

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В.М. Горев

## ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Частина II

Навчальний посібник

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2021

УДК 537.3

Г 68

*Затверджено вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» як навчальний посібник для бакалаврів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка (протокол № 8 від 20.05.2021).*

Рецензенти:

О.Й. Соколовський, д-р фіз.-мат. наук, проф. каф. теоретичної фізики Дніпровського національного університету ім. Олеса Гончара;

М.О. Алексеев, д-р техн. наук, декан факультету інформаційних технологій, проф. каф. програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

**Горєв В.М.**

Г 68 Теорія електричних кіл та сигналів : навч. посіб. : у 2 ч. / В.М. Горєв ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2021. – Ч. 2. – 107 с.

ISBN 978–966–350–759–0

Викладено основні відомості про проходження сигналів через RC-ланцюжки, про частотні електронні фільтри, пасивні формуючі кола та розвинення сигналів у тригонометричний ряд Фур'є. Розглянуто реалізації найпростіших пасивних частотних фільтрів, на прикладі фільтрів нижніх частот досліджено реалізації фільтра Баттерворта, фільтрів Чебишова першого та другого роду та фільтра Кауера (еліптичного фільтра). Описано коло, що перетворює синусоїду на прямокутну послідовність імпульсів та проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC-ланцюжок. Розглянуто розвинення меандра та симетричного пилкоподібного сигналу в тригонометричний ряд Фур'є та ідею перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтра нижніх частот.

Для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка та інших спеціальностей, що вивчають теорію електричних кіл та сигналів.

УДК 537.3

© В.М. Горєв, 2021

ISBN 978–966–350–759–0

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2021

## Зміст

Передмова .....	5
6. Інтегровувальний та диференціювальний RC–ланцюжки.....	10
6.1. Анотація .....	10
6.2. Точні формули для напруги на резисторі й конденсаторі .....	10
6.3. Асимптотична поведінка напруг на резисторі й конденсаторі при великих і малих часах .....	13
6.4. Резюме .....	16
6.5. Питання для самоконтролю .....	17
7. Деякі частотні пасивні фільтри.....	19
7.1. Анотація .....	19
7.2. Базові визначення.....	20
7.3. Інтегровувальний RC–ланцюжок як фільтр нижніх частот .....	21
7.4. АЧХ у децибелах.....	25
7.5. Диференціювальний RC–ланцюжок як фільтр верхніх частот .....	27
7.6. Послідовний RLC–контур як смуговий фільтр.....	31
7.7. Міст Віна як смуговий фільтр.....	35
7.8. Міст Віна–Робінсона як режекторний фільтр .....	41
7.9. Резюме .....	46
7.10. Питання для самоконтролю .....	49
8. Фільтри Баттерворта, Чебишова та Кауера .....	51
8.1. Анотація .....	51
8.2. АЧХ фільтрів Баттерворта, Чебишова та Кауера .....	52
8.3. Короткі відомості про операційний підсилювач .....	55
8.4. Реалізація ФНЧ Баттерворта другого порядку.....	56
8.5. Реалізація ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку .....	59
8.6. Реалізація ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку.....	61
8.7. Реалізація фільтру Кауера другого порядку.....	65
8.8. Резюме .....	66
8.9. Питання для самоконтролю .....	68
9. Пасивні формувальні кола.....	70
9.1. Анотація .....	70

9.2. Перетворення синусоїди на імпульсну послідовність .....	70
9.3. Проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC–ланцюг ...	76
9.4. Резюме .....	82
9.5. Питання для самоконтролю .....	83
10. Розвинення сигналів у ряд Фур'є .....	85
10.1. Анотація .....	85
10.2. Ряд Фур'є. Загальний випадок та тригонометричний ряд Фур'є.....	85
10.3. Потужність, що виділяється на різних гармоніках.....	88
10.4. Меандр та його розвинення в ряд Фур'є .....	91
10.5. Симетричний пилкоподібний сигнал та його розвинення в ряд Фур'є... 94	
10.5. Резюме .....	98
10.6. Питання для самоконтролю .....	99
Підсумки.....	101
Список рекомендованої літератури.....	106

## Передмова

Програмні результати навчання освітньо-професійної програми кваліфікаційного рівня бакалавра «Телекомунікації та радіотехніка» спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, які регламентовано викладати та опановувати в навчальній дисципліні «Теорія електричних кіл та сигналів»:

Шифр	Зміст програмних результатів навчання
ПРН5	Уміти розраховувати елементи телекомунікаційних систем, інфокомунікаційних та телекомунікаційних мереж, радіотехнічних систем та систем телевізійного й радіомовлення, згідно технічного завдання у відповідності до міжнародних стандартів, з використанням засобів автоматизації проектування, в т.ч. створених самостійно
ПРН6	Уміти проектувати, в т.ч. схемотехнічно нові (модернізувати існуючі) елементи (модулі, блоки, вузли) телекомунікаційних та радіотехнічних систем, систем телевізійного й радіомовлення тощо

Мета навчальної дисципліни «Теорія електричних кіл та сигналів» – формування результатів навчання щодо вміння теоретично описувати та експериментально досліджувати процеси у резистивних колах постійного струму та RLC–колах змінного синусоїдального струму.

За Національною рамкою кваліфікацій ключовими характерними результатами навчання для кваліфікаційного рівня бакалавра є:

- знання – концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання;

- уміння/навички – поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв’язання складних

спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання.

Дисциплінарні результати навчання, сформульовані шляхом декомпозиції програмних:

<b>Шифр</b>	<b>Зміст дисциплінарних результатів навчання</b> (знання, уміння/навички)
ДРН5.1	Знати визначення понять основних параметрів електричних кіл
ДРН5.2	Уміти формулювати та виводити основні закони електричних кіл
ДРН5.3	Знати схеми заміщення реальних джерел ЕРС та напруги
ДРН5.4	Знати основні методи опису кіл постійного і змінного струму
ДРН5.5	Уміти описувати резистивні кола постійного струму на основі законів Кірхгофа та потенціальної діаграми
ДРН5.6	Уміти описувати поведінку конденсатора та котушки в колах з постійними ЕРС на основі диференціальних рівнянь
ДРН5.7	Уміти виводити взаємозв'язки між напругою та струмом на резисторі, котушці та конденсаторі у колах змінного струму
ДРН5.8	Уміти описувати RLC–кола змінного струму, зокрема, послідовний та паралельний RLC–контур на основі векторної діаграми, диференціальних рівнянь та символічного методу
ДРН5.9	Знати визначення активної, реактивної та повної потужності змінного струму, а також їхній фізичний зміст
ДРН5.10	Уміти в ustalеному режимі кіл змінного струму визначати явну залежність фізичної величини від часу за її комплексною амплітудою та навпаки.
ДРН5.11	Уміти виводити точні та асимптотичні часові залежності напруг на елементах RC–ланцюжка при підключенні до нього заданої зовнішньої напруги.

<b>Шифр</b>	<b>Зміст дисциплінарних результатів навчання</b> (знання, уміння/навички)
ДРН6.1	Знати прилади, якими вимірюються параметри електричних кіл, та їх характеристики.
ДРН6.2	Знати визначення частотного фільтру та основні типи частотних фільтрів. Знати визначення основних параметрів та характеристик частотних фільтрів
ДРН6.3	Знати схеми реалізації найпростіших частотних фільтрів різних типів
ДРН6.4	Уміти за заданою схемою реалізації частотного фільтру виводити його основні параметри та характеристики.
ДРН6.5	Знати схему реалізації перетворення синусоїдального сигналу на імпульсну послідовність
ДРН6.6	Уміти виводити основні параметри імпульсних послідовностей на виході пасивних формувальних схем
ДРН6.7	Уміти описувати проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC–ланцюжок в різних випадках
ДРН6.8	Знати принцип перетворення періодичних сигналів на синусоїду за допомогою фільтру нижніх частот
ДРН6.9	Уміти розвивати періодичні сигнали в тригонометричний ряд Фур'є та обчислювати потужності, що виділяються на кожній гармоніці сигналу

Навчальний посібник призначено для набуття перелічених знань та умінь/навичок здобувачами кваліфікаційного рівня бакалавра спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка.

Друга частина посібника складається з 5 розділів, кожний з яких містить анотацію, основний текст і резюме.

У розділі 6 описано проходження довільних електричних сигналів через RC–ланцюжок, отримано точні аналітичні формули залежності напруг на резисторі та на конденсаторі від часу та відповідні асимптотичні вирази при малих та великих часах. Наведено умови застосовності цих асимптотичних формул.

У розділі 7 наведено типи електронних частотних фільтрів та найпростіші реалізації кожного з цих типів фільтрів. Виведено амплітудно–частотні та фазо–частотні характеристики відповідних фільтрів. Відповідні графіки наведено як у лінійному, так і в логарифмічному масштабі. Детально роз’яснено таку одиницю вимірювання амплітудно–частотної характеристики, як децибел.

У розділі 8 наведено відомості про такі поширені фільтри нижніх частот, як Баттерворта, Чебишова першого та другого роду та Кауера. Наведено амплітудно–частотні характеристики цих фільтрів та зроблено порівняння цих фільтрів між собою. Наведено реалізації кожного з цих фільтрів другого порядку з детальним виведенням амплітудно–частотні характеристик розглянутих схем та виведенням співвідношень між параметрами схеми, при яких розглянуті схеми є відповідними фільтрами.

У розділі 9 розглянуто пасивні формувальні кола, що перетворюють синусоїду на імпульсну послідовність, та розглянуто, при яких параметрах кола вихідна імпульсна послідовність є дуже близькою до прямокутної. У дещо спрощеній моделі розглянуто задачу проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC–ланцюг у пасивних формувальних колах, що містять стабілітрон.

У розділі 10 наведено загальні математичні властивості тригонометричного ряду Фур’є та розглянуте розвинення деяких періодичних сигналів у такий ряд. Зокрема, виведено результат для потужності сигналу, що виділяється на кожній гармоніці, та на прикладі симетричного пилкоподібного сигналу та меандру описано ідею перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтрів нижніх частот.



В анотаціях на початку розділів сформульовано навчальні цілі у вигляді вимог до знань та умінь/навичок здобувача після вивчення розділу, що дозволяє однозначно оцінювати ступінь їхнього досягнення.

Основний текст являє собою блоки модулів самостійного значення, що підлягають контролю рівня сформованості результатів навчання.

У резюме в кінці кожного розділу віддзеркалено його ключові положення, що сполучені з реалізацією навчальних цілей.

## 6. Інтегрувальний та диференціальний RC–ланцюжки

### 6.1. Анотація

Описано проходження довільних електричних сигналів через RC–ланцюжок, отримано точні аналітичні формули залежності напруг на резисторі та на конденсаторі від часу та відповідні асимптотичні вирази при малих та великих часах. Наведено умови застосовності цих асимптотичних формул.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Уміти виводити точні аналітичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку.
- Уміти виводити асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку при малих часах. Знати, в якому випадку RC–ланцюжок називають інтегрувальним, та пояснити чому.
- Уміти виводити асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку при великих часах. Знати, в якому випадку RC–ланцюжок називають диференціальним, та пояснити чому. Знати межі застосовності отриманих асимптотичних формул.

### 6.2. Точні формули для напруги на резисторі й конденсаторі

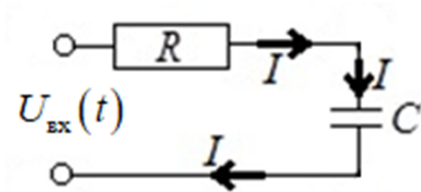


Рисунок 6.1

Розглянемо схему, наведену на рис. 6.1. Нехай маємо RC–ланцюжок (послідовно з'єднані резистор опором  $R$  та конденсатор ємністю  $C$ ), на вхід якого подано напругу  $U_{вх}(t)$ , що є заданою функцією часу. Поставимо задачу знайти

залежності від часу напруги на резисторі та на конденсаторі.

Оскільки з'єднання резистора й конденсатора є послідовним, то загальна миттєва напруга на з'єднанні дорівнює сумі миттєвих значень напруг:

$$U_R(t) + U_C(t) = U_{\text{вх}}(t). \quad (6.1)$$

Оскільки через послідовність з'єднання струм через резистор і конденсатор є однаковим, то струм через з'єднання дорівнюватиме похідній від заряду конденсатора за часом:

$$U_R(t) = R \cdot I(t), \quad U_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad I(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (6.2)$$

та з урахуванням (6.1) маємо

$$R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = U_{\text{вх}}(t). \quad (6.3)$$

Відповідно, для того щоб отримати часову залежність  $q(t)$ , треба розв'язати диференціальне рівняння (6.3). Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0, \quad (6.4)$$

а потім застосуємо метод варіації сталої. Загальний розв'язок рівняння (6.4) є очевидним:

$$q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad A = \text{const}. \quad (6.5)$$

Тож шукаємо розв'язок рівняння (6.3) у вигляді

$$q(t) = A(t) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (6.6)$$

що після підстановки у (6.3) та відповідних перетворень дає

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{R} e^{\frac{t}{RC}} U_{\text{вх}}(t), \quad (6.7)$$

Перепишемо (6.7) через іншу змінну:

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R} e^{\frac{\tau}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau), \quad (6.8)$$

та «навісимо» визначені інтеграли від 0 до  $t$  в обидвох частинах рівності (6.8):

$$\int_0^t \frac{dA(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau. \quad (6.9)$$

Оскільки з урахуванням (6.6)

$$\int_0^t \frac{dA(\tau)}{d\tau} d\tau = A(t) - A(0), \quad q(0) = A(0) = q_0, \quad (6.10)$$

то (6.9) можна переписати так:

$$A(t) = \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau + q_0, \quad (6.11)$$

де  $q_0$  – початкове значення заряду. Відповідно, згідно з (6.6), (6.2) та (6.11), отримаємо точну залежність напруги на конденсаторі від часу:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (6.12)$$

Очевидно, що

$$U_R(t) = U_{\text{вх}}(t) - U_C(t) = U_{\text{вх}}(t) - \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau - \frac{q_0}{C} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (6.13)$$

Перетворимо інтеграл у (6.13) за допомогою інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau &= RC \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) \frac{1}{RC} e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau = RC \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) de^{\frac{\tau}{RC}} = \\ &= RC \left( U_{\text{вх}}(\tau) e^{\frac{\tau}{RC}} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} dU_{\text{вх}}(\tau) \right) = \\ &= RC \left( U_{\text{вх}}(t) e^{\frac{t}{RC}} - U_{\text{вх}}(0) - \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} \frac{dU_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} d\tau \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Підставивши (6.14) у (6.13), матимемо

$$U_R(t) = \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{RC}} \frac{dU_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} d\tau + \left( U_{\text{вх}}(0) - \frac{q_0}{C} \right) e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (6.15)$$

Вирази (6.12) та (6.15) є точними аналітичними залежностями напруг на конденсаторі та на резисторі від часу.

### 6.3. Асимптотична поведінка напруг на резисторі й конденсаторі при великих і малих часах.

Розглянемо спочатку поведінку напруг при малих часах, тобто при часах, що є значно меншими за сталу часу  $RC$  –ланцюжка:  $t \ll RC$ . Тоді

$$e^{\frac{-t}{RC}} = 1 + O\left(\frac{t}{RC}\right) \approx 1, \quad e^{\frac{\tau-t}{RC}} = 1 + O\left(\frac{\tau-t}{RC}\right) \approx 1, \quad \tau \in (0, t), \quad (6.16)$$

та на основі (6.12) і (6.15) матимемо

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C}, \quad (6.17)$$

$$U_R(t) \approx \int_0^t \frac{dU_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} d\tau + \left( U_{\text{вх}}(0) - \frac{q_0}{C} \right) = U_{\text{вх}}(t) - \frac{q_0}{C}.$$

У випадку, коли початковий заряд конденсатора дорівнює нулю, матимемо, що при  $t \ll RC$

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) d\tau, \quad U_R(t) \approx U_{\text{вх}}(t), \quad (6.18)$$

тож при малих часах напруга на резисторі приблизно дорівнюватиме вхідній напрузі, а напруга на конденсаторі буде пропорційною до інтегралу від вхідної напруги за часом. Через цей факт  $RC$ –ланцюжок, вхідна напруга на якому дорівнює загальній напрузі, а вихідна – напрузі на конденсаторі, називають **інтегровальним  $RC$ –ланцюжком**.

Тепер розглянемо поведінку напруги на конденсаторі при великих часах  $t \gg RC$ . Перетворимо інтеграл у правій частині виразу (6.12):

$$f(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau = \left. \begin{cases} \beta = t - \tau, d\tau = -d\beta, \\ \tau = 0 \rightarrow \beta = t, \\ \tau = t \rightarrow \beta = 0 \end{cases} \right\} = \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{\beta}{RC}} U_{\text{вх}}(t - \beta) d\beta = \left. \begin{cases} \xi = \frac{\beta}{t}, \beta = 0 \rightarrow \xi = 0 \\ d\beta = t d\xi, \beta = t \rightarrow \xi = 1 \end{cases} \right\} =$$

$$= \frac{t}{RC} \int_0^1 e^{-\frac{\xi t}{RC}} U_{\text{вх}}(t - \xi t) d\xi.$$

цими перетвореннями ми перейшли до інтеграла від безрозмірної змінної. Введемо безрозмірний великий параметр

$$\lambda = \frac{t}{RC} \gg 1. \quad (6.20)$$

Тоді перепишемо (6.19) як

$$f(t) = \lambda \int_0^1 e^{-\lambda \xi} U_{\text{вх}}(t - \xi t) d\xi. \quad (6.21)$$

Оскільки підінтегральна функція в (6.21) швидко спадає через наявність падаючої експоненти  $e^{-\lambda \xi}$ ,  $\lambda \gg 1$ , то основний внесок до інтеграла буде при близьких до нуля значеннях  $\xi$ . Тож розвинемо  $U_{\text{вх}}(t - \xi t)$  у ряд Тейлора поблизу точки  $\xi = 0$ :

$$U_{\text{вх}}(t - \xi t) = g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \xi^n. \quad (6.22)$$

Підставимо (6.22) в (6.21):

$$f(t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 e^{-\lambda \xi} \xi^n d\xi. \quad (6.23)$$

За відомим з довідника Градштейна та Рижика інтегралом

$$\int_0^u x^n e^{-\mu x} dx = \frac{n!}{\mu^{n+1}} - e^{-u\mu} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{u^k}{\mu^{n-k+1}}. \quad (6.24)$$

отримаємо

$$f(t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0) \left( \frac{1}{\lambda^{n+1}} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \lambda^{n-k+1}} \right). \quad (6.25)$$

При  $\lambda \gg 1$  експоненційно малий внесок  $e^{-\lambda}$  є нехтовно малим порівняно зі степеневими внесками, тож

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0) \frac{1}{\lambda^n} + O(e^{-\lambda}) = g(0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = U_{\text{вх}}(t) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (6.26)$$

та згідно з (6.26), (6.20), (6.19) та (6.12) матимемо, що при великих часах  $t \gg RC$

$$U_C(t) = f(t) + \frac{q_0}{C} e^{-\lambda} \approx U_{\text{вх}}(t). \quad (6.27)$$

Відповідно, аналогічними міркуваннями можна показати, що при великих часах  $t \gg RC$

$$U_R(t) \approx RC \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}. \quad (6.28)$$

Тож при великих часах напруга на конденсаторі приблизно дорівнює вхідній напрузі, а напруга на резисторі пропорційна до похідної від вхідної напруги за часом. Через цей факт  $RC$ -ланцюжок, вхідна напруга на якому дорівнює загальній напрузі, а вихідна – напрузі на резисторі, називають **диференціувальним  $RC$ -ланцюжком**.

Слід зробити дуже важливу ремарку, що формули (6.27) та (6.28) є застосовними лише у випадку, коли вхідна напруга на ланцюжку повільно змінюється у часі.

Проілюструємо це на прикладі формули (6.27). Нехтуючи експоненційно малими внесками, матимемо на основі (6.26) та (6.27), що

$$U_C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0) \frac{1}{\lambda^n}. \quad (6.29)$$

Обчислимо похідні  $g^{(n)}(\xi)$ . Згідно з (6.22) маємо

$$\begin{aligned} g(\xi) &= U_{\text{вх}}(t - \xi t), \quad \frac{dg}{d\xi} = \frac{dU_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)} \frac{d(t - \xi t)}{d\xi} = -t \frac{dU_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)}, \\ \frac{d^2g}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left( -t \frac{dU_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)} \right) = -t \frac{d^2U_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)^2} \frac{d(t - \xi t)}{d\xi} = \\ &= t^2 \frac{d^2U_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)^2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

і так далі, методом математичної індукції можна довести, що

$$\frac{d^n g}{d\xi^n} = (-t)^n \frac{d^n U_{\text{вх}}(t - \xi t)}{d(t - \xi t)^n}. \quad (6.31)$$

Відповідно,

$$\left. \frac{d^n g}{d\xi^n} \right|_{\xi=0} = (-t)^n \frac{d^n U_{\text{вх}}(t)}{dt^n}, \quad (6.32)$$

та згідно з (6.29) матимемо

$$U_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \frac{d^n U_{\text{вх}}(t)}{dt^n} \frac{1}{\lambda^n}, \quad (6.33)$$

тож умовою застосовності формули (6.27) є, реально кажучи, не просто той факт, що параметр  $\lambda \gg 1$ , а той факт, що величини  $\frac{d^n U_{\text{вх}}(t)}{dt^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n$  швидко спадають зі збільшенням  $n$ . Для прикладу розглянемо синусоїдальний вхідний сигнал.

$$U_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (6.34)$$

Тоді

$$\frac{d^n U_{\text{вх}}(t)}{dt^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n = A_{\text{вх}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi n}{2}\right) (\omega RC)^n, \quad (6.35)$$

та умовою застосовності формул (6.27) (і, відповідно, (6.28)) буде

$$\omega RC \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \frac{1}{RC}. \quad (6.36)$$

Тож, наприклад, на великих часах формули (6.27) і (6.28) у випадку вхідного синусоїдального сигналу є застосовними лише за умови, що кутова частота вхідного сигналу є набагато меншою за обернене значення сталої часу ланцюжка.

#### 6.4. Резюме

Точними формулами напруг на елементах RC-ланцюжка при прикладенні до нього загальної напруги  $U_{\text{вх}}(t)$  є такими:



$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{RC}} U_{\text{вх}}(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C} e^{\frac{-t}{RC}}, \quad (6.37)$$

$$U_R(t) = \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{RC}} \frac{dU_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} d\tau + \left( U_{\text{вх}}(0) - \frac{q_0}{C} \right) e^{\frac{-t}{RC}},$$

де  $q_0$  – початкове значення заряду конденсатора.

Наближеними формулами при малих часах  $t \ll RC$  є

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) d\tau, \quad U_R(t) \approx U_{\text{вх}}(t), \quad (6.38)$$

$RC$ –ланцюжок, вхідна напруга на якому дорівнює загальній напрузі, а вихідна – напрузі на конденсаторі, називають інтегрувальним  $RC$ –ланцюжком.

Наближеними формулами при великих часах  $t \gg RC$  є

$$U_R(t) \approx RC \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}, \quad U_C(t) \approx U_{\text{вх}}(t), \quad (6.39)$$

вони є застосовними лише для вхідних сигналів, що повільно змінюються у часі. Зокрема, у випадку, коли вхідний сигнал є синусоїдою, умовою їх застосовності буде

$$\omega \ll \frac{1}{RC}, \quad (6.40)$$

де  $\omega$  – кутова частота вхідної синусоїди.  $RC$ –ланцюжок, вхідна напруга на якому дорівнює загальній напрузі, а вихідна – напрузі на резисторі, називають диференціувальним  $RC$ –ланцюжком.

### 6.5. Питання для самоконтролю

1. Вивести точні аналітичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на  $RC$ –ланцюжку.

2. Вивести асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на  $RC$ –

ланцюжку при малих часах. Вказати, в якому випадку RC–ланцюжок називають інтегровальним, та пояснити чому.

3. Вивести асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку при великих часах. Вказати, в якому випадку RC–ланцюжок називають диференціальним, та пояснити чому. Вказати межі застосовності отриманих асимптотичних формул.

## 7. Деякі частотні пасивні фільтри

### 7.1. Анотація

Наведено типи електронних частотних фільтрів та найпростіші реалізації кожного з цих типів фільтрів. Виведено амплітудно–частотні та фазо–частотні характеристики відповідних фільтрів. Відповідні графіки наведено як у лінійному, так і в логарифмічному масштабі. Детально роз'яснено таку одиницю вимірювання амплітудно–частотної характеристики, як децибел.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати визначення частотного електронного фільтра. Знати визначення амплітудно–частотної та фазо–частотної характеристики фільтра. Знати визначення кількості декад між двома частотами. Знати визначення амплітудно–частотної характеристики фільтра в децибелах.
- Знати амплітудно–частотні характеристики ідеальних фільтрів: нижніх частот, верхніх частот, смугового та режекторного.
- Знати, який RC–ланцюжок є фільтром нижніх, а який – верхніх частот: інтегрувальний чи диференціювальний, та вміти аргументувати, чому. Уміти виводити амплітудно–частотні та фазо-частотні характеристики інтегрувального та диференціювального RC–ланцюжка. Знати частоти зрізу відповідних фільтрів. Уміти виводити амплітудно–частотні характеристики таких ланцюжків в децибелах.
- Уміти виводити амплітудно–частотну та фазо-частотну характеристики послідовного RLC–контурі як смугового фільтра, моста Віна як смугового фільтра та моста Віна–Робінсона як режекторного фільтра. Знати, яким безрозмірним параметром задається вигляд амплітудно–частотної характеристики послідовного RLC–контурі. Уміти виводити частоти зрізу таких фільтрів, та амплітудно–частотні характеристики таких фільтрів в децибелах.

## 7.2. Базові визначення

**Частотний електронний фільтр** – електричний пристрій, в якому зі спектру поданих на його вхід електричних коливань пропускаються на вихід складові, розташовані в заданій смузі частот, і не пропускаються на вихід усі інші складові.

**Амплітудно-частотна характеристика фільтра (АЧХ)** – залежність відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного сигналу від частоти.

**Фазо-частотна характеристика фільтра (ФЧХ)** – залежність різниці фаз вихідного та вхідного сигналів від частоти.

Частотні електронні фільтри, поділяють на такі типи:

1. **Фільтр нижніх частот (ФНЧ)** – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали частот, що не перевищують певної заданої частоти (**частоти зрізу**), і не пропускати сигнали інших частот.
2. **Фільтр верхніх частот (ФВЧ)** – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали частот, що є не меншими за певну задану частоту (**частоту зрізу**), і не пропускати сигнали інших частот.
3. **Смуговий фільтр** – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали в певному визначеному діапазоні частот і не пропускає сингали інших частот.
4. **Режекторний фільтр** – фільтр, що в ідеалі не пропускає сингали в певному визначеному діапазоні частот і пропускає сингали інших частот.

Схематичний вигляд АЧХ цих фільтрів в ідеальному випадку наведено в Таблиці 7.1, тут використані такі позначення:  $K(\omega)$  – АЧХ цих фільтрів,  $\omega$  – кутова частота сигналу,  $\omega_s$ ,  $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  – відповідні кутові частоти зрізу.

