

Міністерство внутрішніх справ України
ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

О.Д. Станіна, С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна

**МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ДВОЕТАПНОГО
ВИРОБНИЦТВА З НЕПЕРЕРВНО РОЗПОДІЛЕНИМ
РЕСУРСОМ**

Монографія

Дніпро
2021

Рекомендовано до друку Вченою радою
Дніпропетровського державного університету внутрішніх справ
(протокол № 2 від 28 жовтня 2021 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гнатушенко В.В. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою інформаційних технологій і систем Національної металургійної академії України

Дорофєєв Ю.І. - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій Національного технічного університету «Харківський політехнічний університет»

Станіна О.Д.

С 76 Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом: моногр. / О.Д. Станіна, С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна / Дніпро: Дніпропетровський державний університет внутрішніх справ, 2021. – 200 с.

ISBN 978-617-627-166-6

Викладено основні положення щодо створення нових математичних моделей процесів розміщення двоетапного виробництва, розробки та обґрунтування методів їх розв'язування, які враховують неперервність розподілення ресурсу та наявність декількох етапів виробництва. Особливу увагу приділено експериментальним дослідженням і аналізу результатів розв'язання модельних задач. Наведено приклади практичного застосування запропонованих моделей на задачах оптимізації двоетапного розподілу матеріального потоку на підприємствах паливно-енергетичного комплексу.

Для фахівців у сфері обчислювальної та прикладної математики, науковців, аспірантів і студентів, які цікавляться сучасними проблемами теорії оптимізації, у тому числі недиференційованої, математичним моделюванням, проблемами територіального планування, оптимального розміщення об'єктів різної природи в заданому регіоні, іншими задачами, пов'язаними із розбиттям множин довільної структури або форми на підмножини.

ISBN 978-617-627-166-6

УДК 519.8

© О.Д. Станіна, С.А. Ус,
Л.С. Коряшкіна, 2021
© Дніпропетровський державний
університет внутрішніх справ, 2021

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ – РОЗПОДІЛУ	12
1.1 Приклади задач розміщення – розподілу та їх класифікація.....	12
1.2 Математичні моделі і типи задач оптимального розбиття множин.....	22
1.3 Багатоетапні задачі розміщення та їх математичні постановки.....	30
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ РЕСУРСУ, НЕПЕРЕРВНО РОЗПОВСЮДЖЕНОГО НА ЗАДАНІЙ ТЕРИТОРІЇ.....	44
2.1 Загальна постановка оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками	44
2.2 Двоетапні задачі оптимального розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу при наявності обмежень на потужності підприємств першого етапу.....	47
2.2.1 Математична постановка.....	47
2.2.2 Метод розв'язання задачі	50
2.2 Двоетапні задачі оптимального розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу без обмежень на потужності підприємств першого етапу.....	53
2.2.1 Математична постановка.....	53
2.2.2 Метод розв'язання задачі	55
2.2.3 Обґрунтування методу розв'язання задачі	60
2.2.4 Наближений алгоритм розв'язання	83
РОЗДІЛ 3. МОДЕЛІ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛЕННЯ З РЕСУРСОМ, НЕПЕРЕРВНО РОЗПОВСЮДЖЕНИМ НА ЗАДАНІЙ ТЕРИТОРІЇ.....	87
3.1 Побудова математичних моделей задач оптимального розбиття множин з розміщенням центрів при наявності додаткових зв'язків	87

3.2	Метод розв'язання двоетапної задачі оптимального розміщення-розподілення без обмежень на потужності	90
3.2.1	Метод розв'язання задачі	90
3.2.2	Обґрунтування методу розв'язання задачі	92
3.2.3	Наближений алгоритм розв'язання	96
3.3	Двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу з обмеженнями на потужності підприємств першого етапу	103
3.3.1	Метод розв'язання задачі	103
3.3.2	Обґрунтування методу розв'язання задачі	105
3.3.3	Наближений алгоритм розв'язання	108
РОЗДІЛ 4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ І АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ		112
4.1	Аналіз впливу вхідних параметрів на оптимальні розв'язки двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами	112
4.1.1	Аналіз впливу розміру сітки на значення функціоналу задачі і час розв'язання	113
4.1.2	Аналіз впливу кількості центрів першого етапу на значення функціоналу задачі і час розв'язання	117
4.1.3	Аналіз впливу кількості центрів другого етапу на значення функціоналу, оптимальне розбиття і час розв'язання задачі	123
4.2	Експериментальне дослідження роботи алгоритму розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин з розміщенням центрів при наявності додаткових зв'язків	130
4.2.1	Аналіз результатів обчислювальних експериментів з розв'язання задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів першого етапу	130
4.2.2	Експериментальне підтвердження доцільності моделювання двоетапних задач розміщення – розподілу з неперервно-розповсюдженим ресурсом у вигляді неперервних задач ОРМДЗ	138

4.3	Експериментальне дослідження обчислювальної складності алгоритму розв'язання задачі ОРМДЗ за рахунок дискретизації множини	141
РОЗДІЛ 5. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ		148
І МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ – РОЗПОДІЛУ		148
5.1.	Оптимізація двоетапного розподілу матеріального потоку на підприємствах паливно-енергетичного комплексу	148
5.2	Можливості застосування геоінформаційних систем на підприємствах паливно-енергетичного комплексу	151
5.3.	Реалізації алгоритмів розв'язання двоетапних задач розміщення – розподілу з використанням геоінформаційних систем і ресурсів	156
ВИСНОВКИ		166
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		169
ДОДАТОК А МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОРМДЗ		183
ДОДАТОК Б ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ДОДАТКОВИХ ЗВ'ЯЗКІВ НА ФОРМУ ГРАНИЦЬ МІЖ ПІДМНОЖИНАМИ В ОПТИМАЛЬНОМУ РОЗБИТТІ ЗАДАНОЇ МНОЖИНИ		185
ДОДАТОК В ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ, ОТРИМАНІ В РЕЗУЛЬТАТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ		198

ВСТУП

У теперішній час важко уявити собі керівника, який приймає рішення, базуючись виключно на своєму досвіді та інтуїції. Обґрунтовані рішення вимагають аналізу великого обсягу інформації та застосування спеціальних засобів, в основі яких лежать сучасні математичні методи. Саме такого підходу потребують задачі планування та розміщення об'єктів, які часто виникають на практиці, наприклад, для визначення місць розташування складів, розподільних центрів, центрів зв'язку та виробничих потужностей.

Вивченню задач розміщення присвячена значна частина робіт з дослідження операцій. При цьому область, в якій проводиться розміщення, може мати різну природу, структуру та характеристики, а термін «об'єкт» може трактуватися досить широко. В англійській літературі такі задачі відомі як «*Facility location problem*» та «*Continuous Location-Allocation Problem*».

Постійна зацікавленість до проблеми розміщення об'єктів підтверджується великою кількістю публікацій, присвячених розробці математичних моделей, ефективних методів і алгоритмів розв'язування різних задач розміщення, серед яких роботи видатних дослідників в економіці (В. Лаунхардт, М. Вебер, І. Тюнен), дискретному програмуванню (Drezner Z., Hamacher. H., В.Л.Береснев, Е.Х. Гімаді, Трубін, Михалевич, Шор) та ін.

Велику кількість вітчизняних і зарубіжних публікацій присвячено дослідженню дискретних задач розміщення в яких припускається, що споживачі розміщені дискретно, як «центри

тяжіння» поштових індексів. Таке припущення, в основному, продиктовано обмеженими можливостями здатності розрізняти об'єкти, а також обчислювальною складністю розв'язування задач розміщення-розподілення з великою кількістю клієнтів, адже така задача є NP-повною задачею. Серед авторів, які займалися дискретними задачами розміщення слід згадати L. Cooper (1963), Z. Drezner (2003), В.А. Трубін (1992), J. Beasley (1993), R. Farahani (2010), R. Aboolian (2007), M. Jepsen (2012) та ін.

Неперервні задачі розміщення-розподілу, в яких множина, що підлягає розбиттю, є континуальною, детально вивчаються. Таким задачам приділяли увагу Н. W. Corley та S. D. Roberts, В. Р. Хачатуров, І. В. Бейко та інші. Протягом останніх десятиліть неперервні задачі оптимального розбиття множин із розташуванням центрів є предметом досліджень О.М. Кісельової, Л.І. Лозовської, В. Строевої та ін.

В умовах сучасного економічного розвитку країни транспортно-виробничі системи, в яких реалізуються логістичні процеси кругообігу матеріальних ресурсів, є досить ємними і складними, оскільки характеризуються великою кількістю господарчих суб'єктів і посередників, розміщених в різних регіонах і на великих територіях, відмінностями у розмірах потреб у різних покупців, багатьма іншими факторами. Логістика матеріальних потоків здійснюється не тільки в рамках одного самостійного підприємства, але й за його межами, в інших, подібних до нього або пов'язаних з ним структурах, а це визначає таку властивість транспортно-виробничих процесів, як їх

багатоетапність. Прикладами таких логістичних процесів і оптимізаційних задач, що виникають, є:

- раціональний збір сільськогосподарських культур і їх доставка спочатку до зерносховищ, а потім до кінцевого споживача;
- формування мережі сучасних сміттєперевантажувальних і сміттєсортувальних станцій з метою скорочення питомих сумарних витрат на вивезення відходів;
- планування лісосічних робіт і подальше вивезення деревини з організацією проміжних складів, враховуючи можливість використання місць штабелювання для доставки до них лісоматеріалів з сусідніх лісосік;
- розподіл матеріальних потоків між клієнтами, пунктами прийому й переробки сировини, що забезпечує мінімальні транспортні витрати;
- формування регіональної складської мережі, мережі поштових служб доставки та ін.

В названих логістичних транспортно-виробничих системах структурними елементами є підприємства, які здійснюють збір деякого неперервно розподіленого на певній території ресурсу (у подальшому – центри першого етапу), і підприємства, які цей ресурс споживають або переробляють (центри другого етапу). За кожним центром першого етапу, як правило, закріплюється територія (зона) його обслуговування. Рух матеріальних потоків здійснюється спочатку в напрямку від кожної точки даної області безпосередньо до обслуговуючого її підприємства, а потім первинно оброблений або

розсортований ресурс направляється в певних кількостях на підприємства, які є споживачами цього ресурсу.

На відміну від добре вивчених дискретних багатоетапних задач розміщення-розподілу (роботи В.Л. Береснева, Е. Х. Гімаді, Ю.А. Кочетова, В.А. Трубіна, Д.Б. Юдіна та інших) багатоетапні задачі, в яких початковий ресурс займає суцільно (щільно, густо) деяку територію, в науковій літературі майже не представлені. Їх математичні моделі набувають неперервний характер. Дослідженню саме таких багатоетапних задач розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом присвячена монографія. Запропоновані в ній моделі враховують неперервність розподілення ресурсу та наявність декількох етапів виробництва.

Перший розділ монографії містить короткий огляд існуючих моделей задач розміщення розподілу. Проведено аналіз становлення та розвитку теорії багатоетапних задач розміщення-розподілення, а також неперервних задач оптимального розбиття множин. Подано приклади математичних постановок таких задач та їх модифікації. Зроблено огляд традиційних підходів, моделей і методів, які застосовуються до досліджуваних видів задач. Сформульовані багатоетапні задачі розміщення підприємств на континуальній множині.

У другому розділі побудовані математичні моделі двоетапних задач оптимального розподілення ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території. Розглянуто задачі без обмежень на потужності підприємств та за наявності таких обмежень. Математичні постановки задачі оптимального розподілення неперервно

розповсюдженого ресурсу при наявності обмежень на потужності підприємств першого етапу сформульовані у вигляді неперервних задач оптимального розбиття множин з двовимірного евклідового простору на підмножини з розташуванням центрів, обмеженнями у формі рівностей, які враховують потужності центрів першого етапу і додаткові зв'язки між центрами першого і другого етапів.

У третьому розділі запропоновані моделі узагальнено на випадок, коли необхідно не тільки розподілити ресурс, а і визначити місця розміщення підприємств. Тут розглянуто двоетапну задачу розміщення-розподілення з неперервно розповсюдженим ресурсом як неперервну задачу оптимального розбиття множин з розміщенням центрів за наявності додаткових зв'язків, причому у двох постановках: з обмеженнями на потужність підприємств першого етапу та без таких обмежень. Сформульовано та обґрунтовано методи розв'язування таких задач.

Четвертий розділ присвячено дослідженню та аналізу результатів обчислювальних експериментів із розв'язування модельних двоетапних задач розміщення-розподілення за допомогою розроблених алгоритмів. Представлено результати перевірки коректності роботи алгоритмів; виявлено залежність значення функціоналу і часу розв'язання задачі ОРМДЗ від розміру сітки дискретизації області; з'ясовано параметри задачі, що впливають на форму границь між підмножинами в задачах з фіксованими центрами першого етапу; обґрунтовано доцільності постановки і розв'язування неперервних задач ОРМДЗ при формуванні потоків двоетапного

транспортування матеріальних (сировинних) ресурсів, які неперервно розподілені на певній території.

Результати практичного застосування запропонованих методів та алгоритмів представлено у розділі 5. Тут розглянуто приклади застосування розроблених моделей та алгоритмів для розв'язання практичних задач, що виникають у паливно-енергетичному комплексі.

Монографія написана за результатами спільних досліджень, що проводяться авторами в Дніпровському державному університеті внутрішніх справ та Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка». Розділ 1 є результатом сумісної роботи авторів, розділи 2 – 4 написані О.Д. Станіною і містять результати її дисертаційного дослідження, розділ 5 представляє дослідження Л.С. Коряшкіної та С.А. Ус.

Автори сподіваються, що матеріал книги буде цікавий і корисний, перш за все, молодим вченим, аспірантам, науковим працівникам, які займаються дослідженнями в області нескінченновимірного математичного програмування, а також фахівцям, в практичній діяльності яких виникають проблеми прийняття рішень, територіального планування, оптимального розміщення об'єктів різної природи в заданій області з урахуванням багатоетапності виробництва та інші завдання, пов'язані із розв'язанням багатоетапних задач та задач оптимального розбиття континуальних множин.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ – РОЗПОДІЛУ

1.1 Приклади задач розміщення – розподілу та їх класифікація

Задачі розміщення-розподілу – це розповсюджені задачі оптимізації, що виникають при виборі місць розташування різних державних, промислових або комерційних центрів обслуговування, з огляду на потреби, які ці об'єкти мають на меті задовольнити. Оскільки ці задачі є, як правило, складними, формулювання моделей, а також аналіз варіантів розв'язання виконується спеціалістами-аналітиками, оскільки реалізація обраного варіанту місць розташування часто є дорогою і, коли вона вже виконана, не може бути легко змінена. Прикладом таких задач можуть бути: задачі розміщення виробництва або розподільчих центрів [1 – 3], розташування різних пунктів обслуговування (лікарні, магазини, пожежні депо та ін) [4]; формування генеральних планів підприємства [5]; проектування друкованих плат та інтегральних схем [6 – 8]; конструювання літальних апаратів [9]; задачі зрошення [10]; проектування мереж мобільного зв'язку [11] та інші.

Вперше такі задачі були сформульовані ще в XVII столітті. Їх виникнення і перші спроби розв'язування пов'язують з іменем П'єра Ферма, який сформулював, ймовірно, першу задачу розміщення: для заданих трьох точок знайти таку четверту (відому зараз, як точка Ферма), що сума довжин трьох відрізків, проведених з цієї точки до заданих, була б найменшою. Ця задача була частково розв'язана Е. Торрічеллі та Б. Кавальєрі в 1640 році. А вже у 1970 Т. Сімпсон

модифікував її та узагальнив у напрямку врахування довільних ваг та зв'язків між об'єктами.

Як зазначено в [12], становлення теорії просторового розміщення об'єктів пов'язують з роботою 1826 року Й. Тюнена «Ізольована держава в її відношенні до сільського господарства та національної економії». Тюнен ставив перед собою задачу виявити закономірність розміщення сільськогосподарчих виробництв відносно центру попиту. Як результат, були створені так звані кільця Тюнена, що представляють собою систему концентричних кіл різного діаметру навколо центру міста. Значно пізніше Вебер назвав їх ізодапанами.

В. Лаунхард (1882 р.) займався оптимальним розміщенням окремого промислового підприємства відносно місць розташування сировини та ринків збуту. Він, також як і Й. Тюнен, головним фактором розміщення виробництва вважав транспортні витрати.

В 1909 році М. Вебер використав задачу розміщення як модель для оптимального розміщення фабрик при відомих місцях розташування ресурсів і споживачів. Зараз, така задача відома як задача Вебера [13 – 15]. Вона є окремим випадком загальної задачі географічного розміщення господарської діяльності людини. Причому, фактором розміщення («штандартним» фактором) Вебер називав економічну вигоду – скорочення витрат на виробництво та збут продукції, що на практиці означало можливість виготовляти цей продукт в певному місці з меншими витратами в порівнянні з іншими місцями.

Всі задачі розміщення можна розбити на два великі класи: задачі розміщення взаємопов'язаних об'єктів і задачі розміщення-розподілу (задачі розміщення підприємств). До першого класу належать задачі зі заздалегідь відомою структурою зв'язків між об'єктами: задачі Вебера [16, 17], квадратична задача про призначення [18, 19] і т.п. У задачах другого класу відсутні зв'язки між розміщеними об'єктами – «постачальниками» і відбувається розподіл фіксованих об'єктів – «клієнтів» між ними. До таких задач відносять задачі про р-медіану [20, 21] та р-центри [21, 22], найпростішу задачу розміщення [23 – 26] та ін.

Крім того, важливим критерієм класифікації задач розміщення, і як наслідок, методів їх розв'язання, є тип об'єкту, що розміщується. Так, зазвичай, виділяють три типи об'єктів: точечні, лінійні та площадні [12]. До першого типу відносять задачі розміщення одного або декількох об'єктів, розмірами яких можна знехтувати. Для розв'язку таких задач можна, наприклад, використати, метод Лаунхард або метод потенціалів, відомий з фізики.

Для розв'язання задач другого типу, прикладом яких можуть бути задачі розміщення трубопроводу, ці методи вже не даватимуть коректні результати, адже потребують вивчення рельєфу поверхні та місцевих умов.

При розв'язуванні задач розміщення площадних об'єктів, необхідно враховувати їх деякі геометричні характеристики. Вивченням таких задач займається харківська школа, серед представників якої – В.Л. Рвачев, Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, Романова Т.Є. та ін. В рамках цієї школи вивчаються задачі

пакування, розкрою, розміщення об'єктів в просторі, а також задачі покриття та розбиття з урахуванням деякого критерію якості [9, 27-29].

Наведемо приклади теоретичних і практичних задач, які зводяться в математичній постановці до задач розміщення:

- задачі календарного планування [30],
- стандартизації [31],
- мінімізації поліномів від булевих змінних [32],
- двохрівневі задачі вибору номенклатури виробів [33],
- багатоступінні задачі розміщення [33-38] та ін.

Слід зазначити, що велика частина робіт присвячена вивченню найпростішої задачі розміщення та її узагальненню на випадки додаткових певних умов: наприклад, обмежень на обсяг виробництва [38, 39], кількість видів продукції [40], стадій, динаміки [41 – 45], багатокритеріальність [42] та ін.

В загальній постановці під задачею розміщення-розподілу (ЗРР) розуміють наступну: необхідно визначити кількість нових об'єктів і координати їх розміщення, а також розподілити перевезення між новими та існуючими об'єктами, при цьому передбачається, що нові об'єкти мають бути розташовані таким чином, щоб вартість транспортування від об'єктів до «споживачів» була мінімальна.

Зокрема, ЗРР можна сформулювати так [43]: необхідно розмістити N нових виробників (x_1, \dots, x_N) , $x_i \in R^2 \forall i$ з урахуванням попиту вже існуючих M споживачів $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_j \in R^2 \forall j$ і з метою мінімізації суми додатньо зважених відстаней між ними.

Розрізняють такі види задач ЗРР (рис. 1.1) в залежності від:

- кількості продуктів: одно-, багатопродуктові;
- числа центрів, що розміщуються: одно-, багаточентрові;
- кількості джерел: одно-, багатоджерельні;
- форми об'єкту: точкові, лінійні, плоскі, просторові, на графі чи мережі;
- області розміщення: дискретні, неперервні.

Так, математична постановка найпростішої ЗРР з одним джерелом (тобто таких, де споживач належить тільки одному виробникові) і без обмежень можна сформулювати наступним чином:

Задача 1. Знайти:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij} w_i d(x_i, a_j)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^N y_{ij} = 1, j = 1, \dots, M,$$

$$y_{ij} \in \{1, 0\}, j = 1, \dots, M, i = 1, \dots, N,$$

Тут булеві змінні $y_{ij}, j = 1, \dots, M, i = 1, \dots, N$ містять інформацію про приналежність існуючого споживача новому виробнику, тобто

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_j \text{ закріплений за } x_i \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Дане обмеження, забезпечує виконання умови на наявність лише одного джерела для кожного споживача. Додатні ваги $w_i, i = 1, \dots, N$, можуть означати, наприклад, попит споживача a_j . Дана задача, при фіксованих центрах, може бути зведена до задачі розбиття дискретної множини.

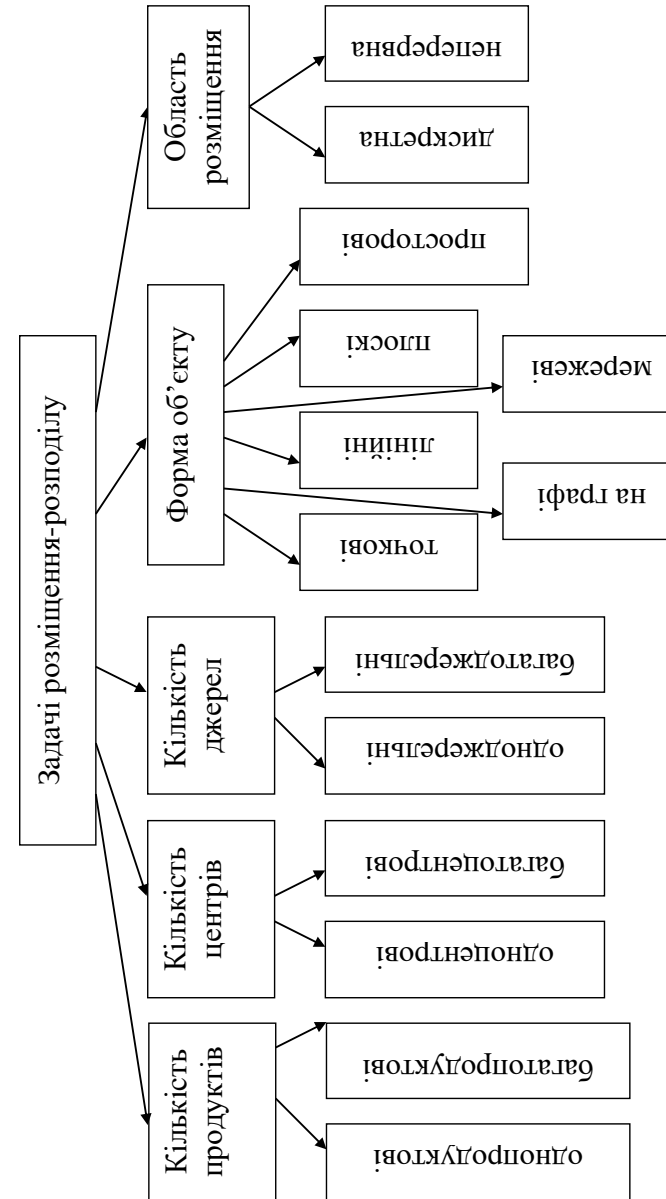


Рис. 1.1. Види задач розміщення-розподілу

Перша ЗРР з множиною джерел (багатоджерельна задача) та без обмежень була сформульована Купером в 1964 році [44] у такий спосіб:

Задача 1.1. Знайти

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} d(x_i, a_j)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^N w_{ij} = r_j, j = 1, \dots, M,$$

$$w_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$x_i \in R^2, i = 1, \dots, N,$$

де w_{ij} – кількість товару, що доставляється від виробника з номером i до споживача з номером j , $d(x_i, a_j)$ – відстань від виробника i до споживача j .

Задача містить обмеження, яке дозволяє доставляти кожному з покупців продукцію з r_j виробників.

В подальшому ці задачі ускладнювалися за допомогою введення обмежень на виробничі потужності [43]:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} w_{ij} d(x_i, a_j)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^M w_{ij} = s_i, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N w_{ij} = r_j, j = 1, \dots, M,$$

$$w_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$x_i \in R^2, i = 1, \dots, N,$$

де c_{ij} – вартість транспортування одиниці товару, розрахована на одиницю відстані від виробника i до споживача j .

Ця задача включає обмеження, які дозволяють не тільки доставляти кожному з покупців продукцію з r_j заводів, але й враховувати потужність s_i самих заводів.

В подальшому такі задачі трансформувалися до моделей багатопродуктових ЗРР з обмеженнями, які можна представити у наступному вигляді:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K c_{ijk} w_{ijk} d(x_i, a_j)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^M w_{ijk} = s_{ik}, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=1}^N w_{ijk} = r_{jk}, j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{k=1}^K w_{ijk} \leq u_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$w_{ijk} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K.$$

На сьогоднішній день вже розроблено велику кількість методів і алгоритмів розв'язання подібних задач, до них можна віднести: алгоритм гілок та меж [13, 26], множників Лагранжа [46], метод пошуку з заборонами [47], метод р-медіани [48], генетичний алгоритм [49, 50] та багато інших [51 – 59]. Однак всі ці методи застосовуються для задач, в яких множина споживачів дискретна.

Вони не можуть бути безпосередньо використані при розв'язанні задач з споживачами, щільно розподіленими на заданій території, оскільки виникають складнощі з урахуванням попиту таких споживачів. Щоб вирішити такі питання, більшість алгоритмів, що зараз використовуються побудовано на принципі агрегації попиту [56]. Даний принцип, передбачає спрощення масиву вхідних даних, часто за рахунок використання середнього арифметичного, моди або медіани. В результаті такого підходу виникають часом досить істотні похибки, оцінки яких представлені, наприклад, в роботах [56, 57].

Слід зазначити, що останнім часом все більша кількість дослідників звертає свою увагу на ЗРР в умовах нечіткості. Особливістю даної групи задач, є врахування того факту, що в більшості випадків досить складно, а часом і неможливо, отримати достовірну інформацію про стан навколишнього середовища. Тому моделі таких задач мають в собі стохастичні та нечіткі складові. У більшості випадків, в якості невизначеного фактора використовують попит споживачів [33, 60, 61].

Зараз з'явилося чимало робіт, які враховують неперервність попиту [33, 39, 58]. Дані задачі умовно можна розділити на задачі з рівномірним і нерівномірним розподілом попиту. Однак, як показує практика, при розв'язанні ЗРР у звичайній постановці виникають складнощі, пов'язані з врахуванням обмежень.

В статті [62] для вибору місцезнаходження станції техобслуговування використовувався метод, заснований на цілій низці різноманітних підходів та методів. Так, метод К-середніх був використаний для кластеризації станцій технічного обслуговування;

оптимальна кількість скупчень була розрахована за допомогою індексу Силует (Silhouette); ефективність кожного кластера станцій - за допомогою меделей Чарнза, Купера та Родса тощо.

Робота [63] присвячена дослідженню задачі розміщення об'єктів з обмеженнями на потужності підприємств, що збирають певні ресурси, визначені основні проблеми та перспективи розв'язання задач такого типу.

В [64] автори приділяють увагу не тільки задачі зниження вартості розміщення та мінімізації вартості доставки товарів багатопродуктового виробництва, а й вирішують питання про оптимальний переліку товарів, що надається споживачам.

В роботі [65] розв'язується задача розміщення виробництва при умові мультипокриття. Автори пропонують використовувати декомпозицію задачі та метод релаксації Лагранжа.

В роботі [66] досліджується трьохрівнева задача розміщення об'єктів на деревовидній мережі, яка є логічним продовженням задачі [23]. Автори пропонують і обґрунтовують точний алгоритм її розв'язання, доводить, що запропонований метод вирішиє задачу за лінійний час. Цікавим є поєднання можливостей використання регресії, евристики та машинного навчання під час розв'язування задач розміщення, представлене в [67].

В світі останніх подій, пов'язаних з пандемією COVID-19 особливо актуальною виглядає робота [68] присвячена вибору місця розташування пунктів тестування COVID-пацієнтів. Авторами створений гібридний метод, заснований на обробці аналітичних ієрархій та методу Парето.

1.2 Математичні моделі і типи задач оптимального розбиття

множин

Велику кількість задач, які мають теоретичну та практичну цінність, можна звести до задач оптимального розбиття множин. Прикладом таких задач можуть бути задачі зрошення, територіального та складського планування, нескінченновимірні транспортні задачі, задачі розміщення та розподілу, комбінаторні геометричні задачі, задачі теорії класифікації та кластеризації, а також багато їм подібних.

Існують різні класи задач ОРМ. Часто в основі класифікації задач ОРМ лежить деяка ознака. Так, наприклад:

- за видом функціоналу задачі розділяють на лінійні [23, 59, 69, 70] та нелінійні [32, 71, 72];
- за потужністю множини, на якій розміщується об'єкти, – скінченні [35, 59, 69, 72] та нескінченні [61, 73 - 75];
- за наявністю параметрів, які змінюються з часом, – статистичні та динамічні;
- за характером параметрів, що включені до моделі, – стохастичні та детерміновані та ін.

Задачі ОРМ часто умовно розділяють на два класи: дискретні та неперервні задачі (рис. 1.2) [76]. Перший клас – дискретні задачі – характеризуються наступною постановкою: є деяка скінченна множина, яка підлягає розбиттю. Такий клас задач має цілий ряд

підзадач, для яких сформульовано велику кількість підходів та алгоритмів розв'язування:

- задачі розміщення-розподілу [33, 50, 54, 75-80];
- задачі маршрутизації [81, 82];
- задачі розкладу [83, 84], тощо.

Сформулюємо задачу ОРМ наступним чином: нехай множина $I = \{1, \dots, N\}$ задає перелік можливих місць розташування підприємств, що виробляють деякий однорідний продукт. В будь-якому з пунктів i можна відкрити підприємство, величина $c_i \geq 0$ задає відповідні витрати. Відкрите підприємство може виробляти продукцію для споживачів в необмеженій кількості.

Перелік споживачів задається множиною $J = \{1, \dots, M\}$. Для кожної пари (i, j) відома величина $g_{ij} \geq 0$, яка визначає витрати на виробництво та доставку продукції споживачам. Задача складається у тому, щоб знайти таку множину нових підприємств $S \subseteq I, S \neq \emptyset$, яка з мінімальними витратами дозволяє задовольнити потреби всіх споживачів. З використанням введених позначень оптимізаційна постановка задачі може бути записана наступним чином:

$$F(S) = \sum_{i \in S} c_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} g_{ij} \rightarrow \min_{S \subseteq I}.$$

Дискретні задачі ОРМ активно вивчаються, починаючи з середини минулого сторіччя [25, 85]. Перші алгоритми розв'язання таких задач з малими розмірностями мали комбінаторний характер та були досить добре досліджені. З розвитком техніки та виробництва виникла необхідність розв'язання задач більшої розмірності, що сприяло подальшому розвитку дискретних задач ОРМ. В результаті

цього було створено велику кількість методів та підходів [80, 86 – 88] для розв’язування подібних проблем.

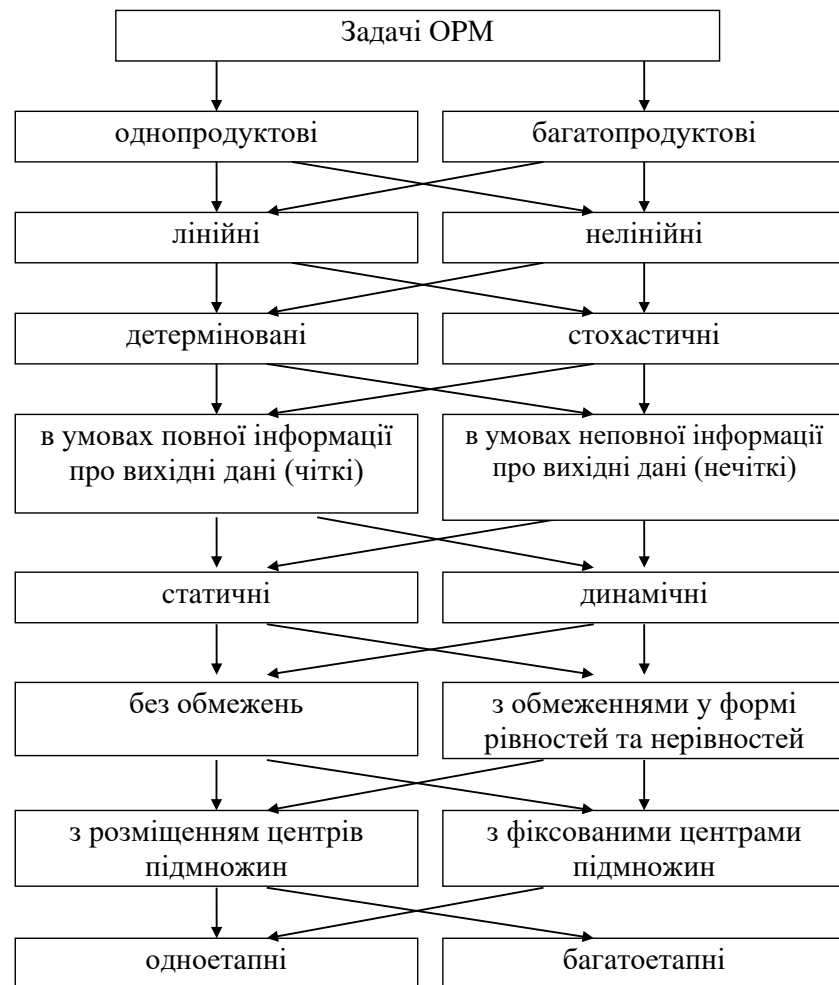


Рис. 1.2. Класифікація задач ОРМ згідно з [76, с. 78]

Варто зазначити, що більшість методів було представлено у вигляді евристичних алгоритмів, оскільки на практиці часто виникають складності при теоретичному доведенні методу розв’язку.

На даний час, не дивлячись на велику кількість існуючих підходів до розв’язування, задача ОРМ все ще залишається актуальною, що підтверджується продовженням сучасних досліджень та удосконаленням вже існуючих алгоритмів [49-52, 89].

