

## ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ МАССИВНЫХ СООРУЖЕНИЙ И МАШИН В ЗОНЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ГРУНТОВОГО ПРОСТРАНСТВА

*В. В. Чигиринский, ЧАО «Кременчугский колесный завод», Украина  
Е. Г. Науменко, Национальный технический университет «Днепропетровская политехника»,  
Украина*

Предложен новый подход решения плоской задачи теории упругости, связанный с использованием аргумент функций, что позволяет замкнуть задачу через дифференциальные соотношения Коши-Римана и Лапласа. Эти обобщения расширяют круг гармонических функций, соответствующих разным граничным условиям прикладных задач. Показаны подходы, при помощи которых определяются не сами разрешающие функции, а условия их существования.

В процессе нагружения упругого полупространства в среде возникают деформации и напряжения, определяющие несущую способность грунтов в течение определенного промежутка времени. Не правильный учет этой способности приводит к его уплотнению, неравномерному проседанию массивных зданий, машин, и агрегатов, находящихся на несущей поверхности. В строениях появляются трещины, прочностные параметры таких сооружений меняются, что приводит к нарушению эксплуатационных характеристик всего комплекса. С этой точки зрения представляет интерес распределение контактных напряжений. Решения показывают, что нормальные напряжения неоднородны в зоне воздействия. Это сказывается на уплотнении грунтов в различных зонах взаимодействия, что влияет на выбор фундаментного основания, укрепления несущей способности отдельных элементов сооружения. Кроме этого, актуальным является определение условий затухания данного воздействия, возможное упрочнение или разупрочнение (разрыхления) грунтов.

Следует отметить, что представленная задача является более сложной, т.к. в этом случае рассматривается не упругая задача, а упругопластическая, [1]. Однако предполагается, что на первом этапе взаимодействия, среда (почва) находится в упругом состоянии, и поэтому можно применить подходы теории упругости.

В работах [2-3] предложен новый подход решения задач механики сплошной среды с использованием аргумент функций для некоторых базовых зависимостей. Это позволяет расширить круг рассматриваемых прикладных задач различного назначения.

Уровень рассматриваемых задач носит как фундаментальный, так и прикладной характер. К ним можно отнести: контактные задачи с разной геометрией инструмента и условий трения; исследование неоднородных полей деформаций и напряжений, включая аддитивное деформирование тел разной формы; взаимодействие тел с разным нагружением.

Актуальной является отработка обобщенных подходов решения задач теории упругости, с использованием аргумент функций в условиях сложного взаимодействия деформируемых тел.

В работах [4–7] сформулированы основные обобщающие подходы задач теории упругости, подкрепленные аналитическими решениями.

Вариантом преодоления соответствующих трудностей может быть использование аргумент функций, вводимых в рассмотрение для базовых переменных. Такие подходы использованы в работах [8–10].

В публикации [11] рассматривается контактное взаимодействие образца и пуансона. Общие подходы задачи дополнялись условиями взаимосвязи. Отсутствие условий существования решений задачи усложняет расчет и получение достоверного результата.

Показан анализ изменения характера нагружения по толщине образца при действии компактного натяжения [12]. Максимальная зона расположена ближе к поверхности, что свидетельствует о неравномерности напряженного состояния материала. Учет неоднородности напряженно-деформированного состояния сплава в теории характеризуется

введением в рассмотрение координатных функций, или в данном случае – аргумент функций.

Рассмотрена локальная задача нагружения у основания несплошности с использованием общего подхода, определяемым состоянием среды, [13]. Повторяющаяся неоднородность напряженного состояния или изменение очевидных условий показывают необходимость использования в решении координатные функции в сочетании с периодическими зависимостями. В случае метода аргумент функций это представляет собой сочетание базовых функций, включая тригонометрическую и соответствующую ей аргумент функцию.

Переменные напряжения и деформации в процессе нагружения являются основными причинами снижения прочности и долговечности изделий, [14]. Это делает актуальным решение прикладных задач, характеризующих напряженное состояние изделий при помощи подходов классических уравнений теории механики сплошной среды.

Целью исследования является разработка новых подходов, определяющих напряженное состояние грунтов, находящихся под воздействием массивных сооружений. Условия затухания этого воздействия в полубесконечном пространстве.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- разработать новые подходы решения задач теории упругости;
- решить в аналитическом виде, с использованием аргумент функций, теоретическую задачу теории упругости. Использовать обобщающие зависимости, позволяющие получить условия существования замыкающих решений задач теории упругости;
- решить прикладную задачу теории упругости, определяющей напряженное состояние грунтов, подвергнутых воздействию со стороны массивных тел и сооружений. Показать условия затухания этого воздействия.