Слід зауважити, що, на жаль, на практиці неможливо реалізувати ідеальний електронний фільтр, АЧХ якого в точності б співпала з наведеною у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – АЧХ різних типів фільтрів

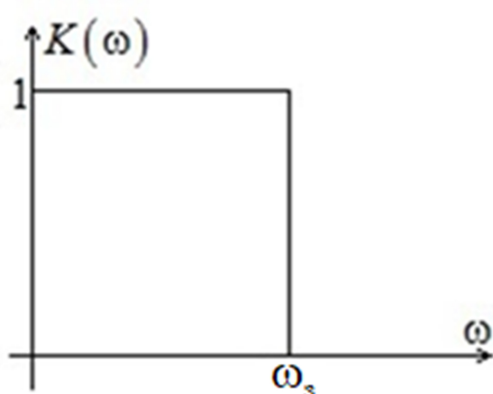


Рисунок 7.1 – АЧХ ідеального фільтра нижніх частот

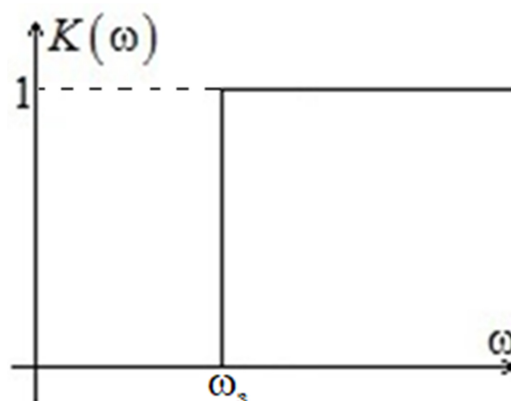


Рисунок 7.2 – АЧХ ідеального фільтра верхніх частот

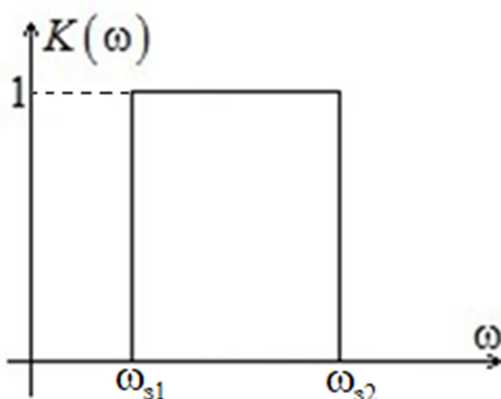


Рисунок 7.3 – АЧХ ідеального смугового фільтра

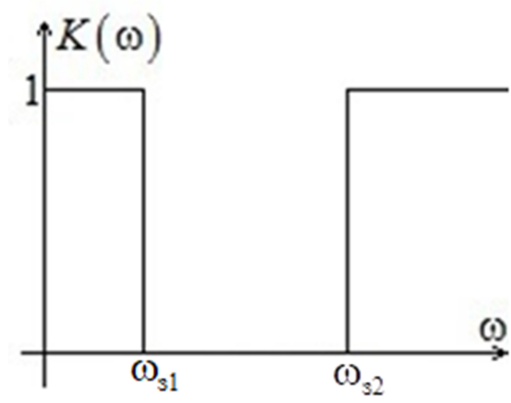


Рисунок 7.4 – АЧХ ідеального режекторного фільтра

Але на практиці можна реалізувати схеми, які мають в певному сенсі дещо схожу поведінку та які можуть вважатись частотними фільтрами.

### 7.3. Інтегрувальний RC-ланцюжок як фільтр нижніх частот

Розглянемо проходження синусоїдального сигналу

$$U_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (7.1)$$

через RC-ланцюжок. Напругу на конденсаторі обчислимо за точною формулою (6.12):

$$U_c(t) = \frac{A_{\text{вх}}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} \cos(\omega \tau) d\tau + \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (7.2)$$

На основі відомого з довідника Градштейна та Рижика інтеграла

$$\int dt e^{at} \cos(\omega t) = e^{at} \frac{a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} \quad (7.3)$$

після певних перетворень отримаємо, що

$$U_c(t) = A_{\text{вх}} \left( \frac{\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t)}{1 + (\omega RC)^2} \right) + \left( \frac{q_0}{C} - \frac{A_{\text{вх}}}{1 + (\omega RC)^2} \right) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (7.4)$$

Доданок, що містить  $e^{-\frac{t}{RC}}$ , експоненційно згасає, тож в усталеному режимі роботи кола матимемо

$$\begin{aligned} U_c(t) &= A_{\text{вх}} \frac{\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t)}{1 + (\omega RC)^2} = \\ &= \frac{A_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t) + \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Введемо позначення

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} > 0, \quad \beta = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} > 0. \quad (7.6)$$

Оскільки

$$\alpha \in (0,1), \quad \beta \in (0,1), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (7.7)$$

то існує такий кут  $\varphi$ , що

$$\alpha = \cos \varphi > 0, \quad \beta = \sin \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{arctg}(\omega RC) \quad (7.8)$$

та, відповідно, вираз (7.5) переписеться як

$$U_c(t) = \frac{A_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (7.9)$$

Відповідно, АЧХ інтегровального  $RC$ -ланцюжка матиме вигляд

$$K(\omega) = \frac{A_{\text{вх}}}{A_{\text{вх}} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (7.10)$$

а ФЧХ такого ланцюжка

$$\Delta\varphi(\omega) = \text{Фаза}(U_C) - \text{Фаза}(U_{\text{вх}}) = -\varphi = -\text{arctg}(\omega RC). \quad (7.11)$$

Оскільки

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = 0, \quad (7.12)$$

та  $K(\omega)$  є монотонно спадаючою функцією, то можна сказати, що фактично **інтегрувальний RC–ланцюжок є фільтром нижніх частот**. За частоту зрізу домовились обирати таке значення, при якому амплітуда вихідного сигналу є в  $\sqrt{2}$  разів меншою за амплітуду вхідного сигналу:

$$K(\omega_3) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_3 RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.13)$$

де введене позначення  $\omega_3$  для кутової частоти зрізу. Відповідно, розв'язком рівняння (7.13) є

$$\omega_3 = \frac{1}{RC}, \quad (7.14)$$

та АЧХ і ФЧХ інтегрувального RC–ланцюжка можна представити у вигляді

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_3)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right). \quad (7.15)$$

Тобто, фактично, вигляд АЧХ і ФЧХ інтегрувального RC–ланцюжка задається одним безрозмірним параметром – відношенням  $\frac{\omega}{\omega_3}$ .

Очевидно, що ФЧХ інтегрувального RC–ланцюжка має такі властивості:

$$\Delta\varphi(0) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi(\omega_3) = -\frac{\pi}{4}. \quad (7.16)$$

Графіки АЧХ та ФЧХ інтегрувального RC–ланцюжка наведено на рис. 7.5 та рис. 7.6 відповідно.

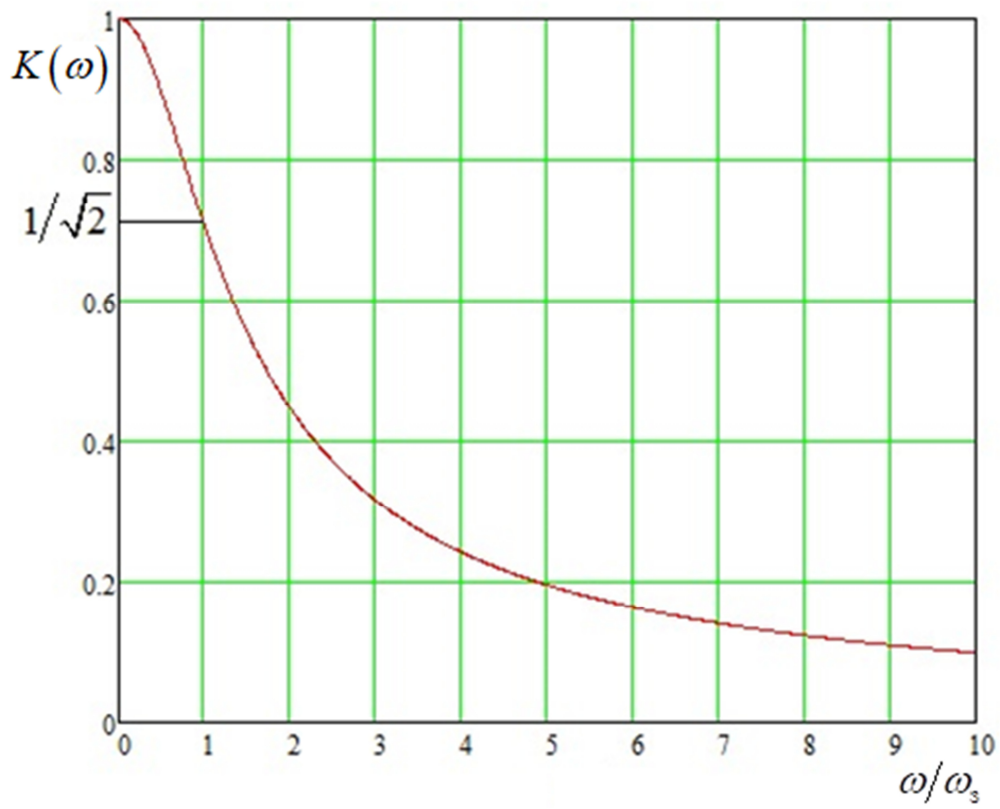


Рисунок 7.5 – АЧХ інтегрувального  $RC$ -ланцюжка

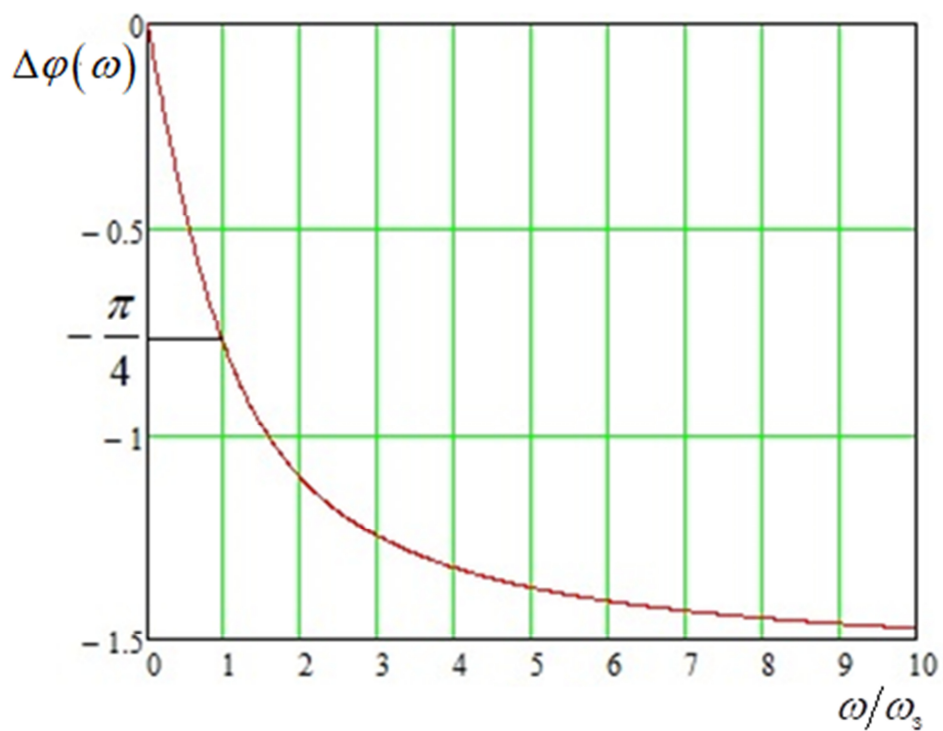


Рисунок 7.6 – ФЧХ інтегрувального  $RC$ -ланцюжка



#### 7.4. АЧХ у децибелах

За стандартним визначенням АЧХ є залежністю безрозмірного відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів від частоти. Крім цього стандартного визначення, АЧХ визначають також у **децибелах** таким чином:

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20 \lg K(\omega), \quad (7.17)$$

де  $K_{\text{db}}(\omega)$  є амплітудно-частотною характеристикою в децибелах.

В якості прикладу, виразимо  $K_{\text{db}}(\omega)$  для інтегрувального  $RC$ -ланцюжка.

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20 \lg \left[ \left( 1 + (\omega/\omega_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = -10 \lg \left( 1 + (\omega/\omega_3)^2 \right). \quad (7.18)$$

Відповідно, можемо записати, що

$$K_{\text{db}}(\omega) = f(\omega/\omega_3), \quad f(x) = -10 \lg(1 + x^2), \quad (7.19)$$

тут важливо підкреслити, що параметр  $x$  безрозмірний. Розглянемо похідну  $df(x)/d \lg x$ :

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{d \lg x} &= \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{d \lg x} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{d \lg x / dx} = \\ &= -10 \frac{2x}{(1+x^2) \ln 10} \cdot x \ln 10 = -20 \frac{x^2}{1+x^2}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

відповідно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{df(x)}{d \lg x} = -20, \quad (7.21)$$

тож згідно з (7.19)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dK_{\text{db}}(\omega)}{d \lg(\omega/\omega_3)} = -20. \quad (7.22)$$

За визначенням, **кількість декад** між частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  дорівнює  $\lg(\omega_2/\omega_1)$ . Відповідно, між частотами  $\omega$  та  $\omega_3$  кількість декад дорівнює  $\lg(\omega/\omega_3)$ , тож на великих частотах для інтегрувального  $RC$ -ланцюжка нахил залежності  $K_{\text{db}}$  від  $\omega/\omega_3$  в логарифмічному масштабі дорівнює  $-20$ дБ/декада.

Графіки АЧХ у децибелах та ФЧХ у логарифмічному масштабі для інтегрувального RC-ланцюжка наведені на рис. 7.7. та 7.8.

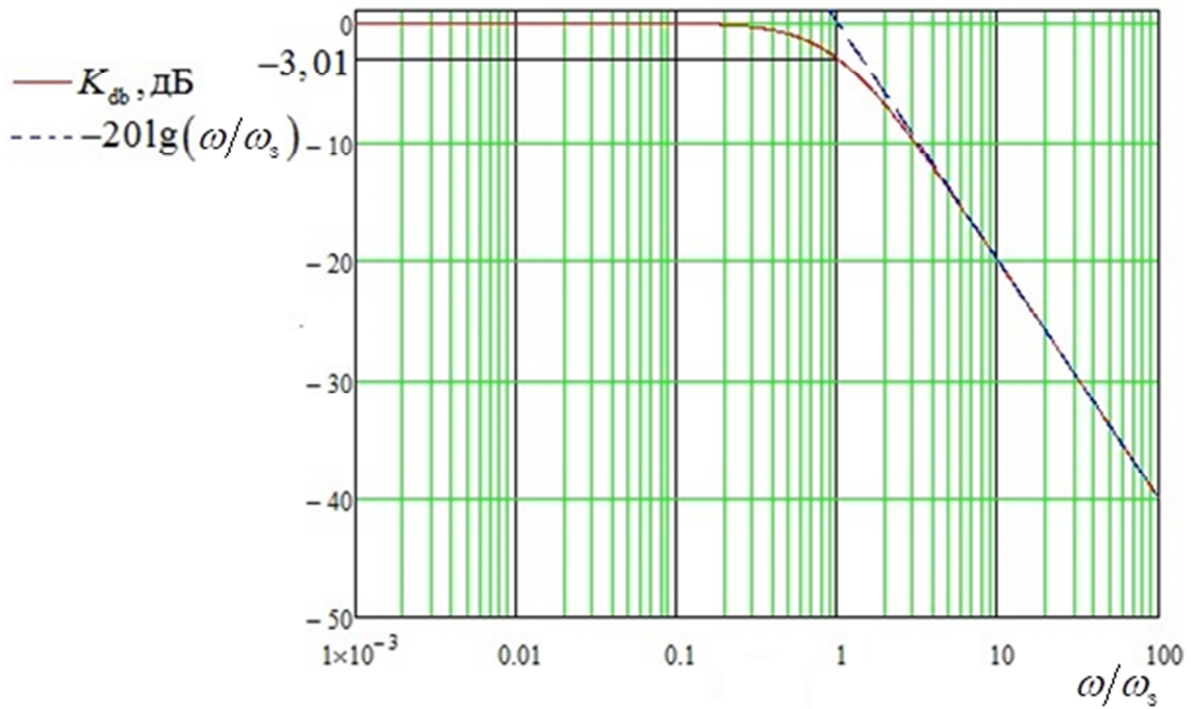


Рисунок 7.7 – АЧХ інтегрувального RC-ланцюжка в децибелах у логарифмічному масштабі

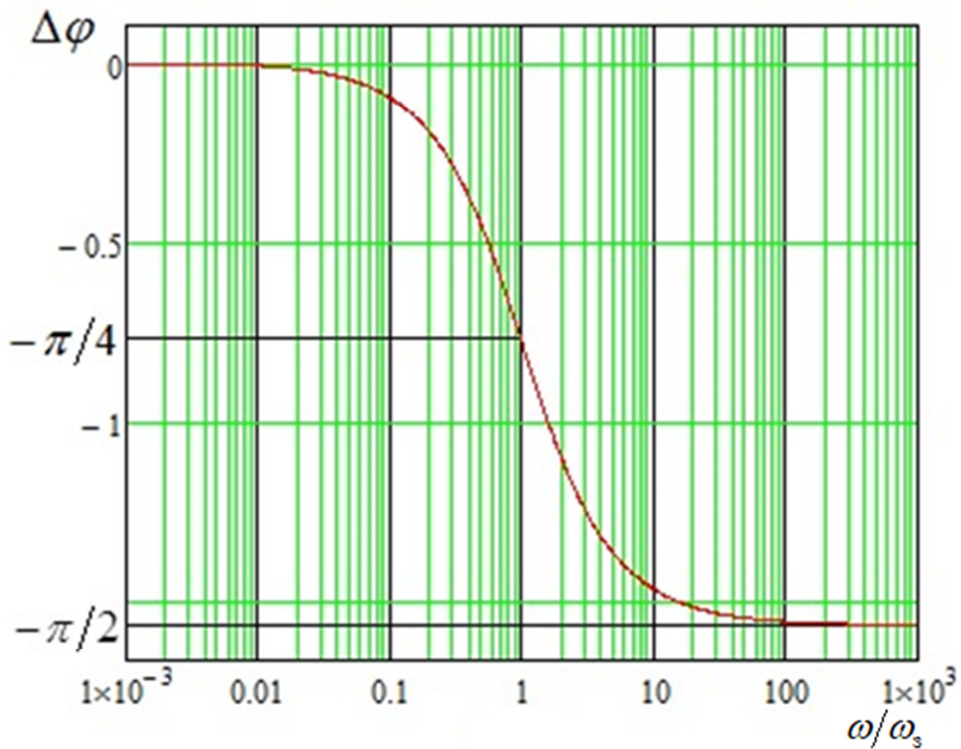


Рисунок 7.8 – ФЧХ інтегрувального RC-ланцюжка в логарифмічному масштабі

## 7.5. Диференціальний RC–ланцюжок як фільтр верхніх частот

Розглянемо проходження синусоїдального сигналу (7.1) через RC–ланцюжок. Згідно (6.1) та (7.4) матимемо, що точна залежність напруги на резисторі набуде вигляду

$$U_R(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t) - A_{\text{вх}} \left( \frac{\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t)}{1 + (\omega RC)^2} \right) - \left( \frac{q_0}{C} - \frac{A_{\text{вх}}}{1 + (\omega RC)^2} \right) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (7.23)$$

Член, що містить падаючу експоненту, згасне, і в усталеному режимі роботи кола з (7.23) після певних перетворень матимемо

$$U_R(t) = \frac{\omega RC A_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} (\beta \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)), \quad (7.24)$$

де позначення  $\beta$  й  $\alpha$  введено у (7.6). Згідно з властивістю (7.7) ми можемо сказати, що існує такий кут  $\varphi$ , що

$$\beta = \cos \varphi > 0, \quad \alpha = \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \arctg \left( \frac{1}{\omega RC} \right). \quad (7.25)$$

Тоді (7.24) перепишеться як

$$U_R(t) = \frac{\omega RC A_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (7.26)$$

звідки АЧХ та ФЧХ диференціального RC–ланцюжка є такими:

$$K(\omega) = \frac{\omega RC A_{\text{вх}}}{A_{\text{вх}} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (7.27)$$

$$\Delta\varphi(\omega) = \text{Фаза}(U_R) - \text{Фаза}(U_{\text{вх}}) = \varphi = \arctg \left( \frac{1}{\omega RC} \right).$$

Ця АЧХ має такі властивості:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = 1, \quad (7.28)$$

та  $K(\omega)$  є зростаючою функцією, в цьому можна переконатись, взявши похідну та переконавшись в її додатності:

$$\begin{aligned} \frac{dK(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{1+(\omega RC)^2} \left( RC\sqrt{1+(\omega RC)^2} - \omega RC \frac{2\omega R^2 C^2}{2\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \right) = \\ &= \frac{RC}{1+(\omega RC)^2} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} > 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Згідно з цими властивостями АЧХ, **диференціувальний RC–ланцюжок є фільтром верхніх частот.**

За домовленістю на частоті зрізу

$$K(\omega_3) = \frac{\omega_3 RC}{\sqrt{1+(\omega_3 RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.30)$$

звідки матимемо

$$\omega_3 = 1/(RC). \quad (7.31)$$

Тоді АЧХ та ФЧХ диференціувального RC–ланцюжка перепишуться як

$$K(\omega) = \frac{\omega/\omega_3}{\sqrt{1+(\omega/\omega_3)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega/\omega_3}\right), \quad (7.32)$$

тобто, як і для інтегрувального RC–ланцюжка, вигляд АЧХ повністю задається одним безрозмірним параметром  $\omega/\omega_3$ .

АЧХ диференціувального RC–ланцюжка в децибелах є такою:

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20\lg K(\omega) = 20\lg\left(\frac{\omega/\omega_3}{\sqrt{1+(\omega/\omega_3)^2}}\right) = f(\omega/\omega_3), \quad (7.33)$$

де

$$f(x) = 20\lg\left(x/\sqrt{1+x^2}\right). \quad (7.34)$$

Розглянемо похідну  $df(x)/d\lg x$  за ідеєю, аналогічною до (7.20):

$$\frac{df(x)}{d\lg x} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{d\lg x/dx} = \quad (7.35)$$

$$= 20 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x \ln 10} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot x \ln 10 = \frac{20}{1+x^2},$$

та зауважимо, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} (df(x)/d \lg x) = 20. \quad (7.36)$$

Відповідно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (dK_{\text{db}}(\omega)/d \lg(\omega/\omega_3)) = 20, \quad (7.37)$$

що свідчить про те, що на малих частотах для диференціувального RC-ланцюжка нахил залежності  $K_{\text{db}}$  від  $\omega/\omega_3$  в логарифмічному масштабі дорівнює +20дБ/декада.

ФЧХ диференціувального RC-ланцюжка має такі властивості:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta\varphi(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta\varphi(\omega) = \pi/2, \quad \Delta\varphi(\omega_3) = \pi/4. \quad (7.38)$$

Графіки АЧХ диференціувального RC-ланцюжка наведено на рис. 7.9 і рис. 7.10. ФЧХ диференціувального RC-ланцюжка наведено на рис. 7.11 і рис. 7.12.