Другий клас – неперервні задачі ОРМ – характеризуються наявністю континуальної множини, яка підлягає розбиттю. Такий клас задач є відносно новим, його реалізація є більш трудомісткою. Важливість розробки алгоритмів розв’язування неперервних задач незаперечна. Серед задач, що зводяться до неперервних задач ОРМ, насамперед слід зазначити задачу розміщення-розподілу (при неперервному розподілі споживачів), нескінченномірні транспортні задачі, неперервні задачі про покриття і т.п. [60, 61]. Активне дослідження в області неперервних задач ОРМ починається 60-х роках попереднього століття. При цьому якщо в перших роботах досліджуються в основному задачі з відомими центрами при обмеженнях у вигляді нерівностей [90], то вже в 1976 році О.М. Кисельовою запропонований алгоритм розв’язання неперервних задач ОРМ з відшукуванням центрів підмножин [91]. На даний момент запропоновані алгоритми та підходи розв’язування таких задач в різних їх постановках [60, 61].

З розвитком теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) був знайдений підхід, що ґрунтується на моделях нескінченновимірних задач розміщення. Останні в свою чергу, мало чим відрізняються від задач розміщення-розподілу з неперервним попитом, оскільки перші є узагальненням останніх.

У загальному вигляді неперервні задачі ОРМ можна представити таким чином: нехай споживач деякої однорідної продукції розподілений в області Ω [60]. Скінченне число N виробників, розташоване в ізольованих точках, області Ω , які відповідають системі точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, причому координати деяких з них, а можливо навіть всіх, заздалегідь невідомі. Відомий попит $\rho(x)$ на продукцію в кожній точці області Ω , а також вартість доставки продукції $c_i(x, \tau_i), i = \overline{1, N}$, – з пункту виробництва τ_i в пункт споживання x . Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від транспортних витрат. Потужність i -го виробника визначається сумою попиту споживачів, яких він обслуговує, і не повинен перевищувати заздалегідь відомі обсяги $b_i, i = \overline{1, N}$. Необхідно розбити область Ω на зони обслуговування кожним з центрів, тобто на підмножини $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ так, щоб сумарні витрати на доставку продукції були мінімальні.

У найпростішому випадку математична постановка неперервної лінійної задачі розбиття формулюється в такий спосіб [60]: нехай Ω – замкнена, обмежена, вимірна за Лебегом множина евклидового простору E_n . Необхідно розбити її на N вимірюваних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ так, щоб мінімізувати функціонал:

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

за умов:

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Тут $c_i(x, \tau_i), i = \overline{1, N}$ – дійсні, обмежені, вимірні за x для усіх $\tau_i, i = 1, \dots, N$, визначені на Ω функції; $\rho(x)$ – дійсні функції, що інтегруються та визначені на Ω ; $\tau_i, i = 1, \dots, N$, – задані точки підмножини Ω , які називаються центрами, a_1, \dots, a_N – задані невід'ємні числа; $b_i, i = \overline{1, N}$, – задані дійсні числа, що задовольняють умові розв'язуваності задачі:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, S = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Введення характеристичних функцій

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, i = 1, \dots, N, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i. \end{cases}$$

дозволяє записати задану ОРМ у вигляді:

$$\text{знайти } \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} I(\lambda(\cdot)),$$

$$\text{де } I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c_i(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \forall x \in \Omega, i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega \}.$$

Очевидно, що дана задача є неперервною моделлю ЗРР з одним джерелом (згідно з класифікацією приведеною на рис. 1.1) і без обмежень.

Подальші удосконалення задачі ОРМ привели до:

– визначення центрів підмножин:

$$I(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx$$

за умов:

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N \Omega_i = \Omega;$$

– врахування обмежень у формі рівностей і нерівностей [92]:

$$\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\}} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma, \quad \tau \in \Omega^N;$$

– розробки алгоритму розв'язання багатопродуктової (M -продуктової) задачі ОРМ [93]:

$$\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\}} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma', \quad \tau \in \Omega^N,$$

де

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N c_i^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

$$\Gamma' = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M \},$$

$c_i^j(x, \tau_i)$ дійсні, обмежені, вимірні по аргументу x на Ω , та опуклі по

τ на Ω для всіх $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$; $\rho^j(x)$ – дійсні, обмежені,

вимірні і невід'ємні на Ω функції; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ – задані точки підмножини Ω_i^j , та ж сама для всіх $j = 1, \dots, M$, яка називається загальним центром підмножин $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, $i = 1, \dots, N$;

– врахуванням додаткових обмежень (наприклад, на пропускні здатності зв'язків) [75, 94, 95].

Оскільки в даній роботі розглядатимуться виключно однопродуктові задачі, нижче наведемо постановку такого типу задач ОРМ при наявності обмежень у формі рівностей і нерівностей: знайти

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

за умов

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \}.$$

Метод розв'язання, алгоритм і результати застосування всіх перерахованих вище неперервних задач ОРМ зібрані і систематизовані в [77, 78]. В цих же монографіях описаний єдиний підхід до розв'язання подібних задач. Він полягає в перетворенні вихідних задач в задачі нескінченновимірною математичного програмування, за допомогою характеристичних функцій, а потім в скінченномірну задачу оптимізації, використовуючи функціонал Лагранжа. Крім того, для більшості задач наведені необхідні і достатні умови оптимальності.

1.3 Багатоетапні задачі розміщення та їх математичні постановки

Одним з перспективних напрямків подальшого розвитку теорії ОРМ є дослідження багатоетапних неперервних задач розміщення і розбиття множин.

Зауважемо, що задачі розміщення багатоетапного виробництва з метою мінімізації відстані між його складовими елементами або ж покриття ними певної зони обслуговування розглядаються, наприклад, в [87, 96, 97]. Дані задачі представляють ще один клас задач розміщення-розподілу, який є узагальненням багатоетапних транспортно-виробничих задач, досить активно досліджуваним останнім часом. Основним припущенням в таких моделях є те, що існує якась група розміщуваних об'єктів, кожна з яких має свою множину можливих місць розміщення, та існує певний порядок зв'язків між ними.

Серед задач, які зводяться у математичній постановці до багатоетапної задачі розміщення, слід виділити: задачу вибору оптимального ряду виробів одноразового використання [29]; дворівневу задачу стандартизації [33]; задачу вибору оптимальних рядів виробів і комплектуючих вузлів [98]; задачу вибору індексів бази даних [99] та ін. [100].

Наведемо найбільш відому постановку багатоетапних виробничо-транспортних задач на прикладі двоетапної задачі. Під двоетапною виробничо-транспортною задачею розуміється така, що відображає послідовні процеси випуску одного виду продукції,

доставки його в пункти переробки в іншу продукцію і доставки її кінцевим споживачам. У найпростіших постановках такої задачі розглядаються два продукти – «сировина» і «готовий продукт». Однак, можливі й такі найменування: «сировина», «напівфабрикат», «готовий продукт», в такому випадку, будемо говорити про багатоетапні задачі. При певних умовах і такі, формально багатопродуктові, задачі можуть бути зведені до однопродуктових задач шахового типу [101] (тобто задач в яких всі ненульові коефіцієнти кожного рядка вихідної матриці симплекс-таблиці мають один і той же знак).

Вперше, мабуть, багатоетапна задача розміщення була представлена у J. Krarup і P. Pruzan в 1983 році [102], однак більш детально вона починає вивчатися лише в 90-х. Наведемо математичну постановку такої задачі розміщення (ЗР) в разі двох етапів з використанням наступних булевих змінних вибору і призначення відповідно:

Нехай $x_i = 1$ ($y_k = 1$), якщо підприємство 1-го (2-го) рівня розміщується в пункті $i \in M_1$ ($k \in M_2$), та $x_i = 0$ ($y_k = 0$) в іншому випадку; $x_{kij} = 1$, якщо j-й пункт попиту обслуговується з k-го пункту 2-го рівня через i-й пункт 1-го рівня, та $x_{kij} = 0$ в іншому випадку.

Нехай $N = \{1, \dots, n\}$ – множина пунктів попиту кінцевого продукту, $M_r \subset N$ – множина можливих пунктів розміщення r-го етапу, $r = 1, 2$; g_i^r – витрати на розміщення підприємства r-го етапу в пункті i , $g_i^r \geq 0$; c_{ij} – витрати, пов'язані з транспортуванням одиниці

продукту з пункту r в пункт j , $c_{ij} \geq 0$, $i, j \in N$; b_j – обсяг попиту в пункті j , $b_j > 0$, $j \in N$.

Передбачається, що кожен пункт попиту кінцевої продукції і кожен пункт виробництва будь-якого рівня отримують продукцію тільки від одного виробника; при цьому підприємство другого рівня отримує продукцію від підприємства першого рівня.

Потрібно вибрати підмножини пунктів розміщення кожного рівня (етапу) $I^r \subset M_r$, $r=1,2$, і здійснити призначення обраних підприємств на пункти попиту так, щоб мінімізувати сумарні витрати на розміщення всіх обраних підприємств та на транспортування продукту.

Формальна постановка найпростішої багатоетапної задачі матиме наступний вигляд [23, 101]:

$$\sum_{i \in M_1} g_i^1 x_i + \sum_{k \in M_2} g_k^2 y_k + \sum_{j \in N} b_j \sum_{k \in M_2} \sum_{i \in M_1} (c_{ki} + c_{ij}) x_{kij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{k \in M_2} \sum_{i \in M_1} x_{kij} = 1, j \in N,$$

$$\sum_{k \in M_2} x_{kij} \leq x_i, j \in N, i \in M_1,$$

$$\sum_{i \in M_1} x_{kij} \leq y_k, j \in N, k \in M_2,$$

$$x_i, y_k, x_{kij} \in \{0,1\}.$$

Тут введені такі позначення:

– M_1 – множина можливих місць розміщення підприємств I-го етапу;

– M_2 – множина можливих місць розміщення підприємств II-го етапу;

– N – множина споживачів кінцевого продукту;

– g_i – витрати на розміщення підприємства в точці i ;

– c_{ij} – витрати на транспортування продукції від пункту i до j ;

– b_j – попит в пункті споживання j .

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в пункті } i \text{ розміщується підприємство I-го етапу,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо в пункті } j \text{ розміщується підприємство II-го етапу,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

– x_{ij} – кількість продукту, перевезеного від пункту i першого етапу до пункту j другого етапу;

– x_{jk} – кількість продукту, перевезеного від пункту j другого етапу до споживача k .

Цільовою функцією є мінімізація всіх сумарних витрат на виробництво і транспортування сировини та готової продукції.

Постановка більш узагальненої двоетапної задачі може бути задана в такий спосіб. Необхідно вибрати розташування підприємств першого і другого етапів та визначити кількість продукту, що доставляється від кожного підприємства першого етапу до підприємств другого етапу і від підприємств другого етапу споживачам таким чином, щоб сумарні витрати на доставку продукції були мінімальні.

Тоді математична модель матиме наступний вигляд:

$$\sum_{i \in M_1} g_i x_i + \sum_{j \in M_2} g_j y_j + \sum_{i \in M_1} \sum_{j \in M_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \sum_{k \in N} c_{jk} x_{jk} \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j \in M_1} x_{jk} y_j \geq b_k, \quad k \in N, \quad (1.2)$$

$$y_j \sum_{i \in M_1} x_{ij} x_i \geq \sum_{k \in N} x_{jk}, \quad j \in M_2, \quad (1.3)$$

$$x_{jk} \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0, \quad k \in N, \quad j \in M_2, \quad i \in M_1, \quad (1.4)$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}. \quad (1.5)$$

Подальші удосконалення багатоетапної транспортної задачі призвели до:

– врахування декількох видів вантажу [27]:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{ijl} \cdot x_{ijl} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_{ikl} \cdot y_{ikl} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{kjl} \cdot z_{kjl} \rightarrow \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl} \in \Omega},$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p y_{ikl} \leq a_{il}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p z_{kjl} \geq b_{jl}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} \leq c_{kl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} = \sum_{j=1}^n z_{kjl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$x_{ijl} \geq 0, \quad y_{ikl} \geq 0, \quad z_{kjl} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q},$$

де a_{il} – кількість виробляемого l -го виду вантажу в i -му пункті відправлення; b_{jl} – потреба в l -му виді вантажу в j -му пункті призначення; c_{kl} – місткість k -го перевалочного пункту по відношенню до l -го виду вантажу; c_{ijl} – вартість перевезення одиниці l -го виду вантажу з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення

$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q}$; c_{kjl} – вартість перевезення одиниці l -го виду вантажу з i -го пункту відправлення в k -й перевалочний пункт $i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q}$; c_{kjl} – вартість перевезення одиниці l -го виду вантажу з k -го перевалочного пункту в j -й пункт призначення $j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q}$; x_{ijl} – кількість l -го виду вантажу, що перевозиться з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення; y_{ikl} – кількість l -го виду вантажу, що перевозиться з i -го пункту відправлення в k -й перевалочний пункт; z_{kjl} – кількість l -го виду вантажу, що перевозиться з k -го перевалочного пункту в j -й пункт призначення;

– зміни виду обмежень, наприклад, в залежності від попиту споживачів:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{ijl} \cdot x_{ijl} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_{ikl} \cdot y_{ikl} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{kjl} \cdot z_{kjl} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^q t_{il} s_{il} \rightarrow \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl}, s_{il} \in \Omega}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p y_{ikl} \leq s_{il}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p z_{kjl} \geq b_{jl}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} \leq c_{kl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} = \sum_{j=1}^n z_{kjl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$x_{ijl} \geq 0, y_{ikl} \geq 0, z_{kjl} \geq 0, s_{il} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}, l = \overline{1, q},$$

де s_{il} – кількість виробленого l -го виду вантажу в i -му пункті відправлення; t_{il} – витрати на виробництво l -го виду вантажу в i -му пункті відправлення.

На даний час було розроблено численні алгоритми і методи для розв'язання такого роду задач з урахуванням якомога більшої розмірності і складності. Отримані результати відображені, наприклад, в роботах [23, 35, 49, 50, 69, 103], у тому числі, і в публікаціях за останні кілька років [70, 104]. При цьому простежується орієнтація на використання евристичних алгоритмів [49, 50, 103] через відсутність для них потреби в складних теоретичних доказах.

Системні дослідження, пов'язані з питаннями побудови ефективних алгоритмів розв'язання багатоетапних та багатостадійних задач розміщення-розподілення, проводилися в різний час як вітчизняними, зокрема [105], так і зарубіжними науковцями, наприклад, [35, 81, 82, 106-112].

В [106] представлена математична модель задачі мінімізації транспортних витрат, а також витрат на зберігання та втрати зерна з урахуванням двоетапної схеми перевезення зерна від комбайна до елеватору.

В [107] запропонована модель формування системи двоетапного транспорту твердих муніципальних паливних відходів, що дозволяє отримувати інформацію про оптимальне розміщення і кількість сміттєперевантажувальних станцій. В [35] запропоновані економіко-математичні моделі для розв'язання багатоступеневих транспортно-

виробничих задач планування та управління матеріальними потоками лісопромислових підприємств. Розглянуті приклади задач для вертикально-інтегрованих виробничих структур лісопромислового комплексу, варіанти їх використання в практиці роботи підприємств.

В [108] представлена двоетапна задача розміщення виробництв на деревовидній мережі, за умови, що витрати на транспортування одиниць продукції з пункту до пункту дорівнюють сумі довжин ребер в ланцюгу, що з'єднує ці пункти. Запропонований алгоритм для точного розв'язання заданої задачі з трудомісткістю $O(nm^3)$, де n – кількість точок запиту кінцевого продукту, m – верхня границя числа можливих пунктів розміщення виробництва кожної стадії.

Властивості задачі розташування підприємств з недорогими споживачами при неспадних нелінійних функціях виробничих витрат вивчено в [88, 89]. Там же сформульовано і доведено правила відбраковки неоптимальних рішень, розроблено алгоритми розв'язання задач дискретного програмування, що поєднують в собі ідеї аппроксимативно-комбінаторного методу та методу гілок та меж.

Задача розподілу товару з одного або декількох заводів через склади з очікуваними об'ємами потреб клієнтів і можливим перекриттям областей обслуговування для складів представлена в [111]. Тут сформульовано багатостадійну задачу стохастичного програмування з регресом і методом її розв'язування. При цьому проблема планування розподілення розглядається з горизонтом планування в N -етапів, коли етап визначається як період часу,

протягом якого вимоги клієнтів реалізуються, а рішення повинні бути прийняті до реалізації наступних вимог.

В [112] автори акцентують увагу на тому, що для підтримки ефективної роботи складних виробничих та транспортних систем такі параметри, як вартість, доступність, якість продукції та доставки, повинні бути одночасно пріоритетними. Важливий напрямок наукових досліджень у стратегічній перспективі автори виділяють розмаїття аналітичних та імітаційних моделей, які об'єднують основні етапи ланцюгів поставок. В представленому ланцюжку поставок продукції з [113] враховуються такі аспекти попиту на продукт, як, наприклад, життєвий цикл продукту, прогнозування потреби ринку, багатосторонність продукту та маркетингові стандарти на час підготовки до випуску продукції та обслуговування. Така модель дозволяє виявляти природу попиту на продукцію, і вже на цій базі організувати постачання продукції так, щоб якнайкраще задовольнити попит.

В роботі [114] сформульовано задачу змішаного цілочисельного програмування для вирішення проблеми двоетапного планування розподілу, в якій: 1) клієнти можуть обслуговуватися різними товарами від ряду підприємств, через ряд проміжних точних складів; 2) для кожного заданого можливого місця розміщення складу передбачено фіксовану вартість відкриття відповідного складу, а також експлуатаційні витрати та максимальну пропускну здатність; 3) відомий попит кожного клієнту на кожний товар, а також вартість доставки з підприємства на можливий склад, а потім до клієнта; 4) потрібно вибрати місце для відкриття складів і скласти графік

доставки таким чином, щоб загальна вартість була зведена до мінімуму. Для розв'язання задач автори застосували метод гілок та меж.

В [115] розглядаються багатопрофільні мережі з кількома рівнями, що включають ряд виробничих майданчиків у фіксованих мегаполісах, ряд складів та розподільчих центрів та набір потенційних місць їх розміщення, і, натомість, декілька фіксованих зон клієнтів. Система математично моделюється як задача частково цілочисельного лінійного програмування, в результаті розв'язування якої мають бути визначені кількість, місце та потужність складських та розподільчих центрів, транспортні зв'язки, які необхідно встановити в мережі, а також потоки та темпи виробництва матеріалів. Критерієм оптимізації виступає мінімізація загальної річної вартості мережі з урахуванням як інфраструктури, так і експлуатаційних витрат.

В [116] також підкреслюється важливість питання про ідентифікацію розташувань розподільчих центрів при розробці систем логістики, оптимізації рішень щодо місця розташування логістичних об'єктів з урахуванням витрат на обладнання, на інвентар, транспортні витрати та відгуки клієнтів. Тут представлений підхід до моделювання, який забезпечує таке інтегроване представлення, і ілюструє, як він працює в контексті конкретного прикладу, пов'язаного з розповсюдженням автомобілів, вироблених автоконцерном.

Робота [117] містить широкий огляд сучасних наукових публікацій, пов'язаних з питаннями проектування систем

розподілення. Представлені тут формулювання задач розміщення-розподілу варіюються за складністю від простих лінійних, одноступеневих, однопродуктових, детермінованих до нелінійних / ймовірнісних моделей. Алгоритми, які включають, серед іншого, локальний пошук і змішане цілочисельне програмування, оцінюються з точки зору комп'ютерної складності та продуктивності. Також у роботі представлений широкий спектр практичних прикладів.

Дослідженню оптимального планування багатоетапних виробничо-розподільчих мереж, що включають пошук місця розташування заводів і розподільчих центрів при конкретних обмеженнях, присвячено роботу [118]. Сформульована NP-повна задача враховує три стадії розподілу ресурсів в мережі і є більш точною абстракцією реального світу, оскільки ціни і транспортні витрати на сировину можуть значно відрізнятись серед постачальників, в залежності від їх місця розташування, інших факторів, які потрібно враховувати. Оскільки частково цілочисельна модель містить велику кількість змінних, для її розв'язання авторами запропоновано методологію, яка використовує генетичний алгоритм.

Питанням розробки ефективних генетичних алгоритмів розв'язання задач частково цілочисельного математичного програмування, що є моделями оптимальних багатоетапних розподільчих мереж, присвячені також роботи [119, 120].

Цікавою з точки зору практичних прикладів є робота [121], в якій розглядається проблема проектування мережі постачання товарів з так званих «виникаючих» магазинів, які можна відкрити

протягом декількох тижнів або місяців до закриття сезону. Мережа поставок спроектована для компанії, яка є однією з виробників рослинних масел в Туреччині, і включає склад, розташований між постачальником і заводами для зберігання матеріальних цінностей, а також магазини, відкриті між підприємствами та клієнтами. Запропонована модель є багатоперіодичною та багатоступеневою з трьома критеріями якості і обмеженнями на запас ресурсу. Перший критерій – мінімізація суми транспортних витрат на всіх етапах; друга ціль – мінімізація витрат на створення розповсюджувальних магазинів, третій критерій якості – зменшення витрат на мінімально витрати на інвентаризацію та позабюджетні витрати. Так само, як і в багатьох вищезгаданих роботах, тут сформульовано і розв'язано задачу лінійного програмування частково цілочисельного типу з векторним критерієм.

Для вирішення проблеми проектування логістичних систем з багатоетапною структурою з урахуванням планування виробництва / розподілу в [122] розроблений генетичний алгоритм з елементами нечіткої логіки для управління його параметрами. На уніфікацію концепцій та опис багатоетапних транспортних систем, а також їх інтеграцію в системи управління ланцюжками поставок спрямована робота [123].

В [124] наведений всебічний огляд наукових досліджень, проведених протягом останніх 40 років в області моделювання та вирішення задач визначення місцезнаходжень об'єктів у багаторівневій мережі, для ефективного обслуговування клієнтів як на самому низькому рівні ієрархії (з метою мінімізації витрат), так і

на високому рівні ієрархії (ціль – максимізація доступності послуг). Опубліковані тут ієрархічні моделі класифікуються на основі таких характеристик, як тип потокового шаблону, доступність послуг, термічна конфігурація, цільова функція, охоплення, рівні мережі, наявність елементу часу, можливості, ємності та ін. Крім того, представлена класифікація методів розв'язання таких задач для реальних практичних застосувань.

Двоетапні задачі розміщення об'єктів з обмеженими потужностями розглядаються в [125]. В роботі [126] представлено результати досліджень щодо розміщення станцій підзарядки електромобілів які слід відкривати в певний період часу, щоб максимізувати очікуване значення задоволення попиту на підзарядку протягом всього горизонту планування. Для моделювання використано багатоетапний підхід стохастичного цілочисельного програмування, заснований на використанні дерева сценаріїв.

Для розв'язування задачі визначення місцезнаходження об'єктів з обмеженими потужностями у [127] запропоновано багатоетапний евристичний алгоритм, з використанням метода найближчого сусіда.

Робота [128] спрямована саме на вивчення ситуації наявності двохетапного виробництва з такими учасниками, як споживачі, постачальники та об'єкти-філіали. В роботі представлені нелінійні моделі таких задач і результати їх лінеаризації та розв'язання.

Цікавою з точки зору постановки задачі є робота [129], в якій розміщення об'єктів відбувається не лише в два етапи, а ще й різними особами, що приймають рішення.

В роботі [130] представлена спроба вирішення задачі двонаправлених перевезень з можливістю одночасного прийому та доставки продукції. Робота [131] пов'язана з вирішенням питання про організацію міської логістичної системи. Базовим тут є алгоритм гілок та ціни (branch-and-price algorithm) – гібрид методу віток і меж та генерації стовбців.

На відміну від всіх вищезгаданих робіт, у [132 - 134] при формулюванні багатоетапних задач розміщення-розподілу передбачається, що початковий ресурс займає щільно деяку територію. У цьому випадку математичні моделі набувають неперервного характеру і представляють собою задачі нескінченно-вимірною програмування. Неперервність може бути обумовлена також і можливістю розташування центрів першого етапу у будь-якій точці заданої континуальної множини. Складність таких задач полягає у необхідності не тільки оптимізувати вартість доставки продукції, але й визначити «сфери впливу» для кожного з виробників. І, якщо перша частина проблеми є властивістю багатоетапних задач, то друга обумовлює необхідність додаткового розв'язання неперервної задачі оптимального розбиття множин.

Отже, задачі оптимального розміщення-розподілу мають широкий спектр практичних застосувань, і побудова адекватних математичних моделей, розробка ефективних алгоритмів їх розв'язування залишаються актуальними питаннями наукових досліджень.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ РЕСУРСУ, НЕПЕРЕРВНО РОЗПОВСЮДЖЕНОГО НА ЗАДАНИЙ ТЕРИТОРІЇ

2.1 Загальна постановка оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками

Змістовну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками (ОРМДЗ) можна сформулювати у такий спосіб. Нехай маємо деяке виробництво, що пов'язане з суб'єктами, які отримують сировину від постачальників неперервно розподілених на певній території, переробляють його і відправляють для реалізації (або подальшої переробки) в пункти, розташування яких заздалегідь відомо. Пункти, що переробляють сировину, будемо називати пунктами первинної переробки або підприємствами першого етапу, а пункти подальшої переробки, сортування, фасування – пунктами подальшої переробки або підприємствами другого етапу. Припустимо також, що відомо:

- попит $b_j^{\prime\prime}$ на продукцію для підприємства другого етапу, $j=1,2,\dots,M$;
- запас $\rho(x)$ ресурсу в кожній точці області Ω ,
- вартість доставки одиниці ресурсу $c_i^{\prime}(x, \tau_i^{\prime})$, $i=1,2,\dots,N$ – з точки x в пункт первинної переробки τ_i^{\prime} ,

– вартість перевезення одиниці продукту $c_{ij}^{\prime\prime}(\tau_i^{\prime}, \tau_j^{\prime\prime})$ з пункту первинної переробки τ_i^{\prime} в пункт $\tau_j^{\prime\prime}$.

Окрім того, будемо вважати, що потужність i -го виробника першого етапу визначається сумарним запасом ресурсу в області, що обслуговується, та має бути не менше заданих обсягів b_i^{\prime} , $i=1,2,\dots,N$, а прибуток підприємства залежить тільки від транспортних витрат.

Припустимо, що кожен постачальник сировини $x \in \Omega$ пов'язаний тільки з одним підприємством першого етапу τ_i^{\prime} , $i=1, \overline{N}$, який, в свою чергу, може бути пов'язаний з одним або декількома підприємствами другого етапу $\tau_j^{\prime\prime}$, $j=1, \overline{M}$.

Необхідно визначити зони обслуговування для підприємств першого етапу та обсяги перевезень між підприємствами першого та другого етапів таким чином, щоб забезпечити мінімальну сумарну вартість доставки сировини і кінцевої продукції. Схематично цю задачу можна зобразити, як показано на рис. 2.1. Будемо вважати, що постачальники сировини та підприємства першого та другого етапів знаходяться в одній і тій самій області.

Зауваження 1. У випадку, коли розглядається задача про раціональний збір і розподілення сільськогосподарських (с/г) культур, підприємствами першого і другого етапів можуть виступати зерносховища і сортувальні та переробні пункти відповідно, самі с/г культури – ресурс, неперервно розподілений на певній території.

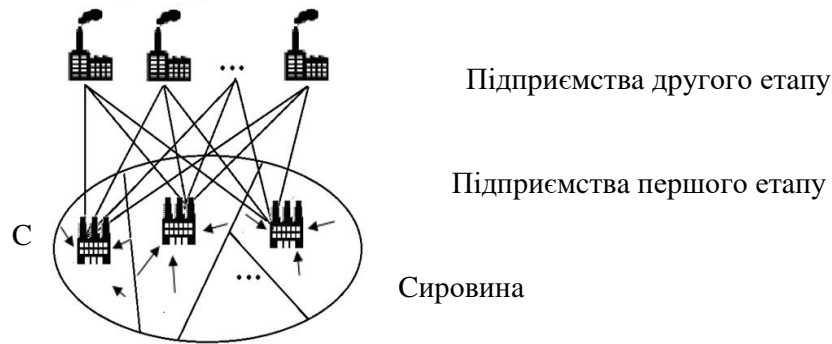


Рис. 2.1. Схема задачі ОРМДЗ

При планування лісосічних робіт, ресурс – деревина, а двоетапне виробництво складають місця штабелювання та дерервообробні фабрики.

В мережі підприємств, що здійснюють збір у населення та сортування (переробку) сміття, вочевидь, сміття є ресурсом, а сміттеперевантажувальні і сміттесортувальні станції – підприємства першого та другого етапів відповідно.

Умовимося надалі, в математичних постановках вказаних вище і подібних практичних задач територію, на якій розподілений ресурс, називати множиною, а зони обслуговування – підмножинами. До того ж, при описанні практичних задачах слова «територія», «регіон», «область» будемо вважати синонімами.

Зауваження 2. Запропонована задача також може мати назву двухетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілення.

Зауваження 3. При побудові математичних моделей потрібно враховувати той факт, що, так само як і в теорії ОРМ, тут можна сформулювати кілька видів задач, а саме: задачі з обмеженнями на потужність підприємств першого етапу або без обмежень. Таким чином, в даному розділі будуть розглянуті наступні задачі:

- задача ОРМДЗ при фіксованих центрах без обмежень на потужність підприємств першого етапу;
- задача ОРМДЗ при фіксованих центрах при наявності обмежень на потужність підприємств першого етапу.

Сформулюємо відповідні математичні моделі та розглянемо їх докладніше, зберігаючи позначення та термінологію, введenu в монографії для неперервних задач ОРМ [60]. По суті, такі задачі є багатоетапними задачами розміщення-розподілу, в яких ресурс щільно (неперервно) розповсюджений на всій області, що розглядається. Тому будемо далі використовувати і таку їх назву.

2.2 Двоетапні задачі оптимального розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу при наявності обмежень на потужності підприємств першого етапу

2.2.1 Математична постановка

Для формування математичних постановок названої та наступних двоетапних задач ОРМДЗ введемо такі позначення:

- Ω – область, в якій розміщуються підприємства
- N – необхідна кількість підприємств I етапу,
- M – кількість підприємств II-го етапу;

- b_i^I – потужність i -го підприємства I-го етапу;
- b_j^{II} – потужність j -го підприємства II-го етапу;
- $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – вартість доставки одиниці сировини з точки $x \in \Omega$

до i -го підприємства I етапу;

- $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – вартість доставки одиниці сировини від i -го

підприємства I етапу до j -го підприємства II етапу;

- $\rho(x)$ – кількість ресурсу в точці x області Ω ;
- $\tau_i^r = (\tau_{i1}^r, \tau_{i2}^r)$ – координати i -го підприємства r -го етапу;

- v_{ij} – обсяг продукції, що постачається від i -го підприємства I

етапу до j -го підприємства II етапу; $v_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$.

Сумарні витрати на доставку сировини і переробленої продукції тоді можуть бути записані у такому вигляді:

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij},$$

де $\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx$ – вартість доставки сировини, $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}$

– вартість доставки напівфабрикату.

Нехай Ω – замкнута, обмежена, опукла, вимірна за Лебегом множина евклідового простору E^2 . Введемо до розгляду множину всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин, що не перетинаються:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}.$$

Тоді математична модель задачі ОРМДЗ може бути записана у такий спосіб:

Задача 1. (Задача ОРМДЗ з фіксованими центрами при наявності обмежень на потужність підприємств першого етапу)

Потрібно знайти такі розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ (серед яких можуть бути і порожні) і обсяги перевезень v_{11}, \dots, v_{NM} , які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}), \quad (2.1)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.4)$$

$$(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad (2.5)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

де $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $b_j^{II}, j = \overline{1, M}, b_i^I, i = \overline{1, N}$, – задані дійсні невід'ємні числа; функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому τ_i^I з Ω для всіх $i = \overline{1, N}$; $\tau_i^I, i = \overline{1, N}, \tau_j^{II}, j = \overline{1, M}$ – задані точки області Ω ; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ – задані дійсні невід'ємні числа.

В сформульованій задачі обмеження (2.2) враховують той факт, що сумарні запаси ресурсу в зоні обслуговування i -го підприємства I

етапу дорівнюють потужності цього підприємства; умова (2.3) передбачає, що кількість продукту, вивезеного з i -го підприємства I етапу дорівнює потужності цього підприємства; умова (2.4) відповідає тому, що кількість продукту, доставленого до j -го підприємства II етапу дорівнює виробничій потужності цього підприємства; обмеження (2.5) передбачають, що кожне підприємство першого етапу має свою зону обслуговування, ці зони не перетинаються і покривають всю область.

2.2.2 Метод розв'язання задачі

Розглянемо умови, за яких задача 1 має розв'язок.

Лема 2.1. Для того щоб, множина допустимих розв'язків задачі 1 була непорожньою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася наступна подвійна умова:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}.$$

Доведення. Нехай $\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N), (v_{11}, \dots, v_{NM})\}$ – допустимий розв'язок задачі 1. Просумуємо рівності (2.2) по всім $i = 1, \dots, N$:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Просумувавши рівності (2.3) по всім $i = 1, \dots, N$, а рівності (2.4) по всім $j = 1, \dots, M$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}.$$

Отже, з того, що $\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N), (v_{11}, \dots, v_{NM})\}$ – допустимий розв'язок задачі 1, випливає виконання умови:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}. \quad (2.7)$$

Це означає, що (2.7) – необхідна умова непорожності множини допустимих розв'язків задачі 1.

Достатність умови (2.7) очевидна. Таким чином, лема 2.1 має місце.

Розглянемо математичну модель задачі 1. Вона містить дві групи обмежень: обмеження (2.2) і (2.5) визначають розбиття множини Ω , а обмеження (2.3), (2.4) і (2.6) – структуру перевезень між центрами I-го і II-го етапів. З огляду на сепарабельність цільового функціоналу, в цьому випадку вихідна задача може бути зведена до розв'язання двох задач: задачі ОРМ з фіксованими центрами при наявності обмежень-рівностей, і задачі лінійного програмування транспортного типу. А саме:

Задача 1.1. (задача ОРМ з фіксованими центрами при обмеженнях-рівностях) Знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні), щоб функціонал

$$F_1(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx,$$

досягав мінімального значення при обмеженнях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i^I, \quad i = \overline{1, N},$$

$$(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N.$$

Оскільки задача 1.1 є задачею ОРМ з фіксованими центрами при обмеженнях-рівностях, для її розв'язання може бути застосований метод, запропонований в [60].

Задача 1.2. (Задача лінійного програмування транспортного типу) Визначити такі значення змінних v_{11}, \dots, v_{NM} , які забезпечують мінімум функціоналу

$$F_2(\{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H (\tau_i^I, \tau_j^H) v_{ij},$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M},$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Задача 1.2 – є задачею лінійного програмування транспортного типу, для розв'язання якої може бути застосований, наприклад, метод потенціалів [135].

При цьому умови (2.7) забезпечують можливість одночасного розв'язання транспортної задачі та задачі ОРМ.

Зауваження. Якщо у вихідній задачі обмеження матимуть вигляд « \leq », така декомпозиція задачі 1 не матиме місця.

2.2 Двоетапні задачі оптимального розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу без обмежень на потужності підприємств першого етапу

2.2.1 Математична постановка

Припустимо, що у сформульованій в параграфі 2.1 задачі потужності підприємств першого етапу не відомі заздалегідь, а визначаються величиною області, яку вони обслуговують. Тоді математична модель задачі може бути представлена у вигляді задачі ОРМДЗ при фіксованих центрах підмножин без обмежень на потужність центрів першого етапу. Наведемо математичну постановку цієї задачі.