Используется известная постановка плоской задачи классической теории упругости. Включены: два дифференциальных уравнения равновесия, уравнение неразрывности деформаций, граничные условия в напряжениях в тригонометрической форме. В рассмотрение вводятся неизвестные аргумент функции, для экспоненциальной и тригонометрической базовых зависимостей, замыкающих решения плоской задачи. При этом тригонометрическая и фундаментальные подстановки должны быть подтверждены в ходе получения конечного результата. Дифференциальные соотношения между аргумент функциями, показанные решением задачи, представляют собой соотношения Коши-Римана, имеющие место в аналитических функциях комплексных переменных, т. е.

$$\theta_x = -A\Phi_y, \quad \theta_y = A\Phi_x,$$

где  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $A\Phi_y$ ,  $A\Phi_x$  – частные производные аргумент функций  $\theta$  и  $A\Phi$  по координатам.

Используя производные, имеем эллиптические уравнения Лапласа

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0, \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0.$$

Между вещественными функциями устанавливается своеобразная инвариантная связь, которая положена в основу математических преобразований с использованием метода комплексных переменных. Особенностью данного подхода является то, что полученные в результате вывода соотношения позволяют замкнуть решение в соответствии с граничными условиями.

Предлагаемые решения, как правило, начинаются с постановки задачи и формулировки граничных условий. Для плоской задачи имеем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(2 \cdot \sigma_0) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия в напряжениях можно привести к виду

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi, \quad (2)$$

где  $\sigma_0$  – среднее нормальное напряжение или гидростатическое давление.

Следует подчеркнуть, что выше приведенная постановка упругой задачи приемлема как для плосконапряженного, так и плоскодеформированного состояния материала. Анализ показывает, что с целью упрощения решения и граничных условий следует воспользоваться

тригонометрической подстановкой вида:

$$\tau_{xy} = T_i \cdot \sin(A\Phi), \quad \sigma_x - \sigma_y = 2 \cdot T_i \cdot \cos(A\Phi), \quad (3)$$

которая в дальнейшем должна быть подтверждена решением задачи и удовлетворением граничных условий. Подставляя (3) в (2), имеем:

$$\tau_n = -T_i \cdot \sin(A\Phi - 2\varphi), \quad (4)$$

где  $T_i = T_i(x, y)$  – функция координат очага деформации, совпадающая по функциональному назначению с интенсивностью касательных напряжений;  $A$  – постоянный коэффициент, определяющий упругое состояние деформируемой среды;  $\Phi$  – функция координат, одна из вводимых в рассмотрение аргумент функция, характеризующая контактные касательные напряжения;  $\varphi$  – угол наклона площадки.

Учитывая, что система дифференциальных уравнений линейна, можно воспользоваться фундаментальной подстановкой при определении интенсивности касательных напряжений  $T_i$ , [15]. Следует отметить, что в работе [15] в показателе экспоненты принята линейная зависимость от координат. Предлагается ввести вторую аргумент функцию  $\theta$ , т.е. показатель экспоненты, в виде произвольной непрерывной функции координат, значение которой на данном этапе решения неизвестно. Как правило, упругие деформации определяют напряженное состояние таким, при котором интенсивность напряжений является величиной переменной. В связи с этим целесообразно ввести в рассмотрение пространственный фактор влияния, связанный с координатами очага деформации, т. е.:

$$T_i = C_\sigma \cdot \exp(\pm\theta) = C_\sigma \cdot [ch(\theta) \pm sh(\theta)]. \quad (5)$$

Следует добавить, что показатель экспоненты  $\theta$ , является зависимостью неизвестной и представляется второй аргумент функцией. С учетом замечаний (3)–(5) имеем:

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \sin(A\Phi), \quad \sigma_x - \sigma_y = 2 \cdot C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi). \quad (6)$$

В выражениях (6) рассматриваются две базовые функции (тригонометрическая и экспоненциальная) и две неизвестные аргумент функции ( $\theta$  и  $A\Phi$ ), которые во многом являются определяющими. Если между ними существует математическая связь, к примеру, соотношение Коши-Римана, то возникает достаточная определенность для получения аналитического решения и возможность установления условия его существования для системы уравнений (1).