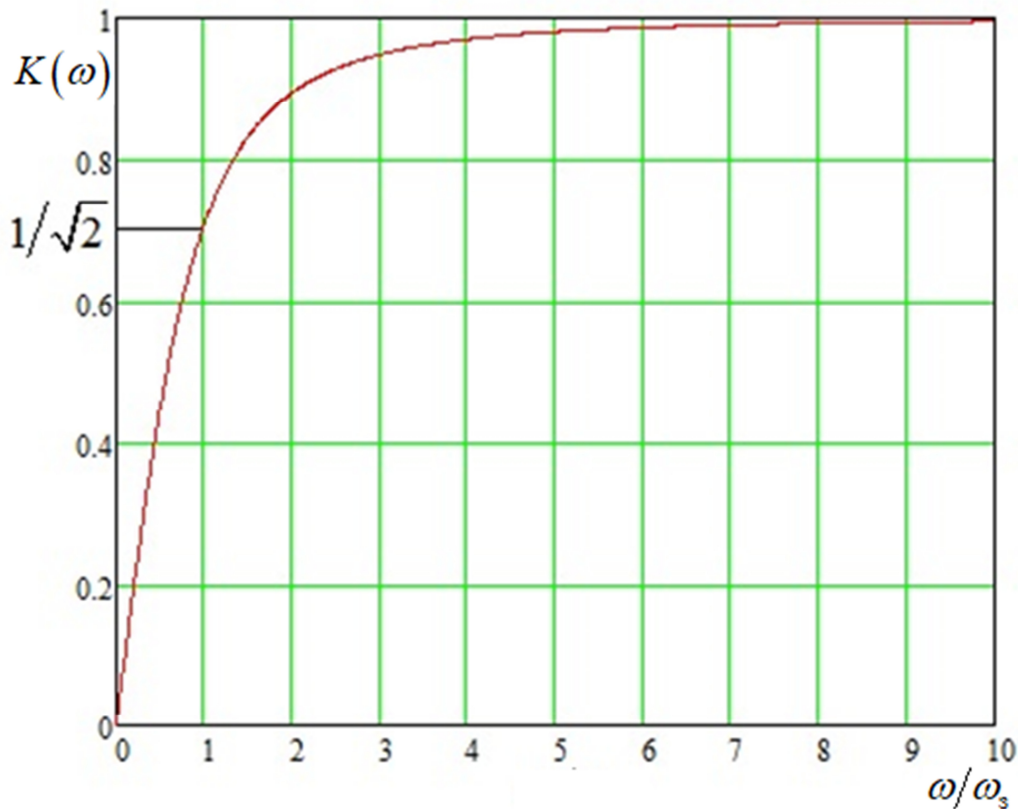


Рисунок 7.9 – АЧХ диференціувального RC-ланцюжка

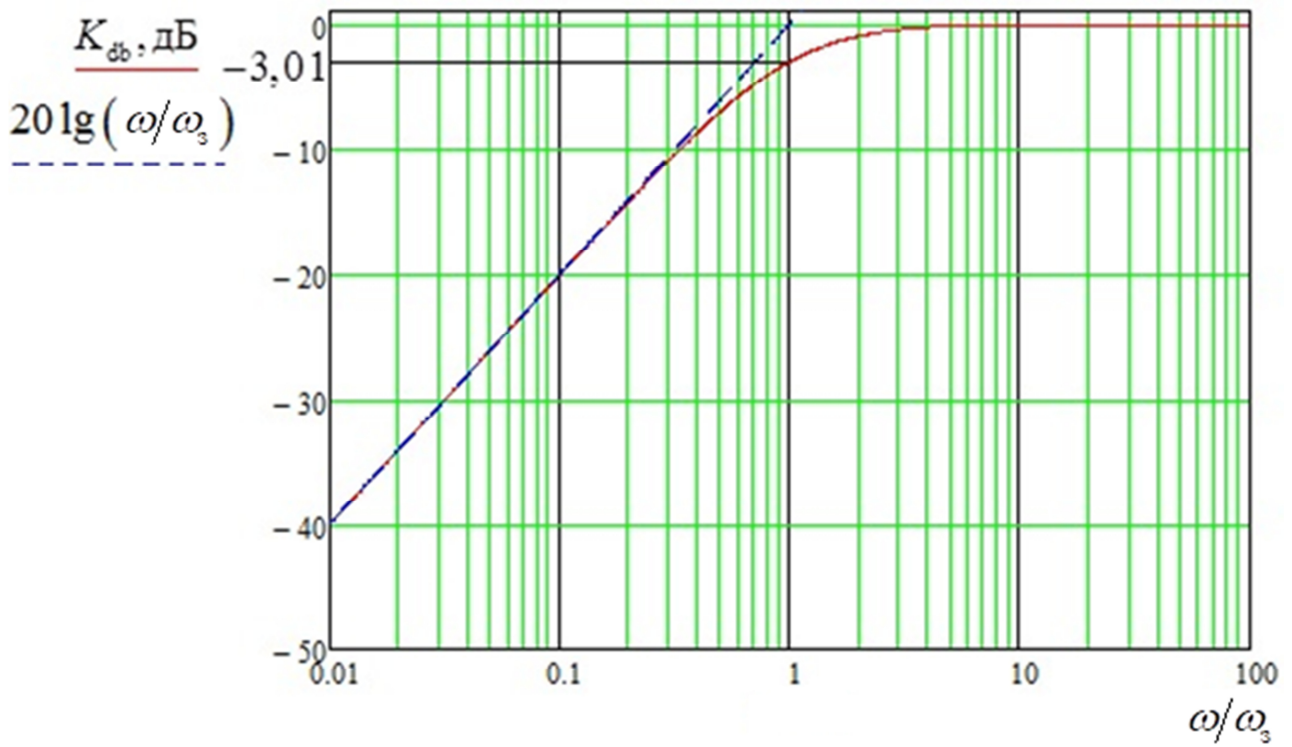


Рисунок 7.10 – АЧХ диференціувального RC –ланцюжка в децибнлах у логарифмічному масштабі

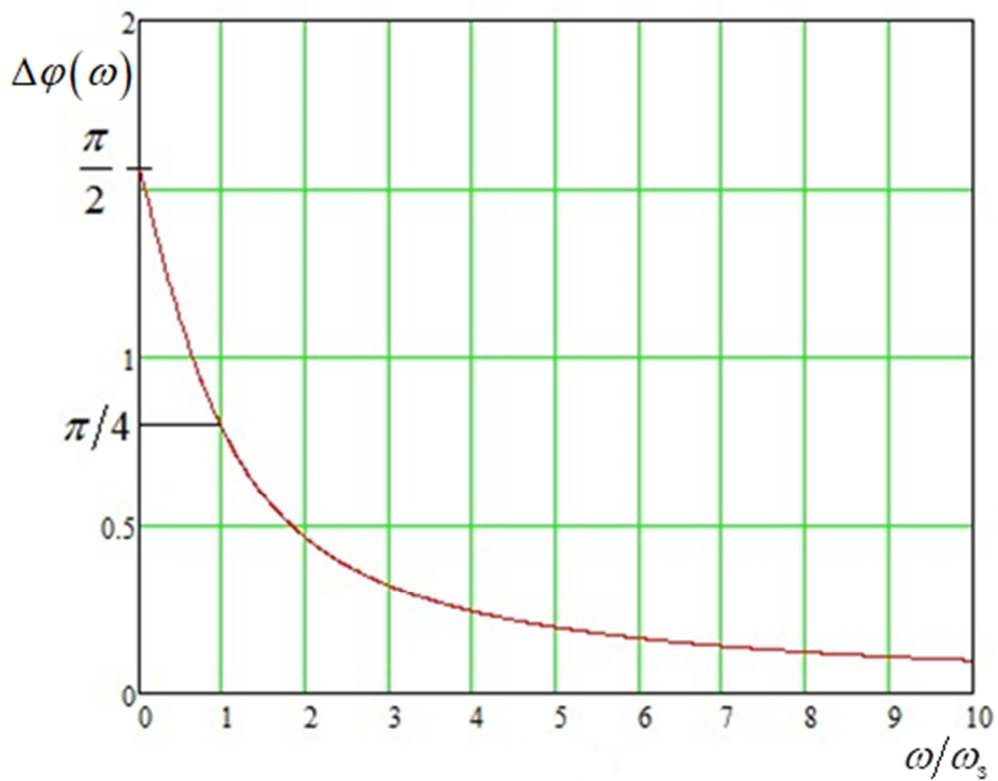


Рисунок 7.11 – ФЧХ диференціувального RC –ланцюжка

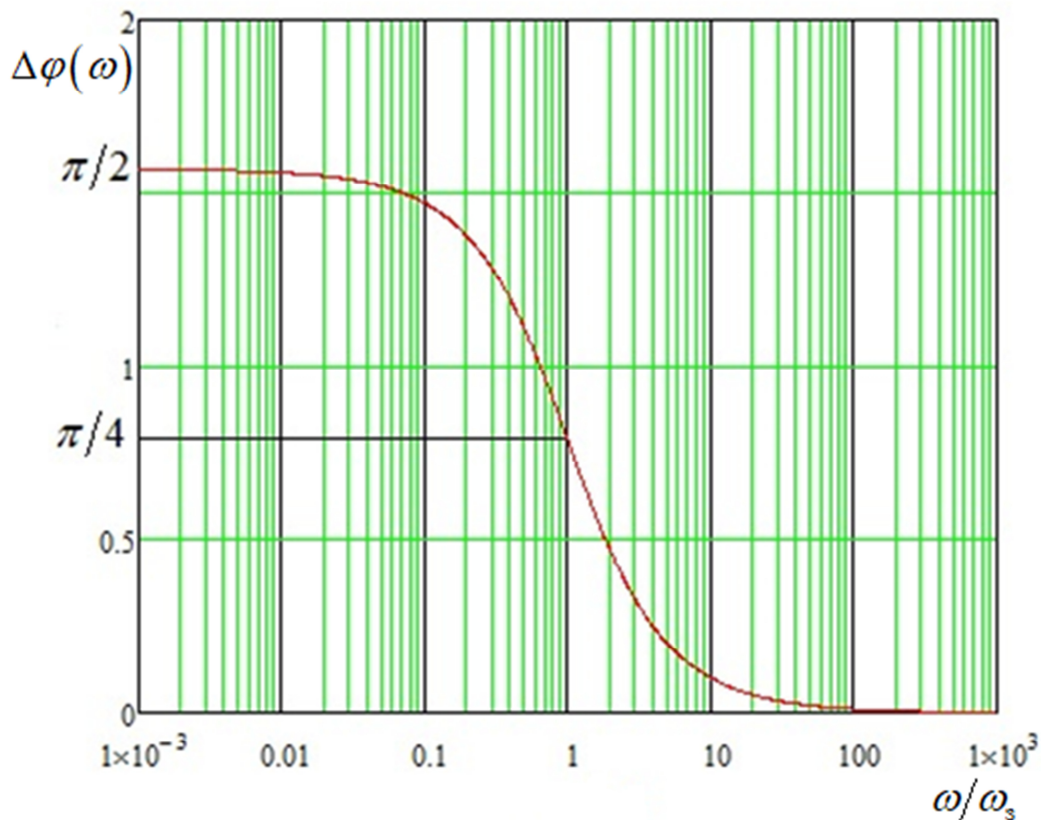


Рисунок 7.12 – ФЧХ диференціювального  $RC$ –ланцюжка в логарифмічному масштабі

### 7.6. Послідовний $RLC$ –контур як смуговий фільтр

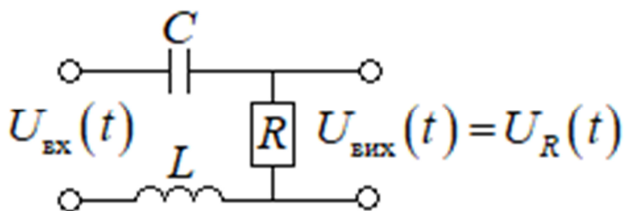


Рисунок 7.13

Розглянемо послідовний  $RLC$ –контур, на якому вхідну напругу подано на весь контур, а вихідну напругу знімають з резистора. Нехай вхідну напругу подано у вигляді (7.1).

Вважається, що вихідну напругу просто «знімають» вимірювальним приладом. Тоді, за відомим з розділу 4.4 результатом, загальний струм через контур в усталеному режимі

$$I(t) = \frac{A_{\text{вх}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos\left(\omega t + \arctg \frac{X_C - X_L}{R}\right), \quad (7.39)$$

де  $X_L$  та  $X_C$  – реактивні опори котушки та конденсатора відповідно:

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (7.40)$$

Відповідно, явний вираз для вихідної напруги:

$$U_{\text{вих}}(t) = U_R(t) = \frac{A_{\text{вх}} R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left[ \omega t + \arctg \left( \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \right) \right], \quad (7.41)$$

Тож АЧХ та ФЧХ такої схеми є такими:

$$K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg \left( \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \right). \quad (7.42)$$

Як відомо, резонансною кутовою частотою контуру є

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (7.43)$$

Тоді АЧХ та ФЧХ (7.42) можуть бути переписані як

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L}{R^2 C} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{1}{\omega/\omega_p} \right)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg \left( \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \left( \frac{1}{\omega/\omega_p} - \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right). \quad (7.44)$$

Ввівши безрозмірний параметр

$$\xi = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}, \quad (7.45)$$

перепишемо (7.44) як

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{1}{\omega/\omega_p} \right)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg \left( \xi \left( \frac{1}{\omega/\omega_p} - \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right), \quad (7.46)$$

тобто вигляд графіків залежності  $K$  та  $\Delta\varphi$  від  $\omega/\omega_p$  задається лише одним безрозмірним параметром  $\xi$ .

Дослідимо залежність  $K(\omega)$  з (7.46):



$$K(\omega) = f(\omega/\omega_p), f(x) = \left[ 1 + \xi^2 \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.47)$$

Очевидно, що свого найбільшого значення  $f(x)$  досягає в точці  $x=1$ , тобто максимальне значення  $K(\omega)$  досягається при резонансній частоті  $\omega = \omega_p$ .

Знайдемо частоти зрізу, на яких  $K(\omega)$  падає у  $\sqrt{2}$  разів:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \xi^2 \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1. \quad (7.48)$$

Відповідно, або

$$\xi \left( x - \frac{1}{x} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\xi^2}}{2\xi}, \quad (7.49)$$

або

$$\xi \left( x - \frac{1}{x} \right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\xi^2}}{2\xi}. \quad (7.50)$$

Оскільки  $x$  – відношення частот – додатно визначена величина, то корені зі знаком « $\rightarrow$ » у (7.49) та (7.50) є нефізичними. Тож остаточно отримуємо шукані корені

$$x_{1,2} = \frac{\mp 1 + \sqrt{1 + 4\xi^2}}{2\xi}. \quad (7.51)$$

Відповідно, частоти зрізу визначаються таким чином:

$$\omega_{31,2} = \omega_p \cdot \frac{\mp 1 + \sqrt{1 + 4\xi^2}}{2\xi}. \quad (7.52)$$

Також, очевидно, АЧХ такої схеми має властивості

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = 0, K(\omega_p) = 1, \quad (7.53)$$

смуга частот  $\omega \in (\omega_{31}, \omega_{32})$  умовно є смугою пропускання, а весь інший діапазон – смугою подавлення. Тож **послідовний RLC-контур, на якому вхідну напругу подано на весь контур, а вихідну напругу знімають з резистора, є смуговим фільтром.** Схематично його АЧХ зображено на рис. 7.14.

У децибелах відповідна АЧХ матиме вигляд

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20 \lg K(\omega) = g(\omega/\omega_p), \quad (7.54)$$

де

$$g(x) = -10 \lg \left[ 1 + \xi^2 \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]. \quad (7.55)$$

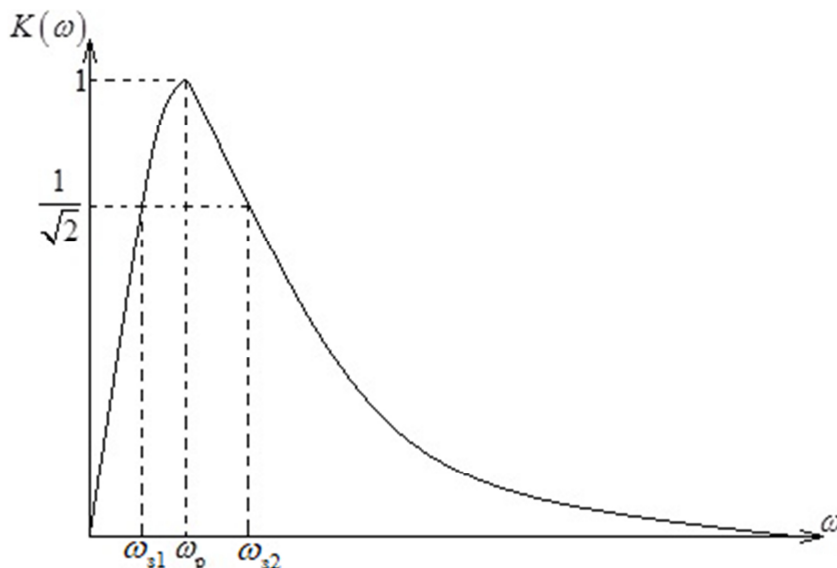


Рисунок 7.14 – Схематичний вигляд АЧХ (7.47)

Розглянемо похідну  $dg(x)/d \lg x$ . Після певних перетворень отримаємо, що

$$\frac{dg(x)}{d \lg x} = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{1}{d \lg x / dx} = -20 \xi^2 \frac{(x^4 - 1)}{x^2 + \xi^2 \cdot (x^2 - 1)^2}, \quad (7.56)$$

звідки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dg(x)}{d \lg x} = -20, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dg(x)}{d \lg x} = 20. \quad (7.57)$$

Відповідно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dK_{\text{db}}(\omega)}{d \lg(\omega/\omega_p)} = 20, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dK_{\text{db}}(\omega)}{d \lg(\omega/\omega_p)} = -20, \quad (7.58)$$

що свідчить про те, що на малих частотах нахил залежності  $K_{\text{db}}$  від  $\omega/\omega_p$  в логарифмічному масштабі дорівнює  $+20$ дБ/декада, а на великих частотах відповідний нахил дорівнює  $-20$ дБ/декада.

Згідно з (7.49), (7.50) та (7.46) бачимо, що ФЧХ досліджуваної схеми має властивості

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi(\omega_{31,2}) = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \Delta\varphi(\omega_p) = 0. \quad (7.59)$$

### 7.7. Міст Віна як смуговий фільтр

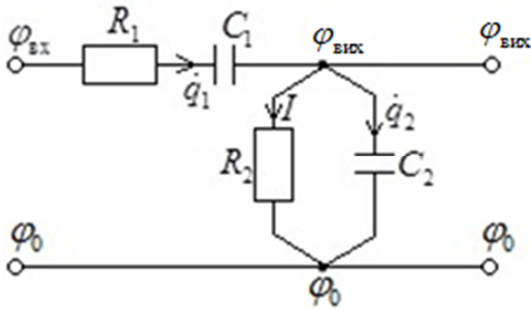


Рисунок 7.15

Розглянемо схему на рис. 7.15. Вона носить назву моста Віна. Нехай вхідна напруга

$$U_{\text{вх}}(t) = \varphi_{\text{вх}}(t) - \varphi_0(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (7.60)$$

Вважається, що вихідна напруга просто «знімається» вимірювальними приладами. Як відомо, струм через конденсатор дорівнює похідній від заряду цього конденсатора за часом. Тож

$$\varphi_{\text{вх}}(t) - \varphi_{\text{вих}}(t) = U_{R1}(t) + U_{C1}(t) = \dot{q}_1(t)R_1 + q_1(t)/C_1, \quad (7.61)$$

та

$$U_{\text{вих}}(t) = \varphi_{\text{вих}}(t) - \varphi_0(t) = U_{R2}(t) = U_{C2}(t) = I(t)R_2 = \frac{q_2(t)}{C_2}, \quad (7.62)$$

похідну за часом позначено крапкою зверху величини. Тож для визначення вихідної напруги достатньо визначити функцію  $q_2(t)$ . Також за першим законом Кірхгофа

$$\dot{q}_1(t) = I(t) + \dot{q}_2(t), \quad (7.63)$$

Підставивши (7.63) у (7.62), матимемо

$$\dot{q}_1(t)R_2 = \dot{q}_2(t)R_2 + \frac{q_2(t)}{C_2}, \quad (7.64)$$

звідки

$$\ddot{q}_1(t)R_2 = \ddot{q}_2(t)R_2 + \frac{\dot{q}_2(t)}{C_2}. \quad (7.65)$$

Додавши (7.61) до (7.62), згідно з (7.60) матимемо

$$\dot{q}_1(t)R_1 + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_2(t)}{C_2} = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (7.66)$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$\ddot{q}_1(t)R_1 + \frac{\dot{q}_1(t)}{C_1} + \frac{\dot{q}_2(t)}{C_2} = -A_{\text{вх}} \omega \sin(\omega t). \quad (7.67)$$

Підставимо (7.64) та (7.65) у (7.67), та після певних перетворень отримаємо

$$\ddot{q}_2(t) + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \dot{q}_2(t) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} q_2(t) = -\frac{A_{\text{вх}} \omega}{R_1} \sin(\omega t). \quad (7.68)$$

Позначимо

$$a = \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2}, \quad b = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}, \quad \gamma = \frac{A_{\text{вх}} \omega}{R_1}, \quad (7.69)$$

та зауважимо, що  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Згідно з позначеннями (7.69) рівняння (7.68) переписеться в компактнішому вигляді

$$\ddot{q}_2(t) + a\dot{q}_2(t) + bq_2(t) = -\gamma \sin(\omega t). \quad (7.70)$$

Через додатність величин  $a$  й  $b$  загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння не дасть вкладу до усталеного режиму роботи кола, див. розгляд аналогічного диференційного рівняння в розділі 4.4. Тож для пошуку величини  $q_2(t)$  в усталеному режимі роботи кола, треба знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7.70). Шукатимемо його у вигляді

$$q_2(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t), \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (7.71)$$

Відповідно,

$$\dot{q}_2(t) = -\alpha \omega \sin(\omega t) + \beta \omega \cos(\omega t), \quad \ddot{q}_2(t) = -\alpha \omega^2 \cos(\omega t) - \beta \omega^2 \sin(\omega t), \quad (7.72)$$

підставивши (7.71) та (7.72) у (7.70) та «зібравши» подібні члени, матимемо

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) [\alpha(b - \omega^2) + \beta \cdot a\omega] + \sin(\omega t) [\beta(b - \omega^2) - \alpha \cdot a\omega] = \\ = -\gamma \sin(\omega t) + 0 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Прирівнявши однакові вирази при синусі та косинусі в різних частинах рівняння (7.73), отримаємо систему рівнянь відносно констант  $\alpha, \beta$ :

$$\alpha(b - \omega^2) + \beta \cdot a\omega = 0, \quad \beta(b - \omega^2) - \alpha \cdot a\omega = -\gamma. \quad (7.74)$$

Розв'язком цієї системи є

$$\alpha = \gamma \frac{a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}, \quad \beta = -\gamma \frac{b - \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}. \quad (7.75)$$

Тож в усталеному режимі роботи кола

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \gamma \frac{a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} \cos(\omega t) - \gamma \frac{b - \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} \sin(\omega t) = \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \left( \frac{a\omega}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b - \omega^2}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \sin(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Введемо позначення

$$\alpha_1 = \frac{a\omega}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} > 0, \quad \beta_1 = \frac{b - \omega^2}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}. \quad (7.77)$$

Оскільки

$$\alpha_1 \in (0,1), \quad \beta_1 \in (-1,1), \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad (7.78)$$

то існує кут  $\psi$  такий, що

$$\alpha_1 = \cos \psi, \quad \beta_1 = \sin \psi, \quad \psi = \arctg \frac{\beta_1}{\alpha_1}. \quad (7.79)$$

Відповідно, (7.76) переписеться як

$$q_2(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega t + \psi), \quad (7.80)$$

та згідно з (7.62)

$$U_{\text{вих}}(t) = \frac{\gamma}{C_2 \sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega t + \psi). \quad (7.81)$$

Відповідно, АЧХ моста Віна

$$K(\omega) = \frac{\gamma}{C_2 A_{\text{вх}} \sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}}, \quad (7.82)$$

щоб отримати остаточний результат, треба підставити (7.69) у (7.82):

$$K(\omega) = \frac{\omega}{R_1 C_2 \sqrt{\left(\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2}\right)^2 \omega^2}}. \quad (7.83)$$

Відповідно, ФЧХ моста Віна

$$\Delta\varphi(\omega) = \psi = \operatorname{arctg} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{arctg} \frac{b - \omega^2}{a\omega}. \quad (7.84)$$

Підставивши (7.69) у (7.84), остаточно отримаємо

$$\Delta\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + C_1 R_2) \omega}. \quad (7.85)$$

Часто на практиці реалізують міст Віна з однаковими резисторами та конденсаторами:  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ . У такому разі згідно (7.83) та (7.85) АЧХ та ФЧХ набудуть вигляду

$$K(\omega) = \frac{\omega}{RC \sqrt{\omega^4 + \frac{7}{R^2 C^2} \omega^2 + \frac{1}{R^4 C^4}}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{3RC\omega}. \quad (7.86)$$

Розглянемо АЧХ (7.86). Очевидно, що

$$\frac{dK(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{RC} \left( \frac{1}{R^4 C^4} - \omega^4 \right) \left( \omega^4 + \frac{7}{R^2 C^2} \omega^2 + \frac{1}{R^4 C^4} \right)^{-3/2}, \quad (7.87)$$

звідки доходимо висновку, що ця АЧХ має один максимум, що досягається на кутовій частоті

$$\omega_0 = 1/(RC). \quad (7.88)$$

З урахуванням того, що

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = 0, \quad (7.89)$$

доходимо висновку, що **міст Віна є смуговим фільтром**. Відповідно, АЧХ та ФЧХ (7.86) можна переписати в термінах безрозмірного параметра  $\omega/\omega_0$  :

$$K(\omega) = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^4 + 7(\omega/\omega_0)^2 + 1}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{3\omega/\omega_0}. \quad (7.90)$$

Відповідне максимальне значення АЧХ

$$K_{\max} = K_{\max}(\omega_0) = 1/3. \quad (7.91)$$

Відповідно, частоти зрізу фільтра, за домовленістю, є частотами, на яких значення  $K(\omega)$  є в  $\sqrt{2}$  разів меншим за максимальне:

$$K(\omega_3) = \frac{\omega_3/\omega_0}{\sqrt{(\omega_3/\omega_0)^4 + 7(\omega_3/\omega_0)^2 + 1}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad (7.92)$$

розв'язками відповідного рівняння є

$$\omega_{31,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{11 \mp \sqrt{117}}{2}}. \quad (7.93)$$

Властивостями ФЧХ моста Віна є

$$\Delta\varphi(\omega_0) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi(\omega_{31,2}) = \pm \frac{\pi}{4}. \quad (7.94)$$

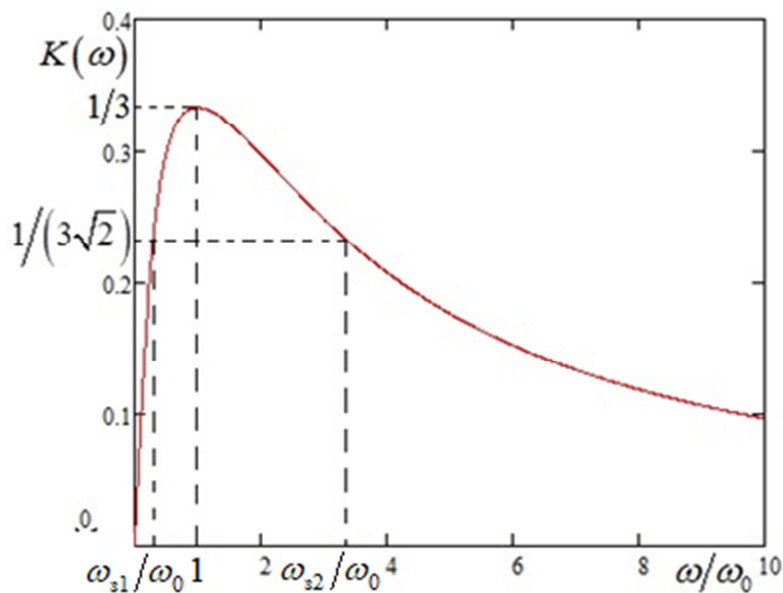


Рисунок 7.16 – АЧХ моста Віна

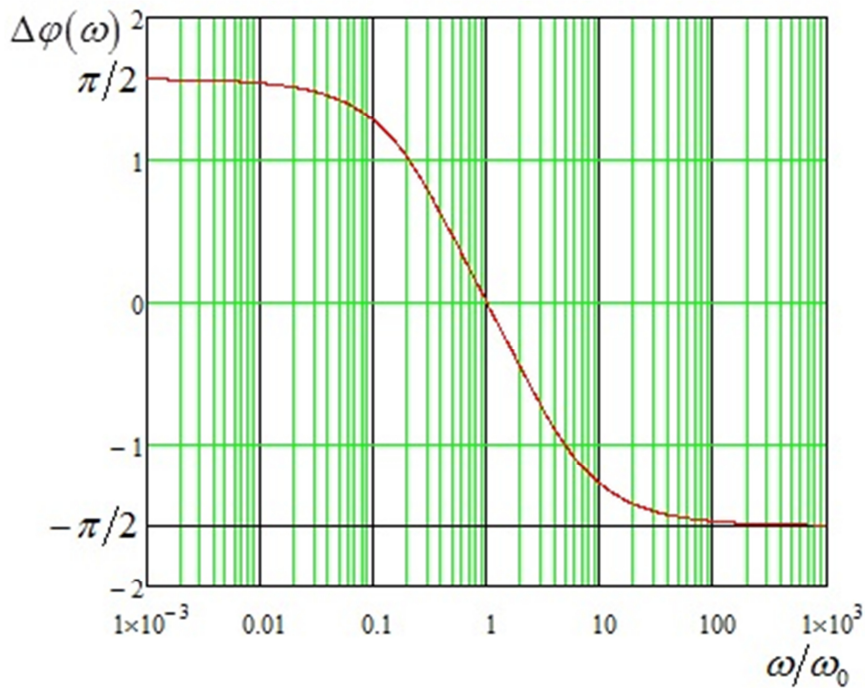


Рисунок 7.17 – ФЧХ моста Віна в логарифмічному масштабі

Розглянемо АЧХ моста Віна в децибелах:

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20 \lg K(\omega) = f(\omega/\omega_0), \quad (7.95)$$

де

$$f(x) = 20 \lg \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}. \quad (7.96)$$

Відповідно, похідна  $df(x)/d \lg x$

$$\frac{df(x)}{d \lg x} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{d \lg x / dx} = 20 \frac{1 - x^4}{x^4 + 7x^2 + 1}, \quad (7.97)$$

тож

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{df(x)}{d \lg x} = 20, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{df(x)}{d \lg x} = -20, \quad (7.98)$$

звідки бачимо, що на малих частотах нахил залежності  $K_{\text{db}}$  від  $\omega/\omega_0$  в логарифмічному масштабі дорівнює +20дБ/декада, а на великих частотах відповідний нахил дорівнює -20дБ/декада. Графік відповідної децибельної АЧХ у логарифмічному масштабі наведено на рис. 7.18.



