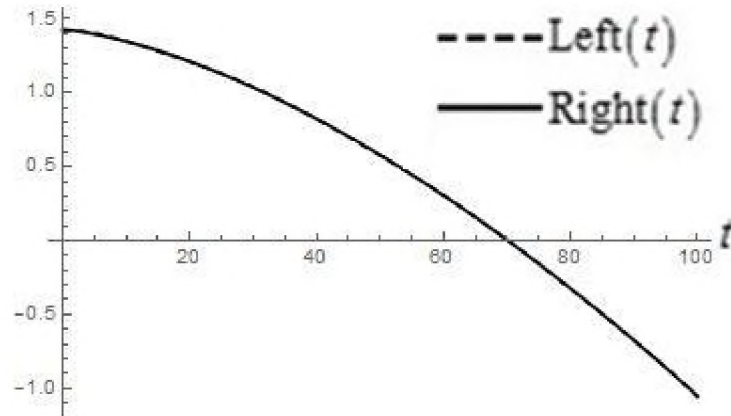


Рисунок 2.17 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 8 поліномів

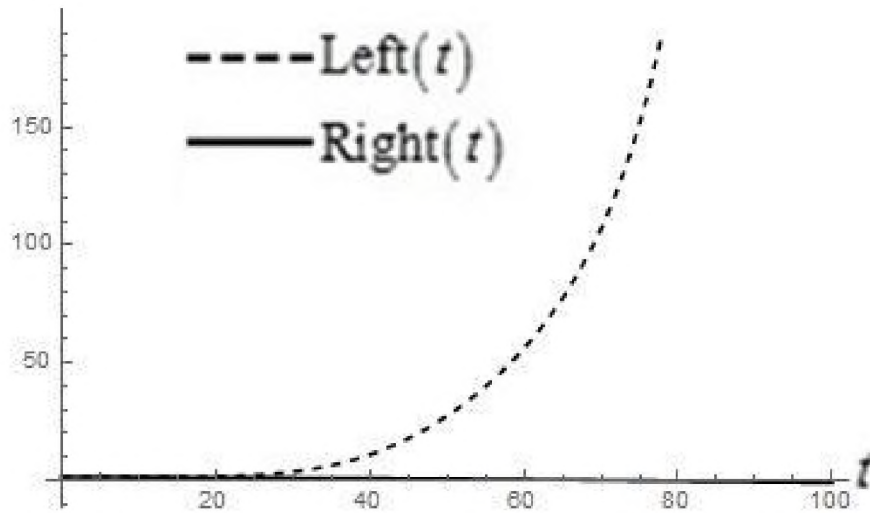


Рисунок 2.18 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 9 поліномів

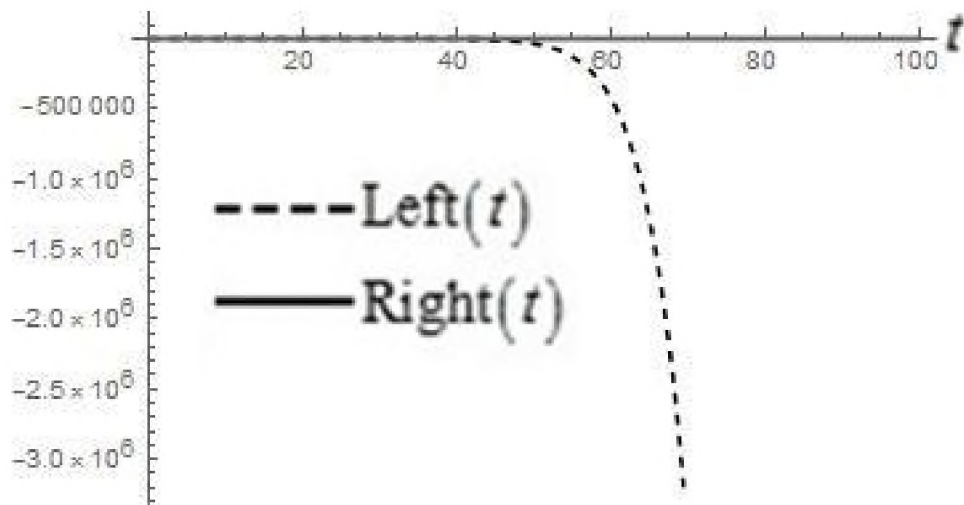


Рисунок 2.19 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення 15 поліномів

Отже, обчислення інтегральних дужок для функцій Уолша є набагато швидшим і простішим за відповідне обчислення для поліномів. Більш того, у випадку функцій Уолша набагато простішим є вигляд самих функцій – дослідження великої кількості поліномів може зіткнутися з труднощами, пов'язаними з тим, що виникне необхідність множення дуже малих на дуже великі числа, що є проблемою для математичних пакетів.