Граничные условия показывают, что разность нормальных напряжений (6) должна иметь конкретное математическое наполнение, подтвержденное решением плоской задачи теории упругости. Согласно (1) и (6), с учетом девиаторной составляющей для нормальных напряжений [16] можно записать

$$\sigma_x = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx + \sigma'_0 + C, \quad \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy + \sigma'_0 + C,$$

тогда

$$\sigma_x - \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx + \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy = 2 \cdot C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi).$$

Это возможно, если

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma'_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma'_0 + f(y) + C. \end{aligned} \quad (7)$$

Требования (3-7) предъявляются к решению задачи со стороны граничных условий (2).

Рассмотрим среднее нормальное напряжение, которое используется в уравнении неразрывности деформаций.

По аналогии с кругами Мора, возможны сдвиги вдоль оси абсцисс напряженного состояния в сторону отрицательных или положительных значений благодаря среднему напряжению  $\sigma_0$ .

Появляется необходимость в определении условий существования решения для уравнения Лапласа вида

$$\nabla^2(\sigma_0) = \nabla^2(C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi)) = 0. \quad (8)$$

Проанализируем зависимости (6-7) для среднего нормального напряжения с точки зрения задачи в постановке (1). Имеем  $\sigma_0$  в виде

$$\sigma_0 = C_\sigma \cdot \exp(\theta) \cdot \cos(A\Phi).$$

Последнее выражение позволяет в формулах (7) устранить неопределенность при нахождении напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Учитывая, что в выражениях (6-7) присутствуют экспоненциальные зависимости, включая комплексную, запишем касательное напряжение через экспоненциальную функцию в виде:

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \frac{\exp(\theta + iA\Phi) - \exp(\theta - iA\Phi)}{2i}. \quad (9)$$

Для определения нормальных напряжений необходимо подставить выражение для касательных напряжений (9) в уравнения равновесия.

Переходя к вещественным функциям, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + C. \end{aligned} \quad (10)$$

Если интегрированием определялись не напряжения, а девиаторы напряжений  $s_x = \sigma_x - \sigma_0$ ,  $s_y = \sigma_y - \sigma_0$ , согласно [16], тогда:

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0, \quad \sigma_y = -C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0, \quad (11)$$

при  $\theta_x = -A\Phi_y$ ,  $\theta_y = A\Phi_x$ ,  $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ ,  $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$ .

Следует подчеркнуть, что выражения (11) соответствуют выражениям (6), что требовалось при постановке задачи. Представлением девиаторной составляющей в виде, получим  $s_x = \sigma_x - \sigma_0 - f(y)$ ,  $s_y = \sigma_y - \sigma_0 - f(x)$ , тогда

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y), \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Выше приведены соотношения Коши-Римана для аргумент функций, которые полностью замыкают решение задачи и по граничным условиям (6) и по уравнениям равновесия (1). Вводимые в рассмотрение неизвестные функции  $\theta$  и  $A\Phi$  определяются уравнениями Лапласа согласно (11-12), что вносит достаточную определенность для их нахождения. Дифференциальные соотношения

$$\theta_x = -A\Phi_y, \quad \theta_y = A\Phi_x, \quad \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0, \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0 \quad (13)$$

представляют собой инварианты аргумент функций, ограничивающие решения задачи. Появляется инструмент получения дополнительных возможностей аналитического и численного решения, (13). Выявляется целый класс аргумент функций, т.е. новых зависимостей, удовлетворяющих граничным условиям и уравнениям равновесия системы (1).

Однако задача не завершена, т.к. не определены средние нормальные напряжения, входящие в (7), (11-12) через условие неразрывности деформаций (8). В этом случае ставится задача, при каких значениях аргумент функций условие неразрывности (8) будет удовлетворено. Запишем (8) через функцию комплексной переменной

$$\nabla^2 \left( C_\sigma \cdot \frac{\exp(\theta + iA\Phi) + \exp(\theta - iA\Phi)}{2} \right) = 0.$$

После подстановки производных в уравнение неразрывности деформаций, сокращений:

$$\begin{aligned} & \exp(\theta + iA\Phi) \cdot \left[ (\theta_{xx} + \theta_{yy}) + (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i + (\theta_x + iA\Phi_x)^2 + (\theta_y + iA\Phi_y)^2 \right] + \\ & + \exp(\theta - iA\Phi) \cdot \left[ (\theta_{xx} + \theta_{yy}) - (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i + (\theta_x - iA\Phi_x)^2 + (\theta_y - iA\Phi_y)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Операторы в (14), стоящие возле экспонент, содержат одинаковые вторые производные по координатам и нелинейности.