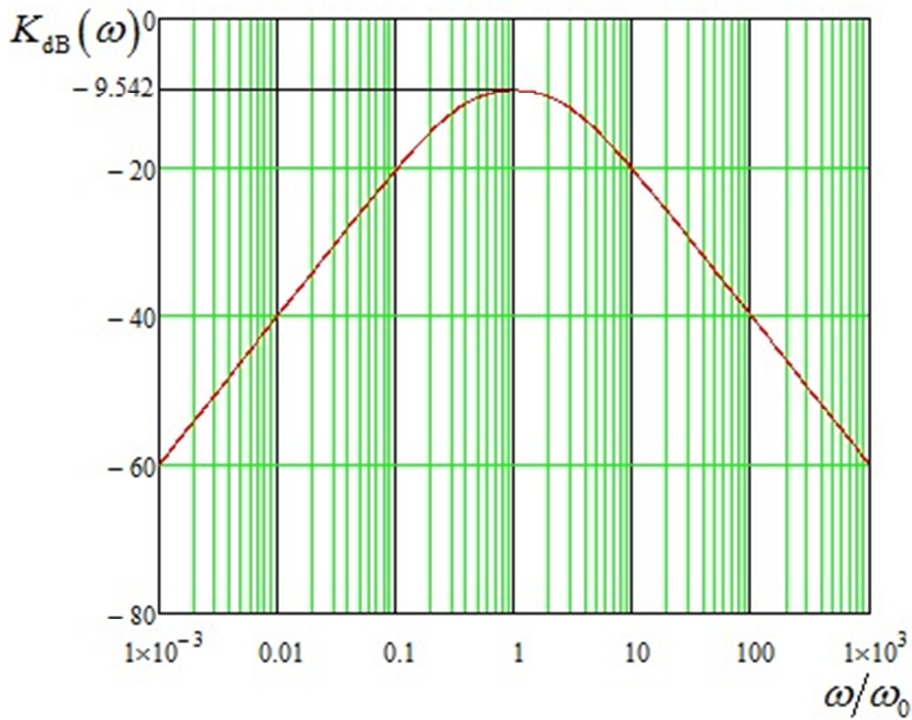


Рисунок 7.18 – АЧХ моста Віна в децибнлах у логарифмічному масштабі.

### 7.8. Міст Віна–Робінсона як режекторний фільтр

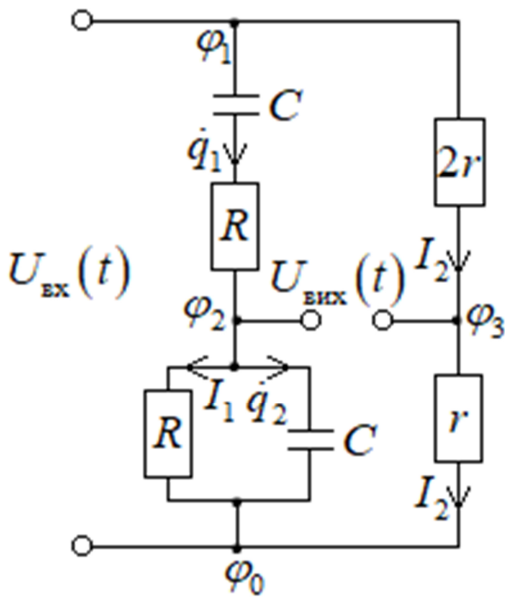


Рисунок 7.19

Розглянемо схему, наведену на рис. 7.19. Така схема носить назву міст Віна–Робінсона. Нехай вхідна напруга

$$U_{\text{вх}}(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (7.99)$$

При цьому важливо зауважити, що вихідною напругою є саме різниця потенціалів  $\varphi_3 - \varphi_2$ , а не навпаки:

$$U_{\text{вих}}(t) = \varphi_3(t) - \varphi_2(t). \quad (7.100)$$

Також матимемо

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \frac{q_1(t)}{C} + R\dot{q}_1(t), \quad \varphi_2(t) - \varphi_0(t) = \frac{q_2(t)}{C} = I_1(t)R, \quad (7.101)$$

та

$$\varphi_1(t) - \varphi_3(t) = 2rI_2(t), \quad \varphi_3(t) - \varphi_0(t) = rI_2(t). \quad (7.102)$$

На основі (7.101) та (7.102) маємо

$$3rI_2(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t), \quad (7.103)$$

на основі (7.99) та (7.101) отримаємо

$$R\dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t)}{C} + \frac{q_2(t)}{C} = A_{\text{вх}} \cos(\omega t). \quad (7.104)$$

Продиференціювавши (7.104) за часом, після певних перетворень матимемо

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{\dot{q}_1(t)}{RC} + \frac{\dot{q}_2(t)}{RC} = -\frac{A_{\text{вх}}}{R} \omega \sin(\omega t). \quad (7.105)$$

Оскільки

$$\dot{q}_1(t) = I_1(t) + \dot{q}_2(t), \quad (7.106)$$

то звідси та на основі (7.101) отримаємо

$$\dot{q}_1(t) = \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t)}{RC}, \quad (7.107)$$

та, продиференціювавши цей вираз за часом, матимемо

$$\ddot{q}_1(t) = \ddot{q}_2(t) + \frac{\dot{q}_2(t)}{RC}, \quad (7.108)$$

Підставивши (7.107) та (7.108) у (7.105), отримаємо

$$\ddot{q}_2(t) + \frac{3}{RC} \dot{q}_2(t) + \frac{1}{R^2 C^2} q_2(t) = -\frac{A_{\text{вх}}}{R} \omega \sin(\omega t). \quad (7.109)$$

Відповідно, з цього рівняння треба знайти функцію  $q_2(t)$ .

Згідно з (7.103) та (7.102) легко отримати, що

$$\varphi_3(t) - \varphi_0(t) = A_{\text{вх}} \cos(\omega t) / 3, \quad (7.110)$$

та згідно з (7.110) і (7.101) можна прийти до висновку, що

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= \varphi_3(t) - \varphi_2(t) = (\varphi_3(t) - \varphi_0(t)) - (\varphi_2(t) - \varphi_0(t)) = \\ &= -\frac{q_2(t)}{C} + \frac{A_{\text{вх}}}{3} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Тож для знаходження вихідної напруги треба знайти функцію  $q_2(t)$  на основі диференційного рівняння (7.109) та підставити її у (7.111).

Введемо позначення:

$$a = \frac{3}{RC} > 0, \quad b = \frac{1}{R^2 C^2} > 0, \quad \gamma = \frac{A_{\text{вх}} \omega}{R}. \quad (7.112)$$

Тоді рівняння (7.109) набуде вигляду (7.70), розв'язок якого в усталеному режимі, як виведено раніше, має вигляд (7.76).

Тож

$$U_{\text{вих}}(t) = \cos(\omega t) \left( -\frac{\gamma}{C} \frac{a\omega}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} + \frac{A_{\text{вх}}}{3} \right) + \frac{\gamma}{C} \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} \sin(\omega t). \quad (7.113)$$

З урахуванням (7.112) та (7.88) введемо такі величини:

$$\alpha = -\frac{\gamma}{C} \frac{a\omega}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} + \frac{A_{\text{вх}}}{3} = \frac{A_{\text{вх}}}{3} \frac{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2}{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 9(\omega/\omega_0)^2} > 0, \quad (7.114)$$

$$\beta = \frac{\gamma}{C} \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} = A_{\text{вх}} \cdot (\omega/\omega_0) \cdot \frac{1-(\omega/\omega_0)^2}{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 9(\omega/\omega_0)^2}.$$

Тоді матимемо

$$U_{\text{вих}}(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\omega t) \right). \quad (7.115)$$

Введемо позначення

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \in (0,1), \quad \beta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \in (-1,1), \quad \beta_1^2 + \alpha_1^2 = 1. \quad (7.116)$$

Тож існує кут  $\psi$ :

$$\alpha_1 = \cos \psi, \quad \beta_1 = \sin \psi, \quad \psi = \arctg \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \arctg \frac{3\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}. \quad (7.117)$$

Після певних перетворень отримаємо, що

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{A_{\text{BX}}}{3} \frac{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}{\sqrt{1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4}}. \quad (7.118)$$

Тоді на основі (7.115)–(7.118) отримаємо

$$U_{\text{Вих}}(t) = \frac{A_{\text{BX}}}{3} \frac{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}{\sqrt{1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4}} \cos(\omega t - \psi). \quad (7.119)$$

Відповідно, АЧХ та ФЧХ моста Віна–Робінсона

$$K(\omega) = \frac{1}{3} \frac{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}{\sqrt{1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = -\psi = \arctg \frac{3\omega/\omega_0}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}. \quad (7.120)$$

Розглянемо властивості знайденої АЧХ:

$$\frac{dK(\omega)}{d\omega} = \begin{cases} -\frac{3}{\omega_0} \frac{(\omega/\omega_0) + (\omega/\omega_0)^3}{(1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4)^{3/2}}, & \omega < \omega_0 \\ \frac{3}{\omega_0} \frac{(\omega/\omega_0) + (\omega/\omega_0)^3}{(1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4)^{3/2}}, & \omega > \omega_0 \end{cases}, \quad (7.121)$$

тож  $\frac{dK(\omega)}{d\omega} < 0$  при  $\omega < \omega_0$  та  $\frac{dK(\omega)}{d\omega} > 0$  при  $\omega > \omega_0$ , тобто АЧХ спадає при

$\omega < \omega_0$  і зростає при  $\omega > \omega_0$ . Оскільки

$$K(\omega_0) = 0, \quad (7.122)$$

то найменше значення  $K(\omega)$  дорівнює нулю й досягається при  $\omega = \omega_0$ . Також

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = \frac{1}{3}. \quad (7.123)$$

Тож міст **Віна–Робінсона** є **режекторним фільтром**. Максимальне значення  $K(\omega)$  дорівнює  $1/3$ ; відповідно, частоти зрізу фільтра визначаються зі співвідношення

$$K(\omega_3) = \frac{1}{3} \frac{|1 - (\omega_3/\omega_0)^2|}{\sqrt{1 + 7(\omega_3/\omega_0)^2 + (\omega_3/\omega_0)^4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad (7.124)$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\omega_{31,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{11 \mp \sqrt{117}}{2}}. \quad (7.125)$$

АЧХ та ФЧХ моста Віна–Робінсона наведені на рис. 7.20 та рис. 7.21.

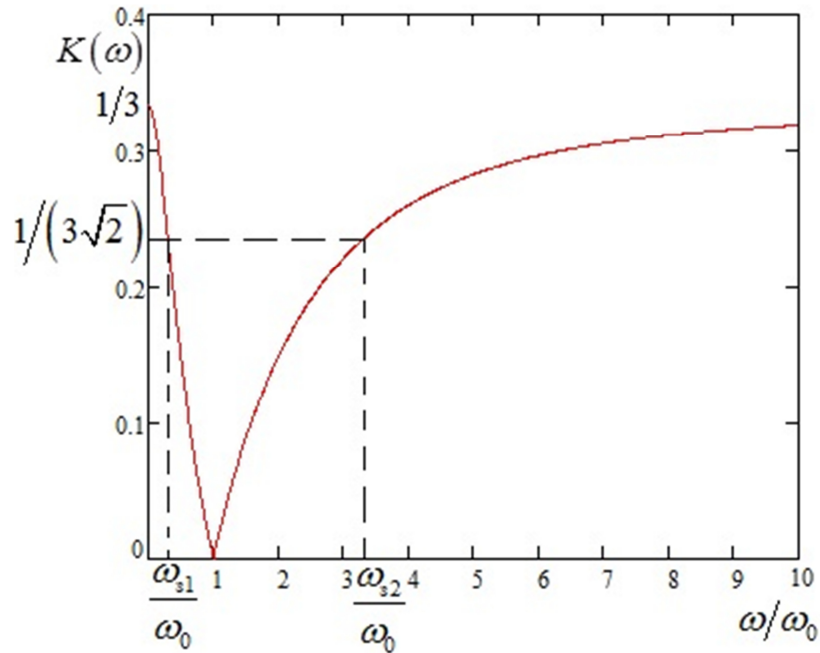


Рисунок 7.20 – АЧХ моста Віна–Робінсона

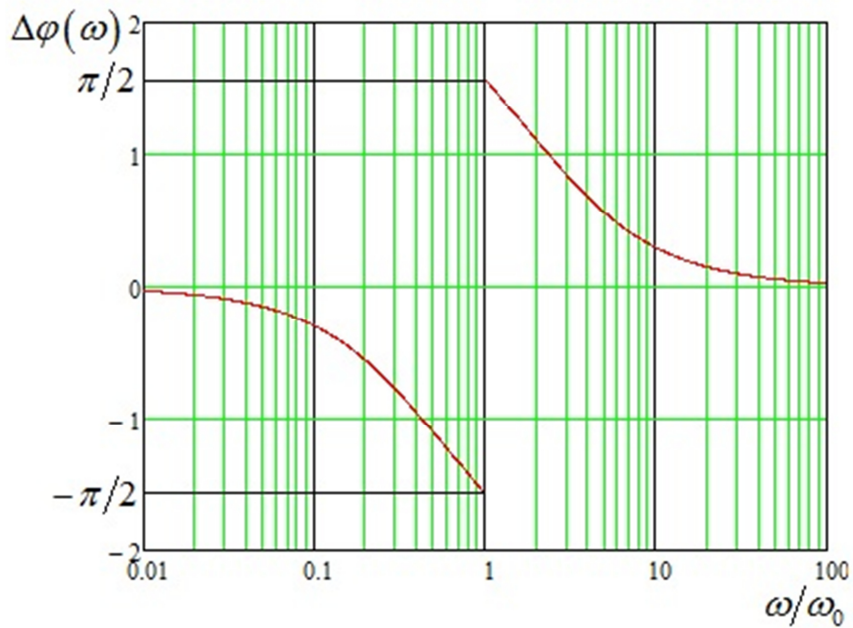


Рисунок 7.21 – ФЧХ моста Віна–Робінсона в логарифмічному масштабі

ФЧХ моста Віна–Робінсона має такі властивості:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta\varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta\varphi(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0 \pm 0} \Delta\varphi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi(\omega_{31,2}) = \mp \frac{\pi}{4}. \quad (7.126)$$

### 7.9. Резюме

Частотний електронний фільтр – електричний пристрій, в якому зі спектру поданих на його вхід електричних коливань пропускаються на вихід складові, розташовані в заданій смузі частот, і не пропускаються на вихід усі інші складові. Амплітудно-частотна характеристика фільтра (АЧХ) – залежність відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного сигналу від частоти. Фазо-частотна характеристика фільтра (ФЧХ) – залежність різниці фаз вихідного та вхідного сигналів від частоти.

Частотні електронні фільтри, поділяють на такі типи:

1. Фільтр нижніх частот (ФНЧ) – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали частот, що не перевищують певної заданої частоти (частоти зрізу), і не пропускати сигнали інших частот.
2. Фільтр верхніх частот (ФВЧ) – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали частот, що є не меншими за певну задану частоту (частоту зрізу), і не пропускати сигнали інших частот.
3. Смуговий фільтр – фільтр, що в ідеалі має пропускати сигнали в певному визначеному діапазоні частот і не пропускає сигнали інших частот.
4. Режекторний фільтр – фільтр, що в ідеалі не пропускає сигнали в певному визначеному діапазоні частот і пропускає сигнали інших частот.

АЧХ визначають також у децибелах таким чином:

$$K_{\text{db}}(\omega) = 20 \lg K(\omega), \quad (7.127)$$

де  $K_{\text{db}}(\omega)$  є амплітудно-частотною характеристикою в децибелах,  $K(\omega)$  – відношення амплітуд виходу до входу на заданій частоті. Кількість декад між частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  дорівнює  $\lg(\omega_2/\omega_1)$ .

Інтегровувальний  $RC$ –ланцюжок є фільтром нижніх частот з АЧХ, ФЧХ та частотою зрізу, що задаються виразами

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC), \quad \omega_3 = \frac{1}{RC}. \quad (7.128)$$

АЧХ такого фільтра в децибелах задається виразом

$$K_{\text{db}}(\omega) = f(\omega/\omega_3), \quad f(x) = -10\lg(1+x^2), \quad (7.129)$$

та на великих частотах має нахил  $-20\text{дБ/декаду}$ .

Диференціювальний  $RC$ –ланцюжок є фільтром верхніх частот з АЧХ, ФЧХ та частотою зрізу, що задаються виразами

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{RC}. \quad (7.130)$$

АЧХ такого фільтра в децибелах задається виразом

$$K_{\text{db}}(\omega) = f(\omega/\omega_3), \quad f(x) = 20\lg\left(x/\sqrt{1+x^2}\right), \quad (7.131)$$

та на малих частотах має нахил  $+20\text{дБ/декаду}$ .

Послідовний  $RLC$ –контур, на якому вхідну напругу подано на весь контур, а вихідну напругу знімають з резистора, є смуговим фільтром з АЧХ, ФЧХ та частотами зрізу, що задаються виразами

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{1}{\omega/\omega_p}\right)^2}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg\left(\xi \left(\frac{1}{\omega/\omega_p} - \frac{\omega}{\omega_p}\right)\right), \quad (7.132)$$

$$\omega_{31,2} = \omega_p \cdot \frac{\mp 1 + \sqrt{1+4\xi^2}}{2\xi}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{L}{R^2C}},$$

тобто вигляд АЧХ та ФЧХ такого фільтру задається безрозмірним параметром  $\xi$ . АЧХ такого фільтра в децибелах задається виразом

$$K_{\text{db}}(\omega) = f(\omega/\omega_p), \quad f(x) = -10 \lg \left[ 1 + \xi^2 \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right], \quad (7.133)$$

на малих частотах має нахил +20дБ/декаду, та на великих частотах має нахил -20дБ/декаду.

Схема моста Віна наведена на рис. 7.15. Міст Віна є смуговим фільтром, при однакових резисторах та конденсаторах АЧХ, ФЧХ та частоти зрізу такого фільтра задаються виразами

$$K(\omega) = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^4 + 7(\omega/\omega_0)^2 + 1}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = \arctg \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{3\omega/\omega_0}, \quad (7.134)$$

$$\omega_{31,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{11 \mp \sqrt{117}}{2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Найбільше значення  $K(\omega)$  досягається при  $\omega = \omega_0$  і дорівнює 1/3. АЧХ такого

фільтра в децибелах задається виразом  $f(x) = 20 \lg \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$

$$K_{\text{db}}(\omega) = f(\omega/\omega_0), \quad f(x) = 20 \lg \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}, \quad (7.135)$$

на малих частотах має нахил +20дБ/декаду, та на великих частотах має нахил -20дБ/декаду.

Схема моста Віна–Робінсона наведена на рис. 7.19. Міст Віна–Робінсона є режекторним фільтром, АЧХ, ФЧХ та частоти зрізу такого фільтра задаються виразами

$$K(\omega) = \frac{1}{3} \frac{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}{\sqrt{1 + 7(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4}}, \quad \Delta\varphi(\omega) = -\psi = \arctg \frac{3\omega/\omega_0}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}, \quad (7.136)$$

$$\omega_{31,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{11 \mp \sqrt{117}}{2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$



### 7.10. Питання для самоконтролю

1. Дати визначення частотного електронного фільтра. Дати визначення амплітудно–частотної та фазо–частотної характеристики фільтра. Дати визначення кількості декад між двома частотами. Дати визначення амплітудно–частотної характеристики фільтра в децибелах.

2. Навести амплітудно–частотні характеристики ідеальних фільтрів: нижніх частот, верхніх частот, смугового та режекторного. Чи можлива побудова ідеальних фільтрів на практиці?

3. Який RC–ланцюжок є фільтром нижніх частот: – інтегрувальний чи диференціювальний? Вивести амплітудно–частотну та фазо–частотну характеристики RC–ланцюжка як фільтру нижніх частот. Яка частота зрізу такого фільтра? Який вигляд має амплітудно–частотна характеристика такого фільтра в децибелах? Який її нахил в децибелах на великих частотах в логарифмічному масштабі?

4. Який RC–ланцюжок є фільтром верхніх частот: інтегрувальний чи диференціювальний? Вивести амплітудно–частотну та фазо–частотну характеристики RC–ланцюжка як фільтра верхніх частот. Яка частота зрізу такого фільтра? Який вигляд має амплітудно–частотна характеристика такого фільтра в децибелах? Який її нахил у децибелах на малих частотах у логарифмічному масштабі?

5. Вивести амплітудно–частотну та фазо–частотну характеристики послідовного RLC–контур як смугового фільтра. Який безрозмірний параметр задає вигляд цих характеристик? Які частоти зрізу такого фільтра? Який вигляд має амплітудно–частотна характеристика такого фільтра в децибелах? Який її нахил у децибелах на малих та великих частотах у логарифмічному масштабі?

6. Вивести амплітудно–частотну та фазо–частотну характеристики моста Віна з однаковими резисторами та конденсаторами як смугового фільтра. Яке максимально можливе відношення амплітуд виходу та входу досягне при використанні такого фільтра, та при якій частоті вхідного сигналу воно досягається? Які частоти зрізу такого фільтра? Який вигляд має амплітудно–

частотна характеристика такого фільтра в децибелах? Який її нахил у децибелах на малих та великих частотах у логарифмічному масштабі?

7. Вивести амплітудно–частотну та фазо-частотну характеристики моста Віна–Робінсона як режекторного фільтра. Які частоти зрізу такого фільтра? При якій частоті вхідного сигналу сигнал подавляється повністю (тобто амплітуда вихідного сигналу дорівнює нулю)?

## 8. Фільтри Баттерворта, Чебишова та Кауера

### 8.1. Анотація

Наведено відомості про такі поширені фільтри нижніх частот, як Баттерворта, Чебишова першого та другого роду та Кауера. Наведено амплітудно–частотні характеристики цих фільтрів та зроблено порівняння цих фільтрів між собою. Наведено реалізації кожного з цих фільтрів другого порядку з детальним виведенням амплітудно–частотні характеристик розглянутих схем та виведенням співвідношень між параметрами схеми, при яких розглянуті схеми є відповідними фільтрами.

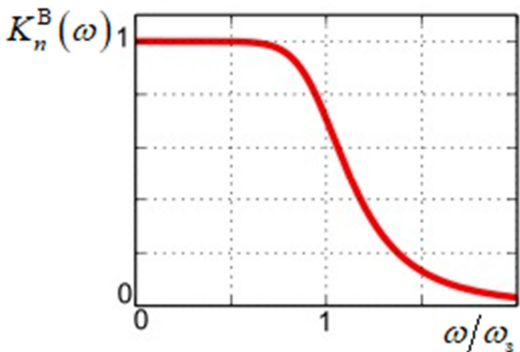
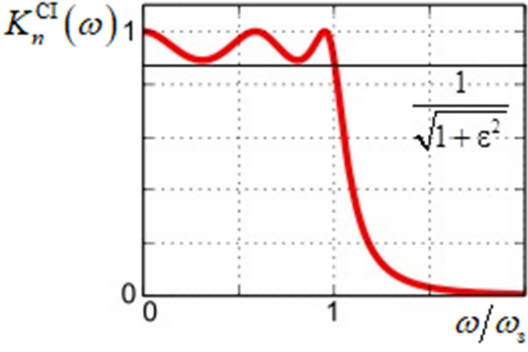
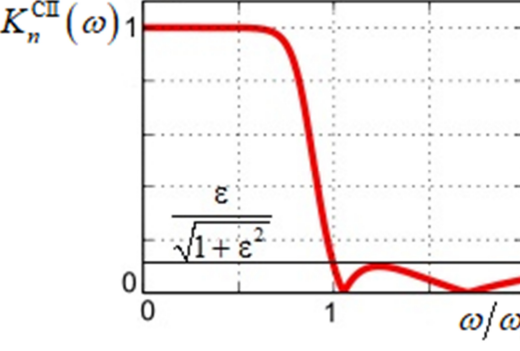
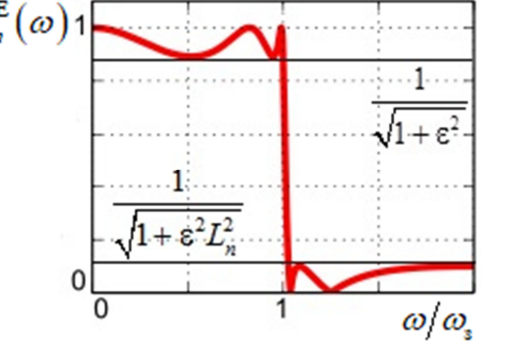
Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати амплітудно–частотні характеристики фільтрів нижніх частот Баттерворта, Чебишова 1 та 2 роду і Кауера. Для фільтрів одного порядку уміти порівнювати між собою швидкість спадання амплітудно–частотної характеристики на межі смуг пропускання і подавлення. Знати, які з цих фільтрів мають пульсації у смузі пропускання та у смузі подавлення.
- Знати фізичний зміст параметра пульсацій та діапазон можливих значень цього параметра. Уміти виводити залежність розмаху пульсацій амплітудно–частотних характеристик вищеназваних фільтрів від параметра пульсацій у смузі пропускання та у смузі подавлення.
- Знати фізичний зміст параметра крутизни та діапазон можливих значень цього параметра? Знати, при яких значеннях цього параметра фільтр Кауера переходить у фільтр Чебишова 1 роду.
- Знати, в яких режимах може працювати ідеальний операційний підсилювач та в якому режимі працює операційний підсилювач на схемах, на яких реалізовано вищеназвані фільтри.
- Знати схеми, на якій можна реалізувати фільтри другого порядку Баттерворта, Чебишова 1 і 2 роду та Кауера. Вміти виводити АЧХ відповідних схем та вміти виводити співвідношення між параметрами схем, при яких вони працюють як вище названі фільтри.