### 2.3 Висновки

Досліджено вагову функцію фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у моделі, де трафік описується як випадковий процес зі степеневою структурною функцією. Отримано наближені розв'язки для вагової функції на основі обірваного розвинення за функціями Волша для параметрів (2.22). Поведінку розв'язків досліджено до наближення 16 функцій Волша включно. Для кожного з наближень наведено графіки лівої та правої частин досліджуваного інтегрального рівняння Вінера–Хопфа. Показано, що хоча точність наближень не обов'язково зростає з кількістю функцій Волша, наближення 2, 3, 4, та 7 і більше функцій Волша дають хороше співпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння.

Зроблено порівняння отриманих розв'язків на основі функцій Волша та поліноміальних розв'язків, отриманих у роботах [5–7]. На основі того, що наближення від 9 до 15 поліномів призводять до повного неспівпадіння лівої та правої частин інтегрального рівняння, можна зробити висновок, що використання функцій Волша замість поліномів суттєво покращує точність наближень в рамках моделі, де трафік вважається випадковим процесом зі степеневою структурною функцією.

### 3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ

#### 3.1 Визначення трудомісткості розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку

Трудомісткість – показник, який характеризує витрати робочого часу на виробництво будь-якої споживчої вартості або на виконання конкретної технологічної операції. Трудомісткість розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку на основі функцій Уолша та їх порівняння з поліноміальними можливо розрахувати за формулою (3.1):

$$t = t_{по} + t_{дф} + t_{пош} + t_p + t_{пор} + t_{оф} \quad (3.1)$$

де  $t_{по}$  – витрати часу на підготовку і опис поставленого завдання;

$t_{дф}$  – витрати часу на дослідження функцій Уолша та фільтру Колмогорова–Вінера;

$t_{пош}$  – витрати часу на пошук вагової функції фільтру;

$t_p$  – витрати часу на розв'язок;

$t_{пор}$  – витрати часу на порівняння поліноміальних розв'язків із розв'язками на основі функцій Уолша;

$t_{оф}$  – витрати часу на оформлення дипломної роботи.

Оцінка витрат праці на збір і аналіз інформації залежить від конкретних умов і визначається на основі експертних оцінок. У таблиці 3.1 наведені дані щодо тривалості робочих процесів, що мали місце при розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку на основі функцій Уолша.



Таблиця 3.1 – Тривалість кожної робочої операції

Робоча операція	Тривалість, год.
Витрати часу на підготовку і опис поставленого завдання	7
Витрати часу на дослідження функцій Уолша та фільтру Колмогорова-Вінера	20
Витрати часу на пошук вагової функції фільтру	30
Витрати часу на розв'язок	30
Витрати часу на порівняння поліноміальних розв'язків із розв'язками на основі функцій Уолша	25
Витрати часу на оформлення дипломної роботи	30

Тому загальна трудомісткість становить:

$$t = 7 + 20 + 30 + 30 + 25 + 30 = 142 \text{ години}$$

### **3.2 Розрахунок капітальних витрат на розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку**

Витрати на розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку включають витрати на заробітну плату інженера телекомунікацій і вартість машинного часу.

Заробітна плата – грошове вираження вартості та ціни робочої сили, яка виступає в ролі заробітку, виплаченого власником підприємства працівнику за виконану роботу. Розмір заробітної плати залежить від складності та умов виконуваної роботи, професійно-ділових якостей працівника, результатів його праці та господарської діяльності підприємства. Заробітна плата виконавців розраховується за формулою (3.2):

$$ЗП = t \times C \quad (3.2)$$

де  $t$  – загальна тривалість проектування, год;

$C$  – середня годинна заробітна плата інженера телекомунікацій з урахуванням відрахувань на соціальні потреби, грн/год.

Середня заробітна плата інженера телекомунікацій у місті Дніпро станом на кінець 2020 р. складає 13000 грн. Річний фонд заробітної плати складає:

$$\Phi_p = 3P_{cp} \times 12 \quad (3.3)$$

$$\Phi_p = 13000 \times 12 = 156000 \text{ грн}$$

Єдиний соціальний внесок складає 36%, тому:

$$ССВ = 36\% \times \Phi_p \quad (3.4)$$

$$ССВ = 36\% \times 156000 = 56160 \text{ грн}$$

Визначимо номінальний річний фонд робочого часу:

$$F_n = (T_k - T_{св} - T_{вих} - T_{від}) t_p \quad (3.5)$$

де  $T_k$  – кількість календарних днів у році, днів;

$T_{св}$  – кількість святкових днів у році, днів;

$T_{вих}$  – кількість вихідних днів у році, днів;

$T_{від}$  – календарна тривалість відпустки, днів;

$t_p$  – середня тривалість робочого дня, год.