Задача 2.1 (Задача ОРМДЗ при фіксованих центрах підмножин без обмежень на потужність центрів першого етапу).

Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних по Лебегу підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні) і такі обсяги перевезень v_{11}, \dots, v_{NM} , які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}), \quad (2.16)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.18)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,N.$$

Тут умови (2.17) та (2.18) у сукупності визначають обмеження на виробничі потужності центрів першого та другого етапів.

Функції $c_i^l(x, \tau_i^l)$, $i=\overline{1, N}$ – дійсні, обмежені, вимірні по аргументу x на Ω ; $\rho(x)$ – дійсна, інтегрована, визначена на Ω функція; τ_i^l , $i=\overline{1, N}$, τ_j^h , $j=\overline{1, M}$ – задані точки області Ω ; $c_{ij}^h(\tau_i^l, \tau_j^h)$, $i=\overline{1, N}$, $j=\overline{1, M}$ – задані дійсні невід'ємні числа; b_j^h , $j=\overline{1, M}$ – задані дійсні невід'ємні числа, що задовольняють умову розв'язуваності задачі:

$$\sum_{j=1}^M b_j^h = \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (2.19)$$

Лема 2.2. Для того щоб допустима множина розв'язків задачі 2.3 не була порожньою, необхідне виконання наступної умови:

$$\sum_{j=1}^M b_j^h = S,$$

$$\text{де } S = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Доведення. Нехай пара елементів $\{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, v\}$ задовольняє обмеженням (2.17), (2.18) і така, що $v \in R_{NM}^+$. Тоді

$$\sum_{j=1}^M b_j^h = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N v_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \int_{\Omega} \rho(x) dx = S.$$

Теорема доведена.

2.2.2 Метод розв'язання задачі

За аналогією з методикою розв'язання неперервної задачі оптимального розбиття множин, представленим в [60], введемо характеристичну функцію підмножини Ω_i у вигляді:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i=1, \dots, N.$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^h(\tau_i^l, \tau_j^h) v_{ij}.$$

Очевидно, що має місце рівність

$$I(\lambda(\cdot), v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}).$$

Перепишемо задачу 2.1 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(\cdot)$ підмножин Ω_i , $i=\overline{1, N}$ в наступному вигляді.

Задача 2.2. Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot), v} I(\lambda(\cdot), v),$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^h, \quad j=1, 2, \dots, M, \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (2.21)$$

$$\lambda_i(\cdot) \in \Gamma_1, \quad v \in R_{NM}^+,$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i=\overline{1, N}, \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \}.$$

Задача 2.2 відносно $\lambda(\cdot)$ є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$. Перейдемо від неї до задачі зі значеннями $\lambda(\cdot)$ з відрізка $[0,1]$.

Задача 2.3. Знайти $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2$ та $v^* \in R_{NM}^+$ такі, що

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot), v),$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.23)$$

де

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : \lambda(\cdot) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \},$$

$$\Gamma = \{ \lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N} \}$$

Визначимо, які умови мають задовольняти константи b_j^H , щоб допустима множина задачі 2.3 не була порожня.

Покажемо, що задача 2.3 має розв'язок.

В [60] показано, що множина Γ_2 – обмежена, опукла множина гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ з нормою

$$\| \lambda(\cdot) \| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [\lambda_i(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Зафіксуємо довільний допустимий вектор $\bar{v} \in R_{NM}^+$, що задовольняє умову (2.22). Розглянемо наступну задачу.

Задача 2.3(v). Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2^v} I(\lambda(\cdot), \bar{v}),$$

де

$$\Gamma_2^v = \{ \lambda(\cdot) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{j=1}^M \bar{v}_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N} \}.$$

Має місце наступні твердження (аналогічні відповідним твердженням з [60] для неперервної задачі ОРМ з фіксованими центрами при обмеженнях у формі рівностей).

Лема 2.3. При кожному фіксованому \bar{v} множина Γ_2^v є опуклою, замкненою, обмеженою множиною гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$.

Твердження 2.1. При кожному фіксованому \bar{v} , що задовольняє умови (2.22), функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ задачі 2.3(v) лінійний по $\lambda(\cdot)$ на Γ_2^v .

Твердження 2.2. Функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ задачі 2.3(v) обмежений на множині Γ_2^v при кожному фіксованому \bar{v} .

Твердження 2.3. При кожному фіксованому \bar{v} множина Γ_2^v гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ слабо компактно і (згідно з теоремою Крейна - Мільмана), містить, принаймні, одну крайню точку.

Твердження 2.4. Серед множини точок Γ_2^{v*} , в яких лінійний щодо $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ досягає мінімального за $\lambda(\cdot)$ значення на множині Γ_2^v , знайдеться хоча б одна крайня точка Γ_2^v .

Твердження 2.5. Крайні точки множини Γ_2^v , є характеристичними функціями деяких підмножин Ω_i , $i=1, \dots, N$, що утворюють розбиття множини Ω .

Отже, функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ при кожному фіксованому \bar{v} лінійний, обмежений, неперервний щодо $\lambda(\cdot)$ на Γ_2^v .

Тоді, в силу вище наведених тверджень, з узагальненої теореми Вейерштрасса випливає, що при кожному фіксованому $\bar{v} \in R_{NM}^+$ лінійний, неперервний за вектор-функцією $\lambda(\cdot)$ функціонал на опуклій, замкненій, обмеженій множині Γ_2^v гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ досягає своєї нижньої границі. Крім того, серед множини оптимальних розв'язків задачі 2.3(v) містяться оптимальні розв'язки задачі 2.2, сформульованої для фіксованого параметру \bar{v} . Тоді, в силу довільності вибору вектору \bar{v} , можна стверджувати, що серед множини оптимальних розв'язків задачі 2.2 (тобто серед точок множини Γ_2^{v*} , в яких лінійний щодо $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ досягає мінімального значення на множині Γ_2^v) знайдеться хоча б одна точка множини Γ_2^v (її існування гарантує твердження 2.3). А крайні точки множини Γ_2^v є характеристичними функціями підмножин Ω_i , $i=1, \dots, N$, що утворюють розбиття множини. Звідси випливає, що серед множини оптимальних розв'язків задачі 2.3 міститься оптимальний розв'язок задачі 2.2.

Надалі буде корисною наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай в задачі 2.1: 1) Ω – замкнута, обмежена, вимірна за Лебегом множина евклідового простору E^2 ; 2) функції

$c_i^l(x, \tau_i^l)$, $i = \overline{1, N}$ – дійсні, обмежені, вимірні за аргументом x для всіх $i = \overline{1, N}$; 3) виконується умова (2.19).

Тоді задача 2.3 має розв'язок.

Доведення. Згідно леми 2.2, за умов теореми, множина допустимих розв'язків задачі 2.3 непорожня.

Нехай $\bar{v} \in R_{NM}^+$ – довільний вектор, для якого виконується умова (2.18). Покажемо, що цільовий функціонал задачі 2.3 обмежений на допустимій множині розв'язків.

Як вже зазначалося, функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ є аддитивним за своїми змінними, і для нього справедливий запис:

$$I(\lambda(\cdot), \bar{v}) = I_1(\lambda(\cdot)) + I_2(\bar{v}),$$

$$\text{де } I_1(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad I_2(\bar{v}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) \bar{v}_{ij}$$

Оцінимо знизу доданок $I_1(\lambda(\cdot))$:

$$\begin{aligned} I_1(\lambda(\cdot)) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) \min_{i=1, N} c(x, \tau_i^l) \lambda_i(x) dx \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) \min_{x \in \Omega} \min_{i=1, N} c(x, \tau_i^l) \lambda_i(x) dx \end{aligned}$$

Оскільки $\min_{x \in \Omega} \min_{i=1, N} c(x, \tau_i^l) = c_{\min} \geq 0$, тоді

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx \geq c_{\min} \cdot S.$$

Вочевидь, якщо $\forall i = \overline{1, N}, \tau_i^l \in \Omega$, то $c_{\min} = 0$.

Покажемо, що доданок $I_2(\bar{v})$ обмежений. Умови (2.23) та невід'ємність \bar{v}_{ij} забезпечують виконання нерівності:

$$0 \leq \bar{v}_{ij} \leq b_j^H.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} I_2(\bar{v}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) \bar{v}_{ij} \geq \sum_{c_{ij}^H \geq 0} c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) \cdot 0 + \sum_{c_{ij}^H < 0} c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) \cdot b_j^H = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min(0, c_{ij}^H) \cdot b_j^H. \end{aligned}$$

Отже, в силу довільності вибору \bar{v}_{ij} , що задовольняє умові (2.18), можна зробити висновок про обмеженість знизу функціоналу задачі 2.3 на допустимій множині розв'язків. Отже допустима множина розв'язків замкнена і обмежена. Згідно з теоремою Вейерштрасса задача 2.3 розв'язна. Теорему доведено.

2.2.3 Обґрунтування методу розв'язання задачі

Розглянемо задачу 2.3. Для отримання необхідних і достатніх умов екстремуму введемо функціонал Лагранжа для задачі 2.3 в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot), v, \Psi(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) v_{ij} + \\ &\sum_{j=1}^M \eta_j (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H) + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \\ &- \sum_{j=1}^M v_{ij}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \eta_j - \\ &- \psi_i) v_{ij} - + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx, \end{aligned} \quad (2.24)$$

де $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$, $\Psi(x), x \in \Omega$ – вектор-функція, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$, $\Lambda = \{\Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \eta) : \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M\}$.

Пару елементів $(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot))$ назвемо сідловою точкою функціоналу (2.24) на множині $\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda$, якщо виконуються наступні нерівності:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для всіх $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$, або

$$\begin{aligned} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)). \end{aligned}$$

Покажемо, що задача 2.3 може бути зведена до задачі знаходження сідлової точки функціонала (2.24).

Введемо до розгляду множину V :

$$V = \{v \in R_{NM}^+ : \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, j = \overline{1, M}\}.$$

Теорема 2.2. (Необхідна умова екстремуму). Якщо пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot))$ є сідловою точкою функціонала Лагранжа (2.24), то $\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}$ є розв'язком задачі 2.3.

Доведення. Нехай пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$ – сідлова точка функціоналу (2.24), тобто має місце така подвійна нерівність:

$$\begin{aligned} I(\lambda^*(\cdot), v^*) + \sum_{j=1}^M \eta_j (-\sum_{i=1}^N v_{ij}^* + b_j^H) + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) - 1) dx + \\ + \sum_{i=1}^N \psi_i (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^*) \leq I(\lambda_i^*(\cdot), v^*) + \sum_{j=1}^M \eta_j^* (-\sum_{i=1}^N v_{ij}^* + b_j^H) + \\ + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i^* (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^*) \leq I(\lambda(\cdot), v) + \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$+ \sum_{j=1}^M \eta_j^* (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \psi_i^* (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij})$$

$$\forall \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+, \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M.$$

Покажемо, що $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2, v^* \in V$. З лівої нерівності (2.25) при $\psi_0 = \psi_0^*$ та $\eta = \eta^*$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^N (\psi_i^* - \psi_i) (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^*) \geq 0$$

при будь-яких $(\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N$, що можливо тільки, коли

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^* = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \quad (2.26)$$

Далі, при $\eta = \eta^*$ та $\psi = \psi^*$, з лівої нерівності (2.25) також впливає наступне: співвідношення

$$\int_{\Omega} (\psi_0^*(x) - \psi_0(x)) (\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) - 1) dx \geq 0$$

при будь-яких $\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2$, можливе тільки за умови

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega. \quad (2.27)$$

Крім того, при $\psi_0 = \psi_0^*$ та $\psi = \psi^*$, ліва нерівність (2.25) дає $\sum_{i=1}^N (\eta_i^* - \eta_i) (-\sum_{i=1}^N v_{ij}^{*H} + b_j^H) \geq 0$ при будь-яких $\eta \in E_M$, що можливо тільки при

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^H. \quad (2.28)$$

Отже, показано, що $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2, v^* \in V$ за умови (2.23). З оглядом на рівності (2.26) – (2.28) та з урахуванням правої нерівності (2.25), при будь-якому $\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in V$ матимемо

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) \leq I(\lambda(\cdot), v) + \sum_{j=1}^M \eta_j^* (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i^* (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}).$$

В силу того, що пара $\{\lambda(\cdot), v\}$ – допустима пара в задачі 2.3, тобто виконуються умови (2.22), (2.23), другий та четвертий доданки в наведеній нерівності дорівнюють нулю. З того, що $\lambda(\cdot) \in \Gamma_2$, випливає рівність нулю і третього доданку. Тобто, $I(\lambda^*(\cdot), v^*) \leq I(\lambda(\cdot), v)$. Теорема доведена.

Лема 2.4. Для того, щоб пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{ \Gamma \times R_{NM}^+ \} \times \Lambda)$ була сідловою точкою функціоналу (2.24), необхідно і достатньо існування такого, відмінного від тотожного нуля, вектора $\Psi^*(\cdot)$, щоб виконувалися умови:

$$1) L(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot)), \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+,$$

$$2) \sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}^*, \sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^H.$$

Необхідність умов леми впливає з доведення теореми 2.2, достатність умов є очевидною.

Теорема 2.3. Для того, щоб пара $\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}$ була розв'язком задачі 2.3, необхідно і достатньо існування такої, відмінної від тотожного нуля, вектор-функції $\Psi^*(\cdot) \in \Lambda$, що виконувалися б наступні умови:

1) пара $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ є розв'язком такої задачі:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)), \quad (2.29)$$

для будь-якої фіксованої вектор-функції $\bar{\Psi}(\cdot)$;

2) задовольняються рівності (2.22), (2.23) та

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega. \quad (2.30)$$

Доведення.

Достатність. Достатність умов теореми випливає з теореми 2.2 і леми 2.4.

Необхідність. Нехай $\{\lambda^*, v^*\}$ - оптимальний розв'язок задачі 2.3, тобто

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) \leq I(\lambda(\cdot), v), \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in V, \quad (2.31)$$

та виконується умова (2.23).

Припустимо, що пара $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ не є оптимальним розв'язком задачі (2.29) при фіксованій вектор-функції $\Psi^*(\cdot) = (\psi_0^*(\cdot), \psi^*, \eta^*) \in \Lambda$. Тоді, в силу того, що задача (2.29) при кожних фіксованій вектор-функції $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$ має розв'язок (згідно з твердженнь 2.1-2.5 та теореми 2.1), при $\psi = \psi^*$, $\eta = \eta^*$ знайдуться такі $\lambda^1(\cdot) \in \Gamma, v^1 \in R_{NM}^+$, що задовольняють рівності (2.22), (2.23), (2.30), та має місце нерівність $L(\{\lambda^1(\cdot), v^1\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot))$.

Оскільки

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = I(\lambda^*(\cdot), v^*) + \sum_{j=1}^M \eta_j^* (-\sum_{i=1}^N v_{ij}^* + b_j) +$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i^* (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^*) \geq I(\lambda^1(\cdot), v^1) + \\ & + \sum_{j=1}^M \eta_j^* (-\sum_{i=1}^N v_{ij}^1 + b_j) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i^* (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^1) = \\ & = L(\{\lambda^1(\cdot), v^1\}, \Psi^*(\cdot)). \end{aligned}$$

Тоді, $I(\lambda^1(x), v^1) \leq I(\lambda^*(x), v^*)$, що суперечить (2.31). Отже, пара $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ – оптимальний розв'язок задачі 2.3. Теорему доведено.

Легко показати, що має місце наступне твердження.

Твердження 2.6. Задача 2.3 рівносильна задачі

Задача 2.3.1. Знайти вектор-функцію $\{\lambda^*(\cdot), v^*\} \in \Gamma \times R_{NM}^+$ та вектор-функцію $\Psi^*(\cdot) \in \Lambda$, такі що

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

за умов

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^H, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^* = \int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Перейдемо до розв'язання задачі 2.3.1. Нехай $\bar{\Psi}(\cdot)$ – будь-яка фіксована вектор-функція з Λ . Розглянемо задачу (2.29) при довільному, але фіксованому v , що задовольняє умовам (2.22), (2.23): мінімізувати

$$L(\lambda(\cdot), \bar{v}, \Psi(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0 + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx, \quad (2.32)$$

за умов

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.33)$$

Очевидно, що

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\lambda(\cdot), \bar{v}, \Psi(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{0 \leq \lambda_i(x) \leq 1} [(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0 + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x)] dx.$$

Тоді легко показати, що оптимальний розв'язок задачі (2.32) – (2.33) має вигляд:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0, \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i + \psi_0(x)) \rho(x) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ & \Psi(\cdot) \in \Lambda. \end{cases} \quad (2.34)$$

З усіх $\Psi(\cdot) \in \Lambda$ виберемо такі $\Psi^*(\cdot)$, що відповідні їм за формулою (2.34) $\lambda_i^*(x)$ будуть характеристичними функціями множини Ω_i^* , $i = \overline{1, N}$, та задовольнятимуть умову (2.27), тобто для будь-яких $i = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (2.35)$$

та $mes(x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0) = 0$, або для будь-яких $i = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (2.36)$$

та $mes(x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0) = 0$.

Нехай $\bar{v} = v^*$, $\bar{\Psi}(\cdot) = \Psi^*(\cdot)$, а $\lambda^*(\cdot)$ – обрана за (2.35). Тоді, з леми 2.4 та теореми 2.3 випливає, що пара $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot))$ – сідлова точка функціоналу Лагранжа (2.24). Теж саме можна сказати про пару $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot))$, де $\lambda^*(\cdot)$ визначається з (2.36).

Порівнюючи (2.35) та (2.36), можна побачити, що $\lambda_i^*(\cdot)$ з (2.35) та $\lambda_i^*(\cdot)$ з (2.36) визначають одне й те саме розбиття $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$, різні тільки форма запису умов приналежності точки x підмножині Ω_i^* , $i = \overline{1, N}$. Тому вирази (2.35) та (2.36) можна вважати різною формою запису однієї і тієї ж сідлової точки $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot))$.

Форма запису (2.36) зручніша за (2.35) тим, що вираз для функції $\lambda_i^*(\cdot)$ в цьому випадку майже всюди для $x \in \Omega$ може бути записано у компактному вигляді через функцію $sign(\cdot)$:

$$\lambda_i^*(x) = \frac{1}{2} \{1 - sign(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x))\}, \quad i = \overline{1, N} \quad (2.37)$$

Умову $mes(x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0) = 0$ будемо називати умовою сильної регулярності функціоналу (2.32).

Підставивши $\lambda_i^*(\cdot)$ з (2.37) в рівності (2.21), (2.27), отримаємо майже всюди для $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \text{sign}(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) = N - 2 \\ \int_{\Omega} \rho(x) \text{sign}(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) dx = S - 2 \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Таким чином, при виконанні умов сильної регулярності для функціоналу (2.32) оптимальний розв'язок задачі (2.29) однозначно визначається за формулами (2.37), причому функція $\psi_0^*(\cdot)$ та константи $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ – розв'язок системи (2.38).

Далі, якщо виконуються умови:

$$\rho(x) > 0, \text{ майже всюди для } x \in \Omega, \quad (2.39)$$

$$\text{mes}K = 0,$$

$$K = \{x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) - c_j^l(x, \tau_j^l) = \text{const}, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\} \quad (2.40)$$

то справедливо наступне твердження.

Твердження 2.7. Нехай $\psi_0(x), \psi_1, \dots, \psi_N$ задовольняє системі (2.38), і тоді для функціоналу $L(\lambda(\cdot), v, \Psi(\cdot))$ умова сильної регулярності виконується.

Доведення. Введемо до розгляду вектор-функцію $g(x) = (g_1(x), \dots, g_N(x))$, де $g_i(x) = c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)$, $i = \overline{1, N}$. Покажемо спочатку, що ніякі дві компоненти $g_i(x), g_j(x), i \neq j, i, j = \overline{1, N}$, вектор-функції $g(x)$ не дорівнюють одночасно нулю, за винятком множини точок $x \in \Omega$ нульової міри.

Нехай це не так, тоді

$$c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = c_j^l(x, \tau_j^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_j \rho(x), i \neq j,$$

на множині ненульової міри, отже отримаємо $c_i^l(x, \tau_i^l) - c_j^l(x, \tau_j^l) = \psi_j - \psi_i, i \neq j$, на множині ненульової міри, але це суперечить умові (2.40).

Нехай тепер i -та компонента $g(x)$ дорівнює нулю на множині ненульової міри. Тоді на цій множині, за виключенням множини нульової міри, i -й доданок в (2.38) дорівнює нулю, а інші дорівнюють або 1, або -1. Але тоді система (2.38) не має розв'язку на множині ненульової міри, а це суперечить тому, що $\psi_0(x), \psi_1, \dots, \psi_N$ – розв'язок системи (2.38). Отже, жодна з компонент $g(x)$ не дорівнює нулю на множині $x \in \Omega$ ненульової міри. Твердження доведено.

Твердження 2.8 Нехай $v = \bar{v}$ – довільний допустимий вектор з множини R_{NM}^+ , для якого виконуються умови (2.22), (2.23). Якщо виконані умови (2.39) – (2.40), то множини перших оптимальних компонент розв'язків задач 2.2 та 2.3 збігаються.

Доведення. Очевидно, що $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, причому Γ_1 складається з граничних точок множини Γ_2 . Нехай $\lambda^1(\cdot)$ – оптимальний розв'язок задачі 2.2. Тоді, $I(\lambda^1(\cdot), \bar{v}) \leq I(\lambda(\cdot), \bar{v}), \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma_1$.

Нехай $\lambda^*(\cdot)$ – оптимальний розв'язок задачі 2.3. Тоді, $I(\lambda^*(\cdot), \bar{v}) \leq I(\lambda(\cdot), \bar{v}), \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma_2$. З того що $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ випливає, що

$$I(\lambda^*(\cdot), \bar{v}) \leq I(\lambda^1(\cdot), \bar{v}). \quad (2.41)$$

З того що виконується умова сильної регулярності для функціоналу (2.32) та з вигляду оптимального розв'язку (2.35) (або (2.36)) для задачі (2.29), випливає, що оптимальний розв'язок задачі 2.3 досягається на границі множини Γ_2 , а отже $\lambda^*(x) \in \Gamma_1$, тоді

$$I(\lambda^1(x), \bar{v}) \leq I(\lambda^*(x), \bar{v}). \quad (2.42)$$

З (2.41) – (2.42) випливає, що $I(\lambda^1(x), \bar{v}) = I(\lambda^*(x), \bar{v})$. Твердження доведено.

Доведемо тепер необхідну умову оптимальності розбиття $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$ для задачі 2.1 при виконанні умов (2.39), (2.40).

Зафіксуємо в задачі 2.1 довільний вектор $\bar{v} \in R_{NM}^+$, що задовольняє умову (2.21). Розглянемо допоміжну задачу:

$$F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) \rightarrow \min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N}, \quad (2.43)$$

за умови

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

де $F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$.

Для задачі (2.43) має місце наступна теорема.

Теорема 2.4. Нехай в задачі 2.43, $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$. Тоді, якщо можливе розбиття $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$ є оптимальною компонентою розв'язку для задачі 2.43, то існують дійсні константи ψ_1, \dots, ψ_N , для яких

$$c_i^l(x, \tau_i^l) - c_j^l(x, \tau_j^l) = \psi_j - \psi_i \text{ майже всюди для } x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N} \quad (2.44)$$

Доведення. Нехай $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$ є оптимальним для задачі 2.43 та нехай x – довільна точка однієї з підмножин Ω_i^* , $i = \overline{1, N}$, множини Ω . Якщо $v = \bar{v}$, то (2.43) еквівалентна задачі 2.2 при фіксованому $v = \bar{v}$, а остання еквівалентна задачі 2.3(v).

1. Вважатимемо спочатку, що множина Ω_i^* ідентифікується характеристичною функцією $\lambda_i(\cdot)$ виду:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) < 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (2.45)$$

де $\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2$.

Тоді згідно (2.45), $\forall x \in \Omega_i^*$ матиме місце система нерівностей:

$$\begin{cases} c_1^l(x, \tau_1^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_1\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_{i-1}^l(x, \tau_{i-1}^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i-1}\rho(x) \geq 0, \\ c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) \leq 0, \\ c_{i+1}^l(x, \tau_{i+1}^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i+1}\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_N^l(x, \tau_N^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_N\rho(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

З того що задача 2.3(v) має розв'язок (теорема 2.1) випливає, що система нерівностей (2.46) сумісна. За умови сильної регулярності функціоналу (2.32) функцію $\psi_0(\cdot)$ в системі (2.46) майже всюди для $x \in \Omega_i^*$ можна обрати у вигляді:

$$\psi_0(\cdot) = -\frac{1}{2}((c_i^l(\cdot, \tau_i^l) + \psi_i) + \min_{j \neq i} (c_j^l(\cdot, \tau_j^l) + \psi_j))\rho(x), \quad (2.47)$$

де $c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i = \min_{k=1, N} (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k)$.

Підставляючи знайдений вираз для $\psi_0(x)$ в i -у нерівність системи (2.46), цю систему можна переписати у такий спосіб майже всюди для $x \in \Omega_i^*$:

$$\frac{1}{2}\rho(x)\left[(c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) - \min_{j \neq i} (c_j^l(x, \tau_j^l) + \psi_j)\right] \leq 0, j = \overline{1, N}.$$

Звідси, з урахуванням умови, що $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega_i$, та довільності індексу $i \in \{1, \dots, N\}$, отримуємо виконання умови:

$$c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i \leq c_j^l(x, \tau_j^l) + \psi_j \text{ майже всюди для } x \in \Omega_i, i, j = \overline{1, N}.$$

Отже, коли $\lambda_i^*(\cdot)$ визначається за формулою (2.45), нерівність (2.44) доведена.

2. Будемо вважати тепер, що множина Ω_i ідентифікується характеристичної функцією $\lambda_i(x)$ виду:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*. \end{cases} \quad (2.48)$$

Тоді, згідно з (2.48), має місце система нерівностей майже всюди для $x \in \Omega_i$:

$$\begin{cases} c_1^l(x, \tau_1^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_1\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_{i-1}^l(x, \tau_{i-1}^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i-1}\rho(x) \geq 0, \\ c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i(x) = 0, \\ c_{i+1}^l(x, \tau_{i+1}^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i+1}\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_N^l(x, \tau_N^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_N\rho(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Отже, майже всюди для $x \in \Omega$ система (2.49) може бути записана у вигляді $c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) \geq 0, i = \overline{1, N}$.

Із системи (2.49) випливає, що

$$\psi_0(x) = -(c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i)\rho(x), \text{ м. в. для } x \in \Omega_i^*. \quad (2.50)$$

Підставляючи знайдений вираз для $\psi_0(x)$ в j -у, нерівність $j \neq i, j = \overline{1, N}$ системи (2.49), отримуємо

$$c_j^l(x, \tau_j^l)\rho(x) - (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i(x))\rho(x) + \psi_j\rho(x) \geq 0, \text{ м. в. для } x \in \Omega_i^*.$$

Звідси, з урахуванням того, що функція $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$, а також з оглядом на довільність індексу $i \in \{1, \dots, N\}$, отримаємо виконання нерівності $c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i \leq c_j^l(x, \tau_j^l) + \psi_j$ майже всюди для $x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N}$.

Теорема доведена.

Нагадаємо, що оптимальний розв'язок задачі 2.3(v) для $i = \overline{1, N}$ та майже всіх $x \in \Omega$ можна представити в такий спосіб:

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) < 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (2.51)$$

За умов, що $mes\{x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0\} = 0$,

$$\psi_0^*(\cdot) = -\frac{1}{2} \{ (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i^*) + \min_{i \neq j} (c_j^l(x, \tau_j^l) + \psi_j^*) \} \rho(x), \quad (2.52)$$

де $c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i^* = \min_{k=1, N} (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k^*)$, $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ визначаються з системи (2.26), після підстановки $\lambda^*(\cdot), \psi_i^*$ згідно з (2.51), (2.52) відповідно.

Або для $i = \overline{1, N}$ та майже всіх $x \in \Omega$ можна представити в такий спосіб:

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (2.53)$$

за умов, що $mes\{x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) < 0\} = 0$,

$$\psi_0^*(\cdot) = -\min_{k=1, N} (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k^*)\rho(x), \quad (2.54)$$

$\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ визначаються з системи (2.26), після підстановки $\lambda^*(\cdot), \psi_i^*$ згідно з (2.53), (2.54) відповідно.

Покажемо, що при будь-якій фіксованій вектор-функції $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$, $\bar{\Psi}(\cdot) = (\bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i, \bar{\eta}_j)$ має місце рівність

$$\begin{aligned} \min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \min_{v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \\ \min_{v \in R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) & \end{aligned} \quad (2.55)$$

Нехай $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$ довільна, але фіксована вектор-функція. Для стислості викладення введемо наступні позначення:

$$g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) = (c_i^l(x, \tau_i^l) + \bar{\psi}_0(\cdot) + \bar{\psi}_i)\rho(x),$$

$$s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) = c_{ij}(\tau_i^l, \tau_j^h) - \bar{\eta}_j - \bar{\psi}_i,$$

$$C(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_0(\cdot)) = \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j b_j^h - \int_{\Omega} \bar{\psi}_0(x) dx.$$

Очевидно, при фіксованих $\bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i, i = \overline{1, N}$, $\bar{\eta}_j, j = \overline{1, M}$, $g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i)$ – функція змінної x , а $s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i)$ та $C(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_0(\cdot))$ – сталі величини.

Нехай

$$L_{\lambda}^*(v, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = L(\{\lambda^*(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)), \quad (2.56)$$

тобто функціонал $L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot))$ при фіксованій решті параметрів приймає мінімальне значення по змінній $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ в точці $\lambda^*(\cdot)$.

Тоді має місце нерівність:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)), \quad \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma. \quad (2.57)$$

Розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} L_{\lambda}^*(v, \bar{\Psi}(\cdot)) - L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i^*(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij} + C(\bar{\eta}, \bar{\psi}_0(\cdot)) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i(x) dx - \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij} - C(\bar{\eta}, \bar{\psi}_0(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) (\lambda_i^*(x) - \lambda_i(x)) dx. \end{aligned}$$

Згідно з (2.57) маємо:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) (\lambda_i^*(x) - \lambda_i(x)) dx \leq 0, \quad (2.58)$$

при будь-яких $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ та фіксованих $\bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i, i = \overline{1, N}$.

Тепер нехай

$$L_v^*(\lambda(\cdot), \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = L(\{\lambda(\cdot), v^*\}, \bar{\Psi}(\cdot)), \quad (2.59)$$

Розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot), v^*, \bar{\Psi}(\cdot)) - L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i(x) dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij}^* + C(\bar{\eta}, \bar{\psi}_0(\cdot)) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i(x) dx - \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij} - C(\bar{\eta}, \bar{\psi}_0(\cdot)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) (v_{ij}^* - v_{ij}). \end{aligned}$$

В силу (2.59) можна записати для будь-якого $v \in R_{NM}^+$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) (v_{ij}^* - v_{ij}) \leq 0. \quad (2.60)$$

Просумуємо нерівності (2.58) та (2.60) для будь-яких $\lambda(\cdot) \in \Gamma$,

$v \in R_{NM}^+$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) (\lambda_i^*(x) - \lambda_i(x)) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) (v_{ij}^* - v_{ij}) \leq 0.$$

Залишимо доданки з $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma$ та $v^* \in R_{NM}^+$ зліва, інші доданки перенесемо в праву сторону нерівності:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i^*(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij}^* \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N g_i(x, \bar{\psi}_0(\cdot), \bar{\psi}_i) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij}(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_i) v_{ij}. \end{aligned}$$

Додамо до обох частин отриманої нерівності один і той самий доданок $C(\bar{\eta}_j, \bar{\psi}_0(\cdot))$ та отримаємо для будь-яких $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$ наступну нерівність:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \bar{\Psi}(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)). \quad (2.61)$$

А це означає, що пара $\{\lambda(\cdot)^*, v^*\} \in \Gamma \times R_{NM}^+$ забезпечує мінімальне значення функціоналу $L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot))$ на всій множині $(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ при фіксованій вектор-функції $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$.

З огляду на те, що рівність (2.56) має місце при будь-яких фіксованих $v \in R_{NM}^+$ та $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$, підставимо в (2.56) $v = v^*$ з (2.59):

$$L_v^*(v^*, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v^*\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \min_{v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)).$$

З іншого боку з (2.61) випливає, що

$$L_v^*(v^*, \bar{\Psi}(\cdot)) = L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)).$$

Аналогічно, підставляючи в (2.59) $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ з (2.56) і враховуючи (2.61) можна показати, що

$$L_v^*(\lambda^*(\cdot), \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{v \in R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \bar{\Psi}(\cdot)).$$

Отже, справедливість співвідношення (2.55) доведена.

За допомогою функціоналу Лагранжа (2.24) побудуємо функціонали:

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)), \quad \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+$$

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)), \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda$$

Розглянемо задачі:

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) \rightarrow \min, \quad \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+ \quad (2.62)$$

$$U(\Psi(\cdot)) \rightarrow \max, \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda \quad (2.63)$$

Задачу (2.62) будемо називати прямою, а (2.63) двоїстою до задачі (2.62).

Введемо до розгляду множину W :

$$W = \{(\lambda(\cdot), v) : \lambda(x) \in \Gamma_2; v \in V; \sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Лема 2.5. Задача (2.29) рівносильна задачі 2.3, тобто

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in W} I(\lambda(\cdot), v).$$

Доведення. Якщо $(\lambda(\cdot), v) \in W$, то

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad b_j^H - \sum_{i=1}^N v_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, M}.$$

Якщо ж $(\lambda(\cdot), v) \notin W$, то знайдеться такий номер i , $1 \leq i \leq N$, чи

$$\text{такий } j, \quad 1 \leq j \leq M, \text{ що або } \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \neq 0 \text{ або } b_j^H - \sum_{i=1}^N v_{ij} \neq 0.$$

$$\text{Тоді суму } \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(- \sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H \right) \text{ за}$$

рахунок вибору ψ та η можна зробити як завгодно великою. Отже, функціонал $X(\lambda(\cdot), v)$ можна конкретизувати в такий спосіб:

$$X(\lambda(\cdot), v) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \begin{cases} I(\lambda(\cdot), v), & (\lambda(\cdot), v) \in W, \\ +\infty, & (\lambda(\cdot), v) \notin W. \end{cases}$$

Отже мінімум $I(\lambda(\cdot), v)$ збігається з мінімаксом функціоналу

$X(\lambda(\cdot), v)$:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in W} I(\lambda(\cdot), v).$$

Лему доведено.