## 8.2. АЧХ фільтрів Баттерворта, Чебишова та Кауера

На прикладі ФНЧ розглянемо фільтри Баттерворта, Чебишова та Кауера. Як відомо, в ідеальному випадку АЧХ ФНЧ має вигляд, зображений на рис. 7.1, проте цей ідеальний випадок є недосяжним на практиці. Одними з найвідоміших фільтрів, які можна побудувати на практиці, є фільтри Баттерворта, Чебишова та Кауера. Для порівняння вигляд АЧХ цих фільтрів (для фільтрів однакового порядку) наведено в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Порівняння АЧХ фільтрів Баттерворта, Чебишова та Кауера

 <p>Рисунок 8.1 – АЧХ фільтра Баттерворта</p>	 <p>Рисунок 8.2 – АЧХ фільтра Чебишова I роду</p>
 <p>Рисунок 8.3 – АЧХ фільтра Чебишова II роду</p>	 <p>Рисунок 8.4 – АЧХ фільтру Кауера (еліптичного фільтру)</p>

Аналітичні вирази для цих АЧХ є такими. АЧХ фільтра Баттерворта  $n$ -го порядку має вигляд

$$K_n^B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_3)^{2n}}}, \quad (8.1)$$

тут і надалі  $\omega_3$  – кутова частота зрізу фільтра. АЧХ фільтрів Чебишова першого та другого роду  $n$ -го порядку є такою:

$$K_n^{CI}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cdot T_n(\omega/\omega_3))^2}}, \quad K_n^{CII}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cdot T_n(\omega_c/\omega))^{-2}}}, \quad (8.2)$$

де  $\varepsilon \in (0,1)$  – параметр пульсацій та  $T_n(\omega/\omega_3)$  – поліноми Чебишова першого роду, які визначаються як

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right). \quad (8.3)$$

Для прикладу наведемо перші декілька поліномів Чебишова першого роду:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1. \quad (8.4)$$

АЧХ фільтра Кауера (який ще називають еліптичним фільтром, або фільтром Золотарьова)  $n$ -го порядку є такою:

$$K_n^E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cdot R_n(\xi, \omega/\omega_c))^2}}, \quad (8.5)$$

де  $R_n(\xi, \omega/\omega_c)$  – раціональна еліптична функція порядку  $n$ ,  $\varepsilon \in (0,1)$  – параметр пульсацій та  $\xi \in (1, \infty)$  – параметр крутизни фільтра (його ще називають параметром селективності).

Як бачимо, АЧХ фільтра Баттерворта є практично погою в смузі пропускання, у фільтрі Баттерворта відсутні пульсації як у смузі пропускання, так і в смузі подавлення, проте згасання АЧХ у смузі подавлення є найменш швидким з усіх перелічених у цьому розділі фільтрів.

Фільтр Чебишова має швидше за фільтр Баттерворта падіння АЧХ у смузі подавлення, проте в залежності від роду фільтра в АЧХ наявні пульсації або в смузі пропускання, або в смузі подавлення.

Фільтр Баттерворта має найшвидше падіння АЧХ, проте для нього характерні пульсації як у смузі подавлення, так і в смузі пропускання.

Доведемо зараз певні властивості АЧХ фільтрів Чебишова та Кауера. Розглянемо поліном Чебишова від аргументу, що належить проміжку від  $-1$  до  $1$ . Такий аргумент можна уявити собі як косинус деякого кута. Відповідно, згідно з (8.3)

$$\begin{aligned} T_n(\cos \theta) &= \frac{1}{2} \left( \left( \cos \theta + i\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right)^n + \left( \cos \theta - i\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right)^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n \right) = \frac{1}{2} \left( (e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n \right), \end{aligned} \quad (8.6)$$

$i$  – комплексна одиниця, останнє перетворення зроблене на основі формули Ейлера. Продовжуючи викладку, матимемо

$$T_n(\cos \theta) = \frac{1}{2} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \cos(n\theta), \quad (8.7)$$

відповідний результат виписано на основі відомих тотожностей

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}). \quad (8.8)$$

Відповідно, на основі (8.7) можна дійти висновку, що при  $|x| \leq 1$   $|T_n(x)| \leq 1$ .

Тоді на основі (8.2) доходимо висновку, що при  $\omega/\omega_3 \geq 1$   $1 \geq K_n^{\text{CI}}(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ ,

що відмічено на рис. 8.2. Також на основі (8.2) бачимо, що при  $\omega_c/\omega \geq 1$

$0 \leq K_n^{\text{CII}}(\omega) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ , що відмічено на рис. 8.3.

У загальному випадку раціональні еліптичні функції вельми громіздко виражаються через спеціальні функції. Вирази для функцій  $R_1(\xi, x)$  та  $R_2(\xi, x)$  є такими:

$$R_1(\xi, x) = x, \quad R_2(\xi, x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - \xi^{-2}})x^2 - 1}{(-1 + \sqrt{1 - \xi^{-2}})x^2 + 1}. \quad (8.9)$$

Як відомо, раціональні еліптичні функції мають властивість

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} R_n(\xi, x) = T_n(x). \quad (8.10)$$

Так, наприклад, на основі (8.9) та (8.4) можна продемонструвати виконання співвідношення (8.10) для перших двох раціональних еліптичних функцій:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} R_1(\xi, x) = x = T_1(x), \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} R_2(\xi, x) = 2x^2 - 1 = T_2(x). \quad (8.11)$$

Відповідно, на основі (8.5), (8.2) та (8.10) бачимо, що

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} K_n^E(\omega) = K_n^{CI}(\omega), \quad (8.12)$$

тобто при  $\xi \rightarrow \infty$  фільтр Кауера перетворюється на фільтр Чебишова першого роду. Відповідно, при великих  $\xi$  нахил АЧХ фільтра Кауера поблизу частоти зрізу майже співпадає з відповідним нахилом АЧХ фільтра Чебишова, та чим ближчий параметр  $\xi$  до одиниці, тим крутішим є нахил АЧХ фільтра Кауера. Без виведення наведемо факт, що розмах пульсацій АЧХ фільтра Кауера в смузі пропускання задається лише параметром пульсацій, а у смузі подавлення – як параметром пульсацій, так і параметром крутизни, див. рис. 8.4. На рис. 8.4. також застосоване позначення

$$L_n = R_n(\xi, \xi). \quad (8.13)$$

### 8.3. Короткі відомості про операційний підсилювач

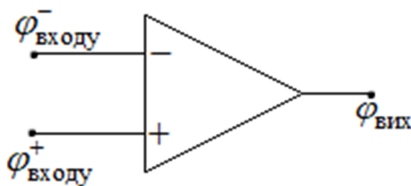


Рисунок 8.5

Ідеальний операційний підсилювач (ОП) – пристрій, що має два входи (їх позначають «+» та «-») та один вихід. Умовно-графічне зображення операційного підсилювача (для простоти, без входів живлення), наведене на рис. 8.5. ОП потребує свого

власного живлення, яке вважається симетричним, тобто  $\varphi_{\text{живлення}}^+ = -\varphi_{\text{живлення}}^-$ .

Ідеальний ОП може працювати в двох режимах, що перелічені нижче.

1. Режим, коли ОП вирівнює потенціали своїх входів:

$$\varphi_{\text{входу}}^+ = \varphi_{\text{входу}}^- \quad (8.14)$$

Саме такий режим реалізовується в схемах, що наведені в цій главі. У такому режимі вихідний потенціал ОП може змінюватись у діапазоні

$\varphi_{\text{вих}} \in (-\varphi_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})$ , де  $\varphi_{\text{max}}$  залежить як від будови самого ОП, так і від параметрів мережі, до якої ОП підключено. Завжди виконується нерівність  $\varphi_{\text{max}} \leq \varphi_{\text{живлення}}^+$ , часто  $\varphi_{\text{max}}$  оцінюють як  $\varphi_{\text{max}} \sim (0,8 \div 0,9)\varphi_{\text{живлення}}^+$ . У схемах, що наведені в цій главі, параметр  $\varphi_{\text{max}}$  за умовчанням вважається більшим за амплітуду сигналів у колі.

2. Режим компаратора, коли потенціали входів не вирівнюються. У такому режимі

$$\varphi_{\text{вих}} = \begin{cases} \varphi_{\text{max}}, \varphi_{\text{входу}}^+ > \varphi_{\text{входу}}^- \\ -\varphi_{\text{max}}, \varphi_{\text{входу}}^+ < \varphi_{\text{входу}}^- \end{cases} \quad (8.15)$$

Вхідний опір ідеального ОП дорівнює нескінченності, тобто струм не входить до ідеального ОП. Цього факту та того, що  $\varphi_{\text{входу}}^+ = \varphi_{\text{входу}}^-$ , повністю достатньо для математичного опису схем, наведених у цій главі.

#### 8.4. Реалізація ФНЧ Баттерворта другого порядку

У цьому підрозділі розглянемо реалізацію фільтра нижніх частот Баттерворта другого порядку. Схему, за допомогою якої можна реалізувати такий фільтр, наведено на рис. 8.6.

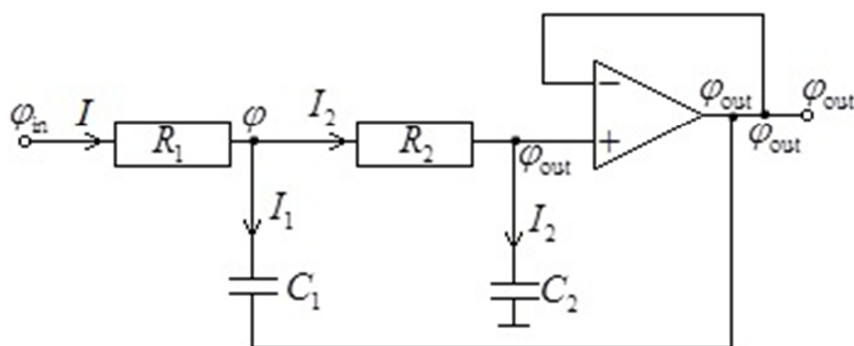


Рисунок 8.6 – Реалізація ФНЧ Баттерворта другого порядку

Тут введено такі позначення:  $\varphi_{\text{in}}$  – вхідний потенціал схеми,  $\varphi_{\text{out}}$  – вихідний потенціал. Операційний підсилювач вважається ідеальним та



вирівнює потенціали на своїх входах, струм не входить до операційного підсилювача. Відповідно, цю схему можна описати такими рівняннями:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_1(t) + I_2(t), \quad \varphi_{\text{in}}(t) - \varphi(t) = I(t) \cdot R_1, \quad \varphi(t) - \varphi_{\text{out}}(t) = q_1(t)/C_1, \\ \dot{q}_1(t) &= I_1(t), \quad \varphi(t) - \varphi_{\text{out}}(t) = I_2(t) \cdot R_2, \\ \varphi_{\text{out}}(t) - 0 &= \frac{q_2(t)}{C_2}, \quad \dot{q}_2(t) = I_2(t), \end{aligned} \quad (8.16)$$

$q_{1,2}$  – заряди конденсаторів  $C_{1,2}$  відповідно. Слід зауважити, що для такої схеми потенціали входів підсилювача й потенціал виходу підсилювача є однаковими через рівність вхідних потенціалів та той факт, що вихід ОП з'єднаний голим дротом з від'ємним входом ОП. Після певних перетворень на основі (8.16) можна отримати таке диференційне рівняння для  $q_2(t)$ :

$$\ddot{q}_2(t)C_1R_2R_1 + \dot{q}_2(t)(R_1 + R_2) + \frac{q_2(t)}{C_2} = \varphi_{\text{in}}(t). \quad (8.17)$$

Обчисливши з цього рівняння функцію  $q_2(t)$ , вихідний потенціал, очевидно, обчислюється як

$$\varphi_{\text{out}}(t) = \frac{q_2(t)}{C_2}. \quad (8.18)$$

Нехай вхідний потенціал схеми має вигляд

$$\varphi_{\text{in}}(t) = A \cos(\omega t). \quad (8.19)$$

Тоді перепишемо рівняння (8.17) як

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2(t) + a\dot{q}_2(t) + bq_2(t) &= \gamma \cos(\omega t), \\ a = \frac{(R_1 + R_2)}{C_1R_2R_1} > 0, \quad b = \frac{1}{R_2R_1C_1C_2} > 0, \quad \gamma &= \frac{A}{C_1R_2R_1}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Таке рівняння нами вже розглядалось, наприклад, у підрозділі 4.4. Випишемо його розв'язок в усталеному режимі роботи кола:

$$q_2(t) = \gamma \frac{b - \omega^2}{a^2\omega^2 + (b - \omega^2)^2} \cos(\omega t) + \gamma \frac{a\omega}{a^2\omega^2 + (b - \omega^2)^2} \sin(\omega t). \quad (8.21)$$

Відповідно, вихідний потенціал

$$\varphi_{\text{out}}(t) = \frac{\gamma}{C_2 \sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}} (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), \quad (8.22)$$

де

$$\alpha = \frac{b - \omega^2}{\sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}} \in (-1, 1), \quad \beta = \frac{a\omega}{\sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}} \in (0, 1), \quad (8.23)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Тож існує кут  $\psi$  такий, що

$$\alpha = \sin \psi, \quad \beta = \cos \psi, \quad (8.24)$$

та

$$\varphi_{\text{out}}(t) = \frac{\gamma}{C_2 \sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \psi), \quad (8.25)$$

звідки АЧХ запропонованої схеми

$$K(\omega) = \frac{\gamma}{C_2 \sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}}. \quad (8.26)$$

На основі (8.20) можна виписати явний вигляд цієї АЧХ:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{C_2^2 (R_1 + R_2)^2 \omega^2 + (1 - C_1 C_2 R_1 R_2 \omega^2)^2}} = \\ &= \left( 1 + \left[ C_2^2 (R_1 + R_2)^2 - 2C_1 C_2 R_1 R_2 \right] \omega^2 + (C_1 C_2 R_1 R_2)^2 \omega^4 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

На основі (8.1) бачимо, що повинна реалізуватись АЧХ у вигляді

$$K(\omega) = \left( 1 + (\omega/\omega_3)^4 \right)^{-1/2}, \quad (8.28)$$

тож на основі порівняння (8.27) та (8.28) отримуємо

$$C_2^2 (R_1 + R_2)^2 = 2C_1 C_2 R_1 R_2, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}. \quad (8.29)$$

Тож якщо виконуються умови (8.29), то схема на рис. 8.6. є ФНЧ

Баттєрворта другого порядку з частотою зрізу  $\omega_3 = (C_1 C_2 R_1 R_2)^{-1/2}$ .

### 8.5. Реалізація ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку

У цьому підрозділі розглянемо реалізацію ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку. Схему, на основі якої реалізується цей фільтр, представлено на рис. 8.7. Позначення на цій схемі такі ж, як і на рис. 8.6.

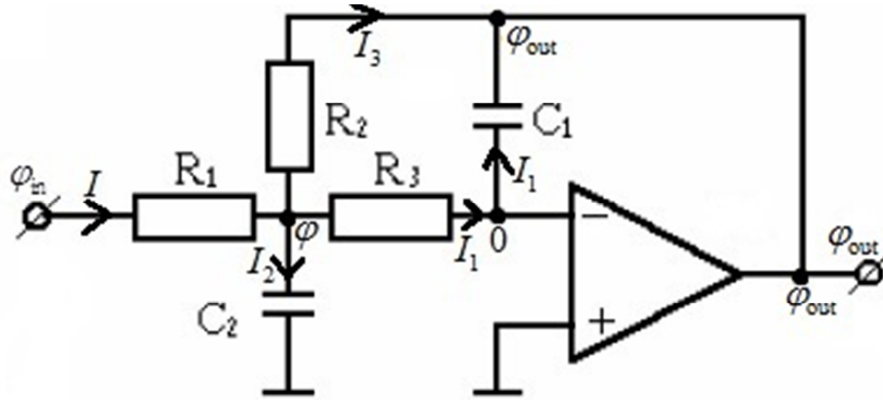


Рисунок 8.7 – Реалізація ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку

Така схема описується такими рівняннями:

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad \dot{q}_1(t) = I_1(t), \quad \dot{q}_2(t) = I_2(t),$$

$$\varphi_{in}(t) - \varphi(t) = I(t) \cdot R_1, \quad \varphi(t) - 0 = \frac{q_2(t)}{C_2}, \quad 0 - \varphi_{out}(t) = \frac{q_1(t)}{C_1}, \quad (8.30)$$

$$\varphi(t) - 0 = I_1(t)R_3, \quad \varphi(t) - \varphi_{out}(t) = I_3(t)R_2,$$

$q_{1,2}$  – заряди конденсаторів  $C_{1,2}$  відповідно. Вхідний потенціал розглядаємо у формі

$$\varphi_{in}(t) = A \cos(\omega t). \quad (8.31)$$

Після певних перетворень можна на основі (8.30) отримати диференційне рівняння для функції  $q_1(t)$  та зв'язок вихідного потенціалу з цією функцією:

$$\ddot{q}_1(t) + a\dot{q}_1(t) + bq_1(t) = \gamma \cos(\omega t), \quad \varphi_{out}(t) = -q_1(t)/C_1,$$

$$a = \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right), \quad b = \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_2}, \quad \gamma = \frac{A}{C_2 R_3 R_1}. \quad (8.32)$$

Міркуваннями, аналогічними до попереднього підрозділу, можна показати, що АЧХ цієї схеми набуватиме вигляду

$$K(\omega) = \frac{\gamma}{AC_1 \sqrt{a^2 \omega^2 + (b - \omega^2)^2}}, \quad (8.33)$$

що після підстановки параметрів з (8.32) дає

$$K(\omega) = \left[ x^4 + \left\{ \left( R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \right)^2 \frac{C_1}{C_2 R_3 R_1} - 2 \frac{R_1}{R_2} \right\} x^2 + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (8.34)$$

$$x = \omega \sqrt{C_1 C_2 R_3 R_1}.$$

На основі (8.2) бачимо, що явний вигляд АЧХ, який треба отримати, такий:

$$K(\omega) = \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( 2 \frac{\omega^2}{\omega_3^2} - 1 \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[ 4\varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right)^4 - 4\varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right)^2 + 1 + \varepsilon^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.35)$$

Вирази (8.34) та (8.35) мають співпадати. Наприклад, цього можна добитись таким чином. Припустимо, що  $\omega_3 = (C_1 C_2 R_3 R_1)^{-1/2}$ , тоді  $x = \omega/\omega_3$  та згідно з (8.35)

$$K(\omega) = \left[ 4\varepsilon^2 x^4 - 4\varepsilon^2 x^2 + 1 + \varepsilon^2 \right]^{-1/2}, \quad x = \omega/\omega_3. \quad (8.36)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при поліномах у  $x^4$ ,  $x^2$  та  $x^0$  в (8.36) та (8.34), отримуємо:

$$4\varepsilon^2 = 1, \quad 4\varepsilon^2 = 2 \frac{R_1}{R_2} - \left( R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \right)^2 \frac{C_1}{C_2 R_3 R_1}, \quad \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \varepsilon^2 + 1, \quad (8.37)$$

що приводить до

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{5} - 1 = \left( R_1 + R_3 + \frac{\sqrt{5}}{2} R_3 \right)^2 \frac{C_1}{C_2 R_3 R_1}, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (8.38)$$

Підведемо підсумок: якщо виконуються умови (8.38), тоді схема на рис. 8.7. є ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку з частотою зрізу  $\omega_3 = (C_1 C_2 R_3 R_1)^{-1/2}$  та параметром пульсацій  $\varepsilon = 0.5$ .

Наприклад, у випадку  $R_1 = R_3 = R$  та  $C_2 = C$  інші параметри схеми слід обирати такими:

$$R_2 = 2R/\sqrt{5}, \quad C_1 = 4(\sqrt{5} - 1)C / (4 + \sqrt{5})^2. \quad (8.39)$$

Слід зауважити, що на основі схеми на рис. 8.7. можна реалізувати також і ФНЧ Баттерворта другого порядку.

### 8.6. Реалізація ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку

Схема, наведена на рис. 8.8, називається біквратною ланкою. На ній можна реалізувати й фільтр Баттерворта, і фільтри Чебишова 1 та 2 роду, і фільтр Кауера. Основну увагу приділимо саме реалізації останніх двох фільтрів.

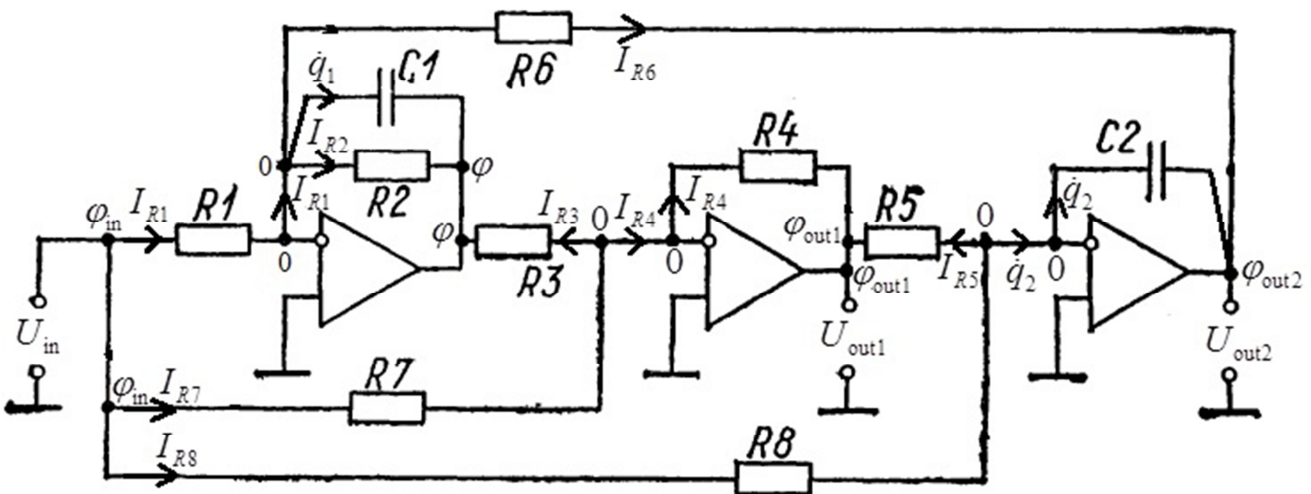


Рисунок 8.8 – Реалізація ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку та ФНЧ Кауера другого порядку

Слід зауважити, що при  $R_7 = R_8 = \infty$  на основі такої схеми можна реалізувати ФНЧ Баттерворта або Чебишова першого роду, в такому випадку вихідним потенціалом схеми є  $\varphi_{out2}$ .

Якщо ж  $R_7 R_2 = R_1 R_3$ , тоді фільтр Чебишова другого роду або фільтр Кауера (еліптичний фільтр) можуть бути реалізовані та вихідним потенціалом є  $\varphi_{out1}$ .

Цей підрозділ присвячено реалізації ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку. Схема на рис.8.8. може бути описана такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{in}}(t) - 0 &= I_{R1}(t)R_1 = I_{R7}(t)R_7 = I_{R8}(t)R_8, \\ 0 - \varphi(t) &= I_{R2}(t)R_2 = I_{R3}(t)R_3 = q_1(t)/C_1, \\ 0 - \varphi_{\text{out1}}(t) &= I_{R4}(t)R_4 = I_{R5}(t)R_5, \quad 0 - \varphi_{\text{вых2}}(t) = I_{R6}(t)R_6 = q_2(t)/C_2, \\ I_{R1}(t) &= I_{R2}(t) + I_{R6}(t) + \dot{q}_1(t), \\ I_{R7}(t) &= I_{R3}(t) + I_{R4}(t), \quad I_{R8}(t) = I_{R5}(t) + \dot{q}_2(t), \end{aligned} \quad (8.40)$$

де  $I_{Rj}$  – струм через резистор  $R_j$ ,  $j = \overline{1,8}$  та  $q_{1,2}$  – заряди конденсаторів  $C_{1,2}$  відповідно. На основі (8.40) шляхом доволі громіздких перетворень може бути отримано таке диференційне рівняння для  $q_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2(t) + \dot{q}_2(t) \frac{1}{C_1 R_2} + q_2(t) \frac{R_4}{C_1 C_2 R_3 R_5 R_6} = \\ = \varphi_{\text{in}}(t) \frac{R_4}{C_1 R_3 R_5} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_2} \frac{1}{R_7} + \frac{R_3 R_5}{R_2 R_8 R_4} \right) - \dot{\varphi}_{\text{in}}(t) \frac{R_4}{R_5} \left( \frac{1}{R_7} - \frac{R_5}{R_8 R_4} \right). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Як зазначено вище, при реалізації ФНЧ Чебишова другого роду слід зібрати схему так, щоб виконувалось співвідношення

$$R_7 R_2 = R_1 R_3. \quad (8.42)$$

Розглянемо вхідний потенціал у вигляді

$$\varphi_{\text{in}}(t) = A \cos(\omega t). \quad (8.43)$$

Тоді на основі (8.43), (8.42) та (8.41) можна отримати таке диференційне рівняння для функції  $q_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2(t) + a \dot{q}_2(t) + b q_2(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t), \\ a = \frac{1}{C_1 R_2} > 0, \quad b = \frac{R_4}{C_1 C_2 R_3 R_5 R_6} > 0, \quad c = \frac{A}{C_1 R_2 R_8}, \quad d = A \omega \frac{R_4}{R_5} \left( \frac{1}{R_7} - \frac{R_5}{R_8 R_4} \right). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння експоненціально згасає (див. відповідні міркування при розгляді аналогічних рівнянь, наприклад,

у підрозділі 4.4). Тож в усталеному режимі роботи кола шукаємо розв'язок для  $q_2(t)$  у вигляді

$$q_2(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t). \quad (8.45)$$

Підставляючи (8.45) у (8.44), беручи відповідні похідні та збираючи окремо члени при  $\cos(\omega t)$  та при  $\sin(\omega t)$ , матимемо

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \{ \alpha(b - \omega^2) + \beta \cdot a\omega \} + \sin(\omega t) \{ \beta(b - \omega^2) - \alpha \cdot a\omega \} = \\ = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (8.46)$$

звідки маємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha(b - \omega^2) + \beta \cdot a\omega = c, \quad \beta(b - \omega^2) - \alpha \cdot a\omega = d, \quad (8.47)$$

розв'язок якої є таким:

$$\alpha = \frac{c(b - \omega^2) - da\omega}{a^2\omega^2 + (b - \omega^2)^2}, \quad \beta = \frac{ca\omega + d(b - \omega^2)}{a^2\omega^2 + (b - \omega^2)^2}. \quad (8.48)$$

На основі (8.40) можна показати, що вихідний потенціал  $\varphi_{\text{out1}}(t)$  таким чином виражається через  $q_2(t)$ :

$$\varphi_{\text{out1}}(t) = -R_5 \left( \frac{\varphi_{\text{in}}(t)}{R_8} - \dot{q}_2(t) \right). \quad (8.49)$$

На основі (8.45), (8.48), (8.49) та (8.43) за допомогою методу допоміжного кута можна отримати таку АЧХ цієї схеми:

$$K(\omega) = \frac{R_5}{A} \sqrt{\left( \beta\omega - \frac{A}{R_8} \right)^2 + \alpha^2\omega^2}. \quad (8.50)$$

Після підстановки параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  з (8.48) та (8.44) в (8.50) після громіздкого обчислення можна отримати такий явний вигляд АЧХ цієї схеми:

$$K(\omega) = \left| \frac{R_4}{R_7} \omega^2 - \frac{R_4}{C_1 C_2 R_3 R_6 R_8} \right| / \sqrt{\frac{1}{R_2^2 C_1^2} \omega^2 + \left( \frac{R_4}{C_1 C_2 R_3 R_5 R_6} - \omega^2 \right)^2}. \quad (8.51)$$

Нагадуємо, що цей результат отримано для випадку  $R_7 R_2 = R_1 R_3$ .