Отже, річний фонд часу за формулою (3.3) складає:

$$F_{рч} = (366 - 11 - 104 - 25) 8 = 1808 \text{ годин}$$

Середня годинна заробітна плата інженера телекомунікацій визначається співвідношенням (3.6):

$$Сгзп = \text{ФЗПесв} / \text{Грч}, \text{ грн/год}, \quad (3.6)$$

де ФЗПесв – річний фонд заробітної плати з урахуванням єдиного соціального внеску;

Грч – річний фонд робочого часу.

Середня заробітна плата інженера телекомунікацій за годину за формулою (3.4) дорівнює:

$$Сгзп = 212160 / 1808 = 117,34 \text{ грн/год}$$

Отже, витрати на оплату праці розробника складають:

$$ЗП = 142 \times 117,34 = 16662,28 \text{ грн}$$

Розрахунок вартості машинного часу, необхідного для розробки на ЕОМ включає витрати на програмне та апаратне забезпечення і витрати за електроенергію, здійснюється по формулі (3.7):

$$Змч = \text{Собл} + \text{Сел} \quad (3.7)$$

де Собл – витрати на обладнання, грн;

Сел – витрати на електроенергію, грн.

Для розрахунку вартості машино-часу необхідно знати вартість ЕОМ та ПЗ на момент їх придбання і введення в експлуатацію, і вартість споживаної електроенергії. Вартість персонального комп'ютеру Asus X556U

складає 13700 грн, програмного забезпечення Wolfram Mathematica – 9500 грн, разом – 23200 грн.

Витрати на електроенергію залежать від часу роботи на ЕОМ та собівартості машино-години роботи ЕОМ і розраховується за формулою:

$$\text{Сел} = \text{Смч} \times t, \quad (3.8)$$

$$\text{Смч} = W \times \text{Цел} \quad (3.9)$$

Де  $W$  – потужність ЕОМ,  $W = 0,5$  кВт/год.

Цел – вартість 1 кВт · год електроенергії. Станом на 1.02.20 за обсяг, спожитий понад 150 кВт · год до 600 кВт · год електроенергії на місяць (включно) складає 1,83 грн.

$$\text{Сел} = 0,5 \times 1,83 \times 142 = 129,93 \text{ грн}$$

Отже, витрати на розв’язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку складають:

$$\text{Врм} = 16662,28 + 23200 + 129,93 = 39992,21 \text{ грн}$$

### 3.3 Висновки

В економічному розділі розраховані трудомісткість, що необхідна для отримання розв’язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку на основі функцій Уолша (142 годин), заробітна плата інженера телекомунікацій (16662,28 грн), капітальні витрати, які становлять 39992,21 грн.

## ВИСНОВКИ

Роботу присвячено дослідженню вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних. В основу дослідження покладено модель [3], в рамках якої трафік вважається стаціонарним неперервним випадковим процесом зі степеневою структурною функцією. Досліджувана вагова функція фільтру є розв’язком відповідного інтегрального рівняння Вінера–Хопфа, що є частинним випадком інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Пошук точного аналітичного розв’язку такого рівняння стикається з серйозними труднощами, тож доцільним є проводити пошук наближеного розв’язку відповідного інтегрального рівняння.

Науковою новизною роботи є те, що на відміну від робіт попередників [5–7], наближений розв’язок для вагової функції фільтра шукається не на основі обірваних поліноміальних розвинень, а на основі обірваних розвинень за функціями Волша. Дослідження проведено для параметрів (2.22). Усі обчислення проведено у математичному пакеті Wolfram Mathematica. Побудовані наближення до 16 функцій Волша включно, точність наближень проілюстрована графіками порівняння чисельних значень лівої та правої частин досліджуваного інтегрального рівняння для отриманих розв’язків. Показано, що в рамках моделі трафіку як випадкового процесу зі степеневою структурною функцією розв’язки на основі функцій Волша є кращими за поліноміальні. По-перше, вони призводять до набагато кращого співпадіння обох частин інтегрального рівняння. По-друге, запропонований алгоритм пошуку інтегральних дужок на основі функцій Волша значно пришвидшує їх обчислення у математичному пакеті.

Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

У економічному розділі розраховано трудомісткість, що необхідна для отримання розв’язків для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для