Принимая в произведениях скобок одну равную нулю, уходим от нелинейности, тогда  $\theta_x = -A\Phi_y$ ,  $\theta_y = A\Phi_x$ . Автоматически превращается в нуль выражение для обоих операторов  $\theta_x \cdot A\Phi_x + \theta_y \cdot A\Phi_y = -A\Phi_y \cdot A\Phi_x + A\Phi_x \cdot A\Phi_y = 0$ .

Уравнение неразрывности (14) существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} & \exp(\theta + iA\Phi) \cdot \left[ (\theta_{xx} + \theta_{yy}) + (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i \right] + \\ & + \exp(\theta - iA\Phi) \cdot \left[ (\theta_{xx} + \theta_{yy}) - (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i \right] = 0. \end{aligned}$$

Из соотношений Коши-Римана определяем вторые производные, которые показывают, что  $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ ,  $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$ , т.е. уравнение неразрывности деформаций тождественно удовлетворяется. Следовательно, решением уравнения неразрывности деформаций является

$$\sigma_0 = n \cdot C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi, \quad (15)$$

где  $n$  – любое число.

На решение (15) накладываются те же ограничения, что и на (11–12) при тех же параметрах. Следует подчеркнуть, что решение уравнения неразрывности деформаций допускает присутствие в выражении среднего нормального напряжения одновременно двух экспонент с противоположными знаками аргумент функции  $\theta$ . Покажем это:

$$\sigma_0 = n \cdot C_\sigma \cdot \exp(-\theta) \cdot \cos A\Phi = n \cdot C_\sigma \cdot \frac{\exp(-\theta + iA\Phi) + \exp(-\theta - iA\Phi)}{2}.$$

Подставляя в уравнение неразрывности деформаций, имеем

$$\begin{aligned} & \exp(-\theta + iA\Phi) \cdot \left[ -(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i + (\theta_x - iA\Phi_x)^2 + (\theta_y - iA\Phi_y)^2 \right] + \\ & + \exp(-\theta - iA\Phi) \cdot \left[ -(\theta_{xx} + \theta_{yy}) - (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i + (\theta_x + iA\Phi_x)^2 + (\theta_y + iA\Phi_y)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставляя (14) и (16) убеждаемся, что операторы перед экспонентами, в сравнении функцией  $\theta$  противоположного знака, но с точки зрения решения практически не изменились.

Используя соотношения Коши-Римана,  $\theta_x = A\Phi_y$ ,  $\theta_y = -A\Phi_x$ , уравнение неразрывности существенно преобразовывается и принимает вид

$$\begin{aligned} & \exp(-\theta + iA\Phi) \cdot \left[ -(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i \right] + \\ & + \exp(-\theta - iA\Phi) \cdot \left[ -(\theta_{xx} + \theta_{yy}) - (A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy}) \cdot i \right] = 0. \end{aligned}$$

Установленная дифференциальная связь между аргумент функциями позволяет определить вторые производные  $\theta_{xx} = A\Phi_{yx}$ ,  $\theta_{yy} = -A\Phi_{xy}$ ,  $A\Phi_{xx} = \theta_{yx}$ ,  $A\Phi_{yy} = -\theta_{xy}$ .

Подставляя производные в уравнение неразрывности, убеждаемся, что (14) превращается в тождество.

С единых позиций поставлена и решена плоская задача теории упругости, выявлены обобщающие соотношения (13), определяющие условия существования заданного класса решений через инварианты дифференциальных соотношений аргумент функций.

В итоге можно записать

$$\sigma_x = \pm C_\sigma \cdot \exp(\pm\theta) \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C,$$

$$\sigma_y = mC_\sigma \cdot \exp(\pm\theta) \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C, \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp(\pm\theta) \cdot \sin(A\Phi), \quad \sigma_0 = \pm n \cdot C_\sigma \cdot \exp(\pm\theta) \cdot \cos A\Phi.$$

Анализ показывает, что (17) может быть в дальнейшем усилено, представлено в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pm \exp(\pm\theta)(C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C = \\ &= \pm [ch(\pm\theta) \pm sh(\pm\theta)](C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= m \exp(\pm\theta)(C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C = \\ &= m [ch(\pm\theta) \pm sh(\pm\theta)](C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = \exp(\pm\theta) \cdot (C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi) = [ch(\pm\theta) \pm sh(\pm\theta)](C_1 \sin A\Phi + C_2 \cos A\Phi),$$

$$\sigma_0 = \pm n \cdot \exp(\pm\theta) \cdot (C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi) = \pm n \cdot [ch(\pm\theta) \pm sh(\pm\theta)](C_1 \cos A\Phi - C_2 \sin A\Phi).$$

Как частный случай, выражение (18) можно рассматривать в виде функции напряжений для сравнительного анализа. Бигармоническое уравнение для плоской задачи можно представить

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0.$$

Так как  $\nabla^2(\sigma_0) = 0$ , следовательно,  $\nabla^2[\nabla^2(\sigma_0)] = \nabla^2[0] = 0$ .