Як відомо з (8.2) та (8.4), АЧХ ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку має такий вигляд:

$$K(\omega) = \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon^2 \left( 2\left(\frac{\omega_3^2}{\omega^2}\right) - 1 \right)^2} \right]^{-1/2} = \frac{\varepsilon |2\omega_3^2 - \omega^2|}{\sqrt{4\varepsilon^2 \omega_3^4 - 4\omega_3^2 \varepsilon^2 \cdot \omega^2 + (\varepsilon^2 + 1)\omega^4}}. \quad (8.52)$$

Як бачимо з (8.52) та (8.51), *ідеальний ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку неможливо побудувати на основі цієї схеми*, бо коефіцієнт при  $\omega^4$  під коренем квадратним у знаменнику виразу (8.52) дорівнює  $\varepsilon^2 + 1$ , на той час як той же коефіцієнт у (8.51) дорівнює 1. *Тим не менш, на основі рис.8.8. можна реалізувати схему, АЧХ якої є дуже близьким до АЧХ ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку*. Щоб це зробити, покладемо

$$\varepsilon = \frac{R_4}{R_7}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{R_7}{2C_1 C_2 R_6 R_3 R_8}} \quad (8.53)$$

та

$$R_8 = R_5, \quad \frac{1}{C_1 R_2^2} = \frac{2R_4}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left( 1 - \frac{R_4}{R_7} \right), \quad \frac{R_4}{R_7} \ll 1. \quad (8.54)$$

У такому випадку вираз (8.51) може бути переписаний як

$$K(\omega) = \frac{\varepsilon |\omega^2 - 2\omega_3^2|}{\sqrt{4\varepsilon^2 \omega_3^4 - 4\varepsilon^2 \omega_3^2 \omega^2 + \omega^4}}, \quad (8.55)$$

та єдина відмінність виразів (8.55) і (8.52) полягає у відмінності коефіцієнта при  $\omega^4$  всередині квадратного кореня в знаменнику. Якщо  $\varepsilon = R_4/R_7 \ll 1$ , тоді  $\varepsilon^2 + 1 \approx 1$  та вирази (8.55) і (8.52) є практично однаковими.

Підведемо підсумок: *якщо виконуються умови (8.54) та (8.42), тоді з гарною точністю схема на рис. 8.8. є ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку з параметром пульсацій  $\varepsilon$  та частотою зрізу  $\omega_3$ , що задаються виразами (8.53). Вихідним потенціалом схеми є  $\varphi_{\text{out1}}$ .*

Наприклад, якщо параметри  $R_{1-6}$  та  $C_2$  є заданими та нерівність



$$\frac{R_1 R_3}{R_2} \gg R_4 \quad (8.56)$$

виконується, то для реалізації ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку інші параметри схеми слід обирати такими:

$$R_7 = \frac{R_1 R_3}{R_2}, R_8 = R_5, C_1 = \left[ \frac{2R_4 R_2^2}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left( 1 - \frac{R_4}{R_7} \right) \right]^{-1}. \quad (8.57)$$

### 8.7. Реалізація фільтру Кауера другого порядку

Фільтр Кауера теж реалізується на схемі, зображеній на рис. 8.8., вихідним потенціалом схеми є  $\varphi_{out1}$ . Для реалізації фільтра Кауера теж має виконуватись умова (8.42). У цьому підрозділі на основі отриманої АЧХ (8.51) виводяться співвідношення між параметрами, при яких реалізовується фільтр Кауера.

На основі (8.5) та (8.9) бачимо, що АЧХ схеми має співпасти з такою:

$$K(\omega) = \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{(1+\mu)\omega^2 - \omega_3^2}{(-1+\mu)\omega^2 + \omega_3^2} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left| -(1-\mu)\omega^2 + \omega_3^2 \right| \times \quad (8.58)$$

$$\times \left[ \left\{ (-1+\mu)^2 + \varepsilon^2 (1+\mu)^2 \right\} \omega^4 + 2\omega_3^2 \left\{ (-1+\mu) - \varepsilon^2 (1+\mu) \right\} \omega^2 + \omega_3^4 (1+\varepsilon^2) \right]^{-1/2}, \mu = \sqrt{1 - \xi^{-2}}.$$

Результат (8.51) може бути переписаний як

$$K(\omega) = \left| -\frac{R_4}{R_7} \omega^2 + \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_8} \right| \times \left[ \omega^4 + \left( \frac{1}{C_1^2 R_2^2} - 2 \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_5} \right) \omega^2 + \left( \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_5} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.59)$$

Порівнюючи (8.58) та (8.59), отримуємо

$$\frac{R_4}{R_7} = 1 - \mu, \omega_3^2 = \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_8}, (-1+\mu)^2 + \varepsilon^2 (1+\mu)^2 = 1, \quad (8.60)$$

$$2\omega_3^2 \left\{ (-1+\mu) - \varepsilon^2 (1+\mu) \right\} = \frac{1}{C_1^2 R_2^2} - 2 \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_5},$$

$$\omega_3^4(1 + \varepsilon^2) = \left( \frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_5} \right)^2.$$

З (8.60) та (8.58) ми можемо отримати

$$\left( \frac{R_8}{R_5} \right)^2 = 1 + \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{(2 - (R_4/R_7))^2}, \quad \frac{1}{C_1 R_2^2} = \frac{2R_4}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left[ \frac{R_8}{R_5} - \frac{R_4}{R_7} - \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{2 - (R_4/R_7)} \right], \quad (8.61)$$

та

$$\frac{R_8}{R_5} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \frac{R_4}{R_7} = 1 - \sqrt{1 - \xi^{-2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_8}}. \quad (8.62)$$

Підведемо підсумок: якщо умови (8.61) та (8.42) виконуються, тоді схема на рис. 8.8 є еліптичним фільтром другого порядку з параметром пульсацій  $\varepsilon$ , параметром крутизни  $\xi$  та частотою зрізу  $\omega_3$ , що задані виразами (8.62).

Наприклад, якщо параметри  $R_{1-3,5,6}$ ,  $\xi$  та  $C_2$  задані, то всі інші параметри на схемі на рис. 8.8 мають визначатись таким чином для побудови фільтра Кауера (еліптичного фільтра) другого порядку:

$$R_7 = \frac{R_1 R_3}{R_2}, \quad R_4 = R_7 \left( 1 - \sqrt{1 - \xi^{-2}} \right), \quad R_8 = R_5 \sqrt{1 + \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{(2 - (R_4/R_7))^2}}, \quad (8.63)$$

$$C_1 = \left\{ \frac{2R_2^2 R_4}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left[ \frac{R_8}{R_5} - \frac{R_4}{R_7} - \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{2 - (R_4/R_7)} \right] \right\}^{-1}.$$

## 8.8. Резюме

АЧХ фільтрів Баттерворта, Чебишова 1 та 2 роду і Кауера наведені в таблиці 8.1. Порівняння АЧХ фільтрів однакового порядку дає наступне. АЧХ фільтра Баттерворта є практично пологою в смузі пропускання, у фільтрі Баттерворта відсутні пульсації як у смузі пропускання, так і в смузі подавлення, проте згасання АЧХ у смузі подавлення є найменш швидким з усіх перелічених у цьому розділі фільтрів. Фільтр Чебишова має швидше за фільтр Баттерворта падіння АЧХ у смузі подавлення, проте в залежності від роду фільтра в АЧХ

наявні пульсації або в смузі пропускання, або в смузі подавлення. Фільтр Кауера має найшвидше спадання АЧХ між смугами пропускання і подавлення, проте має пульсації як в смузі пропускання, так і в смузі подавлення.

Фільтр Баттерворта можна реалізувати на схемі, наведеній на рис. 8.6. Якщо виконуються умови

$$C_2^2 (R_1 + R_2)^2 = 2C_1 C_2 R_1 R_2, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \quad (8.64)$$

то схема на рис. 8.6. є ФНЧ Баттерворта другого порядку з частотою зрізу  $\omega_3 = (C_1 C_2 R_1 R_2)^{-1/2}$ .

Фільтр Чебишова 1 роду можна реалізувати на схемі, наведеній на рис. 8.7. Якщо виконуються умови

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{5} - 1 = \left( R_1 + R_3 + \frac{\sqrt{5}}{2} R_3 \right)^2 \frac{C_1}{C_2 R_3 R_1}, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad (8.65)$$

то схема на рис. 8.7. є ФНЧ Чебишова першого роду другого порядку з частотою зрізу  $\omega_3 = (C_1 C_2 R_3 R_1)^{-1/2}$  та параметром пульсацій  $\varepsilon = 0.5$ .

Фільтр Чебишова 2 роду та фільтр Кауера можна реалізувати на схемі, наведеній на рис. 8.8, з вихідним потенціалом  $\varphi_{out1}$ .

Якщо виконуються умови

$$R_7 R_2 = R_1 R_3, \quad R_8 = R_5, \quad \frac{1}{C_1 R_2^2} = \frac{2R_4}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left( 1 - \frac{R_4}{R_7} \right), \quad \frac{R_4}{R_7} \ll 1, \quad (8.66)$$

то з гарною точністю схема на рис. 8.8. є ФНЧ Чебишова другого роду другого порядку з параметром пульсацій  $\varepsilon$  та частотою зрізу  $\omega_3$ , що задаються виразами

$$\varepsilon = \frac{R_4}{R_7}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{R_7}{2C_1 C_2 R_6 R_3 R_8}}. \quad (8.67)$$

Якщо умови

$$R_7 R_2 = R_1 R_3, \quad \left( \frac{R_8}{R_5} \right)^2 = 1 + \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{(2 - (R_4/R_7))^2}, \quad (8.68)$$

$$\frac{1}{C_1 R_2^2} = \frac{2R_4}{C_2 R_6 R_3 R_8} \left[ \frac{R_8}{R_5} - \frac{R_4}{R_7} - \frac{1 - (R_4/R_7)^2}{2 - (R_4/R_7)} \right],$$

виконуються, то схема на рис. 8.8 є фільтром Кауера другого порядку з параметром пульсацій  $\varepsilon$ , параметром крутизни  $\xi$  та частотою зрізу  $\omega_3$ , що задані виразами

$$\frac{R_8}{R_5} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \frac{R_4}{R_7} = 1 - \sqrt{1 - \xi^{-2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{R_4}{C_1 C_2 R_6 R_3 R_8}}. \quad (8.69)$$

### 8.9. Питання для самоконтролю

1. Навести амплітудно–частотні характеристики фільтрів нижніх частот Баттерворта, Чебишова 1 та 2 роду і Кауера. Для фільтрів одного порядку порівняти між собою швидкість спадання амплітудно–частотної характеристики на межі смуг пропускання і подавлення. Які з цих фільтрів мають пульсації у смузі пропускання? У смузі подавлення?

2. Розкрити фізичний зміст параметра пульсацій. Яким є діапазон можливих значень цього параметра? Як залежить розмах пульсацій амплітудно–частотних характеристик вищеназваних фільтрів від параметра пульсацій у смузі пропускання? У смузі подавлення?

3. Розкрити фізичний зміст параметра крутизни. Яким є діапазон можливих значень цього параметра? При яких значеннях цього параметра фільтр Кауера переходить у фільтр Чебишова 1 роду?

4. В яких режимах може працювати ідеальний операційний підсилювач? В якому режимі працює операційний підсилювач на схемах, на яких реалізовано вищеназвані фільтри?

5. Навести схему, на якій можна реалізувати фільтр Баттерворта другого порядку. Вивести АЧХ цієї схеми та вказати, при яких співвідношеннях між

параметрами схеми вона працює як фільтр Баттерворта другого порядку. Чому дорівнює відповідна частота зрізу фільтра?

6. Навести схему, на якій можна реалізувати фільтр Чебишова першого роду другого порядку. Вивести АЧХ цієї схеми та вказати, при яких співвідношеннях між параметрами схеми вона працює як фільтр Чебишова першого роду другого порядку. Чому дорівнюють відповідна частота зрізу та параметр пульсацій фільтра?

7. Навести схему, на якій можна реалізувати фільтр Чебишова другого роду другого порядку. Вивести АЧХ цієї схеми та вказати, при яких співвідношеннях між параметрами схеми вона працює як фільтр Чебишова другого роду другого порядку. Чому дорівнюють відповідна частота зрізу та параметр пульсацій фільтра?

8. Навести схему, на якій можна реалізувати фільтр Кауера другого порядку. Вивести АЧХ цієї схеми та вказати, при яких співвідношеннях між параметрами схеми вона працює як фільтр Кауера другого порядку. Чому дорівнюють відповідна частота зрізу, параметр пульсацій та параметр крутизни фільтра?

## 9. Пасивні формувальні кола

### 9.1. Анотація

Розглянуто пасивні формувальні кола, що перетворюють синусоїду на імпульсну послідовність, та розглянуто, при яких параметрах кола вихідна імпульсна послідовність є дуже близькою до прямокутної. У дещо спрощеній моделі розглянуто задачу проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC–ланцюг у пасивних формувальних колах, що містять стабілітрон.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Уміти виводити точні часові залежності напруги на резисторі та зворотної напруги на стабілітроні при проходженні синусоїдальної напруги через послідовне з'єднання резистора та стабілітрона.
- Уміти виводити точні та наближені формули для тривалості фронту, зрізу, імпульсу та паузи імпульсної послідовності, що являє собою зворотну напругу на стабілітроні в схемі, описаній у першому питанні. Знати, при яких умовах така схема з хорошою точністю перетворює синусоїдальний сигнал на послідовність прямокутних імпульсів.
- Уміти виводити точні формули залежності напруги на резисторі та конденсаторі при проходженні послідовності додатних прямокутних імпульсів через RC–ланцюжок (час імпульсу дорівнює часу паузи).
- Уміти виводити наближені формули у випадках, коли період імпульсної послідовності є набагато більшим або набагато меншим за постійну часу RC–ланцюжка. Уміти фізично пояснювати отримані наближені формули. Знати, в якому випадку напруга на конденсаторі буде дуже близькою до кусково–лінійної функції.

### 9.2. Перетворення синусоїди на імпульсну послідовність

Розглянемо схему, що є послідовним з'єднанням резистора  $R$  та кремнієвого стабілітрона  $VD1$ , див. рис. 9.1. Вольт–амперна характеристика

(ВАХ) стабілітрона вважається ідеальною та наведена на рис. 9.2, де  $U_{ст}$  – напруга стабілізації стабілітрона. Слід зазначити, що використане зворотне підключення стабілітрона.

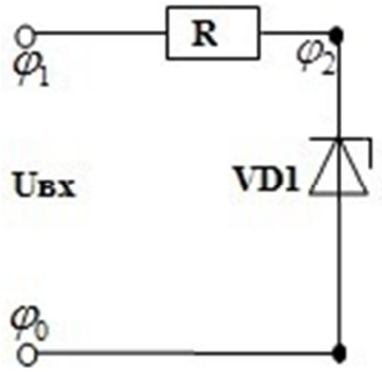


Рисунок 9.1

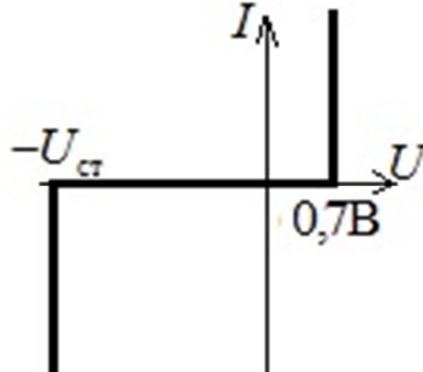


Рисунок 9.2

Порогове значення прямої напруги на стабілітроні вважається рівним

$$U_{0,7} = 0,7\text{В}, \quad (9.1)$$

це значення зумовлене внутрішньою структурою кремнієвого стабілітрона. Конкретне числове значення  $U_{ст}$  теж залежить лише від внутрішньої будови стабілітрона.

Вважається, що на входні клеми схеми на рис. 9.1 подано синусоїдальну напругу

$$\varphi_1(t) - \varphi_0(t) = E \sin(\omega t). \quad (9.2)$$

Відповідно, напруги на резисторі та стабілітроні

$$U_R(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \quad U_S(t) = \varphi_0(t) - \varphi_2(t), \quad (9.3)$$

звідки з урахуванням (9.2) маємо

$$U_R(t) - U_S(t) = E \sin(\omega t). \quad (9.4)$$

Можливі такі режими роботи цього кола:

1. Струм через стабілітрон не проходить. Згідно з наведеною на рис. 9.2. ВАХ, у такому режимі справедлива нерівність

$$-U_{ст} < U_S(t) < U_{0,7}. \quad (9.5)$$

Оскільки стабілітрон та резистор підключені послідовно, то в цьому режимі струм не проходить через резистор. Відповідно, напруга на резисторі дорівнюватиме нулю, і згідно з (9.4) матимемо

$$U_S(t) = -E \sin(\omega t), U_R(t) = 0. \quad (9.6)$$

Скомбінувавши (9.6) та (9.5), матимемо, що такий режим має місце при

$$-U_{\text{ст}} < -E \sin(\omega t) < U_{0,7} \Leftrightarrow -\frac{U_{0,7}}{E} < \sin(\omega t) < \frac{U_{\text{ст}}}{E}. \quad (9.7)$$

2. Струм через стабілітрон проходить у напрямку «проти стрілки». Тоді згідно з ВАХ стабілітрона та (9.4)

$$U_S(t) = -U_{\text{ст}}, U_R(t) = E \sin(\omega t) - U_{\text{ст}}. \quad (9.8)$$

Оскільки струм тече в колі «проти стрілки» стабілітрона, то матимемо нерівності

$$\varphi_0 < \varphi_2 < \varphi_1, \quad (9.9)$$

звідки з урахуванням (9.3) матимемо  $U_R(t) > 0$ . Звідси та на основі (9.8) доходимо висновку, що цей режим має місце при

$$E \sin(\omega t) - U_{\text{ст}} > 0 \Rightarrow \sin(\omega t) > \frac{U_{\text{ст}}}{E}. \quad (9.10)$$

3. Струм через стабілітрон проходить у напрямку «за стрілкою». Тоді згідно з ВАХ стабілітрона та (9.4)

$$U_S(t) = U_{0,7}, U_R(t) = E \sin(\omega t) + U_{0,7}. \quad (9.11)$$

Оскільки струм тече в колі «за стрілкою» стабілітрона, то матимемо нерівності

$$\varphi_0 > \varphi_2 > \varphi_1, \quad (9.12)$$

звідки з урахуванням (9.3) матимемо  $U_R(t) < 0$ . Звідси та на основі (9.11) доходимо висновку, що цей режим має місце при

$$E \sin(\omega t) + U_{0,7} < 0 \Leftrightarrow \sin(\omega t) < -\frac{U_{0,7}}{E}. \quad (9.13)$$

Підвівши підсумок вищесказаного, випишемо залежність  $U_R(t)$



$$U_R(t) = \begin{cases} E \sin(\omega t) + U_{0,7}, \sin(\omega t) < -U_{0,7}/E \\ E \sin(\omega t) - U_{\text{ст}}, \sin(\omega t) > U_{\text{ст}}/E \\ 0, -U_{0,7}/E < \sin(\omega t) < U_{\text{ст}}/E \end{cases}, \quad (9.14)$$

та залежність зворотної напруги на стабілітроні від часу:

$$\varphi_2(t) - \varphi_0(t) = -U_S(t) = \begin{cases} -U_{0,7}, \sin(\omega t) < -U_{0,7}/E \\ U_{\text{ст}}, \sin(\omega t) > U_{\text{ст}}/E \\ E \sin(\omega t), -U_{0,7}/E < \sin(\omega t) < U_{\text{ст}}/E \end{cases}. \quad (9.15)$$

Розв'язавши відповідні тригонометричні нерівності, перепишемо (9.14):

$$U_R(t) = \begin{cases} E \sin(\omega t) + U_{0,7}, \omega t \in (\pi + \beta + 2\pi n; 2\pi - \beta + 2\pi n) \\ E \sin(\omega t) - U_{\text{ст}}, \omega t \in (\alpha + 2\pi n; \pi - \alpha + 2\pi n) \\ 0, \text{інакше} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}, \quad (9.16)$$

де

$$\alpha = \arcsin(U_{\text{ст}}/E), \beta = \arcsin(U_{0,7}/E). \quad (9.17)$$

Аналогічно перепишемо (9.15):

$$\varphi_2(t) - \varphi_0(t) = -U_S(t) = \begin{cases} -U_{0,7}, \omega t \in (\pi + \beta + 2\pi n; 2\pi - \beta + 2\pi n) \\ U_{\text{ст}}, \omega t \in (\alpha + 2\pi n; \pi - \alpha + 2\pi n) \\ E \sin(\omega t), \text{інакше} \end{cases}. \quad (9.18)$$

Для наочності, графіки функцій (9.16) та (9.18) за один період проілюстровано на рис. 9.3. для параметрів  $E = 3\text{В}$ ,  $U_{\text{ст}} = 2\text{В}$ . Такі параметри навряд чи будуть реалізовані у фізичних задачах, проте дозволяють найбільш чітко проілюструвати всі нюанси побудови графіків цих функцій. Як бачимо, зворотна напруга на стабілітроні є імпульсною послідовністю з максимальним значенням, що дорівнює  $U_{\text{ст}}$ , та мінімальним значенням, що дорівнює  $-U_{0,7}$ . Тобто ця схема при вихідній напрузі, що дорівнює зворотній напрузі на стабілітроні, перетворює синусоїду на імпульсну послідовність.

Отримаємо формули для тривалості фронту, зрізу, імпульсу та паузи. Як бачимо з рис. 9.3, фронт починається в момент часу  $-\beta/\omega$  і завершується в момент часу  $\alpha/\omega$ .

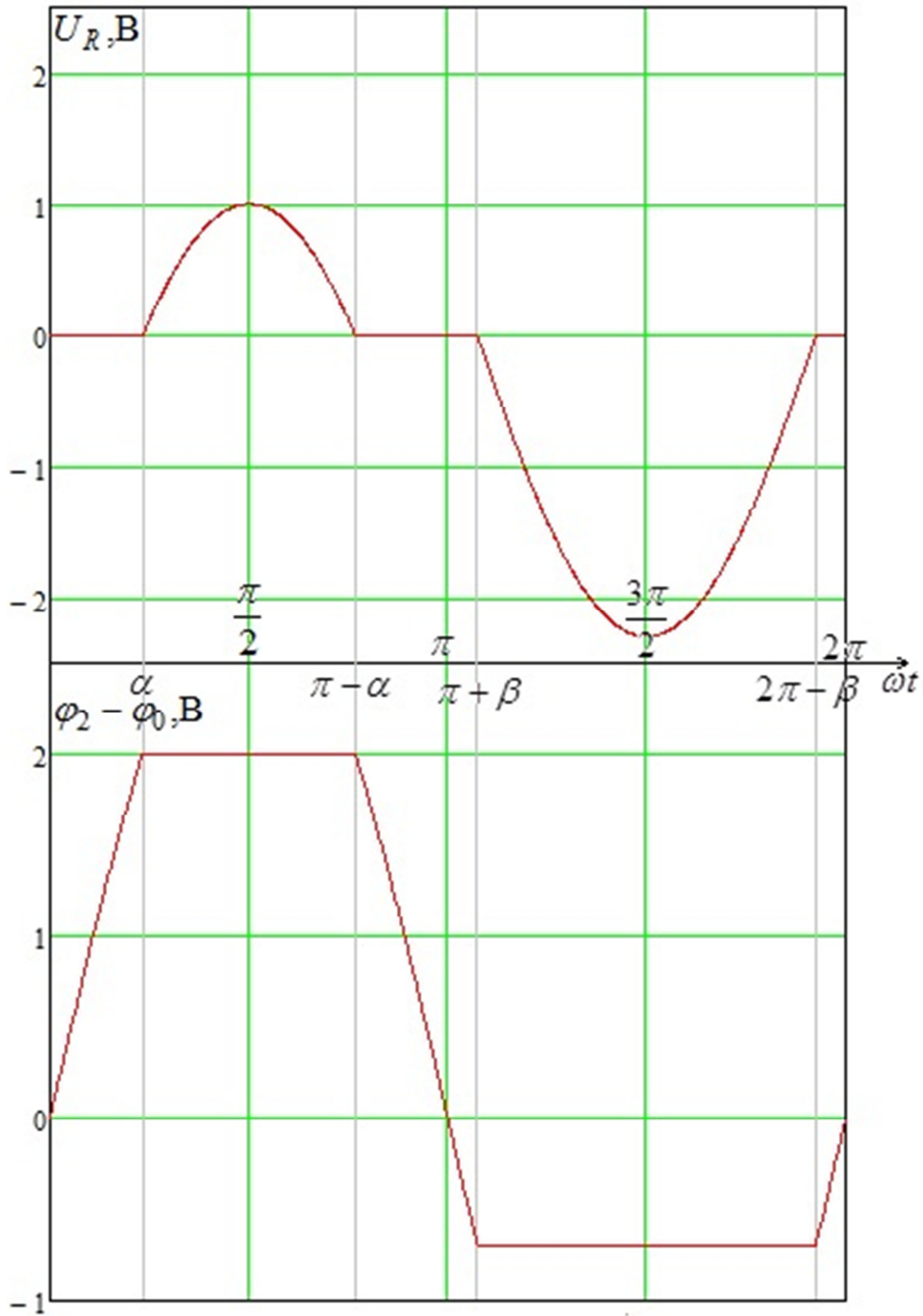


Рисунок 9.3

Відповідно, тривалість фронту

$$t_{\phi} = \frac{\alpha}{\omega} - \left(-\frac{\beta}{\omega}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{U_{\text{ст}}}{E}\right) + \arcsin\left(\frac{U_{0,7}}{E}\right) \right]. \quad (9.19)$$

Зріз починається в момент часу  $(\pi - \alpha)/\omega$  і завершується в момент часу  $(\pi + \beta)/\omega$ , звідки тривалість зрізу

$$t_3 = \frac{\pi + \beta}{\omega} - \frac{\pi - \alpha}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{U_{\text{ст}}}{E}\right) + \arcsin\left(\frac{U_{0,7}}{E}\right) \right]. \quad (9.20)$$

Тривалість імпульсу (тривалість, впродовж якої зворотна напруга на стабілітроні має максимальне значення), очевидно, така:

$$t_1 = \frac{\pi - \alpha}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[ \pi - 2 \arcsin\left(\frac{U_{\text{ст}}}{E}\right) \right]. \quad (9.21)$$

Тривалість паузи (тривалість, впродовж якої зворотна напруга на стабілітроні має мінімальне значення), очевидно, така:

$$t_{\text{п}} = \frac{2\pi - \beta}{\omega} - \frac{\pi + \beta}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[ \pi - 2 \arcsin\left(\frac{U_{0,7}}{E}\right) \right]. \quad (9.22)$$

Отримаємо тепер наближені формули для цих величин при  $U_{0,7} \ll U_{\text{ст}} \ll E$ . Саме таке співвідношення між параметрами найчастіше реалізовується на практиці. Як відомо, при  $|x| \ll 1$  арксинус розвивається в ряд Тейлора:

$$\arcsin x = x + O(x^3). \quad (9.23)$$

Відповідно, при  $U_{0,7} \ll U_{\text{ст}} \ll E$  матимемо

$$t_{\Phi} = t_3 = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{U_{\text{ст}}}{E} + \frac{U_{0,7}}{E} + O\left(\left(\frac{U_{\text{ст}}}{E}\right)^3, \left(\frac{U_{0,7}}{E}\right)^3\right) \right]. \quad (9.24)$$

Оскільки  $\frac{U_{\text{ст}}}{E} \gg \frac{U_{0,7}}{E}$ , то на основі (9.24) можна дійти висновку, що при

$\frac{U_{0,7}}{E} \gg \left(\frac{U_{\text{ст}}}{E}\right)^3$  наближена формула для тривалостей фронту й зрізу набуде вигляду

$$t_{\Phi} = t_3 \approx \frac{U_{\text{ст}} + U_{0,7}}{\omega E}. \quad (9.25)$$

Для тривалості імпульсу при  $U_{0,7} \ll U_{\text{ст}} \ll E$ , матимемо таке:

$$t_i = \frac{\pi}{\omega} + O\left(\frac{U_{ст}}{E}\right), \quad (9.26)$$

знехтувавши членами порядку  $U_{ст}/E$ , отримаємо

$$t_i \approx \pi/\omega. \quad (9.27)$$

Аналогічно, знехтувавши членами порядку  $U_{0,7}/E$ , отримаємо наближену формулу для тривалості паузи

$$t_{п} \approx \pi/\omega. \quad (9.28)$$

Тобто при  $U_{0,7} \ll U_{ст} \ll E$  тривалості фронту та зрізу є малими величинами, а тривалості імпульсу та паузи дорівнюють приблизно половині періоду. Тобто можна зробити висновок, що при  $U_{0,7} \ll U_{ст} \ll E$  зворотна напруга на стабілітроні фактично є послідовністю прямокутних імпульсів. Тобто при  $U_{0,7} \ll U_{ст} \ll E$  коло, зображене на рис. 9.1, фактично є перетворювачем синусоїдальної напруги на послідовність прямокутних імпульсів.