Встановимо співвідношення між задачами (2.62) і (2.63)

Лема 2.6. При будь-яких $\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+, \Psi(\cdot) \in \Lambda$,

$$U(\Psi(\cdot)) \leq U^* \leq I^* \leq X(\lambda(\cdot), v).$$

Доведення. Очевидно, що

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)),$$

$$U^* = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} G(\Psi(\cdot)) \leq \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = X(\lambda(\cdot), v).$$

Отже $U^* \leq I^*$. Лема доведена.

З'ясуємо, коли $U(\Psi^*(\cdot)) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$. Справедлива наступна

теорема.

Теорема 2.5. Якщо пара $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$ – сідлова точка функціоналу Лагранжа (2.24), то $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ – оптимальний розв'язок прямої задачі, а $\{\psi^*, \eta^*\}$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі та $U(\Psi^*(\cdot)) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$.

Доведення теореми 2.5 аналогічне доведенню теореми 2.2.

Теорема 2.6. Нехай в задачі 2.3 $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$. Тоді для того щоб пара $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ була розв'язком

задачі 2.3 необхідно й достатньо, щоб існували такі $\psi_i, i = 1, \dots, N$ та $\eta_j, j = 1, \dots, M$, за яких виконувались б умови:

$$1) \lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) = \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k), \\ 0, & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) \neq \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k), \quad \forall x \in \Omega, \\ & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* > 0, \\ c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) > \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

Доведення. З урахуванням доведеної вище рівності (2.55), конкретизуємо вираз для функціоналу $U(\Psi(\cdot))$:

$$\begin{aligned} U(\Psi(\cdot)) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{v \in R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \min_{v \in R_{NM}^+} (\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N ((c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_0(x) + \psi_i) \rho(x) \lambda(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j) - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Необхідність. Нехай $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ – оптимальний розв'язок задачі 2.3. З теореми 2.4 випливає, що функцію $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma$, яка мінімізує перший доданок у виразі (2.64), можна записати у такий спосіб:

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) \rho(x) = \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k) \rho(x), \\ 0, & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) \rho(x) \neq \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k) \rho(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Тоді, підставляючи (2.54) та (2.65) в (2.64), отримаємо

$$U(\{\psi, \eta\}) = \min_{v \in R_{NM}^+} \left(\int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j \right). \quad (2.66)$$

Оскільки праворуч у виразі (2.66) немає функції $\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2$, то позначимо $U(\Psi(\cdot))$ через $G(\psi, \eta)$, тобто введемо до розгляду на множині $(E_N \times E_M)$ функцію:

$$G(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \min_{v \in R_{NM}^+} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j \right)$$

Очевидно

$$\min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0 \\ -\infty, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Отже задачу, двоїсту до задачі (2.62), можна записати у такий спосіб:

$$G(\psi, \eta) \rightarrow \max_{\psi \in E_N, \eta \in E_M} \quad (2.68)$$

за умов $\psi_i - \eta_j \leq c_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1, N}, \overline{1, M}$.

З (2.67) випливає, що компонента v_{ij}^* – оптимальний розв'язок задачі 2.3 і тому задовольняє умовам:

$$v_{ij}^* = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, \\ 0, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) > \psi_i + \eta_j. \end{cases}$$

Отже, виконання нерівностей 1), 2) за умови, що $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ – оптимальний розв'язок задачі 2.3 доведено.

Достатність. Нехай виконуються умови 1) та 2) теореми. Згідно з лем 2.5, 2.6, та урахуванням незалежності першого доданку функціоналу (2.64) від $v \in R_{NM}^+$, а другого від $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ перепишемо (2.64) у вигляді:

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N ((c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_0(x) + \psi_i) \rho(x) \lambda(x) dx + \min_{v \in R_{NM}^+} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j \right).$$

Очевидно, що умова 1) забезпечує, згідно з теоремою 2.4, мінімальне значення першого доданку функціоналу $U(\Psi(\cdot))$. Другий доданок досягає своєї точної нижньої грані за умов 2) теореми, оскільки

$$\min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0. \end{cases}$$

Отже, достатність виконання нерівностей 1), 2) для того щоб пара $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ була оптимальним розв'язком задачі 2.3 доведена, і теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $x \in \Omega_{ij}^*$ та $v_{ij}^* > 0$, то рівняння границі можна записати у вигляді:

$$c_i^I(x, \tau_i^I) + c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = c_k^I(x, \tau_k^I) + c_{kj}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}).$$

Доведення. Якщо зв'язок $v_{ij}^* > 0$ істотний, то згідно з умовою 2) теореми 2.3: $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \eta_j + \psi_i$ або

$$\psi_i = -\eta_j - c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}). \quad (2.69)$$

Згідно з умовою 1) теореми 2.3:

$$c_i^l(x, \tau_i^l) - \psi_i = c_k^l(x, \tau_k^l) - \psi_k, \quad i \neq k, \quad \forall x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N,$$

тоді рівняння границі має вигляд:

$$c_i^l(x, \tau_i^l) - \psi_i = c_k^l(x, \tau_k^l) - \psi_k.$$

При наявності одного центру другого типу τ_j^H , підставивши в рівняння границі (2.69), отримаємо:

$$c_i^l(x, \tau_i^l) + \eta_j + c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) = c_k^l(x, \tau_k^l) + \eta_j + c_{kj}^H(\tau_i^l, \tau_j^H),$$

$$i \neq k, \quad \forall x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N.$$

Таким чином, точка x належить границі, якщо виконується рівність:

$$c_i^l(x, \tau_i^l) + c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) = c_k^l(x, \tau_k^l) + c_{kj}^H(\tau_i^l, \tau_j^H).$$

Тобто центри першого типу τ_i^l можуть розглядатися як транзитні пункти, через які фактично здійснюється забезпечення пунктів споживання неперервно розподіленим ресурсом.

Справедлива й зворотна теорема.

Теорема 2.7. Якщо $G(\psi^*, \eta^*) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$, $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ – оптимальний розв'язок прямої задачі, а $\{\psi^*, \eta^*\}$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, то пара $(\{\lambda^*, v^*\}, \{\psi^*, \eta^*\}) \in (\Gamma \times R_{NM}^+ \times E_{N+M})$ – сідлова точка функціоналу Лагранжа (2.24).

Доведення.

$$G(\psi^*, \eta^*) = \min_{\lambda, v} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot)) \leq \min_{\lambda, v} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) =$$

$$\max_{\psi, \eta} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) = X(\lambda^*(\cdot), v^*) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$$

За умовою $G(\psi^*, \eta^*) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$. Тому попередні нерівності перетворюються в рівності:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \min_{\lambda, v} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot)) = \max_{\psi, \eta} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) = I(\lambda^*(\cdot), v^*).$$

Звідси має нерівність

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для всіх $\lambda \in \Gamma, v \in R_{NM}^+, \Psi(\cdot) \in \Lambda$.

Теорема доведена.

Отже, враховуючи еквівалентність задач 2.2 і 2.3, для задачі 2.2 має місце наступні твердження.

Твердження 2.6. Нехай в задачі 2.2 $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$. Тоді для того щоб пара $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma_1 \times R_{NM}^+$ була розв'язком задачі необхідно й достатньо, щоб існували такі $\psi_i, i = 1, \dots, N$ та $\eta_j, j = 1, \dots, M$, за яких виконувалися б умови 1) і 2) теореми 2.6.

Твердження 2.7. Точка x належить границі між підмножинами Ω_i^* та Ω_k^* , якщо виконується рівність $c_i^l(x, \tau_i^l) + c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) = c_k^l(x, \tau_k^l) + c_{kj}^H(\tau_i^l, \tau_j^H)$.

2.2.4 Наближений алгоритм розв'язання

Для розв'язання поставленої задачі, запропоновано ітераційний алгоритм, складовою частиною якого є метод потенціалів розв'язання транспортної задачі [135].

Алгоритм 1.

Крок 0.

1. Задаємо довільне допустиме початкове наближення вектор-функції $\lambda^0(x)$, $\forall x \in \Omega$ (наприклад, що відповідає діаграмі Діріхле-Вороного, побудованої для набору центрів першого етапу).

Розраховуємо значення $b_i^{l(0)}$, $i = \overline{1, N}$, за формулою:

$$b_i^{l(0)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^0(x) dx;$$

2. Визначаємо початкові значення $v_{ij}^{(0)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ і значення потенціалів $\psi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$ и $\eta_j^{(0)}$, $j = \overline{1, M}$, розв'язуючи транспортну задачу такого виду:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) v_{ij}^{(0)} \rightarrow \min, \quad (2.70)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^{(0)} = b_j^H, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.71)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^{(0)} = b_i^{l(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.72)$$

$$v_{ij}^{(0)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Нехай в результаті k кроків алгоритму $k = 1, 2, \dots$ отримані значення потенціалів $\psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \dots, \psi_N^{(k)}$.

Опишемо $(k+1)$ -й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda_i^{k+1}(x)$ за такою формулою:

$$\lambda_i^{k+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_i^{(k)} \rho(x) = \min_l (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_l^{(k)}) \rho(x), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

2. Розраховуємо значення $b_i^{l(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$,

$$b_i^{l(k+1)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(k+1)} dx.$$

3. Визначаємо значення $v_{ij}^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, і значення потенціалів $\psi_i^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$ та $\eta_j^{(k+1)}$, $j = \overline{1, M}$, вирішуючи транспортну задачу (2.70) – (2.72).

4. Обчислюємо значення цільового функціоналу за формулою (2.16) при $\lambda_i(x) = \lambda_i^{(k+1)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, $v_{ij} = v_{ij}^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$.

5. Якщо хоча б одна з умов:

$$|F_k - F_{k-1}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{або} \quad \|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.73)$$

виконується, то переходимо до п. 6, якщо жодна з них не виконана, то до $(k+2)$ -го кроку алгоритму.

6. Вважаємо $\lambda_i^*(x) = \lambda_i^{(l)}(x)$, $v_{ij}^* = v_{ij}^{(l)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, $\psi_i^* = \psi_i^l$, $i = \overline{1, N}$, та $\eta_j^* = \eta_j^{(l)}$, $j = \overline{1, M}$, де l – номер ітерації, на якій виконується умова (2.73).

7. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (2.16) при $\lambda_i(x) = \lambda_i^*(x)$, $v_{ij} = v_{ij}^*$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, і для контролю правильності розрахунків – значення двоїстого функціоналу за формулою (2.66) при $\psi_i = \psi_i^*$, $i = \overline{1, N}$ та $\eta_j = \eta_j^*$, $j = \overline{1, M}$.

Алгоритм описаний.

Зауваження. Повна похибка, з якою може бути отримано наближений розв'язок задачі (2.1) – (2.6) за допомогою описаного вище алгоритму, складається з абсолютної похибки алгоритму (в нашому випадку ця похибка визначається похибкою обчислення

функціоналів прямої (двоїстої) задачі, похибкою, що виникає в результаті наближеного обчислення потужностей центрів першого етапу, що визначається обмеженням (2.2), абсолютної похибки округлень в результаті реалізації алгоритму на ЕОМ, і абсолютної похибки за рахунок неточності початкових даних. Наведемо тут нестрогі міркування про похибку, яка виникає за рахунок наближеного обчислення всіх інтегралів при реалізації алгоритму.

У припущенні, що $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$, а всі подвійні інтеграли обчислюються за допомогою кубатурної формули трапецій, тобто шляхом повторного застосування складеної формули трапецій для однократних інтегралів, з однаковим кроком розбиття по двом осям координат $h_1 = h_2 = 1/n$, згідно [136], щодо загальної кількості вузлів інтегрування $m = (n+1)^2$ похибка обчислення подвійного інтегралу має порядок $O(m^{-1})$. Якщо врахувати, що з такою похибкою обчислюються величини $b_i^l, i = \overline{1, N}$, ця похибка буде закладена і в параметри $\psi_i, i = \overline{1, N}$, внаслідок чого можна стверджувати, що значення характеристичних функцій $\lambda_i^{k+1}(x)$ також будуть знайдені з похибкою $O(m^{-1})$. Отже, порядок похибки обчислення цільового функціоналу становить $O(m^{-2})$.

РОЗДІЛ 3. МОДЕЛІ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛЕННЯ З РЕСУРСОМ, НЕПЕРЕРВНО РОЗПОВСЮДЖЕНИМ НА ЗАДАНИЙ ТЕРИТОРІЇ

3.1 Побудова математичних моделей задач оптимального розбиття множин з розміщенням центрів при наявності додаткових зв'язків

Розглянемо задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів при наявності додаткових зв'язків. За аналогією з задачами попереднього розділу будемо розглядати:

- двоетапні задачі оптимального розміщення-розподілення без обмежень на потужність підприємств першого етапу;
- двоетапні задачі оптимального розміщення-розподілення при наявності обмежень на потужність підприємств першого етапу.

Задача 3. (двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення без обмежень на потужність підприємств першого етапу)

Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, визначити координати $\tau_1^l, \dots, \tau_N^l$ центрів цих підмножин та такі обсяги перевезень v_{11}, \dots, v_{NM} , які забезпечують мінімум функціоналу:

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^l, \dots, \tau_N^l\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^n(\tau_i^l, \tau_j^l) v_{ij} \quad (3.1)$$

і задовольняють обмеження

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.3)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad (3.4)$$

$$v_{ij}^H \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \tau^l = (\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_N^l), \quad \tau^l \in \Omega^N.$$

тут $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; b_j^H , $j = \overline{1, M}$, – задані дійсні невід'ємні числа.

В розділі 2 (лема 2.2) доведено, що за умови

$$\sum_{j=1}^M b_j^H = \int_{\Omega} \rho(x) dx,$$

множина допустимих розбиттів \sum_{Ω}^N не порожня.

Функції $c_i^l(x, \tau_i^l)$, $i = \overline{1, N}$ – дійсні, обмежені, вимірні по аргументу x на Ω , та опуклі по τ на Ω для всіх $i = \overline{1, N}$; $\rho(x)$ – дійсна функція, що інтегрується і визначена на множині Ω ; τ_j^H , $j = \overline{1, M}$ – задані точки області Ω , $c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ – задані невід'ємні числа.

Так само, як в задачі 1, тут обмеження (3.2) висловлюють баланс між потужностями підприємств першого та другого етапів, отже мають бути виконані умови розв'язності задачі.

Задача 4. (двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення при наявності обмежень на потужність підприємств першого етапу).

Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні), визначити координати $\tau_1^l, \dots, \tau_N^l$ центрів цих підмножин, та такі обсяги перевезень v_{11}, \dots, v_{NM} , які забезпечують мінімум функціоналу

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^l, \dots, \tau_N^l\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) v_{ij},$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i^l, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^l, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.7)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad (3.8)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \tau^l = (\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_N^l), \quad \tau^l \in \Omega^N,$$

тут $x \in \Omega$; b_i^l , $i = \overline{1, N}$, b_j^H , $j = \overline{1, M}$ – задані дійсні невід'ємні числа, що задовольняють умову леми 2.1; τ_j^H та функції $c_i^l(x, \tau_i^l)$, $i = \overline{1, N}$; $\rho(x)$, $j = \overline{1, M}$, $c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ – такі самі, як і в задачі 3.

3.2 Метод розв'язання двоетапної задачі оптимального розміщення-розподілення без обмежень на потужності

3.2.1 Метод розв'язання задачі

З оглядом на те, що математична модель двоетапної задачі розміщення-розподілу є узагальненням неперервної задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів підмножин при обмеженнях за рахунок наявності додаткових зв'язків між центрами двох етапів, для розробки методу її розв'язання скористаємося методикою з [60]. Введемо характеристичну функцію підмножини Ω_i у вигляді:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i. \end{cases}$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), \tau^l, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^l(\tau_i^l, \tau_j^l) v_{ij}, \quad (3.9)$$

де вектор-функція $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$, $x \in \Omega$, $\tau_i^l = (\tau_1^l, \dots, \tau_N^l) \in \Omega^N$,

вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM}) \in R_{NM}^+$.

Очевидно, що має місце рівність

$$I(\lambda(\cdot), \tau^l, v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^l, \dots, \tau_N^l\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}).$$

Перепишемо задачу 3 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i , $i = \overline{1, N}$ в наступному вигляді.

Задача 3.1. Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau^l, v} I(\lambda(\cdot), \tau^l, v), \quad (3.10)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^l, \quad j = \overline{1, M};$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma_1, \quad \tau^l = (\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_N^l), \quad \tau^l \in \Omega^N, \quad v \in R_{NM}^+;$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega\}. \quad (3.11)$$

Задача 3.1 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$. Перейдемо від неї до задачі зі значеннями $\lambda(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 3.2. Знайти $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2$, $\tau_*^l \in \Omega^N$ и $v_{ij}^* \in R_{NM}^+$ такі, що

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau_*^l, v_{ij}^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, \tau^l \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot), \tau^l, v),$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^l, \quad j = \overline{1, M},$$

де

$$\Gamma_2 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : \lambda_i(x) \in [0, 1], \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega\},$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}\}.$$

Згідно леми 2.1, Γ_2 – опукла, замкнена, обмежена множина гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$.

Зрозуміло, що

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*) = \min_{\tau^l \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+} \left[\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot), \tau^l, v) \right], \quad (3.12)$$

З результатів параграфу 2.1 розділу 2 випливає, що при кожній фіксованій парі $\tau^l \in \Omega^N$ та $v \in R_{NM}^+$ внутрішня задача (3.12) лінійна відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_2 і є глобально розв'язною. Крім того, серед множини оптимальних розв'язків задачі 3.2 є оптимальні розв'язки задачі 3.1.

3.2.2 Обґрунтування методу розв'язання задачі

Для отримання необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі 3 введемо функціонал Лагранжа в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) v_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^M \eta_j (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H) + \int_{\Omega} \psi_0 (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i(x)) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \\ &- \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H + \int_{\Omega} \psi_0 (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $\tau^l \in \Omega^N$, $v \in R_{NM}^+$, $\Psi(x), x \in \Omega$ – вектор-функція, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$,

$$\Lambda = \{ \Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \eta) : \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M \}.$$

Пару елементів $(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot))$ назвемо сідловою точкою функціоналу (3.13) на множині $(\{\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$, якщо

$$L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для всіх $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $\tau^l \in \Omega^N$, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$, $v \in R_{NM}^+$ або

$$\begin{aligned} L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} \left[\max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) \right] = \\ &= \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \left[\min_{\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) \right]. \end{aligned}$$

Перейдемо до розв'язання наступної задачі:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)).$$

Позначимо

$$G(\Psi(\cdot)) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)), \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda.$$

тоді, задача, двоїста до задачі 3.2 має вигляд:

$$G(\Psi(\cdot)) \rightarrow \max, \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda. \quad (3.14)$$

Функціонал задачі (3.14) також можна записати у вигляді:

$$\min_{\{\tau^l, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)), \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda, \quad (3.15)$$

Позначимо

$$G_1(\{\tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)), \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda, \quad (3.16)$$

Розглянемо детальніше функцію $G_1(\{\tau^l, v\}, \Psi(\cdot))$:

$$\begin{aligned} G_1(\{\tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i(\cdot)) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \right. \\ &\left. - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx \right], \quad \Psi(\cdot) \in \Lambda. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Згідно результатів розділу 2, при будь-яких фіксованих τ^l , $\Psi(\cdot)$ мінімальне значення (3.17) по λ функціоналу $L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, \nu\}, \Psi(\cdot))$ досягається при:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_i^l(x, \tau_i^l)\rho(x) + \psi_i\rho(x) = \min_{k=1, N}(c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k)\rho(x), \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

Тоді функціонал $G_1(\{\tau^l, \nu\}, \Psi(\cdot))$ можна конкретизувати у такий спосіб:

$$\begin{aligned} G_1(\{\tau^l, \nu\}, \Psi(\cdot)) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, \nu\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \int_{\Omega} \min_{k=1, N}(c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k)\rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i)v_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H, \quad \psi \in E_N, \eta \in E_M. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Будемо позначати

$$\begin{aligned} Q(\{\tau^l, \nu\}, \{\psi, \eta\}) &= \int_{\Omega} \min_{k=1, N}(c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k)\rho(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i)v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H, \quad \psi \in E_N, \eta \in E_M. \end{aligned}$$

Функція $Q(\{\tau^l, \nu\}, \{\psi, \eta\})$ за змінною $v_{ij} \geq 0$ буде обмежена

знизу, якщо виконується умова:

$$\begin{cases} v_{ij}(c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i) = 0, \\ c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) \geq \eta_j + \psi_i \end{cases}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M} \quad (3.19)$$

Зауважимо, що ці умови аналогічні умовам доповнюючої нежорсткості для транспортної задачі в закритій формі.

Справедлива теорема.

Теорема 3.1. Нехай для задачі 3 виконуються умови леми 2.2.

Тоді сідлова точка $(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{l*}, \nu^*\}, \{\psi^*, \eta^*\})$ функціоналу Лагранжу (3.13) для задачі 3 (де перша компонента $\{\lambda^*(\cdot), \tau^{l*}, \nu^*\}$ є оптимальним розв'язком задачі 3 на множині $(\{\Gamma \times \Omega^{N \times} R_{NM}^+\} \times \{E_N \times E_M\})$) визначається в такий спосіб:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega_i = \{x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^{l*}) + \psi_i^* = \min_{k=1, N}(c_k^l(x, \tau_k^{l*}) + \psi_k^*)\}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де в якості $\tau^{l*}, \nu^*, \psi^*, \eta^*$ обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі, приведені до вигляду:

$$\begin{aligned} G(\{\psi, \eta\}) &= \min_{\{\tau^l, \nu\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^l, \nu\}, \{\psi, \eta\}) = \\ &= \min_{\{\tau^l, \nu\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \left[\int_{\Omega} \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k)\rho(x) dx + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i)v_{ij} \right] + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H \rightarrow \max, \\ &\psi \in E_N, \eta \in E_M, \quad i = 1, N, \quad j = 1, M \end{aligned} \quad (3.20)$$

за умов:

$$(c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) - \eta_j - \psi_i) \geq 0.$$

Отже, має місце наступне твердження.

Твердження 3.1. Нехай в задачі 3 функція $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$, і виконується умова розв'язності задачі з леми 2.2. Тоді трійка $\{\lambda^*(\cdot), \tau^{l*}, \nu^*\} \in \Gamma_0 \times \Omega^N \times R_{NM}^+$ буде оптимальним розв'язком задачі 5, сформульованої в термінах характеристичних функцій підмножин, що складають розбиття Ω , тоді і тільки тоді, коли

знайдуться такі дійсні константи $\psi_i^*, i=1, \dots, N$, і $\eta_j^*, j=1, \dots, M$, за яких для $i=1, \dots, N$ і майже всіх $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i^* \leq c_j^l(x, \tau_j^l) + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j=1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

а $\tau_{*i}^l, \psi_i^*, i=1, \dots, N$, $\eta_j^*, j=1, \dots, M$, були б оптимальним розв'язком наступної задачі:

$$G(\psi, \eta) \rightarrow \max, \psi \in R^N, \eta \in R^M$$

де

$$G(\psi, \eta) = \min_{\{\tau^l, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta),$$

$$G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_k (c_k^l(x, \tau_k^l) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^l(\tau_i^l, \tau_j^l) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^l.$$

3.2.3 Наближений алгоритм розв'язання

Для розробки алгоритму розв'язання задачі 3 запропоновано два підходи. Обидва засновані на результатах теореми 3.1. Перший підхід передбачає використання алгоритму розділу 2 сумісно з r -алгоритмом Шора. При другому підході застосовується лише r -алгоритм Шора.

Для реалізації першого підходу перепишемо задачу (3.20) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G(\psi, \eta) &= \min_{\{\tau^l, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta) = \\ \min_{\{\tau^l, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta) &= \min_{\tau^l \in \Omega^N} \min_{v \in R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta) = \\ &= \min_{\tau^l \in \Omega^N} Q(\tau^l), \end{aligned}$$

де

$$Q(\tau^l) = \min_{v \in R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta).$$

При кожному фіксованому векторі $\tau^l \in \Omega^N$ значення функції $Q(\tau^l)$ є оптимальним значенням двоїстого функціоналу, побудованого для сформульованої в термінах характеристичних функцій підмножин неперервної задачі ОРМДЗ із заданими центрами. Тому складовою частиною наведеного нижче алгоритму розв'язання задачі 3 є алгоритм 1. Ключова ж роль відведена методу субградієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів – r -алгоритм Шора.

Алгоритм 2 (комбінація алгоритму 1 та r -алгоритму Шора)

Крок 0.

Область Ω заключаємо в паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осях декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$, при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

1. Нехай $k=0$. Задаємо початкове наближення координат центрів $\tau^l = \tau^{l(k)}$, і вектор-функції $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ для усіх точок сітки $x \in \Omega$.

2. Розраховуємо значення $b_i^{l(k)}$ за формулою:

$$b_i^{l(k)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(k)}(x) dx, i = \overline{1, N}.$$

3. Визначаємо початкові значення $v_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$,

розв'язуючи методом потенціалів наступну транспортну задачу:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}''(\tau_i^{I(k)}, \tau_j'') v_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^{(k)} = b_j'', \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \sum_{j=1}^M v_{ij}^{(k)} = b_i^{I(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.22)$$

$$v_{ij}^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.23)$$

В якості значень двоїстих змінних $\eta_j^{(k)}$, $j = \overline{1, M}$, і $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, обираємо значення відповідних потенціалів, які отримані на останній ітерації методу потенціалів.

Нехай в результаті (l) кроків алгоритму $l = 0, 1, 2, \dots$ отримані значення потенціалів $\psi_1^{(l)}, \psi_2^{(l)}, \dots, \psi_N^{(l)}$. Опишемо $(l+1)$ -ий крок.

Крок $(l+1)$.

4. Обчислюємо значення $\lambda^{(l+1)}(x)$ в вузлах сітки за формулою:

$$\lambda_i^{(l+1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (c_i^l(x, \tau_i^{(l)})\rho(x) + \psi_i^{(l)})\rho(x) = \\ & = \min_m (c_m^l(x, \tau_m^{(l)}) + \psi_m^{(l)})\rho(x), \\ 0 & \text{в інших випадках, } i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3.24)$$

5. Обчислюємо значення $v_{ij}^{(l+1)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, розв'язуючи методом потенціалів транспортну задачу (3.22) – (3.23). В якості значень двоїстих змінних $\eta_j^{(l+1)}$, $j = \overline{1, M}$, і $\psi_i^{(l+1)}$, $i = \overline{1, N}$, обираємо значення потенціалів, які відповідають оптимальному розв'язку задачі (3.22) – (3.23).

6. Обчислюємо компоненти субградієнту $g_Q^{\tau^l}(v, \psi, \eta)$ у вузлах сітки за формулою:

$$g_Q^{\tau^l} = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau^l} \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M g_{c''}^{\tau^l} v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}.$$

де $g_{c''}^{\tau^l}$ – i -я компонента $2N$ -мірного вектору узагальненого градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_i^l в точці τ^l , $g_{c''}^{\tau^l}$ – i -я компонента $2N$ -мірного вектора узагальненого градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_{ij}'' в точці τ^l при $\tau^l = \tau^{(l)}$, $\psi = \psi^{(l+1)}$, $\lambda = \lambda^{(l+1)}$, $v = v^{(l+1)}$, $\eta = \eta^{(l+1)}$.

7. Обираємо крок $h_l > 0$ r -алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{(l+1)} = P_{\Pi}(\tau^{(l)} - h_l B_l^{\tau} g_Q^{\tau}(\tau^{(l)}, v^{(l+1)}, \psi^{(l+1)}, v^{(l+1)}))$$

де P_{Π} – оператор проектування на Π , B_l^{τ} – оператор перетворення простору в основний простір E_N , що має вигляд:

$$B_l^{\tau} = B_{l-1}^{\tau} (I + (\frac{1}{\alpha} - 1) \theta_{l-1}^{\tau} (\theta_{l-1}^{\tau})^T) \quad (3.25)$$

де I – одинична матриця відповідної розмірності, θ_{l-1}^{τ} – відповідає нормованому вектору різниці двох послідовних субградієнтів у перетвореному просторі, тобто:

$$\theta_{l-1}^{\tau} = \frac{(B_{l-1}^{\tau})^T (g_Q^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_Q^w(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}))}{\| (B_{l-1}^{\tau})^T (g_Q^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_Q^{\tau}(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)})) \|}, \quad (3.26)$$

за умови, що

$$\| (B_{l-1}^{\tau})^T (g_Q^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_Q^{\tau}(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)})) \| \geq \varepsilon_0, \quad \text{та}$$

$\theta_{l-1}^{\tau} = 0$ в інших випадках. Тут ε_0 – точність представлення нуля ЕОМ.

8 Якщо умова $\|(\tau^{(l)}, v^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}) - (\tau^{(l+1)}, v^{(l+1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)})\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ виконується, то переходимо до п.9, якщо ні – здійснюється перехід на $(l+2)$ крок.

9. Розраховуємо значення цільового та двоїстого функціоналів. Кінець алгоритму.

Алгоритм описаний.

Представимо також найбільш зручніший компактний запис цього алгоритму, в якому використовуємо Н-форму r-алгоритму Шора.

Алгоритм 2 (Н-форма).

Ініціалізація. Вибираємо $\tau^{I(0)} \in \Omega^N$ – довільне початкове наближення набору N точок. За допомогою алгоритму 1 обчислюємо значення компонент вектора $\lambda^{(0)}(x)$ в кожній точці $x \in \Omega$, а також початкові наближення параметрів $v_{ij}^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$.

Обчислюємо компоненти субградієнта $g_Q(\tau^{I(0)})$ функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(0)}$ за формулою:

$$g_Q^{\tau_i^I} = \int_{\Omega} \rho(x) g_{c_i^I}^{\tau_i^I} \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M g_{c_{ij}^I}^{\tau_i^I} v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

при $\lambda = \lambda^{(0)}$, $v = v^{(0)}$. Тут $g_{c_i^I}^{\tau_i^I}$, $g_{c_{ij}^I}^{\tau_i^I}$ – i -і компоненти N -вимірних векторів узагальнених градієнтів $g_{c_i^I}(x, \tau)$ і $g_{c_{ij}^I}(\tau, \tau^I)$ функцій $c_i^I(x, \tau_i^I)$ та $c^I(\tau_i^I, \tau_j^I)$, $i = \overline{1, \dots, N}$, $j = \overline{1, \dots, M}$, відповідно в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$.

Задаємо $H_0 = I_{2N}$ (одичну матрицю) і параметри $\alpha > 1$, $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$.

$k = 0$.

1. Нехай на k -й ітерації $\tau^{I(k)}$ – вектор точок з Ω^N ; $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$, $\forall k$.

2. За допомогою алгоритму 1 обчислюємо значення компонент вектора $\lambda^{(k)}(x)$ в кожній точці $x \in \Omega$, і поточні наближення параметрів $v_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$.

3. Обчислюємо $g_Q(\tau^{I(k)})$ – субградієнт функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(k)}$ при $\lambda = \lambda^{(k)}$, $v = v^{(k)}$.

4. Розраховуємо наступне наближення $\tau^{I(k+1)}$ за формулою

$$\tau^{I(k+1)} = P_{\Omega^N} \left(\tau^{I(k)} - h_k \frac{H_k g_Q(\tau^{I(k)})}{\sqrt{(H_k g_Q(\tau^{I(k)}), g_Q(\tau^{I(k)}))}} \right), \quad (3.27)$$

де $P_{\Omega^N}(u)$ – оператор проектування, під яким розуміємо повернення (у той чи інший спосіб) в допустиму множину Ω^N точки u у випадку, якщо вона вийшла за межі Ω^N ; $h_k \geq 0$ – кроковий множник, обирається з умови мінімуму функції за напрямом $p_k = -H_k g_Q(x^k)$.

5. Обчислюємо $g_Q(\tau^{I(k+1)})$ – субградієнт функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(k+1)}$.

Нехай $r_k = g_Q(\tau^{I(k+1)}) - g_Q(\tau^{I(k)})$.

6. Розраховуємо матрицю

$$H_{k+1} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{(H_k r_k, r_k)} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{r_k^T H_k r_k}. \quad (3.28)$$

Якщо хоча б один з критеріїв закінчення ітераційного процесу

$$|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{або} \quad \|\tau^{I(k+1)} - \tau^{I(k)}\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.29)$$

виконаний, то здійснюємо перехід на крок 7. Інакше $k := k + 1$ і переходимо на крок 2.

7. Розраховуємо значення цільового функціоналу. Кінець алгоритму.

Алгоритм 2 (Н-форма) описаний.

Зауваження. Наведений алгоритм використовує для розв'язання задачі умовної за τ^l задачі оптимізації метод проекції узагальненого градієнта. Але цей алгоритм легко модифікується на випадок використання, наприклад, методу зовнішнього штрафу для врахування обмежень невиходу за границі множини Ω центрів першого етапу, які розташовуються. Такий модифікований алгоритм, представлено у додатку А.

3.3 Двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу з обмеженнями на потужності підприємств першого етапу

3.3.1 Метод розв'язання задачі

Розглянемо задачу 4 у термінах характеристичних функцій підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, що складають розбиття заданої множини.

Задача 4.1. Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau, v} I(\lambda(\cdot), \tau, v),$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ м.в для } x \in \Omega, \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i^l, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.31)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^l, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.32)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^h, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.33)$$

$$\lambda(x) \in \Gamma_1, \quad \tau^l \in \Omega^N, \quad v \in R_{NM}^+,$$

де

$$I(\lambda(\cdot), \tau, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^l(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^h(\tau_i^l, \tau_j^h) v_{ij},$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ м.в для } x \in \Omega\}.$$

Задача 4.1 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$.

Введемо до розгляду наступну множину:

$$R_{NM}^1 = \{v : (v_{11}^H, \dots, v_{NM}^H) : v \in R_{NM}^+, \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^L, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}\}.$$

Будемо вважати що для задачі 4.1 виконуються умови (2.7) за яких допустима множина розв'язків задачі не є порожньою.

Перейдемо від задачі 4.1 до задачі, в якій компоненти вектор-функції $\lambda(\cdot)$ може приймати значення з відрізка $[0,1]$.

Задача 4.2. Знайти $\lambda^*(x) \in \Gamma_2$ та $v_{ij} \in R_{NM}^1$ такі, що

$$I(\lambda^*(x), \tau^*, v^*) = \min_{\lambda(x) \in \Gamma_2, \tau \in \Omega^N, v \in R_{NM}^1} I(\lambda(x), \tau, v),$$

де

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i^L, i = \overline{1, N}\}$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}\}.$$

Згідно з лемою 2.1, Γ_2 – опукла, замкнена, обмежена множина гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$.

Зрозуміло, що

$$I(\lambda^*(x), \tau^*, v^*) = \min_{\tau \in \Omega^N, v \in R_{NM}^1} \left[\min_{\lambda(x) \in \Gamma_2} I(\lambda(x), \tau, v) \right]. \quad (3.34)$$

З результатів параграфу 2.2 розділу 2 випливає, що за умов (2.7) при кожній фіксованій парі $\tau^l \in \Omega^N$ та $v \in R_{NM}^1$ внутрішня задача (3.34) лінійна відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_2 та глобально вирішувана. Крім того, серед множин оптимальних розв'язків задачі 4.2 є оптимальні розв'язки задачі 4.1.