прогнозування стаціонарного телкомунікаційного трафіку, заробітна плата інженера телекомунікацій та капітальні витрати.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- 1 J. S. Al-Azzeh, M. Al Hadidi, R. Odarchenko, S. Gnatyuk, Z. Shevchuk and Z. Hu, "Analysis of Self-Similar Traffic Models in Computer Networks", *International Review on Modelling and Simulations*, Vol. 10, No. 5, pp. 328–336 (2017).
- 2 А. И. Костромицкий, В. С. Волотка, "Подходы к моделированию самоподобного трафика", *Восточно-европейский журнал передовых технологий*, Т. 4, № 7, с. 46–49 (2010).
- 3 В. Х. Багманов, А. М. Комиссаров, А. Х. Султанов, «Прогнозирование телетрафика на основе фрактальных фильтров», *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*, т. 9, №6 (24), с. 217–222 (2007).
- 4 S. Miller and D. Childers, "Probability and Random Processes With Applications to Signal Processing and Communications. Second edition", Amsterdam, Elseiver/Academic Press (2012).
- 5 V. N. Gorev, A. Yu. Gusev and V. I. Korniienko, "Polynomial solutions for the Kolmogorov–Wiener filter weight function for fractal processes", *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No.2, p. 44–52 (2019).
- 6 V. Gorev, A. Gusev, and V. Korniienko, "Investigation of the Kolmogorov–Wiener filter for treatment of fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind", *Ceur Workshop Proceedings*, Vol. 2353, p. 596–606 (2019).
- 7 V. Gorev, A. Gusev and V. Korniienko, "Investigation of the Kolmogorov-Wiener filter for continous fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind", *IAPGOS*, No. 1, p. 58-61 (2020).
- 8 М. С. Беспалов, В. А. Складенко, «Функции Уолша и их приложения. Учебное пособие», Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, 2012, 35с.

9 J. M. Blackledge, "Digital Signal Processing Mathematical and Computational Methods, Software Development and Applications", Chichester, Horwood Publishing, 2006, 840 p

10 L. Ikelle, "Coding and Decoding: Seismic Data, Volume 1: The Concept of Multishooting", 2nd Edition, Elsevier, 2017, 718 p.

11 Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., "Сов. радио", 1977, 608 с.

12 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987. – 344 с.



### ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи

№	Формат	Найменування	Кількість листків	Примітки
<i>Документація</i>				
1	A4	Реферат	3	
2	A4	Зміст	1	
3	A4	Вступ	1	
4	A4	Стан питання. Постановка задачі.	15	
5	A4	Спеціальна частина	14	
6	A4	Економічний розділ	5	
7	A4	Висновки	2	
8	A4	Перелік посилань	2	
9	A4	Додаток А	1	
10	A4	Додаток Б	1	
11	A4	Додаток В	15	
12	A4	Додаток Г	1	
13	A4	Додаток Д	1	

**ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії**

- 1 Електронна версія пояснювальної записки  
(ПояснювальнаЗапискаСкорченко.doc і ПояснювальнаЗапискаСкорченко.pdf)
- 2 Електронна версія демонстраційного матеріалу  
(ПрезентаціяСкорченко.pdf)

## ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica

```

T = 100;
z = 3;
\[Sigma] = 1.2;
H = 0.8;
\[Alpha] = 3*10^-3;
R[x_] = \[Sigma]^2 - \[Alpha]/2*(Abs[x])^(2*H);
eN = 16;
NewHadamardMatrix = 4*HadamardMatrix[eN];
WhereIsIks[x_] :=
Module[{zy = 1, ksy = T},
If[x == ksy, zy = eN,
For[j = 1, j <= eN, j++,
If[((x >= (j - 1)*ksy/eN) && (x < j*ksy/eN)), {zy = j; Break[];}]
];
];
zy
]
Walsh[n_, x_] := NewHadamardMatrix[[n, WhereIsIks[x]]];
Integ = IdentityMatrix[eN];
For[i = 1, i <= eN, i++,
Integ[[1, i]] = \!(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(\0\), \(\(T/eN\)\)](
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(\((i - 1)\)*T/eN\), \(\(i*
T/eN\)\)]R[x - y] \[DifferentialD]y \[DifferentialD]x\));
Integ[[i, 1]] = Integ[[1, i]];
];
j = 1;
While[j <= eN,
k = j - 1;

```

```

For[i = 2, i <= eN - k, i++,
  Integ[[i, k + i]] = Integ[[1, j]];
  Integ[[k + i, i]] = Integ[[1, j]];
];
j++;
G = IdentityMatrix[eN];
For[nn = 1, nn <= eN, nn++,
  For[kk = 1, kk <= eN, kk++,
    If[EvenQ[nn + kk],
      eS = 0;
      For[ii = 0, ii <= eN - 1, ii++,
        For[jj = 0, jj <= eN - 1, jj++,
          TheFirst = Walsh[nn, (ii*T)/eN + T/(2*eN)];
          TheSecond = Walsh[kk, (jj*T)/eN + T/(2*eN)];
          eS =
            eS + NewHadamardMatrix[[nn, ii + 1]]*
              NewHadamardMatrix[[kk, jj + 1]]*Integ[[ii + 1, jj + 1]];
        ];
      ];
      G[[nn, kk]] = eS;
      G[[kk, nn]] = eS;
    ];
  ];
];
B = Range[eN];
Jinteg = Range[eN];
For[w = 1, w <= eN, w++,
  Jinteg[[w]] = !\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(\((w - 1)\)*T/eN\), \((w*\
T/eN\)](R[t + z] \[DifferentialD]t)\);