### 9.3. Проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC-ланцюг

Розглянемо схему на рис. 9.4. Вважаємо, що вхідна напруга є синусоїдою (9.2) та для параметрів стабілітрона виконується нерівність  $U_{0,7} \ll U_{ст} \ll E$ .

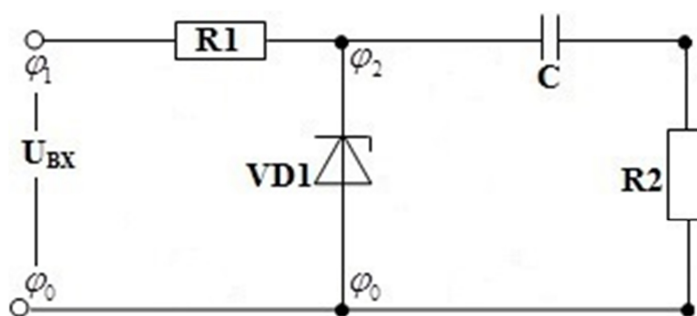


Рисунок 9.4

Слід зауважити, що точний математичний опис такої схеми набагато складніший за математичний опис схеми, наведеної на рис. 9.1. Тому обмежимося дещо спрощеним описом схеми на рис. 9.4.

1. Знехтуємо значенням  $U_{0,7}$  порівняно зі значенням  $U_{ст}$ .

2. Зазначимо, що для цієї схеми можна показати, що після проходження перехідного процесу в усталеному режимі роботи такої схеми зворотна напруга на стабілітроні може з хорошою точністю вважатись послідовністю прямокутних імпульсів з тривалостями імпульсу та паузи приблизно по половині періоду. Період цієї імпульсної послідовності співпадає з періодом синусоїдальної напруги на вході схеми:

$$T = 2\pi/\omega. \quad (9.29)$$

3. Зазначимо, що для цієї схеми можна показати, що в усталеному режимі роботи схеми напруги на конденсаторі та на резисторі  $R_2$  теж будуть періодичними процесами з періодом (9.29).

Тож спрощено будемо вважати, що зворотна напруга на стабілітроні описується графіком, наведеним на рис. 9.5.

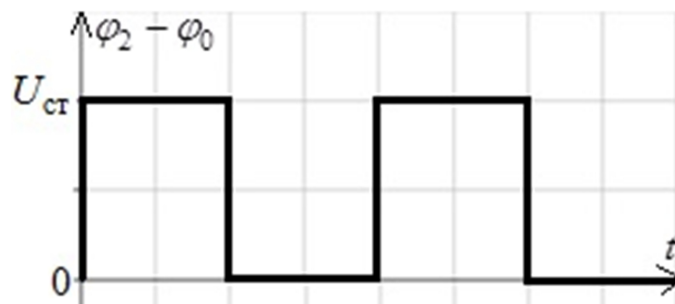


Рисунок 9.5

Зауважимо, що на рис. 9.5 вважається, що секундомір увімкнено вже тоді, коли коло увійшло в усталений режим роботи. На основі такого спрощеного розгляду отримаємо часові залежності для напруги на конденсаторі та на резисторі  $R_2$ .

Через періодичність досліджуваних процесів розглянемо дані залежності за один період. Зворотна напруга на стабілітроні, що задається виразом

$$\varphi_2(t) - \varphi_0(t) = \begin{cases} U_{\text{ст}}, t \in \left(0, \frac{T}{2}\right) \\ 0, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \end{cases}, \quad (9.30)$$

є загальною напругою для  $RC$ –ланцюжка, що складається з конденсатора та резистора  $R_2$ ;  $T$  – період цієї імпульсної послідовності. Тоді застосуємо формулу (6.12) для отримання часової залежності напруги на конденсаторі. Нехай початкове значення напруги на конденсаторі дорівнює  $U_{C0}$ . Тоді

$$U_C(t) = \frac{1}{R_2 C} \int_0^t e^{\frac{\tau-t}{R_2 C}} (\varphi_2(\tau) - \varphi_0(\tau)) d\tau + U_{C0} e^{\frac{-t}{R_2 C}}. \quad (9.31)$$

Відповідно, для  $t \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$

$$U_C(t) = \frac{U_{\text{ст}}}{R_2 C} e^{\frac{-t}{R_2 C}} \int_0^t e^{\frac{\tau'}{R_2 C}} d\tau' + U_{C0} e^{\frac{-t}{R_2 C}} = U_{\text{ст}} \left(1 - e^{\frac{-t}{R_2 C}}\right) + U_{C0} e^{\frac{-t}{R_2 C}}, \quad (9.32)$$

та для  $t \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$

$$U_C(t) = \frac{U_{\text{ст}}}{R_2 C} e^{\frac{-t}{R_2 C}} \int_0^{T/2} e^{\frac{\tau'}{R_2 C}} d\tau' + U_{C0} e^{\frac{-t}{R_2 C}} = U_{\text{ст}} e^{\frac{-t}{R_2 C}} \left(e^{\frac{T}{2R_2 C}} - 1\right) + U_{C0} e^{\frac{-t}{R_2 C}}. \quad (9.33)$$

Для постійної часу цього  $RC$ –ланцюжка маємо:

$$\tau = R_2 C. \quad (9.34)$$

Тоді на основі (9.34), (9.33) та (9.32) запишемо часову залежність  $U_C(t)$ :

$$U_C(t) = \begin{cases} U_{\text{ст}} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) + U_{C0} e^{\frac{-t}{\tau}}, t \in \left(0, \frac{T}{2}\right) \\ U_{\text{ст}} e^{\frac{-t}{\tau}} \left(e^{\frac{T}{2\tau}} - 1\right) + U_{C0} e^{\frac{-t}{\tau}}, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \end{cases}. \quad (9.35)$$

При  $t \in (0, T/2)$   $U_C(t)$  зростає, тобто конденсатор заряджається; при  $t \in (T/2, T)$   $U_C(t)$  спадає, тобто конденсатор розряджається. Також слід

зауважити, що через періодичність процесу в усталеному режимі роботи кола має виконуватися рівність

$$U_c(0) = U_c(T). \quad (9.36)$$

Схематично напруга на конденсаторі набуде вигляду, наведеного на рис. 9.6.

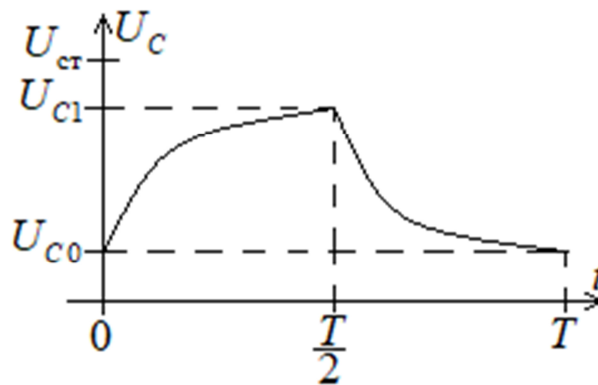


Рисунок 9.6

Тут введено позначення

$$U_{c1} = U_c(T/2). \quad (9.37)$$

На основі (9.35) та (9.36) можна отримати значення  $U_{c0}$  та  $U_{c1}$ . По-перше,

$$U_c(T) = U_c(0) \Rightarrow U_{ст} \left( e^{\frac{-T}{2\tau}} - e^{\frac{-T}{\tau}} \right) + U_{c0} e^{\frac{-T}{\tau}} = U_{c0}, \quad (9.38)$$

звідки отримуємо

$$U_{c0} = U_{ст} \frac{e^{\frac{-T}{2\tau}} - e^{\frac{-T}{\tau}}}{1 - e^{\frac{-T}{\tau}}} = U_{ст} e^{\frac{-T}{2\tau}} \frac{1 - e^{\frac{-T}{2\tau}}}{1 - e^{\frac{-T}{\tau}}}. \quad (9.39)$$

По-друге,

$$U_{c1} = U_c\left(\frac{T}{2}\right) = U_{ст} \left( 1 - e^{\frac{-T}{2\tau}} \right) + U_{c0} e^{\frac{-T}{2\tau}}, \quad (9.40)$$

звідки з урахуванням (9.39) отримуємо

$$U_{C1} = U_{\text{ст}} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}. \quad (9.41)$$

Тож в рамках цієї спрощеної моделі отримано точні формули для максимально можливої напруги на конденсаторі в усталеному режимі (9.41) та мінімально можливої напруги на конденсаторі в усталеному режимі (9.39).

Розглянемо тепер деякі граничні випадки.

Випадок 1:  $T \gg \tau$ . У такому разі  $e^{-\frac{T}{2\tau}}$  та  $e^{-\frac{T}{\tau}}$  – експоненційно малі величини, та, очевидно,

$$\lim_{T/\tau \rightarrow \infty} U_{C1} = U_{\text{ст}}, \quad \lim_{T/\tau \rightarrow \infty} U_{C0} = 0. \quad (9.42)$$

Фізичний зміст цих результатів є таким. Як відомо з підрозділів 3.2 та 3.3, час повного зарядження/розрядження конденсатора оцінюється як 3–5 постійних часу ланцюжка. Тому у випадку, коли період імпульсної послідовності є набагато більшим за постійну часу  $RC$ –ланцюжка, конденсатор за першу половину періоду встигне повністю зарядитись, а за другу половину періоду – повністю розрядитись.

Випадок 2:  $T \ll \tau$ . У такому разі введемо малий параметр

$$x = T/\tau \ll 1, \quad (9.43)$$

щоб детальніше описати поведінку величин  $U_{C0}$  та  $U_{C1}$  у такому випадку. При цьому слід пам'ятати відомі розвинення в ряд Тейлора:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad |x| \ll 1. \quad (9.44)$$

Матимемо

$$\begin{aligned} U_{C1} &= U_{\text{ст}} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-x}} = U_{\text{ст}} \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{4} + O(x^3)\right)}{1 - \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 + O(x^3)\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{8} + O(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)} = \\ &= U_{\text{ст}} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + O(x^2) \right) \left( 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \right) = \frac{U_{\text{ст}}}{2} \left( 1 + \frac{x}{4} + O(x^2) \right). \end{aligned} \quad (9.45)$$



На основі (9.45), (9.39), (9.41) та (9.44) можна побачити, що

$$U_{C0} = U_{C1} e^{\frac{-T}{2\tau}} = \frac{U_{ст}}{2} \left( 1 + \frac{x}{4} + O(x^2) \right) \left( 1 - \frac{x}{2} + O(x^2) \right) = \frac{U_{ст}}{2} \left( 1 - \frac{x}{4} + O(x^2) \right). \quad (9.46)$$

Тож для розмаху напруги на конденсаторі можна отримати вираз

$$U_{C1} - U_{C0} = \frac{U_{ст}}{4} x + O(x^2). \quad (9.47)$$

Знехтувавши членами порядку  $x^2$ , випишемо наближені формули для  $U_{C1}$ ,  $U_{C0}$  та розмаху напруги на конденсаторі:

$$U_{C1} \approx \frac{U_{ст}}{2} + \frac{T}{8\tau}, \quad U_{C0} \approx \frac{U_{ст}}{2} - \frac{T}{8\tau}, \quad U_{C1} - U_{C0} \approx \frac{U_{ст}}{4} \frac{T}{\tau}, \quad (9.48)$$

тож розмах напруги на конденсаторі є малим та значення напруги на конденсаторі слабо коливаються поблизу значення  $U_{ст}/2$ .

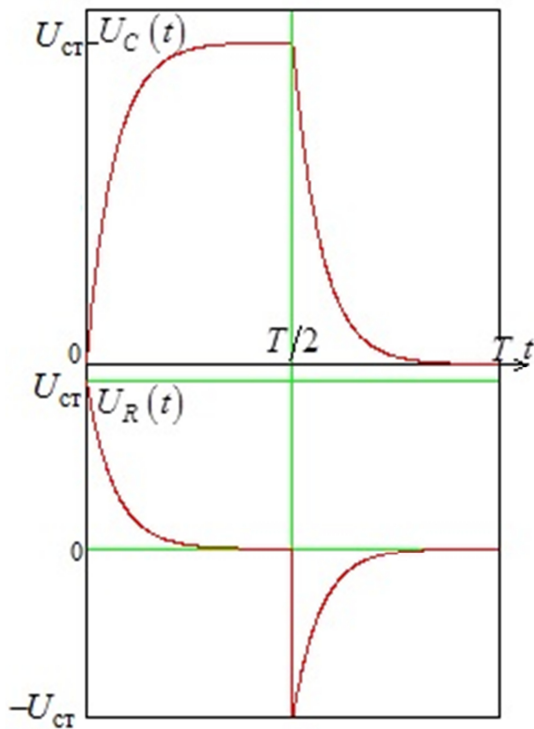


Рисунок 9.7

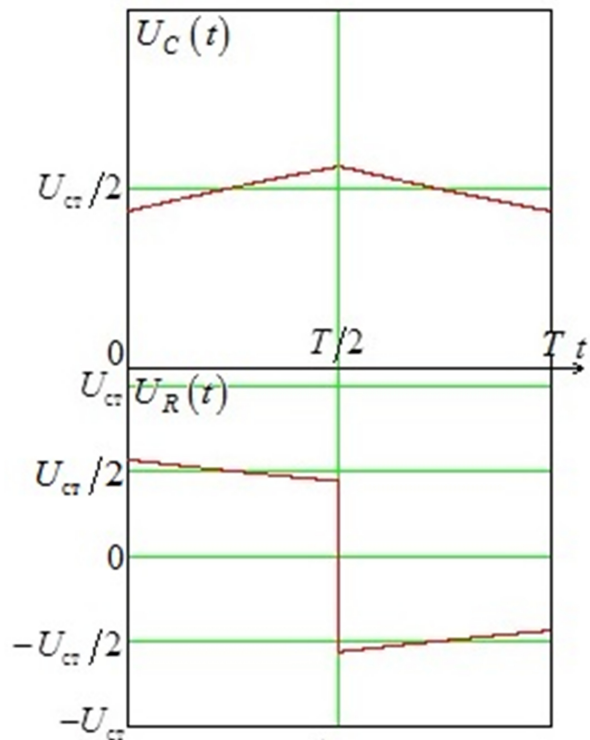


Рисунок 9.8

Фізичне пояснення таких результатів є таким. У випадку, коли період імпульсної послідовності є набагато меншим за постійну часу  $RC$ -ланцюжка, конденсатор за половину періоду не встигає повністю зарядитись та

розрідитись, його заряд за половину періоду змінюється лише на малу величину.

Напруга на резисторі, відповідно, має вигляд

$$U_R(t) = (\varphi_2(t) - \varphi_0(t)) - U_C(t), \quad (9.49)$$

де функції  $\varphi_2(t) - \varphi_0(t)$  і  $U_C(t)$  наведені у (9.30) та (9.35) відповідно. Схематично графіки  $U_C(t)$  та  $U_R(t)$  наведені на рис. 9.7 у випадку  $T \gg \tau$  і на рис. 9.8 у випадку  $T \ll \tau$ .

На останок зауважимо, що при  $T \ll \tau$  напруга на конденсаторі фактично є неперервною кусково-лінійною функцією часу. У цьому можна переконатися, розвинувши експоненти в ряд Тейлора та знехтувавши членами другого й вищих порядків малості.

#### 9.4. Резюме

Схема перетворення синусоїди на імпульсну послідовність наведена на рис. 9.1. Можна отримати явну залежність оберненої напруги на стабілітроні:

$$\varphi_2(t) - \varphi_0(t) = -U_S(t) = \begin{cases} -U_{0,7}, \omega t \in (\pi + \beta + 2\pi n; 2\pi - \beta + 2\pi n) \\ U_{ст}, \omega t \in (\alpha + 2\pi n; \pi - \alpha + 2\pi n) \\ E \sin(\omega t), \text{ інакше} \end{cases}, \quad (9.50)$$

$$\alpha = \arcsin(U_{ст}/E), \quad \beta = \arcsin(U_{0,7}/E),$$

де  $U_{0,7} = 0,7$  В,  $\omega$  – кутова частота вхідної синусоїди,  $U_{ст}$  – напруга стабілізації на стабілітроні,  $E$  – амплітуда вхідної синусоїди. Відповідно, точні формули для тривалості фронту, зрізу, імпульсу і паузи мають вигляд

$$t_{\phi} = t_3 = \frac{\alpha + \beta}{\omega}, \quad t_i = \frac{\pi - 2\alpha}{\omega}, \quad t_{\pi} = \frac{\pi - 2\beta}{\omega}. \quad (9.51)$$

У випадку  $U_{0,7} \ll U_{ст} \ll E$  зворотна напруга на стабілітроні є, фактично, послідовністю прямокутних імпульсів, та застосовними є наближені формули

$$t_{\phi} = t_3 \approx \frac{U_{ст} + U_{0,7}}{\omega E}, \quad t_i \approx t_{\pi} \approx \pi/\omega. \quad (9.52)$$

Для схеми на рис. 9.4. у спрощеній моделі можна наближено вважати, що зворотна напруга на стабілітроні буде послідовністю додатних прямокутних імпульсів (час паузи дорівнює часу імпульсу, див. рис. 9.5.). Відповідно, виникає задача проходження такої послідовності через RC-ланцюжок. В усталеному режимі роботи кола напруга на конденсаторі набуде впродовж одного періоду вигляду

$$U_C(t) = \begin{cases} U_{ст} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + U_{C0} e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \in \left(0, \frac{T}{2}\right) \\ U_{ст} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{\frac{T}{2\tau}} - 1\right) + U_{C0} e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \end{cases}, \quad (9.53)$$

див. рис. 9.6, максимальне та мінімальне значення відповідної напруги

$$U_{C0} = U_{ст} e^{\frac{-T}{2\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{-T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{-T}{\tau}}}, \quad U_{C1} = U_{ст} \frac{1 - e^{-\frac{-T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{-T}{\tau}}}. \quad (9.54)$$

У випадку, коли період вхідної імпульсної послідовності набагато більший за сталу часу RC-ланцюжка, матимемо наближені формули

$$U_{C1} \approx U_{ст}, \quad U_{C0} \approx 0. \quad (9.55)$$

У випадку, коли період вхідної імпульсної послідовності набагато більший за сталу часу RC-ланцюжка, матимемо

$$U_{C1} \approx \frac{U_{ст}}{2} + \frac{T}{8\tau}, \quad U_{C0} \approx \frac{U_{ст}}{2} - \frac{T}{8\tau}, \quad U_{C1} - U_{C0} \approx \frac{U_{ст}}{4} \frac{T}{\tau}, \quad (9.56)$$

та напруга на конденсаторі набуде вигляду, дуже близького до кусково-лінійної функції з малим розмахом.

### 9.5. Питання для самоконтролю

1. Вивести точні часові залежності напруги на резисторі та зворотної напруги на стабілітроні при проходженні синусоїдальної напруги через послідовне з'єднання резистора та стабілітрона.

2. Вивести точні та наближені формули для тривалості фронту, зрізу, імпульсу та паузи імпульсної послідовності, що являє собою зворотну напругу

на стабілітроні в схемі, описаній у першому питанні. При яких умовах така схема з хорошою точністю перетворює синусоїдальний сигнал на послідовність прямокутних імпульсів?

3. Вивести точні формули залежності напруги на резисторі та конденсаторі при проходженні послідовності додатних прямокутних імпульсів через RC-ланцюжок (час імпульсу дорівнює часу паузи).

4. Отримати відповідні наближені формули у випадках, коли період імпульсної послідовності є набагато більшим або набагато меншим за постійну часу RC-ланцюжка. Фізично пояснити отримані наближені формули. В якому випадку напруга на конденсаторі буде дуже близькою до кусково-лінійної функції?

## 10. Розвинення сигналів у ряд Фур'є

### 10.1. Анотація

Наведено загальні математичні властивості тригонометричного ряду Фур'є та розглянуте розвинення деяких періодичних сигналів у такий ряд. Зокрема, виведено результат для потужності сигналу, що виділяється на кожній гармоніці, та на прикладі симетричного пилкоподібного сигналу та меандру описано ідею перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтрів нижніх частот.

Спираючись на матеріал розділу, довідкову та науково-технічну літературу, студент під час контрольних заходів повинен:

- Знати, яку систему функцій називають повною ортогональною. Уміти виводити коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є в загальному вигляді.
- Знати, яку повну ортогональну систему функцій покладено в основу тригонометричного ряду Фур'є. Уміти виводити коефіцієнти розвинення періодичної функції в тригонометричний ряд Фур'є.
- Знати, що таке гармоніки. Уміти виводити вирази для активної потужності, що виділяється на кожній гармоніці. Знати умову скінченності активної потужності сигналу.
- Уміти виводити розвинення меандру та симетричного пилкоподібного сигналу в тригонометричний ряд Фур'є. Уміти виводити, який відсоток потужності цих сигналів міститься в першій гармоніці. Знати ідею перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтра нижніх частот.

### 10.2. Ряд Фур'є. Загальний випадок та тригонометричний ряд Фур'є

Функції  $f(x)$  і  $g(x)$  називаються ортогональними на проміжку  $x \in [a, b]$ ,

якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (11.1)$$

Система функцій  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  називається ортогональною на проміжку  $x \in [a, b]$ , якщо для будь-яких двох функцій з цієї системи виконується рівність

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0 \text{ при } k \neq l. \quad (11.2)$$

Система функцій  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  називається повною на проміжку  $x \in [a, b]$ , якщо не існує такої ненульової функції, яка б не входила до цієї системи та була б ортогональною до всіх функцій цієї системи на проміжку  $x \in [a, b]$ .

Якщо  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  є повною ортогональною системою функцій на проміжку  $x \in [a, b]$ , то будь-яку іншу функцію  $f(x)$ , що не входить до цієї системи, можна розвинути в ряд за цією системою на проміжку  $x \in [a, b]$ :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x). \quad (11.3)$$

Отримаємо формулу для коефіцієнтів  $c_j$  цього ряду. Помножимо (11.3) зліва й справа на  $\varphi_k(x)$  та проінтегруємо:

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx. \quad (11.4)$$

Єдиний ненульовий член суми в правій частині буде мати місце при  $j = k$ , всі інші члени цієї суми дорівнюють нулю через властивість (11.2). Тож тоді матимемо

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = c_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \Rightarrow c_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx}. \quad (11.5)$$

Якщо ж система функцій  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  містить нескінченну кількість функцій, то ряд (11.3) набуде вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x). \quad (11.6)$$

Ряд (11.6) називається рядом Фур'є. Коефіцієнти  $c_j$  цього ряду обчислюються за формулою (11.5), виведення якої в ідейному плані є однаковим як для системи, що містить скінченну кількість функцій, так і для системи, що містить нескінченну кількість функцій.

Одним з дуже широко вживаних в електротехніці випадків такого ряду є так званий тригонометричний ряд Фур'є. Як відомо, система функцій:  $1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \dots$  є повною ортогональною системою функцій на проміжку  $t \in [0, T]$ , де

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11.7)$$

Наприклад, в ортогональності цієї системи можна переконатися безпосереднім обчисленням, узявши відповідні інтеграли та впевнившись, що вони дорівнюють нулю (фактично, це зроблено в підрозділі 10.2). Відповідно, будь-яку функцію  $f(t)$  на проміжку  $t \in [0, T]$  можна розвинути в такий ряд Фур'є:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \quad (11.8)$$

Ряд (11.8) називають тригонометричним рядом Фур'є. Згідно з (11.5) виведемо формули для обчислення коефіцієнтів цього ряду. Для коефіцієнта  $a_0$  матимемо

$$a_0 = \int_0^T f(t) \cdot 1 dt \Big/ \int_0^T 1^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (11.9)$$

Для коефіцієнтів  $a_n$  матимемо

$$a_n = \int_0^T f(t) \cos(\omega n t) dt \Big/ \int_0^T \cos^2(\omega n t) dt. \quad (11.10)$$

Обчислимо інтеграл у знаменнику:

$$\int_0^T \cos^2(\omega nt) dt = \int_0^T \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega nt) \right) dt = \frac{T}{2} + 0 = \frac{T}{2}. \quad (11.11)$$

Відповідно,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega nt) dt. \quad (11.12)$$

Для коефіцієнтів  $b_n$  матимемо

$$b_n = \frac{\int_0^T f(t) \sin(\omega nt) dt}{\int_0^T \sin^2(\omega nt) dt}. \quad (11.13)$$

Оскільки

$$\int_0^T \sin^2(\omega nt) dt = \int_0^T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega nt) \right) dt = \frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2}, \quad (11.14)$$

то

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega nt) dt. \quad (11.15)$$

Відповідно, будь-яку функцію  $f(t)$  на проміжку  $t \in [0, T]$  можна розвинути в тригонометричний ряд Фур'є (11.8), де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами (11.9), (11.12), (11.15).

Оскільки  $\sin(\omega nt)$  та  $\cos(\omega nt)$  – періодичні з періодом  $T$  функції, то функцію  $f(t)$  можна періодичним чином до визначити на всю числову вісь. Тож приходимо до висновку, що будь-яку функцію  $f(t)$ , що є періодичною з періодом  $T$ , можна розвинути в тригонометричний ряд Фур'є (11.8), де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами (11.9), (11.12), (11.15).

### 10.3. Потужність, що виділяється на різних гармоніках

Указана в попередньому підрозділі можливість розвинення періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є означає, що будь-яка функція, що має період  $T$ , може бути представлена у вигляді суми константи та нескінченної кількості синусоїд з кутовими частотами  $2\pi/T$ ,  $4\pi/T$ ,  $6\pi/T$ , і т. д. Ці



синусоїди називаються **гармоніками**. В електротехніці різноманітні сигнали часто розвивають у ряд Фур'є, бо проходження синусоїд через багато систем є точно розв'язуваними задачами.