3.3.2 Обґрунтування методу розв'язання задачі

Для отримання необхідних і достатніх умов екстремуму введемо функціонал Лагранжа для задачі 4.2 в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i^L(x, \tau_i^L) \rho(x) \lambda(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_i^L, \tau_j^H) v_{ij} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \varphi_i \left(-\sum_{j=1}^M v_{ij} + b_i^L\right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^H\right) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda(x) dx - b_i^L\right) + \\ &+ \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1\right) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^L(x, \tau_i^L) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1\right) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\tau_i^L, \tau_j^H) - \varphi_i - \eta_j) \cdot v_{ij} + \sum_{i=1}^N \varphi_i b_i^L + \\ &+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H \end{aligned} \quad (3.35)$$

де $\lambda(x) \in \Gamma$, $\tau^l \in \Omega^N$, $v \in V$, $\Psi(\cdot) \in \Delta$ – вектор-функція;

$$\Delta = \{\Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \varphi, \eta) : \psi_0(\cdot) \in L_2^N, \psi \in E_N, \varphi \in E_N, \eta \in E_M\}.$$

Пару елементів $(\{\lambda^*, \tau^*, v^*\}, \{\Psi^*(\cdot)\})$ назвемо сідловою точкою функціоналу (3.35) на множині $(\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+) \times \Delta$, якщо

$$L(\{\lambda^*, \tau^*, v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*, \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda, \tau, v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для всіх $\lambda \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$ чи

$$\begin{aligned} L(\{\lambda^*, \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda, \tau, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Delta} L(\{\lambda, \tau, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \max_{\Psi(\cdot) \in \Delta} \min_{\{\lambda, \tau, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda, \tau, v\}, \Psi(\cdot)) \end{aligned}$$

Перейдемо до розв'язання задачі:

$$L(\{\lambda^*, \tau^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Delta} \min_{\{\lambda, \tau, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda, \tau, v\}, \Psi(\cdot))$$

Позначимо

$$G(\Psi(\cdot)) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)), \Psi(\cdot) \in \Delta.$$

Тоді задача, двоїста до задачі 4.2, має вигляд:

$$G(\Psi(\cdot)) \rightarrow \max, \Psi(\cdot) \in \Delta. \quad (3.36)$$

Цю задачу також можна записати у такий спосіб:

$$\min_{\{\tau, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)), \Psi(\cdot) \in \Delta, \quad (3.37)$$

Позначимо в (3.37)

$$G_1(\{\tau, v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)), \Psi(\cdot) \in \Delta, \quad (3.38)$$

Конкретизуємо (3.38):

$$\begin{aligned} G_1(\{\tau, v\}, \Psi(\cdot)) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i(x)) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \varphi_i - \eta_j) v_{ij} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \varphi_i b_i^I + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx, \Psi(\cdot) \in \Delta. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Згідно з результатів розділу 2, у виразі (3.39) мінімальне значення функціоналу $L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot))$ по змінній $\lambda(\cdot)$ досягається

при

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega = \{x \in \Omega : (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) = \\ & = \min_k (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x)\}, \\ 0, & \text{в інших випадках, } i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

і за таких компонент вектор-функції $\lambda(\cdot)$ функціонал $G_1(\{\tau, v\}, \Psi(\cdot))$ набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} G_1(\{\tau, v\}, \{\varphi, \psi, \eta\}) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_k (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \varphi_i - \eta_j) v_{ij} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \varphi_i b_i^I + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II}, \{\varphi, \psi, \eta\} \in E^{2N+M}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Має місце наступна теорема (доведення аналогічне доведенню теореми 2.1).

Теорема 3.1. Оптимальний розв'язок $\{\lambda^*(\cdot), \tau^*, v^*\}$ задачі 4.2

визначається в наступному вигляді:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega = \{x \in \Omega : (c_i^I(x, \tau_i^{I*}) + \psi_i^*) \rho(x) = \\ & = \min_k (c_k^I(x, \tau_k^{I*}) + \psi_k^*) \rho(x)\} \\ 0, & \text{в інших випадках, } i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

а компоненти τ^*, v^* , поряд з двоїстими параметрами $\varphi^*, \psi^*, \eta^*$ утворюють оптимальний розв'язок двоїстої задачі, приведеної до виду:

$$\begin{aligned} G(\{\varphi, \psi, \eta\}) &= \min_{\{\tau, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau, v\}, \{\varphi, \psi, \eta\}) = \\ &= \min_{\{\tau, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_k (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_i) \rho(x) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \varphi_i - \eta_j) v_{ij} + \sum_{i=1}^N \varphi_i b_i^I + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} \right] \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3.41)$$

Згідно необхідних і достатніх умов оптимальності задач лінійного програмування транспортного типу на оптимальному розв'язку вираз $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \varphi_i - \eta_j) v_{ij}$ має набувати нульового

значення. А, отже, мають місце наступні умови доповнюючої нежорсткості:

$$\begin{cases} v_{ij} > 0, & \text{якщо } c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j^II) = \varphi_i + \eta_j, \\ v_{ij} = 0, & \text{якщо } c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j^II) > \varphi_i + \eta_j. \end{cases}$$

3.3.3 Наближений алгоритм розв'язання

Опишемо алгоритм розв'язання задачі 4, який передбачає використання алгоритму розділу 2 сумісно з Γ -алгоритмом Шора. Так само, як і в алгоритмі 2, спочатку запишемо задачу 3.41 у вигляді:

$$\min_{\tau^N \in \Omega^N} \left[\min_{v \geq 0, \psi, \eta, \varphi} G(\{\tau, v\}, \{\varphi, \psi, \eta\}) \right].$$

Алгоритм 4.

Крок 0.

Область Ω заключаємо в паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$, при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

1. Нехай $k = 0$. Задаємо початкове наближення координат центрів $\tau^I = \tau^{I(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$ і вектор-функції $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ для усіх точок сітки $x \in \Omega$.

2. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ в вузлах сітки за наступними формулами:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) = \min_m (c_m^I(x, \tau_m^I) + \psi_m) \rho(x), \\ 1, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (3.42)$$

$$i = \overline{1, N}$$

3. Визначаємо початкові значення $v_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$,

розв'язуючи методом потенціалів наступну транспортну задачу::

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}''(\tau_i^{I(k)}, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^k = b_j^{II}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \sum_{j=1}^M v_{ij}^k = b_i^I, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.44)$$

$$v_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.45)$$

В якості значень двоїстих змінних $\eta_j^{(k)}$, $j = \overline{1, M}$, і $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, обираємо значення відповідних потенціалів, які отримані на останній ітерації методу потенціалів

Нехай в результаті (l) кроків алгоритму $l = 1, 2, \dots$ отримані значення потенціалів $\psi_1^{(l)}, \psi_2^{(l)}, \dots, \psi_N^{(l)}$. Опишемо ($l+1$)-ий крок.

Крок ($l+1$).

4. Обчислюємо значення $\lambda^{(l+1)}(x)$ в вузлах сітки за формулою (3.42) при $\psi = \psi^{(l)}$, $v = v^{(l)}$, $\eta = \eta^{(l)}$.

5. Обчислюємо значення $v_{ij}^{(l+1)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, розв'язуючи методом потенціалів транспортну задачу (3.43) – (3.45). В якості значень двоїстих змінних $\eta_j^{(l+1)}$, $j = \overline{1, M}$, і $\psi_i^{(l+1)}$, $i = \overline{1, N}$, обираємо значення потенціалів, які відповідають оптимальному розв'язку задачі (3.43) – (3.45).

6. Обчислюємо компоненти субградієнту $g_G^{\tau^I}(v, \psi, \eta)$ у вузлах сітки за формулою:

$$g_G^{\tau^l} = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau^l} \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M g_{c_{ij}}^{\tau^l} v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}.$$

де $g_{c_i}^{\tau^l}$ – i -я компонента $2N$ -мірного вектору узагальненого градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_i^l в точці τ^l , $g_{c_{ij}}^{\tau^l}$ – i -я компонента $2N$ -мірного вектора узагальненого градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_{ij}^l в точці τ^l при $\tau^l = \tau^{l(l)}$, $\psi = \psi^{(l+1)}$, $\lambda = \lambda^{(l+1)}$, $v = v^{(l+1)}$, $\eta = \eta^{(l+1)}$.

7. Обираємо крок $h_l > 0$ г-алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{l(l+1)} = P_{\Pi}(\tau^{l(l)} - h_l B_l^{\tau} g_G^{\tau}(\tau^{l(l)}, v^{(l+1)}, \psi^{(l+1)}, v^{(l+1)}))$$

де P_{Π} – оператор проектування на Π , B_l^{τ} – оператор перетворення простору в основний простір E_N , що має вигляд:

$$B_l^{\tau} = B_{l-1}^{\tau} \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_{l-1}^{\tau} (\theta_{l-1}^{\tau})^T \right)$$

де I – одинична матриця відповідної розмірності, θ_{l-1}^{τ} – відповідає нормованому вектору різниці двох послідовних субградієнтів у перетвореному просторі, тобто:

$$\theta_{l-1}^{\tau} = \frac{(B_{l-1}^{\tau})^T (g_G^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_G^w(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}))}{\|(B_{l-1}^{\tau})^T (g_G^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_G^{\tau}(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}))\|}, \quad (3.46)$$

за умови, що

$$\|(B_{l-1}^{\tau})^T (g_G^{\tau}(\tau^{(l)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}) - g_G^{\tau}(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)}, v^{(l+1)}))\| \geq \varepsilon_0,$$

та $\theta_{l-1}^{\tau} = 0$ в інших випадках. Тут ε_0 – точність представлення нуля ЕОМ.

8. Якщо умова

$$\|(\tau^{(l)}, v^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}) - (\tau^{(l+1)}, v^{(l+1)}, \psi^{(l+1)}, \eta^{(l+1)})\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

виконується, то переходимо до п. 9, якщо ні – здійснюється перехід на $(l+2)$ -й крок.

9. Розраховуємо значення цільового та двоїстого функціоналів.

Кінець алгоритму.

Алгоритм описаний.

Зазначимо, що розроблені моделі та алгоритми, можуть бути узагальнені на випадки:

- наявності додаткового етапу (реалізації перероблюючого підприємства з метою доставки готової продукції до кінцевого споживача). При цьому виникає питання дослідження умов розв'язності таких задач (тобто отримання умов відповідності початкових даних);
- наявності обмежень у вигляді нерівностей на споживання і пропозицію сировини та напівфабрикату;
- коли існує лише скінчена кількість можливих місць розташування підприємств першого етапу.

РОЗДІЛ 4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ І АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ

4.1 Аналіз впливу вхідних параметрів на оптимальні розв'язки двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття з фіксованими центрами

Алгоритми 1 і 2 програмно реалізовані в середовищі Delphi 7.0 для випадку, коли множина, що розбивається, є квадрат $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Чисельна реалізація алгоритмів передбачає дискретизацію заданої області. Для обчислення кратних інтегралів в розробленій програмі застосовується кубатурна формула трапецій (оцінка похибки обчислення функціоналу задачі наведена нижче). Задача лінійного програмування транспортного типу розв'язується за допомогою методу потенціалів.

Обчислювальні експерименти були спрямовані на:

- перевірку коректності роботи алгоритмів;
- виявлення залежності значення функціоналу і часу розв'язання задачі ОРМДЗ від розміру сітки дискретизації області;
- з'ясування параметрів задачі, що впливають на форму границь між підмножинами в задачах з фіксованими центрами першого етапу;
- обґрунтування доцільності постановки і розв'язування неперервних задач ОРМДЗ при вирішенні практичних питань, пов'язаних з формуванням систем двоетапного транспортування

матеріальних (сировинних) ресурсів, які неперервно розподілені на певній території.

4.1.1 Аналіз впливу розміру сітки на значення функціоналу задачі і час розв'язання

Для дослідження було проведено експерименти, в яких всі дані, крім розміру кроку дискретизації по кожній з осей координат, були незмінними. Далі наведемо вихідні дані для однієї серії експериментів, а також результати досліджень.

Вихідні дані:

- $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
- $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$; $N = 4$; $M = 2$;
- $\tau_1^I = (0,97;0,1)$, $\tau_2^I = (0,86;0,03)$, $\tau_3^I = (0,87;0,84)$, $\tau_4^I = (0,47;0,7)$;
- $\tau_1^{II} = (0,33;0,26)$, $\tau_2^{II} = (0,73;0,31)$; $b^{II} = (0,45;0,55)$;
- функції витрат: $c_i^I(x, y, \tau_i^I) = \sqrt{(x - \tau_{1i}^I)^2 + (y - \tau_{2i}^I)^2}$, $i = \overline{1, N}$,

$$c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \sqrt{(\tau_{1i}^I - \tau_{1j}^{II})^2 + (\tau_{2i}^I - \tau_{2j}^{II})^2}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}.$$

В табл. 4.1 представлені результати обчислювальних експериментів з досліджень впливу розміру сітки на час розв'язання задачі і значення цільового функціоналу. Умовою припинення розрахунків було виконання одного з нерівностей:

$$|I_k - I_{k-1}| \leq 10^{-6},$$

$$\|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| \leq 10^{-6}.$$

Табл. 4.1 - Результати обчислювальних експериментів з досліджень впливу розміру сітки на час розв'язання задачі і значення цільового функціоналу

Номер експерименту	Крок дискретизації	Розмір сітки	Час роботи алгоритму, с	Значення функціоналу
1*	0,1×0,1	11×11=121	$2,0094 \cdot 10^{-12}$	0,9933
2	0,05×0,05	21×21=441	$4,2866 \cdot 10^{-12}$	1,0324
3	0,04×0,04	26×26=676	$8,3054 \cdot 10^{-12}$	1,0551
4	0,025×0,025	41×41=1681	$2,7328 \cdot 10^{-11}$	1,0834
5	0,01×0,01	101×101=10201	$1,8634 \cdot 10^{-10}$	1,1135
6	0,005×0,005	201×201=40401	$6,6980 \cdot 10^{-10}$	1,12372

*При реалізації алгоритму розв'язання задачі з великим розміром сітки виявляється незначне порушення умови балансу (2.18), що може бути пояснене похибкою, з якою обчислюються потужності центрів першого етапу. В решті представлених експериментів умови балансу виконуються з точністю, що не перевищує 10^{-5} .

Табл. 4.2 містить оптимальне розбиття множини Ω , отримані у ході відповідних експериментів. На рис. 4.1 представлений графік залежності часу роботи алгоритму 2 розв'язання задачі ОРМДЗ від розміру сітки дискретизації, побудований за результатами експериментів 1 – 6. Побудована лінія тренду свідчить про те, що алгоритм 2 працює за поліноміальний час $T(n) = O(n^4)$.

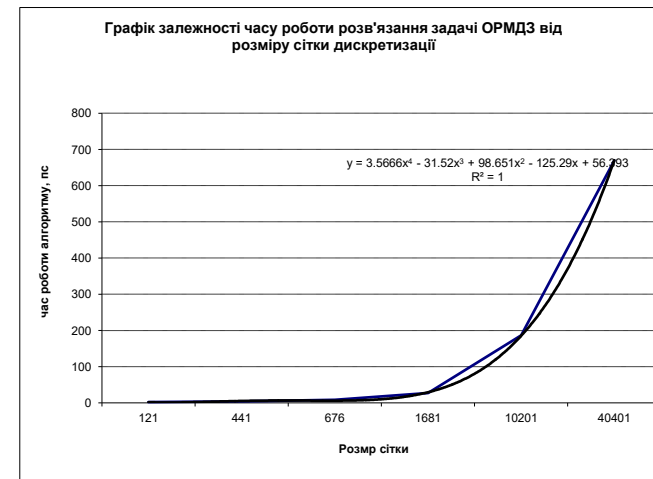


Рис. 4.1. Графік залежності часу роботи розв'язання задачі ОРМДЗ від розміру сітки дискретизації і лінія тренду

Різницю в значеннях цільового функціоналу можна пояснити по-перше, відмінністю (хоча й незначною) в площах знайдених оптимальних підмножин (див. сумарну площу в табл. 4.2), а, відповідно, й у розмірі перевезень між пунктами першого і другого етапів (див. табл. 4.3 і 4.4). По-друге, як відомо, подрібнення сітки дискретизації не завжди покращує результат обчислення кратних інтегралів, що буде показано нижче.

Зазначимо, що при чисельній реалізації алгоритмів 2 і 3 обчислення першого доданку функціоналу задачі, а також потужностей центрів першого етапу здійснювалось за допомогою кубатурної формули лівих прямокутників.

Табл. 4.2 - Оптимальне розбиття квадрату на чотири підмножини, отримане при різних розмірах сітки

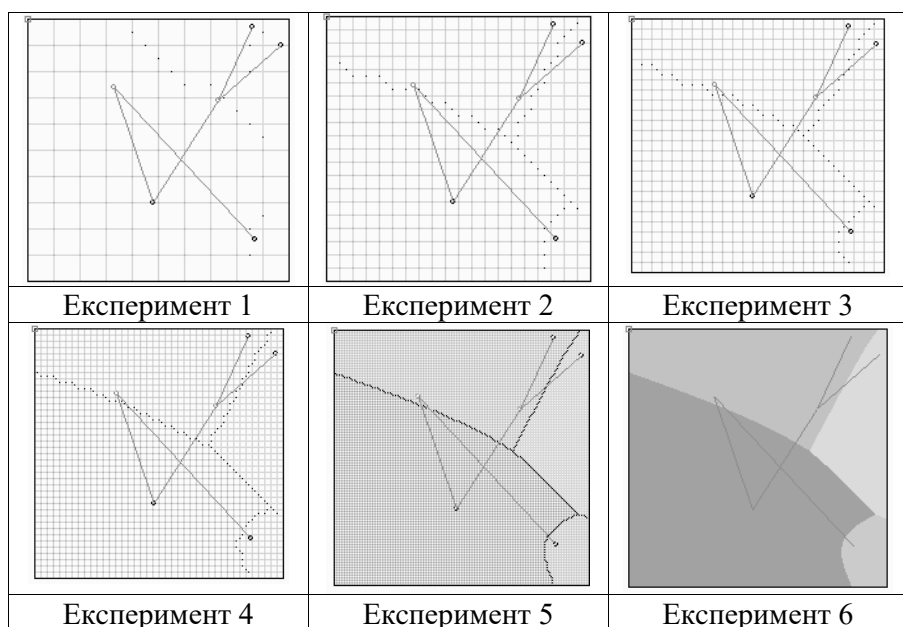


Табл. 4.3 - Площі підмножин, що складають оптимальне розбиття, знайдені у ході експериментів 1 – 6

Підмножина	Експеримент					
	1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№6
Ω_1	0,05	0,11	0,1136	0,1143	0,1204	0,1218
Ω_2	0,07	0,2425	0,2495	0,26	0,268	0,2708
Ω_3	0,02	0,035	0,032	0,0368	0,0392	0,0403
Ω_4	0,67	0,515	0,5263	0,5393	0,5523	0,5568
Сумарна площа	0,81	0,9025	0,9214	0,9504	0,9799	0,9897

Табл. 4.4 - Обсяги перевезень між пунктами першого і другого етапів, що знайдені у ході експериментів 1 – 6

Обсяги перевезень	Експеримент					
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№6
v_{11}	0,05	0,1175	0,1136	0,1143	0,1204	0,1218
v_{12}	0	0	0	0	0	0
v_{21}	0,07	0,2425	0,2496	0,26	0,2681	0,2709
v_{22}	0	0	0	0	0	0
v_{31}	0	0	0	0	0	0
v_{32}	0,02	0,035	0,032	0,0368	0,0392	0,0404
v_{41}	0,3345	0,0045	0,0913	0,0801	0,066	0,0618
v_{42}	0,3354	0,51045	0,435	0,4592	0,4864	0,4951

4.1.2 Аналіз впливу кількості центрів першого етапу на значення функціоналу задачі і час розв'язання

Результати обчислювальних експериментів з розв'язання задачі ОРМДЗ з фіксованими центрами за допомогою розробленого алгоритму 2 свідчать про те, що збільшення кількості центрів першого етапу при незмінній решті вихідних даних несуттєво впливають на час роботи алгоритму. Зміни виявляються лише в подрібненні розбиття множини (відповідно до заданої кількості центрів першого етапу), і в розмірах перевезень між центрами обох етапів. На рис. 4.2 представлені графіки залежності значення функціоналу задачі від кількості центрів першого етапу, побудовані за результатами розв'язування задачі ОРМДЗ з такими вихідними параметрами:

- $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; розмір сітки дискретизації: $101 \times 101 = 10201$;

- $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$; $M = 5$;
- $\tau_1^I, \tau_2^I, \dots, \tau_N^I$ – представлені на рисунках, які містять оптимальне розбиття (див. табл. 4.5, 4.6);
- $\tau_1^{II} = (0,55;0,59)$, $\tau_2^{II} = (0,39;0,29)$; $b^{II} = (0,5;0,5)$ при $M = 2$;
- $\tau_1^{II} = (0,01;0,61)$, $\tau_2^{II} = (0,03;0,18)$; $\tau_3^{II} = (0,52;0,02)$; $\tau_4^{II} = (0,17;0,76)$;
- $\tau_5^{II} = (0,81;0,33)$; $b^{II} = (0,182;0,182;0,182;0,182;0,272)$ при $M = 5$;
- функції витрат – як і в попередніх дослідженнях.



Рис. 4.2. Графік залежності оптимальних значень функціоналу задачі ОРМДЗ від кількості центрів

Значення цільового функціоналу при збільшенні кількості центрів першого етапу від 2 до 25 наведені в табл. 4.5. Таблиці 4.6, 4.7 містять оптимальні розбиття множини й додаткові зв'язки, отримані при $M = 2$ і $M = 5$ відповідно. Центри першого етапу тут і

надалі зазначені чорним колом, а центри другого етапу – червоним колом. Розташування кожного додаткового центру з кожним наступним експериментом зазначено на рисунках червоним квадратом.

Табл. 4.5 - Значення цільового функціоналу в експериментах 7 – 30

Кількість центрів першого етапу	№ експерименту	Значення функціоналу при $M=2$	№ експерименту	Значення функціоналу при $M=5$
2	7	1,32	31	1,27
3	8	1,154	32	1,246
4	9	1,275	33	1,119
5	10	1,138	34	1,072
6	11	0,983	35	1,029
7	12	0,95	36	0,763
8	13	0,8209	37	0,966
9	14	0,94	38	0,9701
10	15	0,9541	39	0,9469
11	16	0,978	40	0,9412
12	17	0,863	41	0,9952
13	18	0,867	42	0,9479
14	19	0,877	43	1,034
15	20	0,875	44	1,094
16	21	0,89	45	1,2804
17	22	0,94	46	0,9286
18	23	0,91	47	1,159
19	24	0,832	48	1,022
20	25	0,834	49	0,9779
21	26	0,833	50	0,9879
22	27	0,8861	51	0,977
23	28	0,9652	52	0,9744
24	29	0,8801	53	1,1303
25	30	0,8706	54	1,061

Табл. 4.6 - Оптимальне розбиття квадрату на N підмножин, отриманих в експериментах 7 – 30

Експеримент 7	Експеримент 8	Експеримент 9	Експеримент 10
Експеримент 11	Експеримент 12	Експеримент 13	Експеримент 14
Експеримент 15	Експеримент 16	Експеримент 17	Експеримент 18
Експеримент 19	Експеримент 20	Експеримент 19	Експеримент 20
Експеримент 23	Експеримент 24	Експеримент 25	Експеримент 26
Експеримент 27	Експеримент 28	Експеримент 29	Експеримент 30

Табл. 4.7 - Оптимальне розбиття квадрату на N підмножин, отриманих в експериментах 31 – 54

Експеримент 31	Експеримент 32	Експеримент 33	Експеримент 34
Експеримент 35	Експеримент 36	Експеримент 37	Експеримент 38
Експеримент 39	Експеримент 40	Експеримент 41	Експеримент 42
Експеримент 43	Експеримент 44	Експеримент 45	Експеримент 46
Експеримент 47	Експеримент 48	Експеримент 49	Експеримент 50
Експеримент 51	Експеримент 52	Експеримент 53	Експеримент 54

Наведені дані, а також результати ряду подібних обчислювальних експериментів свідчать про те, що спочатку з появою кожного додаткового центру першого етапу значення функціоналу поступово зменшується. Це, очевидно, має місце за рахунок того, що вартість доставки зібраного з ділянок ресурсу до відповідних центрів зменшується, хоча й може зростати вартість перевезень продукту від підприємств першого етапу до підприємств другого етапу. Так, наприклад, було виявлено, що при $M=2$, оптимальна (за значенням функціоналу задачі) кількість центрів першого етапу набуває значення з проміжку [4,8]; при $M=5$ такий проміжок [6,9].

Також можна помітити на рис. 4.5, що згодом зростання кількості зон, на яких збирається ресурс, а відповідно, й підвищення вартості перевезення продукту від центрів першого до центрів другого етапу, компенсується кількістю самого продукту, що має бути перевезений. Неоднозначний характер зміни функціоналу при цьому пояснюється вибором місця розташування чергового центру. Але ж, оскільки загальна кількість ресурсу, розподіленого на заданій множині, не змінюється, то все менша й менша кількість продукту має бути зібрана кожним центром першого етапу і доставлена до центрів другого етапу. Тому не має сенсу при формулюванні задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів першого етапу вимагати розміщення великої кількості останніх.

З іншого боку, при розв'язанні задач ОРМДЗ з достатньо великим значенням N , може виявитися така ситуація, що деякі з центрів набуватимуть статус фіктивних, тобто цим центрам не буде

ставитися у відповідність ніякої зони, які вони можуть обслуговувати. Саме так відбувається в експериментах № 19 – 30, 40 – 54 (див. табл. 4.5, 4.6).

Отже, за допомогою розробленого математичного і алгоритмічного апарату для задачі ОРМДЗ вдається не тільки отримати оптимальне розбиття множини і оптимальні зв'язки між центрами першого і другого етапів, а й відповісти на питання: якою має бути мінімальна кількість центрів першого етапу, щоб вони з мінімальними сумарними затратами на доставку ресурсу і продукту могли обслуговувати і свої зони впливу, і споживачів, при фіксованій кількості центрів другого етапу.

4.1.3. Аналіз впливу кількості центрів другого етапу на значення функціоналу, оптимальне розбиття і час розв'язання задачі

Результати розв'язання за допомогою розробленого алгоритму 2 модельних задач ОРМДЗ з фіксованими центрами при змінній кількості центрів другого етапу свідчать про те, що збільшення останніх при незмінній решті вихідних даних не впливає суттєво на час роботи алгоритму. Цікавими виявляються лише границі між підмножинами в оптимальному розбитті заданої множини, а також розподіл продукту між центрами першого та другого етапів. Наведемо тут оптимальні розв'язки задач ОРМДЗ, отриманих у ході обчислювальних експериментів.

Експеримент 55. Початкові дані:

- $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; розмір сітки дискретизації:
 $101 \times 101 = 10201$;
- $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$; $N = 2$ і $M = 6$;
- $\tau_1^I = (0, 89; 0, 12)$, $\tau_2^I = (0, 43; 0, 23)$;
- $\tau_1^{II} = (0, 55; 0, 19)$, $\tau_2^{II} = (0, 44; 0, 31)$, $\tau_3^{II} = (0, 68; 0, 68)$,
- $\tau_4^{II} = (0, 48; 0, 46)$, $\tau_5^{II} = (0, 03; 0, 25)$, $\tau_6^{II} = (0, 27; 0, 72)$;
- $b^{II} = (0, 15; 0, 15; 0, 15; 0, 15; 0, 15; 0, 25)$;
- функції витрат – як і в попередніх дослідженнях.

Оптимальне розбиття множини Ω представлено на рис.4.3. Обсяги перевезень та потужності підприємств першого етапу представлені в таблиці 4.8. Значення цільового функціоналу 1,2218.

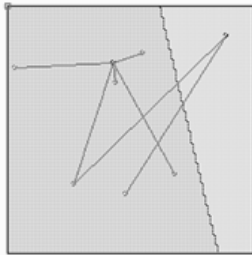


Рис. 4.3. Оптимальне розбиття множини Ω і схема перевезень в експерименті 55

Табл. 4.8 - Обсяги перевезень між центрами першого та другого етапу в задачі ОРМДЗ (експеримент 55)

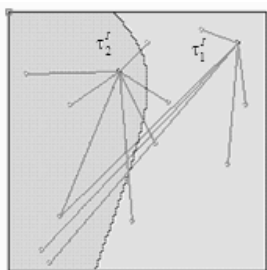
	τ_1^{II}	τ_2^{II}	τ_3^{II}	τ_4^{II}	τ_5^{II}	τ_6^{II}	b^I
τ_1^I	0	0	0	0,1515	0	0,123	0,2745
τ_2^I	0,1515	0,1515	0,1515	0	0,1515	0,1194	0,7254

Експеримент 56. Початкові дані:

- $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; розмір сітки дискретизації:
 $101 \times 101 = 10201$;
- $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$; $N = 2$ і $M = 12$;
- центри першого етапу: а) $\tau_1^I = (0, 89; 0, 12)$, $\tau_2^I = (0, 43; 0, 23)$; б) $\tau_1^I = (0, 36; 0, 59)$, $\tau_2^I = (0, 7; 0, 57)$;
- координати центрів τ_j^{II} , $j = \overline{1, 12}$ відповідають зображенням на рис. 4.4 а) та б) відповідно; $b_j^{II} = 0,076$, $j = \overline{1, 11}$, $b_{12}^{II} = 0,166$;
- функції витрат – як і в попередніх дослідженнях.

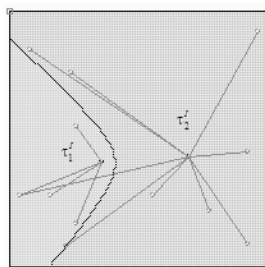
Оптимальні розв'язки задачі ОРМДЗ у випадках а) та б) отримані вже на другій ітерації. Схема додаткових зв'язків між центрами першого та другого етапів, а також саме розбиття множини представлені на рис. 4.4. Там же наведені оптимальні значення функціоналу і двоїстих змінних ψ_1, ψ_2 , які впливають на форму границь між підмножинами. Обсяги перевезень та потужності підприємств першого етапу представлені в таблицях 4.9 та 4.10 відповідно.

Вплив значень двоїстих змінних на форму границь добре простежується на рис. 4.4. На рисунку 4.4 а) границя між підмножинами Ω_1, Ω_2 вигинається в напрямку від τ_1^I до τ_2^I , а на рис. 4.4 б) в протилежному напрямку. Відповідно, значення змінної ψ_1 менше та більше за нуль.



а) $I = 1, 285;$

$\psi_1 = -0,265; \psi_2 = 0,0$



б) $I = 1,246;$

$\psi_1 = 0,236; \psi_2 = 0,0$

Рис. 4.4. Оптимальне розбиття множини Ω і схема перевезень в експерименті 56

Табл. 4.9 - Обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів в задачі ОРМДЗ (експеримент 56, а)

	τ_1''	τ_2''	τ_3''	τ_4''	τ_5''	τ_6''	τ_7''	τ_8''	τ_9''	τ_{10}''	τ_{11}''	τ_{12}''	b_i'
τ_1'	0,076	0	0	0,076	0	0	0	0,076	0	0,076	0,075	0,167	0,544
τ_2'	0	0,076	0,076	0	0,076	0,076	0,076	0	0,076	0	0,001	0	0,455

Табл. 4.10 - Обсяги перевезень між центрами першого та другого етапів в задачі ОРМДЗ (експеримент 56, б)

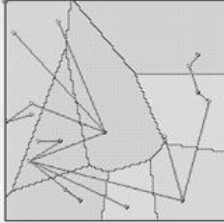
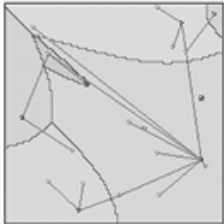
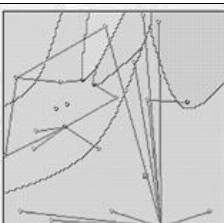
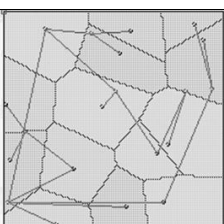
	τ_1''	τ_2''	τ_3''	τ_4''	τ_5''	τ_6''	τ_7''	τ_8''	τ_9''	τ_{10}''	τ_{11}''	τ_{12}''	b_i'
τ_1'	0	0,076	0,076	0	0	0	0	0,076	0,028	0	0	0	0,235
τ_2'	0,076	0	0	0,076	0,076	0,076	0,076	0,012	0	0,047	0,076	0,167	0,745

Результати інших обчислювальних експериментів з розв'язання задачі ОРМДЗ з фіксованими центрами з достатньо великою кількістю центрів другого етапу наведемо без детального опису в таблиці 4.11.

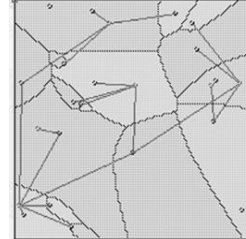
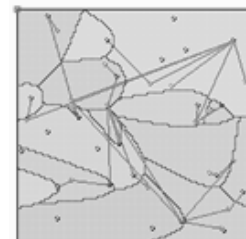
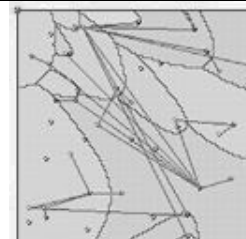
Табл. 4.11 - Оптимальні розв'язки, отримані в результаті обчислювальних експериментів 57-67)

№ експерименту Вихідні данні	Розбиття	Значення функціоналу	Кількість пасивних центрів I етапу
1	2	3	4
№57 $N = 4, M = 13;$ $b_j'' = 0.07, j = \overline{1,12}$ $b_{13}'' = 0.06$		0,911	0
№58 $N = 5, M = 13;$ $b_j'' = 0.07, j = \overline{1,12}$ $b_{13}'' = 0.06$		1,185	0
№59 $N = 5, M = 15;$ $b_j'' = 0.06, j = \overline{1,14}$ $b_{10}'' = 0.16$		1,1917	1
№60 $N = 6, M = 13;$ $b_j'' = 0.07, j = \overline{1,12}$ $b_{13}'' = 0.06$		0,9123	3

Продовження таблиці 4.11

1	2	3	4
№61 $N = 8, M = 10;$ $b_j'' = 0.084, j = \overline{1,9}$ $b_{10}'' = 0.244$		0,901	0
№62 $N = 8, M = 13;$ $b_j'' = 0.07, j = \overline{1,12}$ $b_{13}'' = 0.06$		0,9574	2
№63 $N = 9, M = 15;$ $b_j'' = 0.06, j = \overline{1,14}$ $b_{10}'' = 0.16$		0,9985	3
№64 $N = 14, M = 6;$ $b_j'' = 0.15, j = \overline{1,5}$ $b_{10}'' = 0.25$		1,0436	0

Продовження таблиці 4.11

1	2	3	4
№65 $N = 18, M = 6;$ $b_j'' = 0.15, j = \overline{1,5}$ $b_{10}'' = 0.25$		0,9456	2
№66 $N = 25, M = 15;$ $b_j'' = 0.06, j = \overline{1,14}$ $b_{10}'' = 0.16$		1,0219	9
№67 $N = 30, M = 15;$ $b_j'' = 0.06, j = \overline{1,14}$ $b_{10}'' = 0.16$		1,056	12

Наявність значної кількості пасивних центрів першого етапу в оптимальних розв'язках задач ОРМДЗ з великою кількістю N свідчить про те що, не варто збільшувати кількість центрів першого етапу навіть при достатньо великій кількості підприємств другого етапу. На структуру розбиття і форми границь між підмножинами суттєво впливають координати розміщення центрів першого і другого етапів, а також обсяги потреб підприємств другого етапу.