```

```

];
For[w = 1, w <= eN, w++,
  eS = 0;
  For[q = 0, q <= eN - 1, q++,
    eS = eS + NewHadamardMatrix[[w, q + 1]]*Jinteg[[q + 1]];
  ];
  B[[w]] = eS;
];
g = Range[eN];
g = Dot[Inverse[G], B];
Print[eN];
Print[MatrixForm[g]];
h[x_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\mathit{i} =
  1\), \(\mathit{eN}\)](g[\(\mathit{i}\)]*\(\mathit{J}\))*Walsh[\(\mathit{i}\), x]\)\);
LeftList = Range[101];
RightList = Range[101];
TheRight[t_] = R[t + z];
For[w = 0, w <= 100, w++,
  RightList[[w + 1]] = TheRight[w*T/100];
];
IntQ = Table[10 i + j, {i, 101}, {j, eN}];
For[w = 0, w <= 100, w++,
  For[q = 0, q <= eN - 1, q++,
    IntQ[[w + 1, q + 1]] = \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(\mathit{q}*\mathit{T}/\mathit{eN}\), \(\mathit{q} + 1\)]*\(\mathit{T}/\mathit{eN}\)](R[
\*FractionBox[\(\mathit{w}*\mathit{T}\), \(\mathit{100}\)] - \mathit{t}\] \[DifferentialD]\mathit{t}\)\);
  ];
];

```

```

For[w = 0, w <= 100, w++,
  eS = 0;
  For[q = 0, q <= eN - 1, q++,
    eS = eS + h[(q*T)/eN + T/(2*eN)]*IntQ[[w + 1, q + 1]];
  ];
  LeftList[[w + 1]] = eS;
];
Print[ListLinePlot[{LeftList, RightList}, DataRange -> {0, 100},
  PlotStyle -> {Directive[Black, Dashed], Black},
  AxesLabel -> Automatic, PlotLegends -> "Expressions"]];
For[eNN = 15, eNN >= 1, eNN--,
  Print[eNN];
  Be = Range[eNN];
  For[i = 1, i <= eNN, i++,
    Be[[i]] = B[[i]];
  ];
  Ge = IdentityMatrix[eNN];
  For[i = 1, i <= eNN, i++,
    For[j = 1, j <= eNN, j++,
      Ge[[i, j]] = G[[i, j]];
    ];
  ];
  ge = Dot[Inverse[Ge], Be];
  Print[MatrixForm[ge]];
  ash[x_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i =
  1\), \(\eNN\)]\(\ge[\(\[i]\)\(\j\)]*\Walsh[i, x]\)\);
  TheLeftList = Range[101];
  For[w = 0, w <= 100, w++,
    eS = 0;

```

```

For[q = 0, q <= eN - 1, q++,
  eS = eS + ash[(q*T)/eN + T/(2*eN)]*IntQ[[w + 1, q + 1]];
];
TheLeftList[[w + 1]] = eS;
];
Print[ListLinePlot[{TheLeftList, RightList}, DataRange -> {0, 100},
  PlotStyle -> {Directive[Black, Dashed], Black},
  AxesLabel -> Automatic, PlotLegends -> "Expressions"]];
];

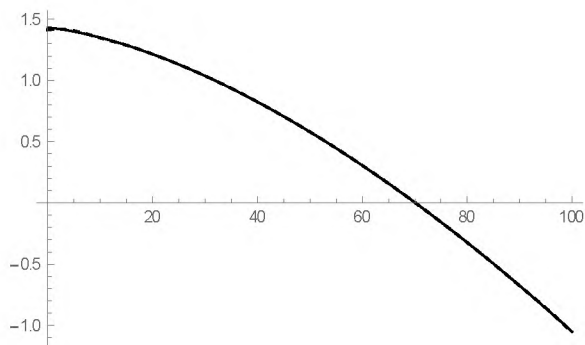
```

16

```

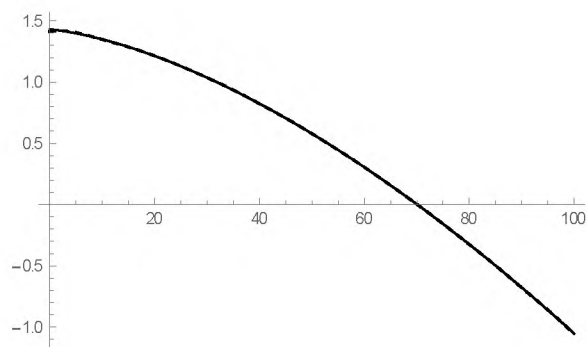
{
  {0.012755},
  {0.0102676},
  {0.0163552},
  {0.0101532},
  {0.0127302},
  {0.00781911},
  {0.0128212},
  {0.00796501},
  {0.0417272},
  {0.0215274},
  {0.0407396},
  {0.0210017},
  {0.0517755},
  {0.0266278},
  {0.0529068},
  {0.0272521}
}