В работе [17] показаны решения плоской задачи при помощи рядов. Функция напряжений  $\phi$  имеет вид

$$\phi = \sin(\alpha x) \cdot [C_3 \cdot ch(\alpha y) + C_4 \cdot sh(\alpha y) + C_5 \cdot y \cdot ch(\alpha y) + C_6 \cdot y \cdot sh(\alpha y)]. \quad (19)$$

Приведем выражения (18) и (19) в сопоставимый вид, т.е.  $C_5 = C_6 = 0$ ,  $A\Phi = \alpha x$ ,  $\theta = \alpha y$ ,  $n = 1$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -1$ . В (18) перед выражением выбирается знак плюс. В этом случае выражения (18) и (19) совпадают, следовательно, для обоих должны быть справедливы соотношения Коши-Римана и уравнения Лапласа, которые были получены настоящим решением  $\theta_x = -A\Phi_y$ ,  $\theta_y = A\Phi_x$ ,  $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ ,  $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$ .

Таким образом, представленные в работе [17] функции тестируются по отношению к (18). Это следует из того, что функции  $\alpha x$  и  $\alpha y$  являются простейшим решением уравнения Лапласа, которое допускает целый класс гармонических функций в различных сочетаниях. К примеру, более сложной функцией  $A\Phi$  является функция второго порядка. Рассмотрим несколько вариантов. Тригонометрические аргумент функции:

$$A\Phi_1 = AA_6 x; \quad A\Phi_2 = AA_6 xy; \quad A\Phi_3 = mAA_{13}(x^2 - y^2). \quad (20)$$

Через соотношение Коши-Римана, определяются вторые аргумент функции  $\theta$ , вида

$$\theta_1 = AA_6 y; \quad \theta_2 = -\frac{1}{2} AA_6 (x^2 - y^2); \quad \theta_3 = \pm AA_{13}(xy). \quad (21)$$

Все три варианта удовлетворяют соотношениям Коши-Римана и уравнениям Лапласа. Из последнего анализа следует, что вариантов решений может быть столько, сколько будет определено гармонических функций.

Разные гармонические функции по-разному влияют на конечный результат, могут характеризоваться разными краевыми условиями задач. В отличие от выражений, полученных методом разделения переменных, аргумент функции могут быть нелинейными, и одновременно зависеть от двух координатных переменных.

Рассмотрим воздействие массивных тел на упругое полупространство и условия затухания такого воздействия.

Для анализа воспользуемся простейшими вариантами аргумент функций (20–21). Покажем влияние их построения на распределение контактных напряжений в упругой зоне. Исследуем напряженное состояние упругого полупространства под действием силы  $P$  массивного

штампа, шириной  $2b$ , (рис. 1).

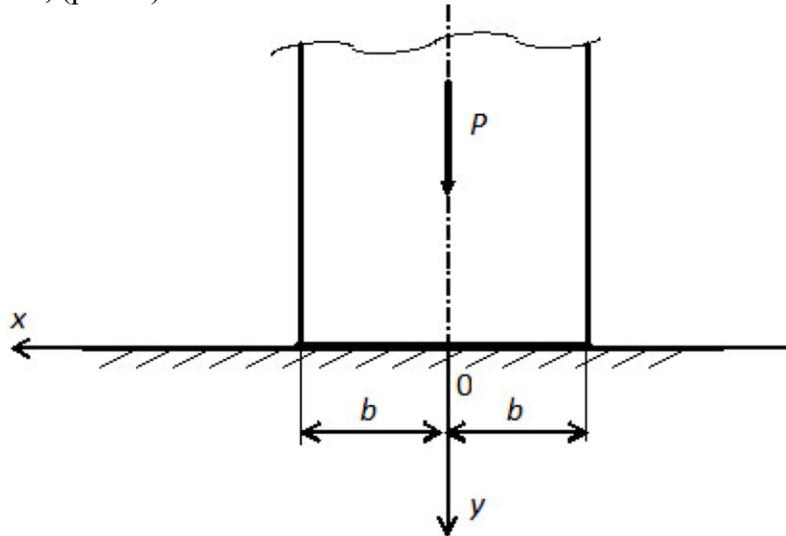


Рис. 1. Действие плоского штампа на упругое полупространство

Предполагается, что имеет место непрерывное распределения напряжений по объему зоны упругого деформирования, что позволит на контакте со штампом найти закон распределения касательных и нормальных напряжений.