Результати обчислювальних експериментів з розв'язання інших модельних двоетапних задач оптимального розподілення неперервно розповсюдженого ресурсу, що проводилися з метою дослідження форми границь між зонами впливу центрів першого етапу, а також їх аналіз, наведено в додатку Б.

4.2 Експериментальне дослідження роботи алгоритму розв'язання двоетапних задач оптимального розбиття множин з розміщенням центрів при наявності додаткових зв'язків

4.2.1 Аналіз результатів обчислювальних експериментів з розв'язання задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів першого етапу

Наведемо декілька прикладів розв'язання задачі оптимального розбиття множини з додатковими зв'язками і з розташуванням центрів першого етапу, які свідчать про коректність роботи алгоритму 2. Зазначимо, що врахування обмежень на координати центрів, що розміщуються, здійснювалося за допомогою функції зовнішнього штрафу вигляду:

$$P(\tau_i^l) = \begin{cases} 0, & \tau_i^l \in \Omega, \\ 10^{15}, & \tau_i^l \notin \Omega, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}$$

Тобто при чисельній реалізації алгоритму 2 замість методу проекції градієнта для розв'язання задачі (3.20) було застосовано метод штрафних функцій.

Задача 1 (експеримент 68). Вихідні дані:

$$- \Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$- \rho(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega; \quad N = 2; \quad M = 2;$$

$$- \tau_1^{\prime\prime} = (0, 25; 0, 5); \quad b^{\prime\prime} = (0, 5; 0, 5);$$

$$- \text{функції витрат: } c_i^l = \sqrt{(x - \tau_{1i}^l)^2 + (y - \tau_{2i}^l)^2}; \quad i = \overline{1, N},$$

$$c_{ij}^{\prime\prime}(\tau_i^l, \tau_j^{\prime\prime}) = \sqrt{(\tau_{1i}^l - \tau_{1j}^{\prime\prime})^2 + (\tau_{2i}^l - \tau_{2j}^{\prime\prime})^2}; \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M};$$

В якості початкового наближення центрів першого етапу були обрані наступні точки: $\tau_1^l = (0, 1; 0, 3)$, $\tau_2^l = (0, 8; 0, 6)$.

На 58-й ітерації г- алгоритму отримані наступні значення вихідних параметрів:

$$- \text{координати центрів першого етапу } \tau_1^{l*} = (0, 2632; 0, 4975), \\ \tau_2^{l*} = (0, 7517; 0, 5015);$$

$$- \text{оптимальні об'єми перевезень між центрами першого та другого етапів; } v_{11}^* = 0, 5; \quad v_{12}^* = 0, 0168; \quad v_{22}^* = 0, 4832;$$

$$- \text{Значення цільового функціоналу - } I = 0, 3039.$$

Оптимальне розбиття і розміщення центрів наведено на рис. 4.5.

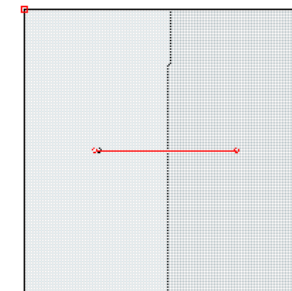


Рис. 4.5. Оптимальне розбиття множини в задачі 1

Отже, при розв'язанні двоетапної задачі 1 ОРМДЗ, в якій центри другого етапу збігаються з (0,25;0,5) та (0,75;0,5), центри першого етапу були розміщені майже в цих самих точках. Оптимальне розбиття одиничного квадрату отримано у вигляді діаграми Діріхле-Вороного для цих точок. У такому випадку другий доданок цільового функціоналу дорівнює майже нулю, а перший доданок співпадає оптимумом задачі оптимального розбиття одиничного квадрату на дві підмножини з розташуванням центрів.

Зазначимо, що задача ОРМ одиничного квадрату з E_2 на N підмножин з відшуканням координат центрів підмножин у випадку, коли $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$, а функція $c_i^l((x, y), \tau_i^l)$ – евклідова відстань, детально досліджувалась в [60]. Тут доведено, що при $N=2$ названі вище точки поряд з парою (0,5;0,25) та (0,5;0,75) і відповідні діаграми Діріхле-Вороного складають глобальні оптимальні розв'язки задачі ОРМ одиничного квадрату з розміщенням центрів підмножин. Значення цільового функціоналу при цьому дорівнює 0,2966.

Як можна помітити значення цільового функціоналу отриманого в результаті розв'язку задачі 1 відрізняється від глобального мінімуму критерію якості розбиття задачі ОРМ на величину $\delta=0,3039-0,2966=0,0073$. Отже, можна зробити висновок про глобальність (з певною точністю) знайденого оптимального розв'язку задачі ОРМДЗ і коректність роботи алгоритму 2.

Слід зауважити, що обчислювальна ефективність алгоритмів 2 і 3, складовою частиною яких є r - алгоритм Шора, в першу чергу залежить від коефіцієнту розтягнення простору α і параметрів

адаптивного регулювання кроку q_1, q_2, n_h з $r(\alpha)$ -алгоритму. Згідно [73], параметри необхідно обирати таким чином, щоб адаптивний спосіб регулювання крокового множника дозволяв би збільшувати точність пошуку мінімуму функції за напрямом узагальненого градієнту у процесі обчислень і при цьому не робив би великої кількості кроків за вказаним напрямком. При реалізації алгоритму 2 розв'язання задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів першого етапу були задані наступні значення вищеназаних параметрів $r(\alpha)$ -алгоритму: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, де q_1 коефіцієнт зменшення кроку, якщо умова спуску за напрямом виконується за один крок, q_2 – коефіцієнт збільшення кроку, при цьому натуральне число $n_h (n_h > 1)$ задає кількість кроків одновимірного спуску, після яких крок буде збільшений у q_2 разів.

Наведемо інші приклади розв'язання задачі ОРМДЗ з розміщенням центрів першого етапу.

Задача 2 (експерименти 69-71). Вихідні дані:

$$- \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$- \rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega; N = 2; M = 2;$$

$$- \tau_1'' = (0,19;0,6), \tau_2'' = (0,21;0,26); b'' = (0,5;0,5);$$

$$- \text{функції витрат: } c_i^l((x, y), \tau_i^l) = (x - \tau_{1i}^l)^2 + (y - \tau_{2i}^l)^2, i = \overline{1, N},$$

$$c_{ij}''(\tau_i^l, \tau_j'') = (\tau_{1i}^l - \tau_{1j}'')^2 + (\tau_{2i}^l - \tau_{2j}'')^2, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M};$$

– центри другого етапу і їх потужності:

$$\text{а) } \tau_1'' = (0,19;0,6), \tau_2'' = (0,21;0,26); b'' = (0,5;0,5);$$

$$\text{б) } \tau_1'' = (0,38;0,73), \tau_2'' = (0,23;0,3); b'' = (0,5;0,5);$$

в) $\tau_1'' = (0,48;0,41)$, $\tau_2'' = (0,28;0,89)$; $b'' = (0,21;0,79)$.

На рис. 4.6 наведені оптимальні розміщення двох центрів першого етапу і відповідні оптимальні розбиття множини Ω , які отримані на 39 і 33 ітераціях $r(\alpha)$ - алгоритму відповідно для задач а) і б). При цьому були задані наступні параметри алгоритму: розмір сітки дискретизації: $101 \times 101 = 10201$; початкові координати $\tau_1^I = (0,1;0,0)$, $\tau_2^I = (0,7;0,9)$; точність виконання критерію закінчення ітераційного процесу, який включає пошук оптимального розбиття на кожній ітерації $r(\alpha)$ - алгоритму, $\varepsilon_1 = 0.001$; точність виконання критерію виходу із самого $r(\alpha)$ - алгоритму $\varepsilon = 10^{-6}$.

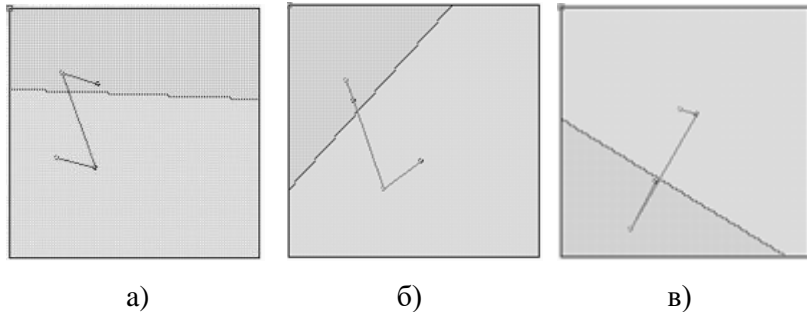


Рис. 4.6. Оптимальне розбиття множини в задачі 2

– оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. 4.12);

– потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

а) $b_1^I = 0,654$; $b_2^I = 0,336$;

б) $b_1^I = 0,2915$; $b_2^I = 0,7085$;

в) $b_1^I = 0,7366$; $b_2^I = 0,2433$;

Табл. 4.12 - Обсяги перевезень між пунктами першого і другого етапів, що знайдені у ході експериментів 1, а, б, в

Обсяги перевезень	Експеримент		
	№ 1,а	№ 1,б	№ 1,в
v_{11}	0,5	0,2915	0,21
v_{12}	0,144	0	0,526
v_{21}	0	0,2085	0
v_{22}	0,335	0,5	0,243

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (3.12): а) $I = 0,399$; б) $I = 0,436$; в) $I = 0,647$.

Задача 3 (експеримент 72). Вихідні дані:

– $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

– $\rho(x, y) = 1 \forall (x, y) \in \Omega$; $N = 3$; $M = 4$;

– $\tau_1'' = (0,67;0,31)$, $\tau_2'' = (0,15;0,43)$, $\tau_3'' = (0,06;0,67)$, $\tau_4'' = (0,83;0,37)$;

$b'' = (0,2;0,22;0,2;0,38)$;

– функції витрат такі самі, як в задачі 2;

– початкові наближення центрів першого етапу: $\tau_1^{I(0)} = (0,18;0,75)$,

$\tau_2^{I(0)} = (0,91;0,08)$, $\tau_3^{I(0)} = (0,62;0,03)$;

– початкове розбиття і розташування центрів на множині Ω , наведені на рис. 4.7 (а).

Оптимальний розв'язок знайдено на 48-й ітерації. На рис. 4.7 (б) наведено оптимальні розміщення центрів першого етапу і відповідні оптимальні розбиття множини Ω .

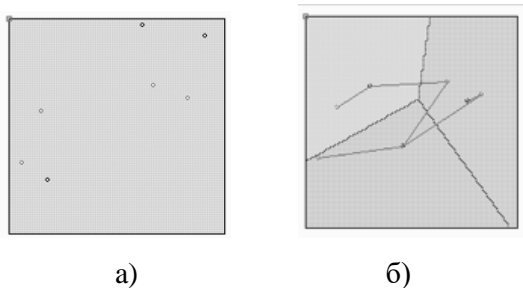


Рис. 4.7. Початкове і оптимальне розбиття множини в задачі 3

- оптимальні обсяги перевезень: $v_{11} = 0,0903$, $v_{12} = 0,22$, $v_{24} = 0,3187$, $v_{31} = 0,1097$, $v_{33} = 0,2$, $v_{34} = 0,0613$;
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно: $b_1^I = 0,3103$; $b_2^I = 0,3187$; $b_3^I = 0,37$;
- мінімальне значення цільового функціоналу (формула (3.12)): $I = 0,8373$.

Інші приклади розбиття одиничного квадрату на N підмножин, пов'язаних з центрами першого етапу, у кожного з яких в свою чергу можливі два додаткових зв'язки з центрами другого етапу, наведені в додатку Г.

Особливістю задачі в експерименті 73 є розташування центрів другого етапу у точках $(0,25; 0,5)$ та $(0,75; 0,5)$ що мають однакову потужність $0,5$, як і в задачі 1. В оптимальному розв'язку по два центри першого етапу розміщенні симетрично відносно відповідних центрів другого етапу. на відмінно від оптимального розв'язку задачі ОРМ з розміщенням центрів підмножин [60] (див. рис.4.8), центри, що розташовуються, зміщені в напрямку найближчого центру другого етапу.

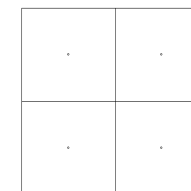


Рис. 4.8. Оптимальне розташування центрів і відповідне розбиття

Результати решти експериментів, наведених в додатку В, свідчать про те, що в оптимальних розв'язках задач ОРМДЗ з розміщенням центрів першого етапу, останні, як правило, розміщуються групами поблизу центрів другого етапу. При цьому, частіше за все, центри другого етапу виявляються центрами тяжіння багатокутника, який є опуклою оболонкою точок, що відповідають найближчим центрам першого етапу. Іноді, одному з центрів другого етапу відповідають 2-3 центри першого етапу. розбиття множини, навколо іншого центру другого етапу при цьому подрібнюється.

Оптимальні компоненти вектору двоїстих змінних $\psi_i =$ в усіх наведених експериментах дорівнюють нулю, в наслідок чого оптимальним розбиттям в задачах ОРМДЗ з розміщенням центрів виявляється класична діаграма Діріхле-Вороного, побудована для розташованих точок. Границі між підмножинами в оптимальному розбитті є прямими лініями, на відміну від оптимального розбиття в задачах ОРМДЗ з фіксованими центрами підмножин, де границі між підмножинами – гіперболи.

В таблиці 4.13 наведені результати експериментів, в яких кількість центрів другого етапу змінюється від 3 до 9. В

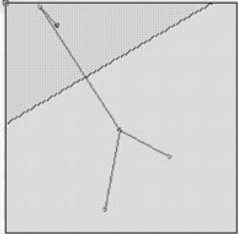
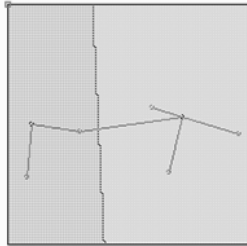

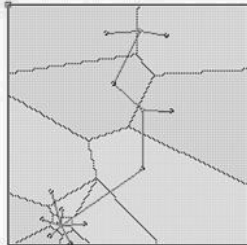
оптимальному розбитті, так само як і в попередньому випадку, можна відстежити діаграми Діріхле-Вороного, точками-генераторами яких є розташовані центри. Останні, як правило, розташовуються групами в околі центрів другого етапу. Центри другого етапу, в свою чергу виступають при цьому центрами тяжіння многокутника, описаного навколо розташованих поблизу центрів.

В усіх наведених експериментах, виконується з точністю до 0,01 обмеження рівності. Така похибка обумовлена використанням кубатурної формули лівих прямокутників для обчислення потужностей центрів першого етапу.

4.2.2 Експериментальне підтвердження доцільності моделювання двоетапних задач розміщення – розподілу з неперервно-розповсюдженим ресурсом у вигляді неперервних задач ОРМДЗ

Наведемо приклад, який показує наскільки важливо для отримання синергетичного ефекту формулювати задачу оптимізації двоетапних транспортно-виробничих процесів з неперервно-розподіленим ресурсом у вигляді задач ОРМДЗ. Уявімо ситуацію, коли на тому ж одиничному квадраті рівномірно розподілений ресурс. Необхідно розбити квадрат на 10 зон, розмістити відповідні центри першого етапу і визначити їх можливі зв'язки з двома центрами другого етапу (причому $b_j'' = 0.5, j=1,2$) так, щоб мінімізувати сумарні витрати на доставку ресурсу до центрів першого етапу і

Табл. 4.13 - Оптимальні розв'язки, отримані в результаті обчислювальних експериментів 83-86

№ експерименту Вихідні данні	Оптимальне розбиття	Оптимальне значення функціоналу
№ 83 $N = 2, M = 3;$ $b'' = (0,25;0.27;0.48)$		$I=0,7227$
№ 84 $N = 2, M = 5;$ $b_1'' = 0,18; b_2'' = 0.17;$ $b_3'' = 0,19;$ $b_4'' = 0,18; b_5'' = 0.27$		$I=0,835$
№ 85 $N = 4, M = 9;$ $b_1'' = 0,1; b_2'' = 0.12;$ $b_3'' = 0,1; b_4'' = 0.12;$ $b_5'' = 0,09; b_6'' = 0.1;$ $b_7'' = 0,1; b_8'' = 0.11;$ $b_9'' = 0,153$		$I=0.93453$
№ 86 $N = 12, M = 3;$ $b'' = (0,31;0.32;0.37)$		$I=0,6517$

витрати на подальше транспортування ресурсу до центрів другого етапу. Розташування центрів другого етапу див. на рис. 4.9 (а). На цьому рисунку представлено також оптимальне розташування центрів першого етапу, відповідні їм зони обслуговування, а також вказані додаткові зв'язки між підприємствами першого і другого етапів. Досягнуте при цьому таке значення цільового функціоналу: $I = 0,33069$. Якщо ж вирішувати послідовно – спочатку задачу ОРМ з розміщенням центрів підмножин з критерієм, що дорівнює першому доданку в функціоналі (2.1), а потім, при отриманих координатах центрів першого етапу, звичайну задачу транспортного типу (критерій якості – другий доданок в (2.1)), то можна отримати оптимальне розміщення центрів першого етапу і відповідні їм зони, представлені на рис. 4.9 (б).

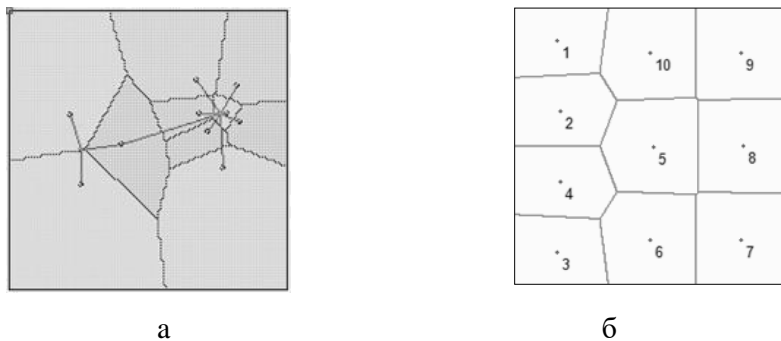


Рис 4.9. Оптимальне розбиття множини Ω і розміщення центрів в задачі:

- а – ОРМ з додатковими зв'язками;
- б – ОРМ з розташуванням центрів підмножин

Значення цільових функціоналів вказаних двох задач: $I_1 = 0,1222$ и $I_2 = 0,300964$, що при додаванні дорівнює $I_1 + I_2 = 0,423164$. І, отже, вигреш в значенні функціоналу при моделюванні двоетапного транспортно-виробничого процесу у вигляді неперервної задачі ОРМДЗ очевидний.

4.3 Експериментальне дослідження обчислювальної складності алгоритму розв'язання задачі ОРМДЗ за рахунок дискретизації множини

Неперервність моделей розглянутих в роботі задач визначається, по-перше, неперервно-розподіленням на заданій множині ресурсом; по-друге, можливістю розташування центрів першого етапу виробництва в будь-якій точці заданої континуальної множини.

Розглянемо дискретний варіант задачі ОРМДЗ, в якій ресурс розподілений на множині Ω в ізольованих точках $\omega, |\omega| = K, \omega \in \Omega$. Крім того, будемо вважати, що існує лише скінчена множина точок, в яких можна розмістити центри першого етапу. Позначимо множину цих точок через W . З кожним постачальником ресурсу будемо пов'язувати індекс $k, k = \overline{1, K}$, з центром першого етапу – індекс $i, i = \overline{1, I}$, з центром другого етапу – індекс $j, j = \overline{1, M}$. Для математичного формулювання задачі введемо ще такі позначення:

N – кількість центрів першого етапу, які мають бути розміщені;

c_{ki} – витрати на транспортування ресурсу від постачальника k до пункту τ_i^I ;

c_{ij} – витрати на транспортування продукції від пункту τ_i^I до τ_j^II ;

b_j – попит в пункті споживання τ_j^II ;

ρ_k – кількість ресурсу в точці k ;

$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в пункті } i \text{ розміщується підприємство } I\text{-го етапу,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$

v_{ij} – кількість продукту, перевезеного від пункту τ_i^I до τ_j^II ;

y_{ki} – кількість ресурсу, перевезеного від постачальника k до пункту τ_i^I .

Тоді математична модель матиме наступний вигляд:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I c_{ki} y_{ki} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^M c_{ij} v_{ij} \rightarrow \min \quad (4.1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^I x_i = N, \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^K \rho_k y_{ki} = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad \forall i = \overline{1, I} \quad (4.3)$$

$$0 \leq v_{ij} \leq b_j x_i, \quad \forall i = \overline{1, I}, j = \overline{1, M}, \quad (4.4)$$

$$0 \leq y_{ki} \leq \rho_k x_i, \quad \forall i = \overline{1, I}, k = \overline{1, K} \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^I v_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (4.6)$$

Тут обмеження (4.3) є аналогом умови (2.17), (4.4) – означає, що перевозка v_{ij} може бути ненульовою лише у випадку, коли відповідна

змінна $x_i = 1$, тобто в i -й точці розташований центр першого етапу, а обмеження (4.5) відповідає тому, що k -й постачальник сировини може направити ресурс в τ_i^I лише у випадку, якщо в i -й точці розташований центр першого етапу.

Задача (4.1) – (4.6) є задачею частково-цілочисельного програмування. Для її розв'язання може бути застосований, наприклад, метод гілок та меж, метод відсікань або відомі евристичні алгоритми. На практиці такі задачі, зазвичай, розв'язуються з використанням промислових пакетів оптимізації IBM ILOG CPLEX, GUROBI Optimizer, MOSEK та ін.

Порівнювати результати розв'язання задачі ОРМДЗ у дискретній та неперервній постановках має сенс лише тоді, коли кількість постачальників ресурсу і місць розташування центрів першого етапу достатньо велика.

Оцінимо розмірність сформульованої задачі (4.1) – (4.6). Кількість невідомих змінних в цій задачі дорівнює $I(M + K + 1)$, кількість обмежень визначається виразом $1 + I + I \cdot M + I \cdot K + M = (1 + M) \cdot (I + M) + I \cdot K$.

У випадку, коли кількість постачальників ресурсу велика, наприклад порядку кількості точок дискретизації множини Ω в представлених вище алгоритмах, тобто $K \sim 10000$, а $I \sim 50$, $M \sim 20$, кількість змінних і обмежень в сформульованій задачі зростає до 501050 та 501470 відповідно. Для таких наборів даних, отримання точного розв'язку за допомогою навіть таких потужних розв'язувачів, як IBM ILOG CPLEX або LpSolve, ускладнюється через можливість вичерпання віртуальної пам'яті.

На рис. 4.10 представлені результати розв'язання за допомогою пакету прикладних програм Matlab 6.0 задачі ОРМДЗ, в якій ресурс неперервно розподілений на заданій множині $[0;1] \times [0;1]$, а кількість місць можливого розміщення $N=15$ центрів першого етапу – $K=50$. Задача розв'язувалась за допомогою генетичного алгоритму, з використанням алгоритму 2 розв'язання задачі ОРМДЗ з фіксованими центрами. При цьому були задані такі параметри генетичного алгоритму: кількість поколінь – 50, розмір популяції – 100 особин, ймовірність мутації – 0,4. Значення цільового функціоналу за перерахованих параметрів $I=1.1004$. На рисунку 4.10 (а) потенційні центри позначені зірочками, оптимальні з них обведені квадратами, центри другого етапу позначені квадратами з вписаними колами. Фактичні зв'язки між центрами першого та другого етапів відображені відрізками, що поєднують відповідні центри. На рисунку 4.10 (б) представлені границі між підмножинами в оптимальному розбитті заданої множини. Як і при розв'язанні неперервної задачі ОРМДЗ з фіксованими центрами першого етапу, границі між підмножинами виявились гіперболами.

При розв'язанні неперервної задачі ОРМДЗ з розташуванням $N=15$ центрів першого етапу за допомогою алгоритму 3 було отримано оптимальне розбиття, наведене на рис. 4.11. За рахунок того, що шукані центри обиралися з будь-яких точок заданої континуальної множини, знайдений розв'язок з оптимальним значенням цільового функціоналу $I=0.5727$, що значно менший за наведений вище.

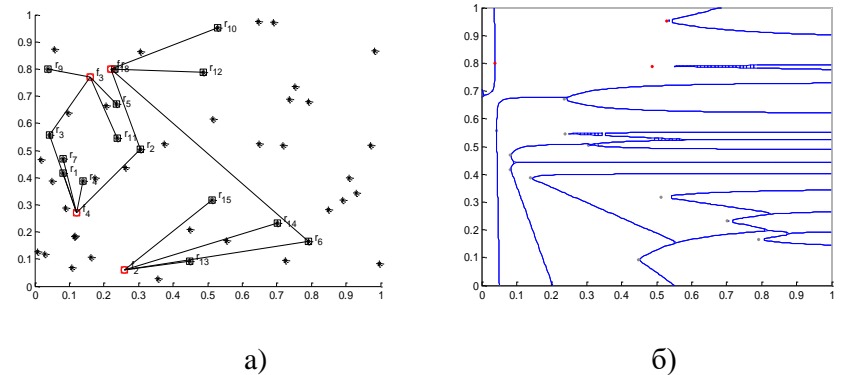


Рис. 4.10. Результати розв'язання задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів на дискретній множині точок

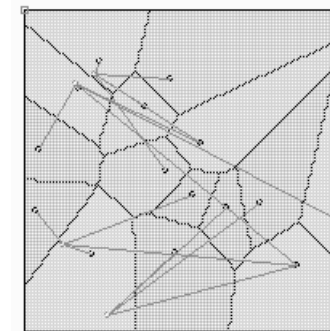


Рис. 4.11. Результати розв'язання задачі ОРМДЗ з розташуванням центрів на всій множині

Отже, формулювання задачі ОРМДЗ в неперервній постановці доцільно у випадку, коли постачальників ресурсу на заданій множині велика кількість. Така постановка надає змогу за допомогою методів функціонального аналізу та нескінченновимірної оптимізації

отримати для частини невідомих розв'язок задачі в аналітичному вигляді і, тим самим, зменшити розмірність задачі.

Зазначимо також, що у випадку невеликої кількості постачальників ресурсу порівнювати результати розв'язання задач (4.1) – (4.6) і (3.1) – (3.4), немає сенсу. А якщо в задачі ОРМДЗ залишити неперервно-розподілений ресурс, то, вочевидь, оптимальне значення функціоналу задачі (3.1) – (3.4) виявиться меншим за найменше значення функції (4.1) за рахунок розширення множини допустимих значень невідомих змінних.

Результати наведених і багатьох інших обчислювальних експериментів дозволяють зробити наступні висновки про оптимальні розв'язки задач ОРМДЗ з фіксованими центрами першого етапу і з їх розташуванням.

1. Якщо в задачі ОРМДЗ центри першого етапу є фіксованими, то оптимальними границями між підмножинами, що визначають оптимальне розбиття заданої множини, виявляються гіперболи. Цей факт повністю узгоджений з аналітичним виглядом границь між підмножинами, що складають оптимального розбиття, отриманими у розділі 2 (наслідок 1 з теореми 2.6) і відповідає наведеному в [60] теоретичним обґрунтуванням форм границь між підмножинами, що складають оптимальні розбиття в задачах ОРМ з обмеженнями у формі рівностей і нерівностей.

2. При розв'язанні задач ОРМДЗ із розташуванням центрів першого етапу оптимальне розбиття, як правило, виявляється діаграмою Діріхле-Вороного.

3. Якщо в задачах ОРМДЗ з фіксованими центрами кількість центрів другого етапу є значно меншим за число центрів першого етапу, то зони впливу деяких із останніх можуть виявитися порожніми. Отже, при розв'язуванні задач ОРМДЗ можна отримати відповідь на питання про раціональну кількість центрів першого етапу, яких буде достатньо для того, щоб зібрати неперервно розподілений ресурс з відповідних ділянок і з мінімальними витратами перевезти перероблений продукт до центрів другого етапу.

Запропонований алгоритм узагальнено на випадок розв'язання нескінченновимірної задачі розміщення на заданій території двоетапного виробництва, що збирає однорідну сировину, розподілену на цій території, з обмеженнями на потужності підприємства першого та другого етапів.

Отже, результати обчислювальних експериментів свідчать про коректність роботи алгоритмів. Достовірність отриманих результатів підтверджується їх відповідністю логічно аргументованим очікуванням, а також їх узгодженістю з теоретичними висновками.

РОЗДІЛ 5. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ І МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ – РОЗПОДІЛУ

5.1. Оптимізація двоетапного розподілу матеріального потоку на підприємствах паливно-енергетичного комплексу

Паливно-енергетичний комплекс (ПЕК) – найважливіша складова національної безпеки і економічного зростання України. У розвитку продуктивних сил країни він грає зростаючу роль, що обумовлено, з одного боку, загальносвітовими тенденціями, а з іншого – енергоємністю народного господарства і обмеженими енергоресурсами держави. Розвиток галузей ПЕК в значній мірі визначає динаміку, масштаби і техніко економічні показники промисловості і суспільного виробництва в цілому. Енергетика істотно впливає не тільки на розвиток, а й на територіальну організацію народного господарства.

Важливу роль в ПЕК України грає гірничодобувна галузь, оскільки запаси вугілля потенційно достатні для практично повного забезпечення потреб національного господарства країни. І, як зазначено в [137], використання розвіданих в даний час запасів вугілля, із залученням науково-обґрунтованих технологій на стадіях видобутку, збагачення, переробки та застосування палива і енергії забезпечить енергетичну безпеку країни без залучення зарубіжних енергоресурсів. А витяг потенційних вигод з освоєння паливних

ресурсів можливий лише за умови довгострокового, відповідального підходу до розвитку гірничодобувної галузі.

В умовах функціонування підземного гірничого підприємства матеріальні потоки являють собою (взаємопов'язану особливим чином) сукупність логістичних операцій, процесів, ланок і предметів починаючи з підготовки родовища до розробки, видобутку, переробки матеріальних ресурсів і закінчуючи споживанням (перерозподілом) готової продукції для досягнення загальних цілей логістичної системи. Транспортні системи шахт нерозривно пов'язані з потоковими процесами підприємств, що входять в систему виробничих об'єднань. У логістичних системах ПЕК склад фактично є проміжною ланкою між гірничодобувним підприємством і споживачами вугілля, і його розглядають як виробничий елемент [138].

В цілому, транспортно-логістичні системи паливно-енергетичного комплексу, в яких реалізуються процеси кругообігу матеріальних ресурсів, є досить ємними і складними, так як характеризуються великим числом господарюючих суб'єктів і посередників, розміщених в різних регіонах і на великих територіях, різним попитом різних споживачів, багатьма іншими факторами, що зумовлюють особливості організації процесу руху матеріальних ресурсів.

В [139] було розглянуто процес розміщення двоетапного виробництва з неперервно-розподіленим ресурсом, як приклад транспортно-логістичної системи паливно-енергетичного комплексу. Тут, структурними елементами були шахти (центри першого етапу),

які здійснюють видобуток вугілля, неперервно розподіленого на деякій території, і підприємства, які споживають або перероблюють вугілля (центри другого етапу). При цьому передбачалося, що за кожною шахтою закріплюється територія (зона) видобутку. Рух сировини в системі здійснюється спочатку в напрямку від кожної точки даної зони безпосередньо до місця його накопичення на відповідній шахті, а потім розсортований ресурс направляється в певних кількостях на підприємства, які виступають в якості споживачів – теплоелектроцентралі (ТЕЦ), збагачувальні фабрики, інші об'єкти. У зазначеній роботі були використані саме математичні моделі розміщення двоетапного виробництва з ресурсом, неперервно розподіленим на заданій області.

Вперше такі задачі та їх програми були розглянуті в [140]. Як вже зазначалося, неперервний характер їх обумовлений не тільки можливістю розміщення центрів першого етапу в будь-якій точці заданого континуальної множини, але і необхідністю розбиття самої множини або її частини на кілька зон. Нагадаємо, що метод вирішення сформульованих задач заснований на ідеї зведення їх до задач нескінченновимірною математичного програмування, для яких, в свою чергу, за допомогою застосування апарату теорії двоїстості оптимальний розв'язок вдається отримати в аналітичному вигляді. Хоча в отриманих розрахункових формулах і містяться параметри, що підлягають визначенню, для чого потрібно розв'язати допоміжну задачу оптимізації негладкою функції, вираш описаного підходу полягає в тому, що цільова функція результуючої оптимізаційної задачі залежить лише від кінцевого числа змінних, що

дозволяє застосовувати для її вирішення будь-які методи скінченномірної недиференційованої оптимізації [141, 142].

Як зазначалося в [139], актуальність таких наукових досліджень обумовлена створенням в даний час територіально-розподілених багаторівневих компаній, що включають в себе десятки великих підприємств і здійснюють повний цикл виробництва від видобутку сировини з його комплексним використанням, переробкою до транспортування кінцевим споживачам. При цьому корисно використовувати такий потужний інструментарій, як сучасні геоінформаційні системи та технології.

5.2 Можливості застосування геоінформаційних систем на підприємствах паливно-енергетичного комплексу

Загальний інтерес до використання геоінформаційних систем (ГІС) в різних областях практичної діяльності викликало в наслідок такої їхньої переваги перед іншими інформаційними системами, як можливість об'єднання різнорідних даних на основі географічної інформації. В даний час ГІС широко використовуються в містобудівній діяльності, природокористуванні та багатьох інших областях, надаючи користувачам можливості вирішення задач просторового аналізу, планування і прогнозування.

ГІС зберігає інформацію про реальний світ у вигляді набору тематичних шарів, які об'єднані на основі географічного положення. Цей простий, але дуже гнучкий підхід довів свою цінність при вирішенні різноманітних реальних задач. Електронні карти, як

правило, містять повну інформацію про протяжності доріг, їх зв'язність і умови переміщення по ним (швидкісні режими, заборонені з'їзди, наявність перевалочних пунктів і так далі).