```



15

{  
 {0.012755},  
 {0.0122712},  
 {0.0163552},  
 {0.0121177},  
 {0.0127302},  
 {0.00936127},  
 {0.0128212},  
 {0.00954284},  
 {0.0417272},  
 {0.0251565},  
 {0.0407396},  
 {0.0245454},  
 {0.0517755},  
 {0.0310762},  
 {0.0529068}  
 }

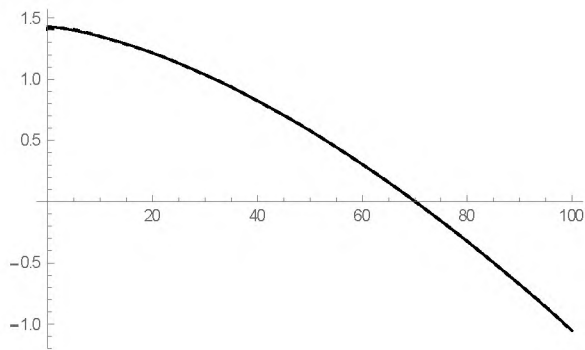


14

{  
 {0.0131367},  
 {0.0122712},  
 {0.0267556},  
 }



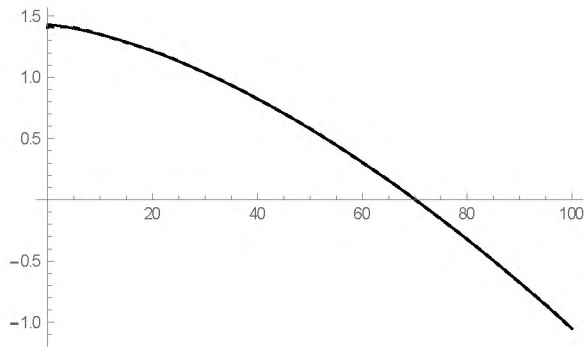
{0.0121177},  
 {0.0134145},  
 {0.00936127},  
 {0.021204},  
 {0.00954284},  
 {0.0452822},  
 {0.0251565},  
 {0.0600495},  
 {0.0245454},  
 {0.0562445},  
 {0.0310762}  
 }



13

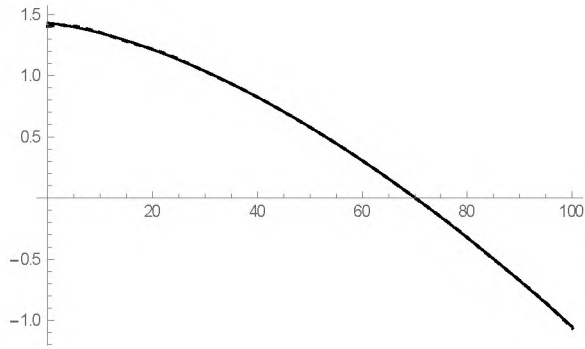
{  
 {0.0131367},  
 {0.00957852},  
 {0.0267556},  
 {0.0158879},  
 {0.0134145},  
 {0.0176361},  
 {0.021204},  
 {0.0125702},  
 {0.0452822},

{0.0212038},  
 {0.0600495},  
 {0.0313482},  
 {0.0562445}  
 }



12

{  
 {0.0138211},  
 {0.00957852},  
 {0.0297464},  
 {0.0158879},  
 {0.0399896},  
 {0.0176361},  
 {0.0235059},  
 {0.0125702},  
 {0.0516502},  
 {0.0212038},  
 {0.0685173},  
 {0.0313482}  
 }