Выбираем простейший вариант выражений, (20). Принимая выражение (18) с учетом  $C_1 = C_\sigma; C_2 = 0$ , получаем дифференциальные соотношения в виде:  $\theta_x = A\Phi_y$ ,  $\theta_y = -A\Phi_x$ ,  $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ ,  $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$ . Напряжения имеют вид:

$$\sigma_x = -\exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi + \sigma_0,$$

$$\sigma_y = \exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi + \sigma_0,$$

$$\tau_{xy} = \exp(-\theta) C_\sigma \sin A\Phi,$$

$$\sigma_0 = \pm n \cdot \exp(-\theta) \cdot C_\sigma \cos A\Phi.$$

Если в процессе нагружения формируется напряженное состояние одного знака, например сжатие, тогда:

$$\sigma_x = -\exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi + n \cdot \exp(-\theta) \cdot C_\sigma \cos A\Phi,$$

$$\sigma_y = \exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi + n \cdot \exp(-\theta) \cdot C_\sigma \cos A\Phi,$$

$$\tau_{xy} = \exp(-\theta) C_\sigma \sin A\Phi.$$

При этом минимальное целое значение  $n=2$ , тогда:

$$\sigma_x = \exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi, \quad \sigma_y = 3 \exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi, \quad \tau_{xy} = \exp(-\theta) C_\sigma \sin A\Phi.$$

Если в силу принятых допущений необходимо иметь напряжение  $\sigma_x = 0$ , тогда  $n = 1$ :

$$\sigma_y = 2 \exp(-\theta) C_\sigma \cos A\Phi, \quad \tau_{xy} = \exp(-\theta) C_\sigma \sin A\Phi.$$

Функции  $A\Phi$  и  $\theta$  определены с учетом соотношений Коши-Римана и уравнений Лапласа:

$$A\Phi = AA_6 x, \quad \theta = -AA_6 y.$$

Подставляя аргумент функции в последние выражения для напряжений, имеем:

$$\sigma_y = 2 \exp(-AA_6 y) C_\sigma \cos(AA_6 x), \quad \tau_{xy} = \exp(-AA_6 y) C_\sigma \sin(AA_6 x). \quad (22)$$

Анализ выражений (22) показывает, что решение предполагает присутствие на контакте трения, изменяющегося по синусоидальному закону. Если принять в зависимостях (22) постоянную  $AA_6$  равную нулю, то неоднородность напряженного состояния исчезает. Тогда

$$\sigma_y = 2 \cdot C_\sigma, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Из выше приведенных формул следует, что постоянная  $AA_6$  характеризует неоднородность напряженного состояния, которое в зоне деформации определяется контактным трением. Напряжение  $\sigma_y$  неизменно. Из уравнения равновесия можно получить связь постоянной  $C_\sigma$  с силой  $P$ . Возвращаясь к выражениям (22), видно, что функция  $\theta$  зависит только от одной переменной  $y$  и при ее увеличении экспонента уменьшается. Это характеризует затухание воздействия со стороны штампа вглубь полупространства, как для нормального напряжения, так и касательного. Контактное нормальное напряжение изменяется по косинусоидальному закону. Следует отметить, что напряжения на контакте для (25) имеют максимальные значения.

Рассмотрим в (20) более сложные зависимости для аргумент функций:

$$A\Phi_2 = AA_6xy, \quad \theta_2 = m\frac{1}{2}AA_6(x^2 - y^2).$$

Принимая соотношения Коши-Римана в виде  $\theta_x = A\Phi_y$ ,  $\theta_y = -A\Phi_x$ , запишем выражение для напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2 \exp\left[\frac{1}{2} \cdot AA_6(x^2 - y^2)\right] C_\sigma \cos(AA_6xy), \\ \tau_{xy} &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot AA_6(x^2 - y^2)\right] C_\sigma \sin(AA_6xy). \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 1 начало координат помещено на контактную поверхность и касательные напряжения в этом случае равны нулю, что исключает их из рассмотрения.