Так, в [143] на основі багатоспектральних супутникових і супутніх даних про геологію, геоморфологію, топографію, населених пунктах і транспортних розв'язках, лісовий покрив, гідрологію та клімат розроблена платформа для вибору відповідного майданчика для розміщення ТЕС уздовж гірничодобувного району Індії. Цифрова інформація з супутника після попередньої обробки використовувалася для вивчення запасу пласта лігніту, а також аналізу використання землі та рослинного покриву. Інша тематична інформація, така як геологія, геоморфологія, межі вугільного басейну і інфраструктура, адміністративні кордони, канали і великі населені пункти були оцифровані з карт GSI і топографічних даних SOI відповідно. Всі тематичні векторні шари були об'єднані і представлені для накладення і виставлення пріоритетів. Вибір сайту для теплоелектростанції був заснований на чотирьох основних критеріях, таких як земля, вода, вугільна шахта і навколишнє середовище, і двох вторинних критеріях, а саме вартість і доступність місця розміщення. Розрахунок індексу придатності майданчиків виконаний з використанням інструменту просторового аналізу в ArcGIS 9.3.

Робота [144] присвячена питанням оптимального планування розподілених енергосистем на основі біомаси з метою задоволення потреб в електроенергії сільських регіонів Індії. Представлений тут підхід заснований на використанні інтелектуального аналізу даних і

сучасних ГІС спільно з алгоритмом кластеризації k-середніх, щоб розділити весь регіон на кластери і знайти системи генерування енергії біомаси. Оптимальне значення k визначається ітеративно з урахуванням відповідності попиту і пропозиції і вибирається таким чином, щоб мінімізувати загальні витрати на установку системи, витрати на транспортування біомаси, а також на передачу і розподіл. Результати кластеризації представлені на карті ГІС для регіону.

Модифікація класичної проблеми р-медіани, яка враховує просторовий розподіл ресурсів постачання і конкуренцію за них з боку потенційних об'єктів, запропонована в [145]. Тут представлено спрощене дослідження, що дозволяє оптимально визначити анаеробні реактори (AD) масштабу спільноти в районі в Іст-Мідлендс у Великобританії.

В [146] представлено нове розширення ГІС під назвою ArcMine, розроблене для підтримки планування меліорації в занедбаних районах видобутку. ArcMine надає чотири інструменти для:

- оцінки небезпеки осідання шахти;
- оцінки ерозії відходів шахти;
- аналізу шляхів потоку шахтної води на поверхні;
- визначення відповідних порід дерев для лісовідновлення шахти.

Просторова база даних, що включає топографічну і геологічну карти, карту знесення шахти і дані про свердловині. Про користь інформації про мінні небезпеки, що міститься в ArcMine для підтримки планування меліорації, свідчать факти його впровадження і використання при аналізі занедбаних районів видобутку в Кореї.

В [147] розглянуті сучасні, засновані на геоінформаційних технологіях, методи та їх застосування для моделювання та оцінки небезпек, пов'язаних з видобутком корисних копалин, включаючи забруднення ґрунту, ерозію ґрунту, забруднення води і збелісення.

Робота [148] присвячена пошуку оптимальних місць розташування вітроенергетичних установок на основі мультикритеріального ГІС-аналізу придатності територій щодо розміщення вказаних об'єктів.

З розповсюдженням пандемії коронавірусної хвороби (COVID-19) ГІС-технології почали використовувати також в сфері охорони здоров'я для визначення масштабів та впливу пандемії і прийняття відповідних управлінських рішень [149].

Ще одне дослідження [150], присвячене розміщення лікувальних засобів, базується не сумісному використанні геопросторових інформаційних систем (ГІС) та модифікацій генетичного алгоритму та рою часток.

В роботі [151] досліджено різноманітні геомаркетингові моделі для пошуку оптимального місця розташування компанії з роздрібною торгівлі. Авторами запропонована власна модель оптимального розміщення об'єктів бізнесу.

Цікаве дослідження з розміщення біоенергетичних заводів представлено в роботі [152]. Автори пропонують двоетапний підхід для визначення оптимальних зон розміщення об'єктів біоенергетики, який може знизити вартість доставки цукрового очерету до заводів в середньому на 31%.

Інші приклади використання ГІС в різних сферах життєдіяльності людини при вирішенні задач розміщення - розподілу, наведені в роботах [153 - 155, і ін.].

При вирішенні неперервних багатоетапних задач розміщення-розподілу сучасні ГІС-технології можуть бути використані для:

1) оцінки запасів корисних копалин на території;

2) обліку рельєфних та інших особливостей місцевості, на якій можуть бути розміщені нові промислові об'єкти;

3) визначення найкоротшого шляху і розрахунку його довжини між об'єктами і т.п.

У приведеній далі роботі будемо використовувати кроссплатформену геоінформаційну систему QGIS з відкритим кодом, яка надає можливість використовувати інструменти аналізу, вибірки, геопроектинга, управління геометрією і базами даних. QGIS включає в себе і функціонал пошуку найкоротшого шляху, необхідний при вирішенні практичних завдань оптимального розміщення-розподілу. Інформація про корисні копалини на території України, їх запаси, видобуток, а також про існуючі підприємства гірничодобувного комплексу країни міститься, наприклад, на інформаційному ресурсі «Мінеральні ресурси України» [155], який створений з метою ознайомлення користувачів з сучасним станом мінерально-сировинної бази України.

5.3. Реалізації алгоритмів розв'язання двоетапних задач розміщення – розподілу з використанням геоінформаційних систем і ресурсів

Наведемо результати роботи розробленого програмного продукту для вирішення модельних двоетапних задач ОРМДЗ. В якості території, на якій здійснюється збір ресурсу, розглянемо родовище кам'яного вугілля в Дніпропетровській області, дані про який надані інтерактивною картою [156] (рис. 5.1). Місця розташування підприємств другого етапу будемо задавати довільно на території області, не прив'язуючись до жодних конкретних об'єктів.

Підготовчий етап обробки електронних карт полягає у видаленні з малюнка карти місць, які не належать території регіону за допомогою графічного редактора. Введемо умовну (відносну) прямокутну систему координат, прийнявши за початок довільну точку так, щоб розглянута область повністю містилася в прямокутнику $\Pi = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 12; 0 \leq x_2 \leq 12\}$.

В якості множини Ω , що розбивається, виступає територія, яка відповідає на мапі самому родовищу. При чисельній реалізації алгоритмів проводиться дискретизація заданої області. Усі розрахунки було проведено при наступних значеннях похибки і параметрів $r(\alpha)$ - алгоритму: $\varepsilon_{1,2} = 0.0001$; $\alpha = 3$, $\beta = 0.9$, $\varepsilon = 0.0001$. У всіх наведених нижче задачах передбачається, що сумарні потреби в ресурсі для підприємств другого етапу становлять 1 умовну одиницю. А отже, відповідно до умови (3.31), сумарний обсяг

ресурсу, що збирається на Ω всіма підприємствами першого етапу, також дорівнює 1 ум. од. Для обчислення функцій $c_i^l(x, \tau_i)$ та $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$ застосовується метрика Мінковського $c(x, y) = \left((x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p \right)^{1/p}$ при конкретному завданні параметра p . Функція $\rho(x) = 1$ для всіх точок області Ω .

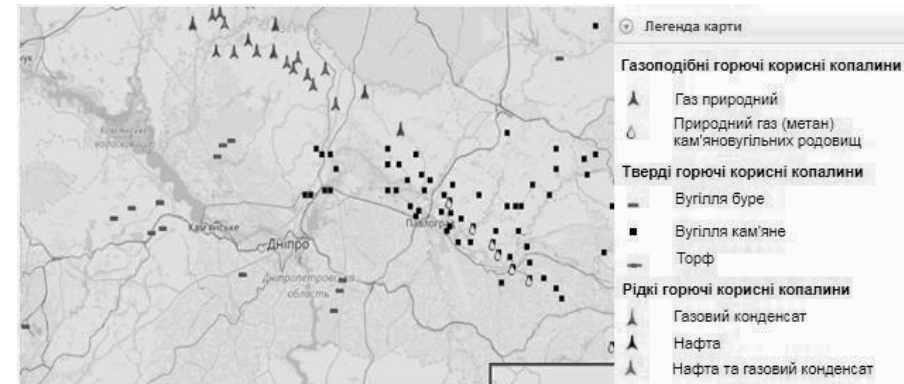


Рис. 5.1. Родовище кам'яного вугілля на території Дніпропетровської області

Задача 5.1. *Неперервна задача ОРМДЗ з фіксованими центрами.*

Вихідні дані: $N = 4, M = 7$; $\tau_1^I = (6.094; 3.52)$, $\tau_2^I = (9.35; 3.828)$, $\tau_3^I = (9.702; 5.082)$, $\tau_4^I = (7.832; 4.356)$; $\tau_1^{II} = (10.098; 4.202)$, $\tau_2^{II} = (8.91; 6.446)$, $\tau_3^{II} = (7.788; 2.574)$, $\tau_4^{II} = (4.466; 2.398)$, $\tau_5^{II} = (2.2; 4.422)$, $\tau_6^{II} = (2.464; 6.644)$, $\tau_7^{II} = (6.292; 5.39)$; $b^I = (0.174; 0.06; 0.127; 0.154; 0.158; 0.192; 0.131)$. На рис. 5.2 представлені оптимальні розбиття множини Ω і вказані зв'язки підприємств першого і другого етапів в двох варіантах:

а) параметр метрики Мінковського $p = 1$ і для функцій $c_i^I(x, \tau_i)$, і для функцій $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$, $a_i = 0, i = \overline{1, 4}$;

б) $p = 10$ для функцій $c_i^I(x, \tau_i)$, $p = 1$ для функцій $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$, $a = (0.5; 0.62; 0.36; 0.45)$.

Кількість зібраного ресурсу відповідними підприємствами першого етапу при цьому склало з точністю 0.001:

а) $b^I = (0.307; 0.219; 0.178; 0.295)$;

б) $b^I = (0.29; 0.194; 0.201; 0.313)$.

Як видно з рисунку, наявність зв'язку між підприємствами першого і другого етапів ідентичні, є невелика різниця лише в кількості перевезеного ресурсу, яка відображена в табл. 5.1.

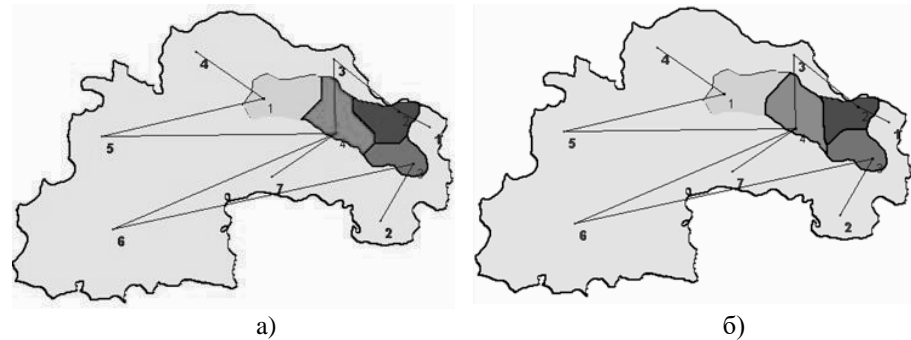


Рис. 5.2. Оптимальне розбиття множини і схема перевезень ресурсу між підприємствами першого і другого етапів

Неперервна задача ОРМДЗ з розміщенням центрів I етапу.
Дана задача вирішувалася при різних вихідних даних.

Таблиця 5.1. – Кількість перевезеного ресурсу між підприємствами двох етапів в задачі 5.1

Номер центру I етапу i	Номер центру II етапу j	Кількість перевезеного ресурсу v_{ij} в задачі	
		а	б
2	1	0.1748	0.1748
3	2	0.0606	0.0606
2	3	0.044	0.0199
4	3	0.083	0.1075
1	4	0.155	0.1548
1	5	0.152	0.1352
4	5	0.0062	0.0233
3	6	0.1177	0.1407
4	6	0.0746	0.0517
4	7	0.1314	0.1314

Задача 5.2. Вхідна інформація: $N = 4, M = 7$; $\tau_1^{II} = (8.8; 6.4)$, $\tau_2^{II} = (10.1; 4.36)$, $\tau_3^{II} = (5.5; 1.8)$, $\tau_4^{II} = (4.5; 2.8)$, $\tau_5^{II} = (2.6; 3.6)$, $\tau_6^{II} = (2.3; 5.6)$, $\tau_7^{II} = (4.95; 5.37)$; $b^{II} = (0.14; 0.173; 0.134; 0.16; 0.133; 0.076; 0.181)$; $a_i = 0, i = \overline{1, 4}$, $p^{I, II} = 2$. Початкове розташування центрів першого етапу показано на рис. 5.3,а. Тут же зображено відповідне йому розбиття множини і схема додаткових зв'язків як розв'язок ОРМДЗ з фіксованими центрами. Відзначимо, що значення цільового функціоналу задачі при таких даних дорівнює 4.4322 ум. од. При розв'язуванні задачі ОРМДЗ з розміщенням центрів отримані наступні компоненти оптимального розв'язку: $\tau_1^I = (7.93; 3.92)$, $\tau_2^I = (7.01; 3.45)$, $\tau_3^I = (9.13; 4.78)$, $\tau_4^I = (9.07; 4.0)$; $v_{11} = 0.14$, $v_{12} = 0.08$, $v_{22} = 0.09$, $v_{23} = 0.134$, $v_{24} = 0.127$, $v_{34} = 0.033$, $v_{35} = 0.136$, $v_{36} = 0.072$, $v_{46} = 0.004$, $v_{47} = 0.182$. Оптимальне розбиття і додаткові зв'язки

зображені на рис. 5.3,б. Оптимальне значення функціоналу 3.5011 ум. од., що значно менше в порівнянні з вказаною вище величиною.

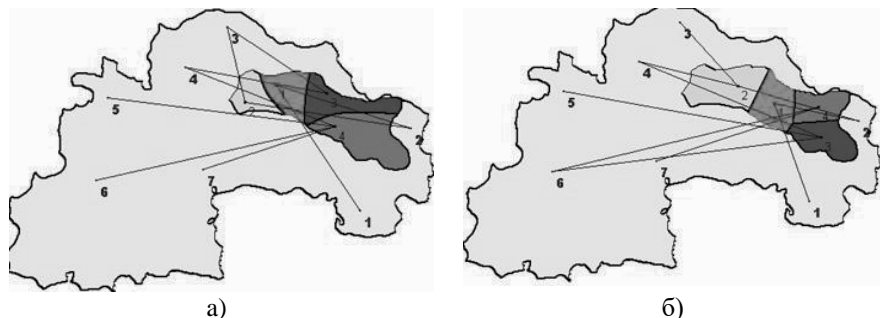


Рис. 5.3. Оптимальне розбиття множини і схема перевезень ресурсу між підприємствами першого і другого етапів в задачі 5.2

Задача 5.3. Вхідна інформація: $N = 6, M = 3; \tau_1^{\text{II}} = (4.246; 2.53), \tau_2^{\text{II}} = (1.54; 6.424), \tau_3^{\text{II}} = (8.7; 6.16); b^{\text{II}} = (0.337; 0.161; 0.502); a^{\text{I}} = (0.12, 0.15, 0.18, 0.1, 0.13, 0.17), a_i^{\text{II}} = 0, i = \overline{1,3}, p^{\text{I,II}} = 1.$ На рис. 5.4,а показано початкове розташування центрів першого етапу, а також відповідне розбиття множини і схема додаткових зв'язків, отримані як розв'язок ОРМДЗ з фіксованими центрами. Значення цільового функціоналу задачі при таких даних дорівнює 7.13 ум. од. При розв'язуванні задачі ОРМДЗ з розміщенням центрів отримані наступні компоненти оптимального розв'язку: $\tau_1^{\text{I}} = (6.7; 3.6), \tau_2^{\text{I}} = (7.39; 3.3), \tau_3^{\text{I}} = (7.7; 3.9), \tau_4^{\text{I}} = (8.35; 4.13), \tau_5^{\text{I}} = (9.2; 3.96), \tau_6^{\text{I}} = (9.57; 4.75); v_{11} = 0.214, v_{21} = 0.122, v_{12} = 0.021, v_{32} = 0.13, v_{42} = 0.01, v_{43} = 0.171, v_{53} = 0.143, v_{63} = 0.188.$ Кількість зібраного ресурсу відповідними

підприємствами першого етапу при цьому склало з точністю 0.001 $b^{\text{I}} = (0.236; 0.122; 0.129; 0.181; 0.142; 0.188).$ Оптимальне розбиття і додаткові зв'язки зображені на рис. 5.4,б. Значення функціоналу 7.06 ум.од.



Рис. 5.4 – Оптимальне розбиття множини і схема перевезень ресурсу між підприємствами першого і другого етапів в задачі 5.3

Для стислості представлення результатів розв'язку інших задач в табл. 5.2 наведемо лише оптимальне розбиття при фіксованих центрах першого етапу (в початковому їх наближенні), а також оптимальне їх розміщення з відображенням закріплених за ними зон і додатковими зв'язками з підприємствами другого етапу. Зауважимо, що у всіх експериментах з оптимального розміщення центрів спостерігається зниження цільового функціоналу на 10 - 30% в порівнянні з його значенням на початковому наближенні.

Для порівняння в першому рядку таблиці наведені результати розбиття з використанням манхеттенської метрики; в другій – метрики Мінковського, $p = 10;$ в третій – евклідової метрики.

На рис. 5.5 проілюстровано розбиття області на шість зон, з урахуванням того, що два підприємства другого етапу знаходяться на території, що підлягає розбиттю.

Таблиця 5.2 – Результати розв’язку неперервних задач ОРМДЗ з розміщенням центрів I етапу

№ п/п	Оптимальне розбиття множини Ω і схема перевезень	
	Початкове розташування центрів I етапу	Оптимальне розміщення центрів I етапу
1		
2		
3		

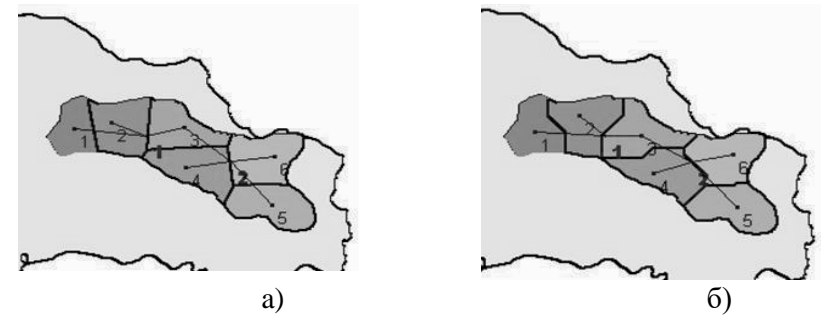


Рис. 5.5. Оптимальне розбиття множини і схема перевезень ресурсу

Рис. 5.5, а відповідає фіксованим координатами центрів першого етапу. На рис. 5.5, б представлений випадок оптимального їх розміщення. Як неважко помітити, і в одному, і в іншому випадках розбиття таке, що центри другого етапу виявляються на кордоні між деякими зонами, а центри першого етапу є вершинами багатокутників з центрами тяжіння в точках τ_j'' .

Зауважимо, що при вирішенні конкретних практичних двоетапних задач ОРМДЗ з фіксованими центрами для пошуку найкоротшого шляху між будь-якими двома центрами першого і другого етапів з урахуванням дорожнього графа можна використовувати бібліотеку Google Maps Distance Matrix API. З метою скорочення числа звернень до бібліотеки Google Maps Distance Matrix API, а, отже, і кількості задіяних обчислювальних ресурсів – як обсягу оперативної пам'яті і часу, необхідного на виконання як одного запиту, так і в цілому всіх запитів, розв'язання задачі ОРМДЗ з розміщенням центрів може проводитися в два етапи.

На першому етапі слід розв'язати задачу з функціями відстаней, рівними одній з відомих метрик – манхеттенська, евклідова,

Мінковського, Чебишева. Вибір метрики здійснюється шляхом попереднього порівняння результатів розбиття конкретного регіону на основі відстаней між точками, що обчислюються теоретично і за допомогою ГІС.

На другому етапі, підключаючи ГІС для пошуку фактичної відстані між знайденими центрами та точками регіону, визначається оптимальне розбиття заданого регіону і витрати на перевезення ресурсу між підприємствами першого і другого етапів.

Таким чином, на прикладі розв'язку модельних двоетапних задач розподілу сировинних потоків продемонстрована можливість зменшення сукупності витрат, пов'язаних з управлінням матеріальними і супутніми їм сервісними потоками по всій логістичній ланцюга, починаючи від моменту зародження потоку аж до надходження його кінцевому споживачеві.

Розроблене програмне забезпечення, що реалізує алгоритми розв'язку задач ОРМДЗ із залученням сучасних геоінформаційних ресурсів, може застосовуватися для кількісного обґрунтування і прийняття рішення про розміщення нових підприємств, пов'язаних з видобутком корисних копалин або іншого ресурсу, неперервно розподіленого на деякій території, з урахуванням його подальшої доставки до кінцевих споживачам.

Представлений математичний і алгоритмічний апарат розв'язування неперервних задач ОРМДЗ в застосуванні до підприємств паливно-енергетичного комплексу дозволяє отримувати розбиття району родовища на зони [156, 157], за якими підприємства першого етапу закріплюються монопольно. Однак, за даними

інтерактивної карти горючих корисних копалин [158], території деяких діючих шахт, що розробляють одне і те ж родовище, можуть перекриватися (що пов'язано з видобутком вугілля на різних пластах). Врахувати таку ситуацію при описі двоетапних оптимізаційних задач розміщення-розподілу можна, наприклад, за допомогою моделей неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин [159], що становить напрямок подальших наукових досліджень.

ВИСНОВКИ

В монографії представлені математичні моделі, методи і алгоритми розв'язання задач розміщення двоетапного виробництва, структурними елементами якої є підприємства, які здійснюють збір деякого ресурсу, і підприємства, які цей ресурс споживають або переробляють. Ключовою особливістю задач є той факт, що ресурс, що перерозподіляється між суб'єктами виробництва, неперервно розповсюджений на деякій заданій території.

Наведені результати досліджень свідчать про те, що вивчення організації багатоступневих задач розподілу сировинних потоків між учасниками ринку завжди має проводитися відповідно до таких методологічних принципів, як системний підхід і глобальна оптимізація загальних витрат. Всі елементи багатоступневої логістичної системи варто розглядати як взаємопов'язані та взаємодіючі для досягнення спільної мети функціонування системи, а оптимізацію функціонування проводити не для окремих елементів, а для всієї логістичної системи. Одночасно слід враховувати загальну суму витрат, обумовлених управлінням матеріальними потоками і пов'язаними послугами по всьому логістичному ланцюжку, починаючи з моменту зародження потоку і до його надходження до кінцевого споживача. Саме так інтереси та цілі функціонування окремих елементів системи узгоджуються з основною цільовою функцією всієї системи – досягненням оптимальних транспортних та супутніх витрат.

Оскільки за своїми математичними постановками побудовані моделі є узагальненням задач оптимального розбиття континуальних множин з розміщенням центрів підмножин на випадок врахування додаткових зв'язків, обумовлених наявністю другого етапу, реалізація таких моделей базуються на основних положеннях теорій неперервних задач оптимального розбиття множин і задач лінійного програмування транспортного типу.

Представлені обчислювальні експерименти з розв'язання модельних задач ОРМДЗ дозволяють переконатися, що системний підхід до вирішення питань з розміщення двоетапного виробництва дає можливість отримати синергетичний ефект, що впливає на досягнення спільної мети всіх суб'єктів логістичної системи.

На прикладі управління системою потоків сировини гірничодобувної системи (кар'єр, підземний рудник, збагачувальний завод) продемонстровано можливість використання сучасних геоінформаційних технологій під час розв'язання конкретних практичних задач ОРМДЗ. Таке поєднання розробленого програмного забезпечення і ГІС сприяє кількісному обґрунтуванню та прийняттю рішень щодо розміщення нових підприємств, пов'язаних з видобутком і подальшим перерозподілом ресурсу, неперервно розповсюдженого на певній території.

Перспективними напрямками подальших досліджень в теоретичному аспекті є обґрунтування збіжності ітераційних процесів в запропонованих алгоритмах розв'язання двоетапних задач; узагальнення математичних моделей на випадок: наявності додаткових етапів перерозподілу ресурсу або переробленого

продукту; врахування обмежень на потужності підприємств того чи іншого етапу; розбиття території на зони, за якими підприємства першого етапу закріплюються не монополюю, а з перекриттям, та ін.

Крім того, інтерес представляє застосування відмінних від g -алгоритму, методів розв'язання задач мінімізації негладких функцій, що отримуються в результаті редукції задач ОРМДЗ, наприклад, квазіньютонівських або методів DFO (Derivative-free optimization).

В практичному аспекті цікавим напрямком досліджень є застосування запропонованих моделей і алгоритмів для вирішення проблем при створенні територіально-розподілених багаторівневих компаній, що здійснюють повний цикл виробництва від заготівлі сировини з його комплексним використанням, випуском продукції до транспортування кінцевим споживачам. Впровадження запропонованих моделей і відповідного програмного забезпечення із залученням сучасних геоінформаційних ресурсів дозволить знизити витрати на просування матеріальних потоків, підвищити ефективність використання природних ресурсів.

Бурхливий розвиток сучасних ГІС-технологій обумовлює можливість врахування якомога більшої кількості початкової інформації (складну границю області, на якій розповсюджений сировинний ресурс, його кількість, місця можливого розміщення об'єктів першого етапу, а також, заборонені для цього території та ін.), здійснення сегментації карт і геопространственного інтелектуального аналізу даних. Залучення таких можливостей ГІС при розв'язанні багатоетапних задач розміщення - розподілу – ще один перспективний напрямок наукових досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Русяк И.Г., Нефедов Д.Г. Решение задачи оптимизации схемы размещения производства древесных видов топлива по критерию себестоимости тепловой энергии // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. т. 4, № 3. С. 651–659
- 2 Новобранов В.Н., Обухова Н.В. Задача по определению места рационального размещения распределительных центров // Коммунальное хозяйство городов. 2013. №109. С. 152–156
- 3 Жуков А.В., Кусраева Д.Э., Жукова Ю.А., Звонарев М.И., Шмелев А.А., Принципы разработки региональных программ развития и экономико-математических моделей (эмм) повышения эффективности топливно-энергетических комплексов (тэк) на основе использования традиционных и альтернативных энергоносителей // Фундаментальные исследования. 2016. № 4–3. С. 573–578
- 4 Катренко А. В., Антоняк Т. І. Розв'язання задач оптимального розміщення об'єктів методом імітаційного моделювання // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі. 2011. № 715. С. 150–162.
- 5 Ахмедов И.С., Сигал И.Х. Задача компоновки схемы генплана промпредприятий и некоторые подходы к ее решению // Деп.Винити. М., 1983. № 270. 57 с.
- 6 Абрайтис Л. Б. Автоматизация проектирования топологии цифровых интегральных микросхем М. : Радио и связь, 1985. 198 с
- 7 Базилевич Р.П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств. Львов: Вища школа, 1981. 168 с.
- 8 Овчинников В.А., Васильев А.Н., Лебедев В.В. Проектирование печатных плат: Учебное пособие Тверь: ТГТУ, 2005. 116 с.
- 9 Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наукова думка, 1986. 268 с.
- 10 Киселева Е.М., Бейко И.В. Свойства оптимальных решения для одной задачи орошения // Краевые задачи фильтрации. К.:Ин-т математики АН УССР, 1973. С. 255–261
- 11 Ус С.А., Горячко Е.А. Решение задачи оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи. Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. Д: ЛПРА, 2009. С. 359–363

- 12 Цветков В. Я., Семушкина С.Г. Геоинформационный анализ задач размещения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. № 4. 2009. С. 50–52
- 13 Исследование операций / под. ред. Дж. Моудер, С. Элмаграби, том 1, 2. М.: Мир, 1981 г. с. 677 с
- 14 Kasprzyk J., Stanczak W. A discrete approximation of the Weber problem with euclidean distance // *Applicationes Mathematicae*. 1984. XVIII. 2. P.257–270.
- 15 Шангин Р. Э. Алгоритм точного решения дискретной задачи Вебера для простого цикла // ПДМ. 2013. № 4. С. 96–102
- 16 Антамошкин А.Н., Казаковцев Л.А Алгоритм случайного поиска для обобщенной задачи Вебера в дискретных координатах // Информатика и системы управления. 2013. Вып. 1. С. 87–98.
- 17 Панюков А.В., Шангин Р.Э. Точный алгоритм решения дискретной задачи Вебера для k-дерева // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 3. С. 64–75
- 18 Васильев Е.М., Крутских И.В. Генетический алгоритм решения квадратичной задачи о назначениях // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Вып. 7. № 3. С. 29–33.
- 19 Koopmans T.C. Assignment problems and the location of economic activities // *Econometrica* 25. 1957. P.53–76
- 20 Васильев И.Л., Ушаков А. В. Об одном подходе к робастности решения в задаче о r-медиане // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2012. Вып. 5. № 4. С. 2–15.
- 21 Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Мир, 1981. 323 с
- 22 Daskin M. A new approach to solve the vertex P-center problem to optimality: algorithm and computational results // *Communications of the Operations Research Society of Japan*. 2000. №45(9). P. 428–436
- 23 Гимади Э.Х. Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Вып. 2, № 4. С. 13–31
- 24 Кузьменко В.Н., Гольденгорин Б.И., Тсо М., Стецюк П.И. Сравнение двух субградиентных методов при нахождении оценок для задач размещения // Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр. 2004. № 3. С. 108–116
- 25 Farahani R.Z., Hekmatfar M. Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. 549p
- 26 Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 264 с.
- 27 Грицик В.В., Шевченко А.І., Кісельова О.М., Яковлев С.В. и др. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів // Ін-т пробл. штучного інтелекту НАН України. Донецьк: Наука і освіта, 2012. 480 с.
- 28 Stoyan, Y., Yaskov, G., Romanova, T., ...Yakovlev, S., Cantú, J.M.V. Optimized packing multidimensional hyperspheres: A unified approach // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2020. 17(6). pp. 6601–6630
- 29 Romanova, T., Stoyan, Y., Pankratov, A., Mozgova, I., Bennell, J. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing // *International Journal of Production Research*. 2021. 59(2). pp. 560–575
- 30 Прилуцкий М., Седаков Д.В. Календарное планирование многостадийных производственных систем с взаимозаменяемым оборудованием // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 4 (1). С.433–437.
- 31 Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. 1978. 336с.
- 32 Дунайчук М. С. Методы та алгоритми розв'язання неперервних нелінійних задач оптимального розбиття множин: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня кандидата фіз.-мат. Наук. Днепропетровск. 2008. 170с.
- 33 Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискретн. анализ и исслед. опер. 1999. Вып.2, №6:2. С.3–11.
- 34 Воронин А.В., Прикладные транспортно-производственные задачи планирования работы предприятий ЛПК // ИВУЗ «Лесной журнал». 2004. Вып.1. С.103–110.
- 35 Воронин А.В. Многоэтапные задачи планирования и управления материальными потоками в вертикально-интегрированных структурах лесопромышленного комплекса // ИВУЗ «Лесной журнал». 2003. Вып.2-3. С.123–133
- 36 Гончаров Е. Н., Кочетов Ю. А. Поведение вероятностных жадных алгоритмов для многостадийной задачи размещения // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Вып. 6, №1. С.12–32

- 37 Гончаров Е.Н., Кочетов Ю.А. Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций. 2002. Вып. 9, №2. С.13–30
- 38 Vicente L.N., Calamai P.H. Bilevel and Multilevel Programming: A Bibliography Review // Journal of Global Opt. 1994. Vol.5. P.291–306
- 39 Krarup J., Pruzan P.M. The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. Vol.12, №1. P.36–81.
- 40 Скалозуб В.В., Блохин Е.С., Паник Л.А. Развитие многопродуктовых и многокритериальных моделей потоковых задач с учетом специализации носителей потоков // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. 2011. 4(89). С. 7–11.
- 41 Melo M.T., Nickel S., da Gama F.S. Dynamic multi-commodity capacitated facility location: a mathematical modeling framework for strategic supply chain planning // Comput Oper Res. 2005. Vol.33. P.181–208.
- 42 Bischoff M., Fleischmann T., Klamroth K. The Multi-Facility Location-Allocation Problem with Polyhedral Barriers // Computers & Operations Research. 2009. Vol.36. P.1376–1392
- 43 Rabbani M, Yousefnejad H. A novel approach for solving a capacitated location allocation problem // International Journal of Industrial Engineering Computations. 2013. 4(2). P.203–214
- 44 Cooper L. Location-allocation problems // Operations Research. 1963. 11 P.331–344
- 45 Van Roy T., Erlenkotter D. A dual-based procedure for dynamic facility // Management Sci. 1982. 28 (10) P.1091–1105.
- 46 Ефременко В.М., Беляевский Р.В. Расчет оптимального размещения компенсирующих устройств методом множителей Лагранжа // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2012. № 6(94). С.138–141.
- 47 Скаков Е.С., Малыш В.Н. Использование алгоритмов мултистарта и поиска с запретами для решения задачи размещения базовых станций // Информационно-управляющие системы. 2015. №3 (76). С.99–106.
- 48 Алексеева Е.В., Кочетов Ю.А. Генетический локальный поиск для задачи о р-медиане с предпочтениями клиентов // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Вып. 14, № 1. С.3–31.
- 49 Christopher R. Houck, Jeffrey A. Joines, Michael G. Kay. Comparison of Genetic Algorithms, Random Restart, and Two-Opt Switching for Solving Large Location-Allocation Problems // Computers & Operations Research. 1996. Vol. 22, № 6. P. 587–596.
- 50 Arifin MD. Shamsul. Location allocation problem using genetic algorithm and simulated annealing: a case study based on school in enschede. URL: http://www.itc.nl/library/papers_2011/msc/gfm/arifin.pdf (дата звернення: 02.04.2021)
- 51 Ling-Yun Wua, Xiang-Sun Zhanga, Ju-Liang Zhang. Capacitated facility location problem with general setup cost // Computers & Operations Research. 2006. Vol.33. P.1226–1241.
- 52 Brimberg J., Hansen P., Mladenović N., Salhi S. A Survey of Solution Methods for the Continuous Location-Allocation Problem // International Journal of Operations Research. 2008. Vol.5, № 1. P.1–12
- 53 Beasley J.E., Cao E.B. A tree search algorithm for the crew scheduling problem // European Journal of Operational Research. 1996. 94 (3). P.517–526
- 54 Погребной А.В. Определение числа и топологии размещения станций многопроцессорной вычислительной системы // Известия Томского политехнического университета. 2006. Вып.309, №7. С.160–164
- 55 Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Матем. 2016. №6. С.64–81.
- 56 Goodchild Michael F. The Aggregation Problem in Location-Allocation. URL: <http://www.geog.ucsb.edu/~good/papers/35.pdf> (дата звернення: 02.04.2021)
- 57 Hagen-Zanker A., Jin Y. Reducing aggregation error in spatial interaction models by location sampling // The 11th International Conference on GeoComputation. 2011. P.65–68
- 58 Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о построении процедуры разбиения конечного множества на основе метода динамического программирования // Автомат. и телемех. 2000. № 4. С.129–142.
- 59 Кибзун И., Никулин И.В. Дискретная аппроксимация линейной двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Автомат. и телемех. 2001. № 8. С.127–137
- 60 Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. К.: Наукова думка, 2005. 564 с.
- 61 Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств. К.: Наукова думка, 2013. 606 с.
- 62 Faezy F. R. A hybrid DEA-based K-means and invasive weed optimization for facility location problem. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s40092-018-0283-5.pdf> (дата звернення: 02.04.2021)
- 63 Aziz H., Chan H., Lee B.E, Li B., Walsh T. Facility Location Problem with