11

{

{0.0138211},

{0.0135593},

{0.0297464},

{0.00528931},

{0.0399896},

{0.0243481},

{0.0235059},

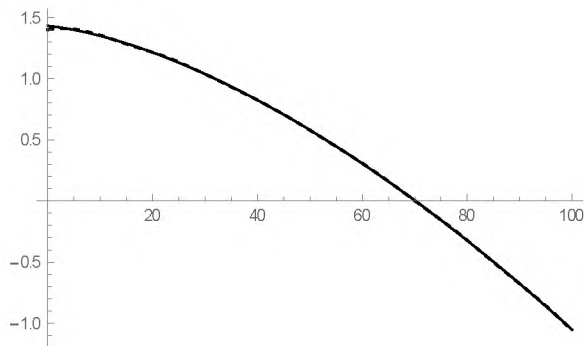
{0.0175156},

{0.0516502},

{0.0287655},

{0.0685173}

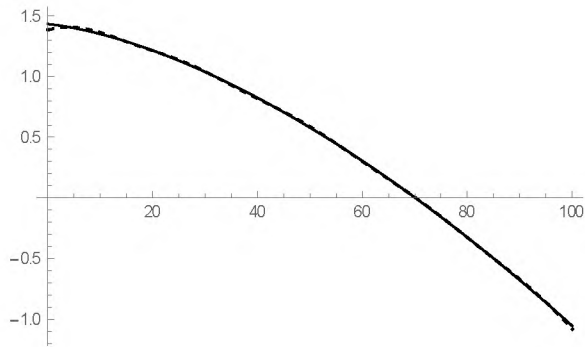
}



10

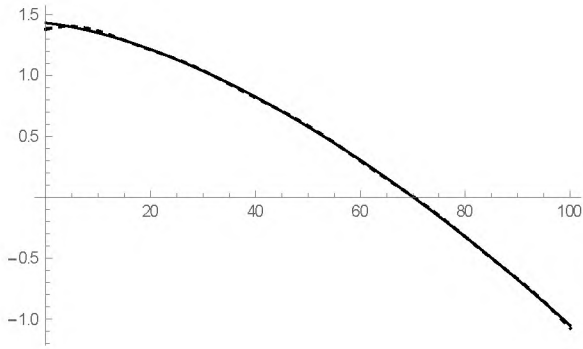
{

{0.0160292},  
 {0.0135593},  
 {0.0166042},  
 {0.00528931},  
 {0.054119},  
 {0.0243481},  
 {0.0669679},  
 {0.0175156},  
 {0.0720908},  
 {0.0287655}  
 }



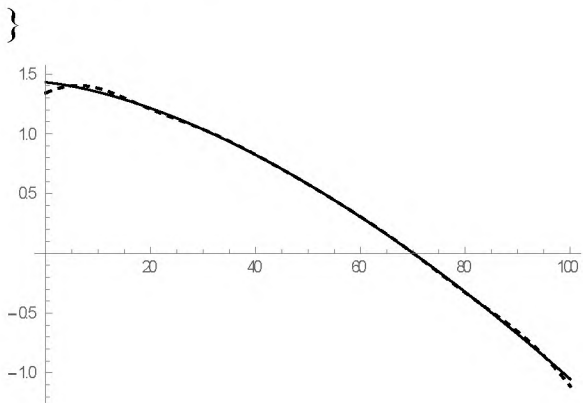
9

{  
 {0.0160292},  
 {0.0101201},  
 {0.0166042},  
 {0.00804856},  
 {0.054119},  
 {0.0195569},  
 {0.0669679},  
 {0.0252413},  
 {0.0720908}  
 }



8

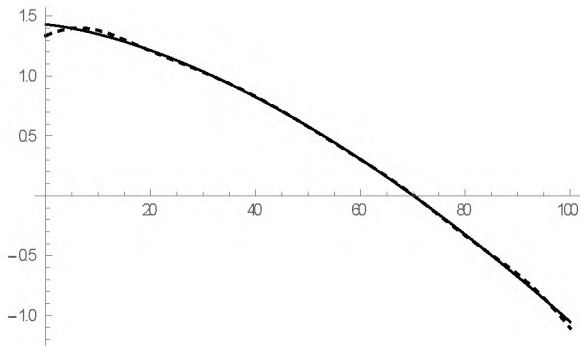
{  
 {0.0207086},  
 {0.0101201},  
 {0.0233083},  
 {0.00804856},  
 {0.0840523},  
 {0.0195569},  
 {0.104396},  
 {0.0252413}



7

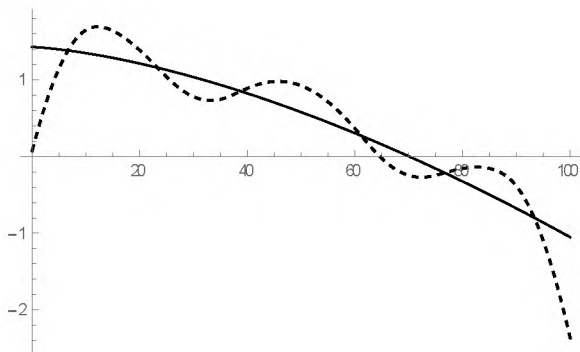
{  
 {0.0207086},  
 {0.0145186},  
 {0.0233083},

{0.01158},  
 {0.0840523},  
 {0.0275017},  
 {0.104396}  
 }



6

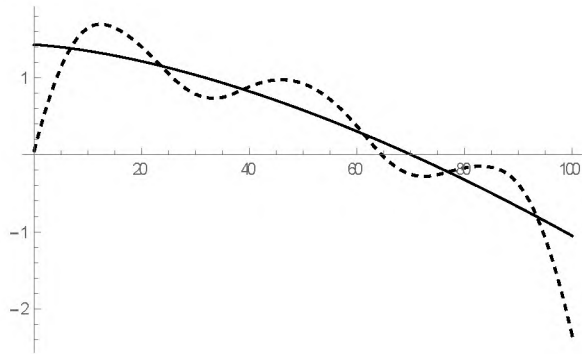
{  
 {0.172436},  
 {0.0145186},  
 {0.757441},  
 {0.01158},  
 {1.0447},  
 {0.0275017}  
 }