Исследуется задача воздействия плоского штампа на упругое полупространство без учета контактного трения. Следует подчеркнуть, что с изменением координатных функций изменяются возможности удовлетворения граничных условий на контакте, т.е. изменяется задача. Как и в предыдущем случае, равенство нулю постоянной  $AA_6$  приводит к равномерному распределению напряжений в зоне упругой деформации. Однако значение  $AA_6$  уже определяется не контактным трением, а другими показателями. Видно, что экстремальные значения тригонометрических функций находятся не только на контакте, но и в глубине полупространства. В этом случае выражения (23) запишутся:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2 \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2by_0}(x^2 - y^2)\right] C_\sigma \cos\left(\frac{\pi}{2by_0}xy\right), \\ \tau_{xy} &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2by_0}(x^2 - y^2)\right] C_\sigma \sin\left(\frac{\pi}{2by_0}xy\right), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $y_0$  – положение точки в глубине полуплоскости в случае экстремального значения тригонометрической функции.

Из этого следует, что неравномерность распределения напряжений в зоне деформирования связана, прежде всего, с затухающим воздействием штампа на упругое полупространство. Если задать положение на контакте, т.е.  $y=0$ , получим также экстремальные значения тригонометрических функций. В этом случае (24) примут вид:

$$\sigma_y = 2 \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2by_0}(x^2)\right] C_\sigma, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (28)$$

Наименьшее напряжение на контакте получается при  $x=0$ . С увеличением  $y_0$  меньше становится показатель экспоненты, что свидетельствует о существенном влиянии этого параметра на неоднородность напряженного состояния.

В таблице 1 приведено распределение нормальных напряжений на контакте и в глубине полупространства. Для удобства отображения результата использованы относительные

величины  $x/2b$  и  $\sigma_y/\sigma_{y0}$ , где  $\sigma_{y0}$  – минимальное значение нормальных напряжений в зоне деформации.

Таблица. 1.

Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y/\sigma_{y0}$ , на контакте и в глубине полупространства при действии плоского штампа без учета трения

$x/2b \backslash y$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5
0	1,299	1,182	1,099	1,043	1,011	1,000	1,011	1,043	1,099	1,182	1,299
50	1,175	1,083	1,017	0,971	0,945	0,937	0,945	0,971	1,017	1,083	1,175
100	0,866	0,831	0,804	0,785	0,774	0,770	0,774	0,785	0,804	0,831	0,866
150	0,510	0,531	0,543	0,550	0,554	0,555	0,554	0,550	0,543	0,531	0,510
200	0,228	0,278	0,312	0,334	0,347	0,351	0,347	0,334	0,312	0,278	0,228
250	0,065	0,115	0,151	0,176	0,190	0,195	0,190	0,176	0,151	0,115	0,065
300	0,000	0,035	0,061	0,080	0,091	0,095	0,091	0,080	0,061	0,035	0,000
400	0,010	0,002	0,005	0,011	0,014	0,015	0,014	0,011	0,005	0,002	0,010

На контакте распределение напряжений определяется выражениями (25), касательные напряжения отсутствуют, что задано условием задачи. Зависимость нормального напряжения определяется изменением экспоненты. Эпюра имеет вогнутый характер. С увеличением координаты  $y$  напряжения уменьшаются и в пределе будут равны нулю, что соответствует затухающему воздействию штампа на упругое полупространство. В конечном счете, такое затухающее воздействие на больших расстояниях напоминает принцип Сен-Венана [18].

Представляет интерес сопоставить результат (24-25) с уже известными теоретическими и экспериментальными данными. Предложенный вариант качественно правильно отображает распределения напряжений, что подтверждается исследованиями многих авторов [5–7]. Действительно, получен следующий закон распределения напряжений под плоским жестким штампом без учета трения [19]:

$$q(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{b^2 - x^2}}.$$

Эпюра контактных напряжений представляет собой вогнутую кривую, с минимумом, как и в случае (25), в точке  $x=0$ . Из этого следует, что предложенные характеристики распределения напряжения под плоским гладким штампом соответствуют литературным данным, кроме точки  $x=b$ . В этом случае  $q(x)$  превращается в бесконечность. Однако есть работы [20], в которых показано, что в точке  $b$  напряжение остается ограниченным. В выполненных исследованиях таким ограничением является параметр  $y=0$ .