Нехай у нас є періодична напруга  $V(t)$ , що падає на резисторі  $R$ . Тоді миттєва потужність, що виділяється на резисторі, дорівнює

$$P(t) = \frac{1}{R} V^2(t). \quad (11.16)$$

Розвинемо  $V(t)$  у ряд Фур'є:

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \quad (11.17)$$

Відповідно,

$$V^2(t) = \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \right) \times \\ \times \left( a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)) \right), \quad (11.18)$$

звернемо увагу на те, що ми не можемо однаково позначити індекси підсумовування в двох дужках (ці індекси ще називають німими індексами).

Розкривши дужки у (11.18), отримаємо

$$V^2(t) = a_0^2 + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n a_m \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_m b_n \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} b_n b_m \sin(n\omega t) \sin(m\omega t). \quad (11.19)$$

Відповідно, обчислимо середню за період (активну) потужність, що виділиться на такому резисторі:

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{RT} \int_0^T V^2(t) dt. \quad (11.20)$$

Для того щоб обчислити величину (11.20), обчислимо деякі інтеграли.

$$\int_0^T \cos(n\omega t) dt = \left. \begin{cases} x = n\omega t, dx = n\omega dt, \\ t = 0 \rightarrow x = 0, \\ t = T \rightarrow x = n\omega T = 2\pi n \end{cases} \right\} = \frac{1}{n\omega} \int_0^{2\pi n} \cos x dx = 0, \quad (11.21)$$

аналогічно можна дійти висновку, що

$$\int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0. \quad (11.22)$$

Розглянемо

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (\sin[(n-m)\omega t] + \sin[(n+m)\omega t]) dt, \quad (11.23)$$

звідки згідно (11.22) доходимо висновку, що

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0. \quad (11.24)$$

Розглянемо

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos[(n-m)\omega t] + \cos[(n+m)\omega t]) dt, \quad (11.25)$$

звідки згідно з (11.21) бачимо, що

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (11.26)$$

При  $n = m$  згідно з (11.25) та (11.21) матимемо

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T 1 dt + 0 = \frac{T}{2}, \quad (11.27)$$

тож остаточно

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}. \quad (11.28)$$

Аналогічно згідно з

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos[(n-m)\omega t] - \cos[(n+m)\omega t]) dt \quad (11.29)$$

можна отримати, що

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}. \quad (11.30)$$

На основі (11.19), (11.21), (11.22), (11.24), (11.28) та (11.30) маємо, що згідно з (11.20) виділена активна потужність

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{R} \left( a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right). \quad (11.31)$$

Тобто до активної потужності доданки в (11.17) дають такий внесок: константа  $a_0$  дає внесок  $a_0^2/R$ , кожна з гармонік  $a_n \cos(n\omega t)$  дає внесок, що дорівнює  $a_n^2/(2R)$ , кожна з гармонік  $b_n \sin(n\omega t)$  дає внесок  $b_n^2/(2R)$ . Оскільки активна потужність має бути скінченною, то ряд (11.31) має бути збіжним. Відповідно, коефіцієнти  $a_n$  та  $b_n$ , починаючи з деякого номера, мають обов'язково спадати, причому на великих номерах вони мають спадати швидше за  $1/\sqrt{n}$ .

#### 10.4. Меандр та його розвинення в ряд Фур'є

За визначенням, меандром з кутовою частотою  $\omega$  називається сигнал, що задається виразом

$$f(t) = V \cdot \text{sign}(\sin(\omega t)), \quad (11.32)$$

де

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, \quad (11.33)$$

Тобто меандр є послідовністю прямокутних імпульсів з тривалістю імпульсу, рівній тривалості паузи (по половині періоду), максимальне значення напруги дорівнює  $V$ , мінімальне значення напруги дорівнює  $-V$ , меандр схематично зображений на рис. 10.1.

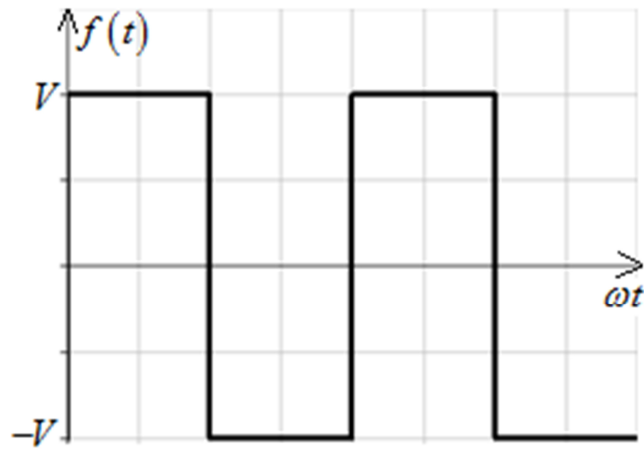


Рисунок 10.1

Задача перетворення меандра на синусоїду, зокрема, виникає в телефонії. Розвинемо меандр у ряд Фур'є (11.8). Обчислимо коефіцієнти ряду за формулами (11.9), (11.12), (11.15). Матимемо

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-V) dt = 0, \quad (11.34)$$

для коефіцієнтів при косинусах

$$a_n = \frac{2V}{T} \int_0^{T/2} \cos(\omega n t) dt - \frac{2V}{T} \int_{T/2}^T \cos(\omega n t) dt = 0, \quad (11.35)$$

для коефіцієнтів при синусах

$$b_n = \frac{2V}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega n t) dt - \frac{2V}{T} \int_{T/2}^T \sin(\omega n t) dt = \frac{2V}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)), \quad (11.36)$$

що можна переписати як

$$b_n = \begin{cases} \frac{4V}{\pi n}, & n:2 \\ 0, & n:2 \end{cases}. \quad (11.37)$$

На основі отриманих результатів можемо переписати розвинення меандра в ряд Фур'є таким чином:

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V}{\pi n} \sin(n\omega t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t), \quad (11.38)$$

де

$$A_k = \frac{4V}{\pi(2k+1)}, \quad \omega_k = (2k+1)\omega. \quad (11.39)$$

Відповідно, амплітуди гармонік спадають з номером обернено пропорційно до лінійної функції від номера:  $A_k \sim 1/(2k+1)$ . Порахуємо відношення активної потужності, що несе перша гармоніка, до повної активної потужності сигналу. Згідно з (11.31), (11.38) і (11.39), шукане відношення

$$\frac{P_1}{P} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1} \right)^2} = \frac{1}{\pi^2/8} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81, \quad (11.40)$$

значення суми в знаменнику є табличним, див. довідник Градштейна та Рижика. Тож потужність першої гармоніки складає 81% від загальної потужності сигналу.

Ідея перетворення меандра (як і будь-якого іншого сигналу) на синусоїду може бути, наприклад, такою. Пропустимо меандр через фільтр низьких частот, при цьому треба підібрати частоту зрізу фільтра так, щоб перша гармоніка потрапила в смугу пропускання, а всі інші – у смугу подавлення. Тоді фільтр пропустить першу гармоніку й не пропустить усі інші, тож на виході фільтра має бути лише перша гармоніка, яка є синусоїдою.

Математично на практиці це можна проілюструвати, наприклад, застосуванням фільтра Баттерворта  $n$ -го порядку, АЧХ якого наведена у (8.1). Після проходження цього фільтра амплітуди гармонік стануть такими:

$$A_k^{\text{out}} = \frac{A_k}{\sqrt{1 + (\omega_k/\omega_3)^{2n}}} = \frac{4V}{\pi(2k+1)\sqrt{1 + (2k+1)^{2n}(\omega/\omega_3)^{2n}}}. \quad (11.41)$$

Якщо підібрати  $\omega_3$  дуже близьким до (трошки більшим за)  $\omega$ , то при  $k > 1$  матимемо  $A_k^{\text{out}} \sim (2k+1)^{-n-1}$ . Без використання фільтра  $A_k \sim (2k+1)^{-1}$ . Тож амплітуди гармонік, що пройшли через фільтр, стануть згасати з номером значно швидше, ніж у випадку відсутності фільтра, та внесок усіх гармонік, крім першої, до суми ряду стане менш суттєвим. Тож вихідний сигнал після

проходження фільтра буде набагато ближчим до синусоїди, ніж вхідний сигнал. При застосуванні фільтра високого порядку або послідовного використання декількох фільтрів можна добитись майже ідеальної синусоїди на виході.

### 10.5. Симетричний пилкоподібний сигнал та його розвинення в ряд Фур'є

Розглянемо симетричний пилкоподібний сигнал. Його графік представлено на рис. 10.2.

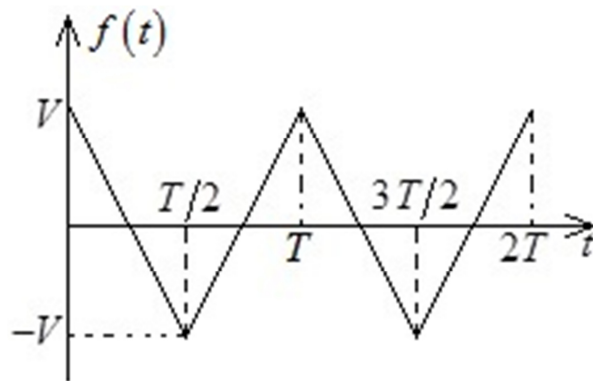


Рисунок 10.2

Аналітично цей сигнал на проміжку  $t \in [0, T]$  задається таким чином:

$$f(t) = \begin{cases} V - \frac{4V}{T}t, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ -V + \frac{4V}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right), & t \in \left(\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (11.42)$$

Розвинемо цей сигнал у ряд Фур'є (11.8). Обчислимо коефіцієнти розвинення.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T}t \right) dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left( -V + \frac{4V}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) \right) dt = \\ &= \left. \begin{cases} t' = t - \frac{T}{2}, dt = dt', \\ t = \frac{T}{2} \rightarrow t' = 0, t = T \rightarrow t' = \frac{T}{2} \end{cases} \right\} = \end{aligned} \quad (11.43)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t \right) dt - \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t' \right) dt' = 0.$$

Для коефіцієнтів при косинусах

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t \right) \cos(\omega n t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T \left( -V + \frac{4V}{T} \left( t - \frac{T}{2} \right) \right) \cos(\omega n t) dt = \\ &= \left\{ t' = t - \frac{T}{2} \right\} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t \right) \cos(\omega n t) dt + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( -V + \frac{4V}{T} t' \right) \cos \left( \omega n t' + \omega n \frac{T}{2} \right) dt'. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Оскільки

$$\cos \left( \omega n t' + \omega n \frac{T}{2} \right) = \cos(\omega n t' + \pi n) = \begin{cases} -\cos(\omega n t'), n \neq 2 \\ \cos(\omega n t'), n = 2 \end{cases}, \quad (11.45)$$

то очевидно, що при парних  $n$   $a_n = 0$ . При непарних  $n$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t \right) \cos(\omega n t) dt = \\ &= \frac{4V}{T} \int_0^{T/2} \cos(\omega n t) dt - \frac{16V}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(\omega n t) dt, \end{aligned} \quad (11.46)$$

використовуючи відомий інтеграл

$$\int dx x \cos(ax) = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a}, \quad (11.47)$$

отримаємо для непарних  $n$

$$a_n = \frac{16V}{T^2} \frac{1 - \cos(\pi n)}{\omega^2 n^2} = \frac{32V}{4\pi^2 n^2} = \frac{8V}{\pi^2 n^2}. \quad (11.48)$$

Тож остаточно запишемо

$$a_n = \begin{cases} \frac{8V}{\pi^2 n^2}, n \neq 2 \\ 0, n = 2 \end{cases}. \quad (11.49)$$

Для коефіцієнтів при синусах матимемо аналогічно (11.44)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( V - \frac{4V}{T} t \right) \sin(\omega n t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( -V + \frac{4V}{T} t' \right) \sin\left(\omega n t' + \omega n \frac{T}{2}\right) dt'. \quad (11.50)$$

Оскільки

$$\sin\left(\omega n t' + \omega n \frac{T}{2}\right) = \sin(\omega n t' + \pi n) = \begin{cases} -\sin(\omega n t'), n \neq 2 \\ \sin(\omega n t'), n = 2 \end{cases}, \quad (11.51)$$

то очевидно, що при парних  $n$   $b_n = 0$ . При непарних  $n$  аналогічно (11.46)

отримаємо

$$b_n = \frac{4V}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega n t) dt - \frac{16V}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(\omega n t) dt. \quad (11.52)$$

Скориставшись відомим інтегралом

$$\int dx x \sin(ax) = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} \quad (11.53)$$

обчислимо (11.52) для непарних  $n$ :

$$b_n = \frac{4V}{T} \frac{1 - \cos(\pi n)}{\omega n} + \frac{16V}{T^2} \frac{T}{2} \frac{\cos(\pi n)}{\omega n} = 0. \quad (11.54)$$

Тож  $b_n = 0$  як при парних, так і при непарних  $n$ .

На основі отриманих результатів запишемо шукане розвинення:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{8V}{\pi^2 n^2} \cos(n\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8V}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t), \end{aligned} \quad (11.55)$$

де

$$A_k = \frac{8V}{\pi^2 (2k+1)^2}, \quad \omega_k = (2k+1)\omega. \quad (11.56)$$

Тож бачимо, що амплітуди падають обернено пропорційно до квадратичної функції номера:  $A_k \sim (2k+1)^{-2}$ . Обчислимо відношення активної потужності, що несе перша гармоніка, до повної активної потужності сигналу:



$$\frac{P_1}{P} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot k + 1)^2}} = \frac{1}{\pi^4 / 96} = \frac{96}{\pi^4} \approx 0,986, \quad (11.57)$$

сума в знаменнику (11.57) є табличною. Тобто майже вся потужність сигналу (98,6% потужності) сконцентровано в першій гармоніці. Зауважимо, що це значення є більшим, ніж відповідне значення для меандра. Це пояснюється тим, що в симетричному пилкоподібному сигналі амплітуди гармонік спадають зі зростанням номера швидше, ніж у меандрі.

Ідея перетворення симетричного пилкоподібного сигналу на синусоїду така ж, як і для перетворення меандра. Розглянемо проходження симетричного пилкоподібного сигналу через фільтр нижніх частот, наприклад, через фільтр Баттерворта  $n$ -го порядку. Матимемо вихідні амплітуди

$$A_k^{\text{out}} = \frac{A_k}{\sqrt{1 + (\omega_k / \omega_3)^{2n}}} = \frac{8V}{\pi^2 (2k + 1)^2 \sqrt{1 + (2k + 1)^{2n} (\omega / \omega_3)^{2n}}}, \quad (11.58)$$

якщо підібрати  $\omega_3$  дуже близьким до (трошки більшим за)  $\omega$ , то при  $k > 1$  матимемо  $A_k^{\text{out}} \sim (2k + 1)^{-n-2}$ . Без використання фільтра  $A_k \sim (2k + 1)^{-2}$ . Тож після проходження фільтра амплітуди спадатимуть швидше, ніж до проходження фільтра, і після проходження фільтра сигнал, як сума ряду Фур'є, буде ближчим до першої гармоніки, ніж до проходження фільтра.

На останок слід зауважити, що через те, що амплітуди гармонік симетричного пилкоподібного сигналу падають з номером швидше, ніж амплітуди гармонік меандра, то симетричний пилкоподібний сигнал легше перетворити на синусоїду, ніж меандр (тобто можна використати фільтр меншого порядку або менше фільтрів для отримання майже ідеальної синусоїди на виході).

## 10.5. Резюме

Ряд

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x), \quad (11.59)$$

$\varphi_j(x)$  – повна ортогональна система функцій на заданому відрізку  $x \in (a, b)$ , називається рядом Фур'є. Коефіцієнти ряду визначаються формулами

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx}. \quad (11.60)$$

Розвинення періодичного сигналу  $f(t)$  в тригонометричний ряд Фур'є має вигляд

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad (11.61)$$

де  $\omega$  – кутова частота даного сигналу, та коефіцієнти ряду задаються виразами

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega n t) dt, \quad (11.62)$$

$T$  – період сигналу.

У випадку, коли на резисторі опором  $R$  напруга є періодичною функцією часу, то при розвиненні відповідної напруги в тригонометричний ряд Фур'є внески гармонік до активної потужності є такими: константа  $a_0$  дає внесок  $a_0^2/R$ , кожна з гармонік  $a_n \cos(n\omega t)$  дає внесок, що дорівнює  $a_n^2/(2R)$ , кожна з гармонік  $b_n \sin(n\omega t)$  дає внесок  $b_n^2/(2R)$ . Оскільки активна потужність має бути скінченною, то числовий ряд

$$P = \frac{1}{R} \left( a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \quad (11.63)$$

має бути збіжним. Відповідно, коефіцієнти  $a_n$  та  $b_n$ , починаючи з деякого номера, мають обов'язково спадати, причому на великих номерах вони мають спадати швидше за  $1/\sqrt{n}$ .

Розвинення меандру у тригонометричний ряд Фур'є є таким:

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega t), \quad (11.64)$$

амплітуди гармонік лінійно падають із зростанням номеру, потужність першої гармоніки складає приблизно 81% від загальної потужності сигналу.

Розвинення симетричного пілкоподібного сигналу у тригонометричний ряд Фур'є є таким:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8V}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega t), \quad (11.65)$$

амплітуди гармонік квадратично падають із зростанням номеру, потужність першої гармоніки складає приблизно 98,6% від загальної потужності сигналу.

Ідея перетворення меандра (як і будь-якого іншого сигналу) на синусоїду може бути, наприклад, такою. Пропустимо меандр через фільтр низьких частот, при цьому треба підібрати частоту зрізу фільтра так, щоб перша гармоніка потрапила в смугу пропускання, а всі інші – у смугу подавлення. Тоді фільтр пропустить першу гармоніку й не пропустить усі інші, тож на виході фільтра має бути лише перша гармоніка, яка є синусоїдою.

## 10.6. Питання для самоконтролю

1. Яку систему функцій називають повною ортогональною? Вивести коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є в загальному вигляді.

2. Яку повну ортогональну систему функцій покладено в основу тригонометричного ряду Фур'є? Вивести коефіцієнти розвинення періодичної функції в тригонометричний ряд Фур'є.

3. Що таке гармоніки? Вивести вирази для активної потужності, що виділяється на кожній гармоніці. Яка є умова скінченності активної потужності сигналу?

4. Вивести розв'язання меандру в тригонометричний ряд Фур'є. Який відсоток потужності меандру міститься в першій гармоніці? Детально описати ідею перетворення меандру на синусоїду за допомогою фільтра нижніх частот.

5. Вивести розв'язання симетричного пилкоподібного сигналу в тригонометричний ряд Фур'є. Який відсоток потужності такого сигналу міститься в першій гармоніці? Детально описати ідею перетворення симетричного пилкоподібного сигналу на синусоїду за допомогою фільтра нижніх частот.

6. Який сигнал легше перетворити на синусоїду : меандр чи симетричний пилкоподібний сигнал? Чому?

## Підсумки

Подано загальну анотацію змісту навчального посібника та вимоги до здатностей здобувача щодо використання навчального контенту.

### У другій частині навчального посібника:

- Описано проходження довільних електричних сигналів через RC-ланцюжок, отримано точні аналітичні формули залежності напруг на резисторі та на конденсаторі від часу та відповідні асимптотичні вирази при малих та великих часах. Наведено умови застосовності цих асимптотичних формул.
- Наведено типи електронних частотних фільтрів та найпростіші реалізації кожного з цих типів фільтрів. Виведено амплітудно-частотні та фазо-частотні характеристики відповідних фільтрів. Відповідні графіки наведено як у лінійному, так і в логарифмічному масштабі. Детально роз'яснено таку одиницю вимірювання амплітудно-частотної характеристики, як децибел.
- Наведено відомості про такі поширені фільтри нижніх частот, як Баттерворта, Чебишова першого та другого роду та Кауера. Наведено амплітудно-частотні характеристики цих фільтрів та зроблено порівняння цих фільтрів між собою. Наведено реалізації кожного з цих фільтрів другого порядку з детальним виведенням амплітудно-частотні характеристик розглянутих схем та виведенням співвідношень між параметрами схеми, при яких розглянуті схеми є відповідними фільтрами.
- Розглянуто пасивні формувальні кола, що перетворюють синусоїду на імпульсну послідовність, та розглянуто, при яких параметрах кола вихідна імпульсна послідовність є дуже близькою до прямокутної. У дещо спрощеній моделі розглянуто задачу проходження прямокутної послідовності імпульсів через RC-ланцюг у пасивних формувальних колах, що містять стабілітрон.

- Наведено загальні математичні властивості тригонометричного ряду Фур'є та розглянуте розвинення деяких періодичних сигналів у такий ряд. Зокрема, виведено результат для потужності сигналу, що виділяється на кожній гармоніці, та на прикладі симетричного пилкоподібного сигналу та меандру описано ідею перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтрів нижніх частот.

**З опорою на матеріал другої частини навчального посібника студент повинен:**

- Уміти виводити точні аналітичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку.
- Уміти виводити асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку при малих часах. Знати, в якому випадку RC–ланцюжок називають інтегрувальним, та пояснити чому.
- Уміти виводити асимптотичні формули часової залежності напруг на конденсаторі та на резисторі при заданій довільній вхідній напрузі на RC–ланцюжку при великих часах. Знати, в якому випадку RC–ланцюжок називають диференціювальним, та пояснити чому. Знати межі застосовності отриманих асимптотичних формул.
- Знати визначення частотного електронного фільтра. Знати визначення амплітудно–частотної та фазо–частотної характеристики фільтра. Знати визначення кількості декад між двома частотами. Знати визначення амплітудно–частотної характеристики фільтра в децибелах.
- Знати амплітудно–частотні характеристики ідеальних фільтрів: нижніх частот, верхніх частот, смугового та режекторного.
- Знати, який RC–ланцюжок є фільтром нижніх, а який – верхніх частот: інтегрувальний чи диференціювальний, та вміти аргументувати, чому. Уміти виводити амплітудно–частотні та фазо-частотні характеристики

інтегровального та диференціовального RC–ланцюжка. Знати частоти зрізу відповідних фільтрів. Уміти виводити амплітудно–частотні характеристики таких ланцюжків в децибелах.

- Уміти виводити амплітудно–частотну та фазо–частотну характеристики послідовного RLC–контурю як смугового фільтра, моста Віна як смугового фільтру та моста Віна–Робінсона як режекторного фільтру. Знати, яким безрозмірним параметром задається вигляд амплітудно–частотної характеристики послідовного RLC–контурю. Уміти виводити частоти зрізу таких фільтрів, та амплітудно–частотні характеристики таких фільтрів в децибелах.
- Знати амплітудно–частотні характеристики фільтрів нижніх частот Баттерворта, Чебишова 1 та 2 роду і Кауера. Для фільтрів одного порядку уміти порівнювати між собою швидкість спадання амплітудно–частотної характеристики на межі смуг пропускання і подавлення. Знати, які з цих фільтрів мають пульсації у смузі пропускання та у смузі подавлення.
- Знати фізичний зміст параметра пульсацій та діапазон можливих значень цього параметра. Уміти виводити залежність розмаху пульсацій амплітудно–частотних характеристик вищеназваних фільтрів від параметра пульсацій у смузі пропускання та у смузі подавлення.
- Знати фізичний зміст параметра крутизни та діапазон можливих значень цього параметра? Знати, при яких значеннях цього параметра фільтр Кауера переходить у фільтр Чебишова 1 роду.
- Знати, в яких режимах може працювати ідеальний операційний підсилювач та в якому режимі працює операційний підсилювач на схемах, на яких реалізовано вищеназвані фільтри.
- Знати схеми, на якій можна реалізувати фільтри другого порядку Баттерворта, Чебишова 1 і 2 роду та Кауера. Вміти виводити АЧХ

відповідних схем та вміти виводити співвідношення між параметрами схем, при яких вони працюють як вище названі фільтри.

- Уміти виводити точні часові залежності напруги на резисторі та зворотної напруги на стабілітроні при проходженні синусоїдальної напруги через послідовне з'єднання резистора та стабілітрона.
- Уміти виводити точні та наближені формули для тривалості фронту, зрізу, імпульсу та паузи імпульсної послідовності, що являє собою зворотну напругу на стабілітроні в схемі, описаній у першому питанні. Знати, при яких умовах така схема з хорошою точністю перетворює синусоїдальний сигнал на послідовність прямокутних імпульсів.
- Уміти виводити точні формули залежності напруги на резисторі та конденсаторі при проходженні послідовності додатних прямокутних імпульсів через RC–ланцюжок (час імпульсу дорівнює часу паузи).
- Уміти виводити наближені формули у випадках, коли період імпульсної послідовності є набагато більшим або набагато меншим за постійну часу RC–ланцюжка. Уміти фізично пояснювати отримані наближені формули. Знати, в якому випадку напруга на конденсаторі буде дуже близькою до кусково–лінійної функції.
- Знати, яку систему функцій називають повною ортогональною. Уміти виводити коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є в загальному вигляді.
- Знати, яку повну ортогональну систему функцій покладено в основу тригонометричного ряду Фур'є. Уміти виводити коефіцієнти розвинення періодичної функції в тригонометричний ряд Фур'є.
- Знати, що таке гармоніки. Уміти виводити вирази для активної потужності, що виділяється на кожній гармоніці. Знати умову скінченності активної потужності сигналу.
- Уміти виводити розвинення меандру та симетричного пилкоподібного сигналу в тригонометричний ряд Фур'є. Уміти виводити, який відсоток потужності цих сигналів міститься в першій гармоніці. Знати ідею



перетворення сигналів на синусоїду за допомогою фільтра нижніх частот.

Означені навчальні цілі дають об'єктивну можливість однозначно судити про ступінь досягнення їх як при самоконтролі, так і при зовнішньому контролі засвоєння навчального контенту.

### Список рекомендованої літератури

1. Ю.О. Коваль, І.О. Милютченко, А.М. Олейніков, В.М. Шокало, «Основи теорії кіл, сигналів та процесів в системах технічного захисту інформації. Ч.1.», за загальною редакцією В.М. Шокала, Харків: НТМТ, 2011. – 544 с.
2. А.В. Павленко, В.Л. Копорулін, Л.П. Кагадій, Л.В. Моссаковська, «Вища математика. Розділ «Ряди та інтеграл Фур'є»»: Навч. посібник, Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 92 с.
3. Л.А. Бессонов «Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Часть 1», М: Юрайт, 2018. – 364 с.
4. Л.А. Бессонов «Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Часть 2», М: Юрайт, 2018. – 346 с.
5. V.S. Khilov, “Theoretical fundamentals of electrical engineering”, Dnipro, National Mining University, 2018. – 467 p.
6. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Yu.V. Geronimus, M. Yu. Tseytlin and J. Alan, “Table of Integrals, Series, and Products”, edited by D. Zwillinger and V.H. Moll, Academic Press, 2014. – 1133 pages.

Навчальне видання

**Горєв В'ячеслав Миколайович**

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ**

Частина II

Навчальний посібник

Видано в редакції автора.

Підписано до друку 27.09.2021. Формат 30x42/4.  
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,9.  
Обл.-вид. арк. 5,9. Тираж 10 пр. Зам. №\_\_

Підготовлено до друку та видруковано  
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.