5

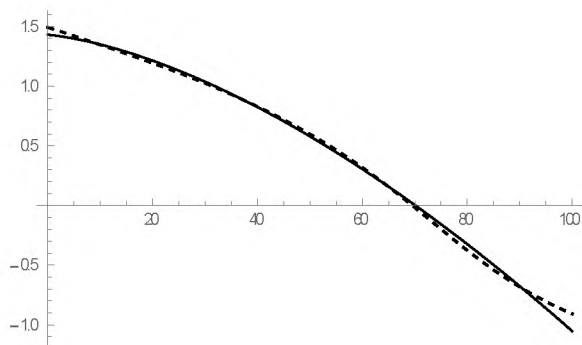
{

{0.172436},  
 {0.00797726},  
 {0.757441},  
 {0.023665},  
 {1.0447}  
 }



4

{  
 {-0.00046918},  
 {0.00797726},  
 {-0.0321873},  
 {0.023665}  
 }



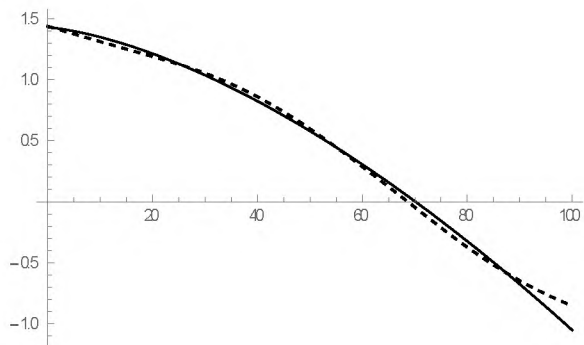
3

{  
 {-0.00046918},

{0.0186993},

{-0.0321873}

}



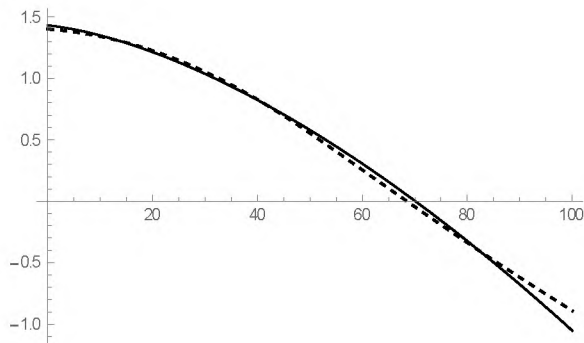
2

{

{0.00485715},

{0.0186993}

}



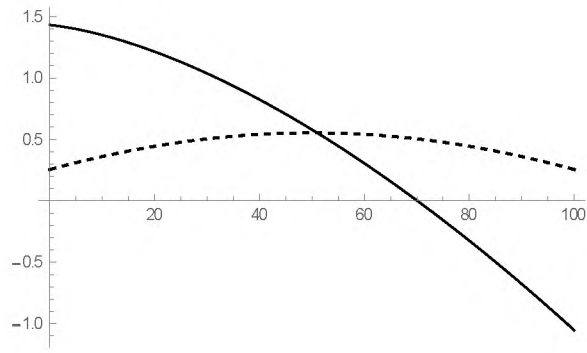
1

{

{0.00485715}

}







**ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи****Відгук на кваліфікаційну роботу****студента групи 172-19м-1 Скорченка А. С.**

на тему: «Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із функціями Волша»

Пояснювальна записка розташована на 67 сторінках і містить, у тому числі, вступ, три розділи та висновки. Метою роботи є знаходження наближеного розв'язку для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для трафіку як процесу зі степеневою структурною функцією у вигляді розвинення за функціями Волша та порівняння цих розв'язків з поліноміальними.

Рівень запозичень у кваліфікаційній роботі відповідає вимогам «Положення про систему виявлення та запобігання плагіату».

Серед позитивних сторін роботи слід відмітити, зокрема, те, що при виконанні роботи А. С. Скорченко продемонстрував добрий рівень знань на навичок. У роботі показано, що розв'язки на основі функцій Волша є кращими за поліноміальні в рамках досліджуваної моделі, це може бути використано при дослідженні прогнозування телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних.

Серед недоліків роботи слід відмітити, зокрема, стилістичні недоліки. Також, можливо, слід було чисельно порахувати помилки неспівпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для отриманих розв'язків.

Незважаючи на недоліки, в цілому робота задовольняє усім вимогам, що висуваються до кваліфікаційних робіт магістрів, заслуговує оцінки «відмінно», а її автор А. С. Скорченко – присвоєння кваліфікації магістр з телекомунікацій та радіотехніки.

**Керівник роботи, к.ф-м.н., доц. каф. БІТ****В. М. Горєв**