Используемый метод аргумент функций позволяет, получить аналитические зависимости распределения напряжений упругой среды в двух взаимоперпендикулярных направлениях. Это подтверждает неравномерность распределения контактных напряжений по длине сооружения (25) и его затухающее воздействие вглубь пространства (24), табл. 1. Максимальные напряжения возникают по краям на контакте. При перемещении вглубь, неравномерность снижается, как и снижается абсолютная величина относительных напряжений. Затем напряжения по длине выравниваются при перемещении вдоль вертикальной оси, с той же тенденцией абсолютного снижения по величине. Представляет интерес перераспределения нагрузки вдоль горизонтальной оси. Максимальные значения обозначаются уже в центре воздействия, с постепенным снижением к краям. Однако на этом участке преобладающим является снижающее воздействие, направленное

вглубь пространства. На отметке 400 его уже практически нет.

Следует подчеркнуть, что не смотря на резкое снижения воздействия на больших глубинах, происходит перераспределение напряжений по длине сооружения. Меняется его характер с акцентом в центре, с усилением неравномерности по взаимно перпендикулярному направлению. В некоторых случаях это важно для подземных выработок, находящихся на больших глубинах под массивными сооружениями. В данном случае возникает необходимость усиления не периферийных участков выработки, а центральных.

Таким образом, в результате исследования решена задача теории упругости с использованием обобщающих дифференциальных соотношений Коши-Римана и дифференциальных уравнений Лапласа. Для решения плоской задачи теории упругости использован метод аргумент функций и метод функций комплексной переменной. Получены аналитические зависимости распределения напряжений в глубоком полупространстве под действием массивных сооружений, отличающиеся крайней изменяющейся неравномерностью по длине и по высоте пространства.

#### Список литературы

1. Чигиринский В.В., Науменко Е.Г. Некоторые особенности решения плоской задачи механики сплошной среды. // ОМД: сб. научных трудов. – Краматорск: ДГМА, 2019.–№ 1 (48), 3-11.
2. Chigurinski, V. (1999). The study of stressed and deformed metal state under condition of no uniform plastic medium flow. *Metalurgija, Zagreb*, 38, 1, 31–37.
3. Chygyrins'kyu, V.V. (2004). Analysis of the state of stress of a medium under conditions of inhomogeneous plastic flow. *Metalurgija, Zagreb*, 43, 2, 87–93.
4. Лурье А. И. Теория упругости [Текст] / А. И. Лурье. - М.: Наука, 1979. – 939 с.: ил. – Литер. указ.: с. 909–929. Имен. указ.: с. 930–932. - Предм. указ.: с. 933–939.
5. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов.- 2-е изд., испр. и доп. - М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.: ил. - Библиогр.: с. 499–505.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости. / С. П. Тимошенко. - Л.: ОНТИ, 1934. – 451 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. – 709 с.
8. Георгиевский Д.В. Уравнения совместности в системах, основанных на обобщенных кинематических соотношениях Коши / Георгиевский Д.В. // Механика твердого тела. – 2014. - № 1. – с. 129–134.
9. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости / Пер. с англ. А. И. Смирнова; под редакцией Э. И. Григолоука. – М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 219 с.
10. Chygyrins'kyu, V.V. (2009). The influence of the temperature factor on deformability of the plastic medium. *Metalurgija, Zagreb*, 45, 2, 115–118.
11. P. Maciolka, J. Jedrzejewski, (2017). Evaluation of different approaches to 3D numerical model development of the contact zone between elementary asperities and flat surface. *Journal of Machine Engineering*, 17(4), 40–53.
12. P. Lopez-Crespo, D. Camas, F.V. Antunes, J.R. Yates, (2018). A study of the evolution of crack tip plasticity along a crack front. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 98, 59–66.
13. Jing Li, Zong-ping Zhang, Chun-wang Li, (2017). Elastic-plastic stress-strain calculation at notch root under monotonic, uniaxial and multiaxial loadings. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 92, 33–46.
14. J.A.F.O. Correia, P.J. Huffman, A.M.P. De Jesus, S. Cicero, A. Fernandez-Canteli, F. Berto, G. Glinka, (2017). Unified two-stage fatigue methodology based on structural details. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 92, 252–265.
15. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А.А. // Учеб. Пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
16. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975. – 400 с.
17. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности: учебник для инж. строительных вузов / С. Н. Никифоров // М.: ГИЛСИ, 1955. – 284 с.
18. Saint – Venant. (1855). *Memoires des savants strangers*.
19. Седов Л.И. Механика сплошной среды [Текст]: учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Механика» : в 2 т./ Л.И. Седов; Моск. гос. ун-т им.М.В. Ломоносова. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2004.- 560 с.
20. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. - М.: Л., Гостехиздат. - 1949. – 270 с.