- Capacity Constraints: Algorithmic and Mechanism Design Perspectives. URL: <https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/5547/5403> (дата звернення: 02.04.2021)
- 64 Jannik C., Björn F., Till K. Manuel M., Friedhelm M.a.d.H. The Online Multi-Commodity Facility Location Problem. URL: <https://arxiv.org/pdf/2005.08391.pdf> (дата звернення: 02.04.2021)
- 65 Alenezy E. J. Solving Capacitated Facility Location Problem Using Lagrangian Decomposition and Volume Algorithm. URL: <https://downloads.hindawi.com/journals/aor/2020/5239176.pdf> (дата звернення: 02.04.2021)
- 66 Gimadi E. Kh., Shevyakov A. S. An Effective Algorithm for the Three-Stage Facility Location Problem on a Tree-Like Network. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7988418/> (дата звернення: 02.04.2021)
- 67 Lodi A., Mossina L., Rachelson E. Learning to handle parameter perturbations in Combinatorial Optimization: An application to facility location. URL: <https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S2192437620301539?token=3C16C1D36EB536A685CFFA06D4927DB8B4DC041C6E59E3E40E790ACAC97D37D9C9062AAB702228A6DFACD75AC464B0FA&originRegion=eu-west-1&originCreation=20210415203217> (дата звернення: 02.04.2021)
- 68 Zeferino E. F. S. Makinde O. A. Mrofu K. Ramatsetse B.I. Daniyan I.A. Prioritizing factors influencing the selection of a suitable quarantine facility for COVID-19 patients using Pareto-enhanced analytical hierarchy process. URL: https://www.researchgate.net/profile/Boitumelo-Ramatsetse/publication/348995247_Prioritizing_factors_influencing_the_selection_of_a_suitable_quarantine_facility_for_COVID-19_patients_using_Pareto-enhanced_analytical_hierarchy_process/links/601c4ff692851c4ed54bcd78/Prioritizing-factors-influencing-the-selection-of-a-suitable-quarantine-facility-for-COVID-19-patients-using-Pareto-enhanced-analytical-hierarchy-process.pdf (дата звернення: 02.04.2021)
- 69 Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П. Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»). 2015. Вип. 28. С.77–91.
- 70 Кузьменко В.Н. Решение двухэтапных задач стохастического программирования большой размерности рnk-методом // Стохастическое программирование и его приложения. 2012. С.150–159.
- 71 Свищикова М.В. Решение одной двухэтапной задачи нелинейного стохастического программирования // Инновации в науке. 2014. Том № 3 (28). Часть I. С.12–22.
- 72 Киселева Е.М., Дунайчук М.С. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала // Кибернетика и системный анализ. 2008. № 2. С. 134–151
- 73 Киселева Е.М., Коряшкіна Л.С. Применение г-алгоритма Шора для решения непрерывных задач многократного покрытия // Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale. Chisinau, 25-28 martie, 2014. С.234–245.
- 74 Ус С.А. Про один підхід до розв'язання задачі оптимального розміщення збагачувального виробництва // «Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні «Інфотех-2011». Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Севастополь, 05–10 вересня 2011 р). С.118–119.
- 75 Кадочникова Я.Е., Сасов А.А., Коробочка А.Н. Применение методов теории оптимального разбиения множеств для решения задачи размещения шиноперерабатывающих предприятий // Вестник СевГТУ. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. Вып. 121: Машиноприборостроение и транспорт. С.76–78
- 76 Киселева Е.М., Коряшкіна Л.С., Ус С.А., Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем. М-во образования и науки Украины; Нац. горн. ун-т. Д.: НГУ, 2015. 270 с.
- 77 Агеев А.А., Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на цепи с одинаковыми производственными мощностями предприятий // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2009. 16:5. С.3–18.
- 78 Silva F., Serra D. A Capacitated Facility Location Problem with Constrained Backlogging Probabilities // International Journal of Production Research. 2007. Vol. 45, № 21. P.5117–5134.
- 79 Kaiser M., Klamroth K. Exact Solution Approaches for Location-Allocation. ISOLDE XII Nagoya and Kyoto, July 19-24. 2012. P.
- 80 Климентова К. Б. Оценки оптимальных значений и методы решения задач размещения с предпочтениями клиентов: Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Иркутск, 2010. 20 с.
- 81 Özyurt Z., Aksen D., Aras N. Открытая задача маршрутизации транспортного средства с временными сроками: методы решения и применения. URL:

<http://masters.donntu.org/2009/kita/aleksandrova/library/article02.pdf> (дата звернення: 02.04.2021)

- 82 Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е. и др. Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000. 360 с
- 83 Darby-Dowman K., Mitra G. An extension of set partitioning with application to scheduling problems // *European Journal of Operational Research*. 1985. 21(2). P.200–205
- 84 Панкратьев Е.В. Алгоритмы и методы решения задач составления расписаний и других экстремальных задач на графах больших размерностей. *Фундамент. и прикл. матем.* 2003. Том 9, выпуск 1. С.235–251
- 85 Zhu J., Huang J., Liu D., Han dan J. Resources Allocation Problem for Local Reserve Depots in Disaster Management Based on Scenario Analysis // *The 7th International Symposium on Operations Research and Its Applications (ISORA'08)*. 2008. P.395–407.
- 86 Bischoff M., Fleischmann T., Klamroth K. The Multi-Facility Location-Allocation Problem with Polyhedral Barriers // *Computers and Operations Research*. 2009. Vol.36, №5. P.1376–1392
- 87 Yonglin Ren. Metaheuristics for multiobjective capacitated location allocation on logistics. URL: http://spectrum.library.concordia.ca/7269/1/Ren_MASc_S2011.pdf (дата звернення: 02.04.2021)
- 88 Монтлевич В.М. Задача размещения предприятий с типовыми мощностями и неделимыми потребителями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2000. 40:10. С.1491–1507.
- 89 Монтлевич В.М., Бородинова И.А. Решение некоторых многопродуктовых задач с взаимозаменяемыми товарами // *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.). Часть 2, Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами, Матем. моделирование и краев. задачи*. 2009. С.112–115.
- 90 Corley H.W., Roberts JR., S.D. A Partitioning Problem with Applications in Regional Design // *Operations Research*. 1972. Vol.20. P.1010–1019.
- 91 Киселева Е.М., Бирсан Н.К. Алгоритм для одной задачи оптимального разбиения // *Вычислительная математика и программирование*. Д: ДГУ, 1976. С.20–23
- 92 Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задачах теплопроводности // *Математическое моделирование, оптимизация и информационные*

технологии»(19–23 марта 2012 г., Кишинэу): тез. докл. Кишинэу. 2012. С.459–467

- 93 Степанчук Т. Ф. Алгоритми розв'язання деяких класів оптимізаційних задач, які зводяться до задач оптимального розбиття. автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук. 2002. 17 с.
- 94 Кисельова О.М., Лозовська Л.І., Кадочнікова Я.Е. Розв'язання задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на пропускні можливості комунікацій в умовах невизначеності. Д.: ДНУ, 2007. С.123–139.
- 95 Киселёва Е.М., Кадочникова Я.Е. Решение непрерывной однопродуктовой задачи оптимального разбиения с дополнительными ограничениями // *Проблемы управления и информатики*. 2009. №4 С.47–61.
- 96 Бельц Е.А., Колоколов А.А. Оптимизация размещения предприятий с учетом минимально допустимых расстояний // *Вестн. Ом. ун-та*. 2012. № 4. С.13–16.
- 97 Богачев А.И. Новые подходы к решению задачи оптимального размещения предприятий регионального АПК // *Научный журнал КубГАУ*. 2007. №31(7). С.71–81
- 98 Береснев В.Л. О задаче выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов // *Управляемые системы*. 1977. №16. С.35–46.
- 99 Finkelstein S., Schkolnik M., Tiberio P. Physical database design for relational databases // *ACM Transactions on Database Systems*. 1988. №13 P.91–128.
- 100 Береснев В.Л. Эффективный алгоритм для задачи размещения производства с вполне уравновешенной матрицей // *Дискретный анализ и исследование операций*. 1998. Вып.5, № 1. С.20–31
- 101 Блам Ю.Ш., Машкина Л.В. Модели и методы прикладного анализа (производственные системы). Новосибирск, Учебно-методический комплекс к курсу. 2008. 18 с.
- 102 Pruzan J., Krarup P. The simple plant location problem: survey and synthesis // *European J. Oper. Res.*1983 Vol. 12, № 1. P. 36–81.
- 103 Korać V., Kratica J., Savić A. An Improved Genetic Algorithm for the Multi Level Uncapacitated Facility Location Problem // *Int j comput commun*. 2013. № 8(6). P.845–853.
- 104 Ortiz-Astorquiza C., Contreras I., Laporte G. Multi-level facility location problems // *European Journal of Operational Research*. 2018. №267. P.791–805.
- 105 Трубин В.А., Шарифов Ф.А. Простейшая многоэтапная задача размещения на древовидной сети // *Кибернетика и системный анализ*,

- 106 Есин К.С., Севостьянов А.Л., Математическая модель распределения перевозимых объемов зерна с временных пунктов хранения потребителю // Вестник ТОГУ. 2015. № 4(39). С.145–152
- 107 Миронюк В. П., Цыплаков В. Ю. Модель формирования системы двухэтапного транспортирования твердых муниципальных отходов // Управление большими системами. 2011. Вып. 37. С.208–231
- 108 Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети // Дискретный анализ и исследование операций. Ноябрь – декабрь, 2012. Т.19. № 6. С.9–22
- 109 Колоколов А.А., Леванова Т.В., Федоренко А.С. Исследование декомпозиционного подхода для двухстадийной задачи размещения // Вестник Омского университета. 2010. № 4. С.24–31
- 110 Goncharov Y., Kochetov E. A behavior of a probabilistic tabu search algorithm for the multi stage uncapacitated facility location problem // Proceedings of the Operations Research, 2000. P.65–70
- 111 Cheung Raymond K.-M., B. Powell Warren. Models and Algorithms for Distribution Problems with Uncertain Demands. October, 1994. 36 p
- 112 Erengüç S.S., Simpson N., Vakharia A.J. Integrated Production/Distribution Planning in Supply Chains - An Invited Review // European Journal of Operational Research. 1999. Vo.115. P.219–236
- 113 Fisher M. L. What is the Right Supply Chain for Your Product? // Harvard Business Review 75(2, March–April). 1997. P.105–116.
- 114 Hindi K.S., Basta T. Computationally efficient solution of a multiproduct, two stage distribution-location problem // The Journal of the Operational Research Society. 1994. № 45 (11). P.1316–1323
- 115 Tsiakis P., Shah N., Pantelides C.C. Design of Multi-echelon Supply Chain Networks under Demand Uncertainty // Industrial & Engineering Chemistry Research. 2001. 40 (16). P.3585–3604. DOI: 10.1021/ie0100030
- 116 Nozick L.K., Turnquist M.A. Inventory, transportation, service quality and the location of distribution centers // European Journal of Operational Research. 2001. № 129. P.362–371
- 117 Klose A., Drexl A. Facility location models for distribution system design // European Journal of Operational Research, 162. 2005. P.4–29
- 118 L K Teng, Luong L. H. Son, M. R. Marin; L. Moon-Kyu. An Optimization Framework for Multistage Production-distribution Networks using Genetic Algorithms // 9th Global Congress on Manufacturing and Management. 2008. P.514–523
- 119 Wollenweber J. A multi-stage facility location problem with staircase costs and splitting of commodities: model, heuristic approach and application // OR Spectrum. 2008. Vol. 30, № 4. P.655–673
- 120 M.-J. Yao, H.-W. Hsu. A new spanning tree-based genetic algorithm for the design of multi-stage supply chain networks with nonlinear transportation costs // Optim Eng. 2009. №10. P.219–237
- 121 T. Paksoy, C.-T. Chang. Revised multi-choice goal programming for multi-period, multi-stage inventory controlled supply chain model with popup stores in Guerrilla marketing // Applied Mathematical Modelling. Vol. 34, № 11, November 2010. P.3586–3598
- 122 Gen M., Syarif A. Multi-stage Supply Chain Network by Hybrid Genetic Algorithms //Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization. 2012. Vol 126, Studies in Fuzziness and Soft Computing Springer. P.181–196
- 123 Gonzalez-Feliu J., Cheung J.; Song H. Multi-stage LTL transport systems in supply chain management // Logistics: Perspectives, Approaches and Challenges, Nova Science Publishing. 2013. P.65-86
- 124 Farahani R.Z., Hekmatfar M., Fahimnia B., Kazemzadeh N.. Hierarchical facility location problem: Models, classifications, techniques, and applications // Computers & Industrial Engineering. 2014. P.104–117
- 125 Irawan C.A., Jones D. Formulation and solution of a two-stage capacitated facility location problem with multilevel capacities // Ann Oper Res. 2018. P.1–27
- 126 Kadri A., Perrouault R., Boujelben M.K., Gicquel C. A multi-stage stochastic integer programming approach for locating electric vehicle charging stations. Computers and Operations Research. Elsevier. 2020. 117. pp.104888.
- 127 Amrani m. E., Benadada Y. Multi-Stage Algorithms for Solving a Generalized Capacitated P-median Location Problem. International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 9, No. 5. 2018. pp190-196
- 128 Karatasa M., Dasci A. A two-level facility location and sizing problem for maximal coverage. URL: http://research.sabanciuniv.edu/40464/1/Karatas_and_Dasci_2020.pdf (дата звернення 02.04.2021)
- 129 Arbiba C., Pinar M., Tonelli M. Competitive location and pricing on a line with metric transportation costs. URL: <http://yoksis.bilkent.edu.tr/pdf/files/14456.pdf> (дата звернення 02.04.2021)
- 130 Fan H., Wu J., Li X., Jiang X. Presenting a Multi-Start Hybrid Heuristic for Solving the Problem of Two-Echelon Location-Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery (2E-LRPSPD). URL:

- <https://www.hindawi.com/journals/jat/2020/9743841/> (дата звернення 02.04.2021)
- 131 Wanga M., Bell M., Miao L., A Branch-and-Price Algorithm for a Green Two-Echelon Capacitated Location Routing Problem. URL: <https://ses.library.usyd.edu.au/bitstream/handle/2123/21882/ITLS-WP-20-05.pdf?sequence=1&isAllowed=y> (дата звернення 02.04.2021)
- 132 Ус С.А., Станина О.Д. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.пр. 2014. С. 258–268.
- 133 Киселева Е.М., Ус С.А., Станина О.Д. О задачах оптимального разбиения множеств с дополнительными связями // Питання прикладної математики і математичного моделювання Дніпропетровськ, Видавництво ДНУ, 2016. С. 67–78.
- 134 Киселева Е.М. Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. // Кибернетика и системный анализ. Том № 56 №1. 2020. С.3-15
- 135 Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, Физматлит. 1969. 384 с
- 136 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 6-е изд. М.: Бином Лаборатория знаний, 2008. 636с.
- 137 Пуханов А.А. Логистические проблемы в управлении транспортной системой предприятий топливно-энергетического комплекса / А.А. Пуханов // «Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту», №1, 2009.– С.251-257
- 138 Будишевский В.А. Экономические аспекты управления запасами угля в логистических системах топливно-энергетического комплекса / В. А. Будишевский, А. А. Пуханов, Л.С. Пуханова // Научные труды ДонНТУ. Серия: экономическая. – 2005. – Вып. 100-1. – С. 173 – 178
- 139 Blyuss B. An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises / B. Blyuss, L. Koriashkina, S. Us, S. Minieiev, S. Dziuba // Геотехнічна механіка, 2019. – №1.– С.251-257
- 140 Us S.A. On some mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry / S.A.Us, O.D. Stanina // New Developments in Mining Engineering 2015. Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining/ – CRC Press / Balkema - Taylor & Francis Group, London, 2015. – P. 419–424
- 141 Стецок П.И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы. // Кишинэу, Эврика, 2014. – 488 с.
- 142 Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2015. – 400 с
- 143 Kaliraj S., Malar V. K. Geospatial analysis to assess the potential site for coal based thermal power station in Gujarat, India. *Advances in Applied Science Research*, 2012. – 3 (3). P. 1554 – 1562
- 144 Deepak Paramashivan Kaundinya. A GIS (geographical information system)-based spatial data mining approach for optimal location and capacity planning of distributed biomass power generation facilities: A case study of Tumkur district, India / Deepak Paramashivan Kaundinya, P. Balachandra, N.H. Ravindranath, Veilumuthu Ashok // *Energy*, 1 April 2013. – Vol. 52. – P. 77-88. – doi.org/10.1016/j.energy.2013.02.011
- 145 Comber A. Locating bioenergy facilities using a modified GIS-based location-allocation-algorithm: Considering the spatial distribution of resource supply // Alexis Comber, Jennifer Dickie, Claire Jarvis, Martin Phillips, Kevin Tansey // *Applied Energy*, 15 September 2015. – Vol. 154. – P. 309-316
- 146 Kim S.M. ArcMine: A GIS extension to support mine reclamation planning / S.M. Kim, Y. Choi, J. Suh, S. Oh, H.D. Park, S.H. Yoon, W.R. Go // *Comput. Geosci.* 2012. – Vol. 46. – P. 84 –95. – doi: 10.1016/j.cageo.2012.04.007
- 147 Suh J. An Overview of GIS-Based Modeling and Assessment of Mining-Induced Hazards: Soil, Water, and Forest / Jangwon Suh, Sung-Min Kim, Huiuk Yi, Yosoon Choi // *Int J Environ Res Public Health*. 2017 Dec. – 14(12): 1463. – doi: 10.3390/ijerph14121463
- 148 Чеботарёв А. М., Жуковская Н. В. Мультикритериальный ГИС-анализ для выбора мест размещения ветроэнергетических установок URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/254306> (дата звернення 02.04.2021)
- 149 Franch-Pardo I, Napoletano B. M., Rosete-Verges F., Billa L. Spatial analysis and GIS in the study of COVID-19. *Science of The Total Environment*. Volume 739. 2020. 140033. URL: <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.140033> (дата звернення 02.04.2021)
- 150 Kaveh M., Kaveh M., Mesgari M. S., Rahmatollah S.P. Multiple criteria decision-making for hospital location-allocation based on improved genetic algorithm. URL: https://www.researchgate.net/profile/Masoud-Kaveh/publication/338824740_Multiple_criteria_decision-making_for_hospital_location-allocation_based_on_improved_genetic_algorithm/links/5f294d1c92851cd302d88178/Multiple-criteria-decision-making-for-hospital-location-allocation-based-on-improved-

151 Герасименко О.А., Тхориков Б.А., Титова И.Н. Геомаркетинговое моделирование – аналитический инструмент планирования бизнеса Экономика. Информатика. 2020. Том 47, № 4 (710–717). С. 710-717

152 Costa F. R., Ribeiro C. A. A. S., Marcatti G. E., Lorenzon A. S., Teixeira T. R., Domingues G. F., Martins de Castro N. L., Rosa dos Santos Al, Soares V. P., Martins da Costa de Menezes S. J., Mota P. H. S., de Almeida Telles L. A., Romário de Carvalho J. GIS applied to location of bioenergy plants in tropical agricultural areas. Renewable Energy. Volume 153. 2020. pp 911-918
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.01.050>.

153 Özceylan E. Optimizing the location-allocation problem of pharmacy warehouses: A case study in Gaziantep / Eren Özceylan, Ayşenur Uslu, Mehmet Erbaş, Cihan Çetinkaya, Selçuk Kürşat İşleyen // An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA). – 2017. – Vol 7ю № 1. –P. 117 – 129. – DOI: 10.11121/ijocta.01.2017.00373

154 Md. Mohib-Ul-Haque Khan. Optimal siting of solid waste-to-value-added facilities through a GIS-based assessment / Md. Mohib-Ul-Haque Khan, M. Vaezi, A. Kumar // Science of the Total Environment. – 2018. – Vol. 610–611. – P. 1065–1075/ – doi.org/10.1016/j.scitotenv.2017.08.169

155 Kim H.Y. Combining GIS with AHP for Facility Site Selection: A Case Study in Cheongju, South Korea / H.Y. Kim, J.H. Hwang // Journal of Engineering and Applied Sciences, 2018. – Vol. 13. – P. 7933-7939. – DOI: 10.3923/jeasci.2018.7933.7939

156 Us S. A., Koriashkina L. S., Stanina O. D. An optimal two-stage allocation of material flows in a transport-logistic system with continuously distributed resource // Radio Electronics, Computer Science, Control, 2019. – № 1. P. 256 – 271

157 Bulat A. Solution of the problem to optimize two-stage allocation of the material flows / A. Bulat, S. Dziuba, S. Minieiev, L. Koriashkina, S. Us // Mining of Mineral Deposits Volume 14. – 2020. – Issue 1. – P. 27-35. <https://doi.org/10.33271/mining14.01.027>

158 Інформаційний ресурс «Мінеральні ресурси України. <http://minerals-ua.info>

159 Коряшкіна Л.С. Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин / L. S. Koriashkina, A. P. Cherevatenko, E. O. Koriashkina// Системні дослідження та інформаційні технології, 2017, № 4. – С. 97 – 108

МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОРМДЗ

Для другого підходу розглянуто таку розширену функцію:

$$P(\tau, v, \psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c_i^l(x, \tau_i^l) + \psi_i) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j + D \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \max^2(0; -v_{ij}) + D \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \max^2(0; \psi_i - \eta_j - c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II})),$$

де D – досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (3.13)).

Алгоритм 3.

Крок 0.

Множину Ω заключаємо в паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осях декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$, при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

1. Задаємо початкове наближення $(\tau^l, \psi) = (\tau^{l(0)}, \psi^{(0)})$ та $(v, \eta) = (v^{(0)}, \eta^{(0)})$.

2. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в вузлах сітки за формулою (3.24) при $\tau^l = \tau^{l(0)}, \psi = \psi^{(0)}$.

3 Обчислюємо компоненти псевдоградієнту функції у вузлах сітки за формулами:

$$g_P^{\tau_i} = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i} \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M g_{c_{ij}}^{\tau_i} v_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 2D \max(0; \eta_j + \psi_i - c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II})) \cdot g_{c_{ij}}^{\tau_i}, \quad (Б.1)$$

$$g_P^{\psi_i} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} + \sum_{j=1}^M 2D \max(0; \eta_j + \psi_i - c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II})), \quad (Б.2)$$

де $g_{c_{ij}}^{\tau_i}$ – i-а компонента $2N$ -мірного вектору узагальненого градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_i^l в точці τ^l , $g_{c_{ij}}^{\tau_i}$ – i-а компонента $2N$ -мірного вектору узагальненого

градієнту $g_c^{\tau^l}$ функції c_{ij}^{II} в точці τ^l :

$$g_P^{\eta_j} = -\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^{II} + \sum_{i=1}^N 2D \max(0; \eta_j + \psi_i - c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II})), \quad (Б.3)$$

$$g_P^{v_{ij}} = c_{ij}(\tau^l, \tau^{II}) - \eta_j - \psi_i - 2D \max(0; -v_{ij}), \quad (Б.4)$$

При $\tau^l = \tau^{l(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \lambda = \lambda^{(0)}, v = v^{(0)}, \eta = \eta^{(0)}$.

3.3 Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ г-алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{l(1)} = P_{\Pi}(\tau^{l(0)} - h_0 g_{\tau}^{\tau^l}(\tau^{l(0)}, v^{(0)}, \psi^{(0)}, v^{(0)}))$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{\psi}^{\psi}(\tau^{l(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)})$$

$$\eta^{(1)} = \eta^{(0)} + h_0 g_{\eta}^{\eta}(\tau^{l(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)})$$

$$v^{(l)} = v^{(0)} - h_0 g_p^v(\tau^{l(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)})$$

де P_{Π} – оператор проектування на Ω .

Нехай вже проведено $(l-1)$ крок алгоритму, опишемо l -ий шаг.

Крок l .

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(l)}(x)$ в вузлах сітки за формулою (3.24)

2. Обчислюємо компоненти псевдоградієнту функції в вузлах сітки за формулами (Б.1) – (Б.4) при $\tau^l = \tau^{l(l-1)}$, $\psi = \psi^{(l-1)}$, $\lambda = \lambda^{(l-1)}$, $v = v^{(l-1)}$, $\eta = \eta^{(l-1)}$.

3. Проводимо l -ий шаг г-алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{l(l)} = P_{\Pi}(\tau^{l(l-1)} - h_{l-1} B_l^{\tau} g_p^{\tau}(\tau^{l(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, v^{(l-1)})),$$

$$\psi^{(l)} = \psi^{(l-1)} + h_{l-1} B_l^{\psi} g_p^{\psi}(\tau^{l(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, v^{(l-1)}),$$

$$\eta^{(l)} = \eta^{(l-1)} + h_{l-1} B_l^{\eta} g_p^{\eta}(\tau^{l(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, v^{(l-1)}),$$

$$v^{(l)} = v^{(l-1)} - h_{l-1} B_l^v g_p^v(\tau^{l(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, v^{(l-1)}),$$

де h_l – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму у напрямку, $B_l^{\tau}, B_l^{\psi}, B_l^{\eta}, B_l^v$ – оператори перетворення простору в основний простір, які перераховуються за формулами, аналогічними формулам (3.25) – (3.26).

4. Якщо виконується умова

$$\|(\tau^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}, v^{(l)}) - (\tau^{(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, v^{(l-1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

перехід на п.5, якщо ні – $l = (l+1)$ і перехід на п.1.

5. Розраховуємо значення цільового та двоїстого функціоналів. Кінець алгоритму.

Алгоритм описаний.

ДОДАТОК Б

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ДОДАТКОВИХ ЗВ'ЯЗКІВ НА ФОРМУ ГРАНИЦЬ МІЖ ПІДМНОЖИНАМИ В ОПТИМАЛЬНОМУ РОЗБИТТІ ЗАДАНОЇ МНОЖИНИ

Наведемо результати розв'язання модельних задач ОРМДЗ в яких спеціальним чином розташовані центри першого та другого етапів.

Модельна задача 1. Нехай на території, що має форму квадрату $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, рівномірно розподілений ресурс, який використовує двоетапне виробництво. Припустимо, що цей ресурс може бути перероблений чотирма підприємствами першого етапу, а продукт переробки направляється для подальшого використання на два підприємства другого етапу. Відомі координати розташування підприємств першого $\tau_1^l = (0, 25; 0, 25)$, $\tau_2^l = (0, 25; 0, 75)$, $\tau_3^l = (0, 75; 0, 75)$, $\tau_4^l = (0, 75; 0, 25)$ і другого $\tau_1^H = (0, 3; 0, 4)$, $\tau_2^H = (0, 8; 0, 8)$ етапів.

Функція, що описує витрати на транспортування сировини від постачальника з координатами (x, y) до підприємства з координатами $\tau_i^l = (\tau_{1i}^l, \tau_{2i}^l)$, для всіх підприємств однакова і задана у вигляді:

$$c_i^l(x, y, \tau_i^l) = \sqrt{(x - \tau_{1i}^l)^2 + (y - \tau_{2i}^l)^2}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (\text{B.1})$$

Витрати на транспортування продукції від підприємства $\tau_i^l = (\tau_{1i}^l, \tau_{2i}^l)$ першого етапу до підприємства $\tau_j^H = (\tau_{1j}^H, \tau_{2j}^H)$ другого етапу описуються у вигляді:

$$c_{ij}^H(\tau_i^l, \tau_j^H) = \sqrt{(\tau_{1i}^l - \tau_{1j}^H)^2 + (\tau_{2i}^l - \tau_{2j}^H)^2}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}. \quad (\text{B.2})$$

Запаси сировини рівномірно розподілені на обмеженій території Ω . Для простоти вважаємо, що $\rho(x, y) = 1$. Обмеження на виробничі потужності підприємств другого етапу, задані рівними 0,2, і 0,8 відповідно.

Необхідно розбити територію Ω на зони збору сировини і визначити обсяги поставок продукції від підприємств першого етапу до підприємств другого етапу таким чином, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат (2.16) доставки сировини і готової продукції за умов (2.17) – (2.18).

На рис. В.1, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів. При цьому в якості початкових значень компонент вектор-функції $\lambda(\cdot)$ обирались наступні:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3 \\ 1, & i = 4, \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Тобто напочатку вважалося, що усі точки $x \in \Omega$ належать лише підмножині Ω_4 .

Для розв'язання поставленої задачі множина Ω покривалася сіткою з кроком $h = 0,01$. Умовою припинення рахунку було виконання одного з нерівностей:

$$\begin{aligned} |I_k - I_{k-1}| &\leq 10^{-6}, \\ \|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| &\leq 10^{-6}. \end{aligned}$$

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття множини Ω , представлене на рис. В.2;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.1.);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,438; b_2^I = 0,119; b_3^I = 0,069; b_4^I = 0,373.$$

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 1,42$;

– значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 1,42$.

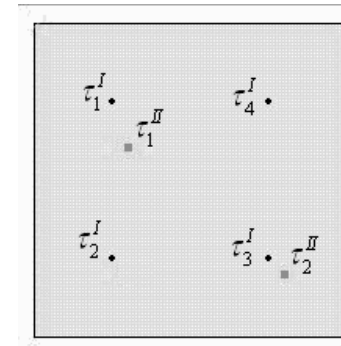


Рис. В.1. Вихідні дані модельної задачі 3

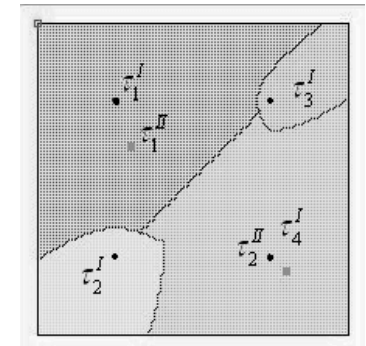


Рис. В.2. Результат розв'язання модельної задачі 3

Таблиця В.1

Обсяги перевезень, отримані при розв'язанні модельної задачі 3

	τ_1^{II}	τ_2^{II}
τ_1^I	0.2	0.238
τ_2^I	0	0.119
τ_3^I	0	0.069
τ_4^I	0	0.373

Для порівняння ця ж задача була розв'язана без врахування розміщення підприємств другого етапу (задача ОРМ при фіксованих центрах підмножин без обмежень). Оптимальне розбиття множини Ω , отримане в результаті розв'язання задачі показано на рис. В.3.

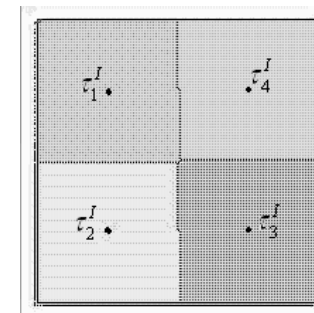


Рис. В.3. Результат розв'язання ОРМ

Отримані значення потужностей підприємств:

$$b_1^I = 0,2474; b_2^I = 0,2426; b_3^I = 0,2476; b_4^I = 0,2425.$$

Значення цільового функціоналу: $I = 0,5753$

Як бачимо, поява додаткових зв'язків (підприємства другого етапу) істотно впливає на розбиття. Якщо таких зв'язків немає - множина розділена на рівні за потужністю підмножини, при врахуванні таких зв'язків - велику площу має територію обслуговування підприємства, яке знаходиться ближче до підприємств другого етапу - τ_1^I , і відповідно, менші витрати на перевезення готового продукту до підприємств другого етапу.

Модельна задача 1а. Нехай на території $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рівномірно розподілений ресурс, який використовує двоетапне виробництво. Припустимо, що цей ресурс може бути перероблений чотирма підприємствами першого етапу, які розташовані на території Ω . Продукт переробки направляється для подальшого використання на три підприємства другого етапу.

Відомі координати розташування підприємств першого $\tau_1^I = (0,25;0,25)$, $\tau_2^I = (0,25;0,75)$, $\tau_3^I = (0,75;0,75)$, $\tau_4^I = (0,75;0,25)$ і другого $\tau_1^II = (0,3;0,4)$, $\tau_2^II = (0,4;0,3)$, $\tau_3^II = (0,3;0,8)$ етапів. Функція, що описує витрати на транспортування сировини від постачальника з координатами (x, y) до підприємства з координатами $\tau_i^I = (\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I)$, для всіх підприємств однакова і задана у вигляді (В.1), а витрати на транспортування продукції від підприємства $\tau_i^I = (\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I)$ першого етапу до підприємства $\tau_j^II = (\tau_{1j}^II, \tau_{2j}^II)$ другого етапу описуються у вигляді (В.2).

Запаси сировини рівномірно розподілені на території Ω . Для простоти вважаємо, що $\rho(x, y) = 1$. Обмеження на виробничі потужності підприємств другого етапу, задані рівними 0,2, 0,4 і 0,4 відповідно.

На рис. В.4, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів.

В результаті застосування алгоритму 1 отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття множини Ω , представлено на рис. В.5;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.2);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,5853; b_2^I = 0,2965; b_3^I = 0,072; b_4^I = 0,0462.$$

- Мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 0,97690$;

- значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 0,97301$.

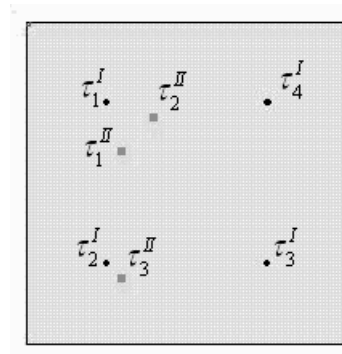


Рис. В.4. Вихідні дані модельної задачі 1

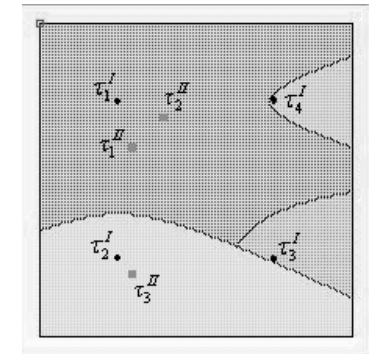


Рис. В.5. Результат розв'язання модельної задачі 1

Таблиця В.2
Обсяги перевезень, отримані при розв'язанні модельної задачі 1

	τ_1^II	τ_2^II	τ_3^II
τ_1^I	0,2	0,385	0
τ_2^I	0	0	0,297
τ_3^I	0	0	0,072
τ_4^I	0	0,015	0,031

Очевидно, що зміна виду додаткових зв'язків також істотно впливає на вигляд розбиття множини.

Зміна розміщення центрів другого етапу

Модельна задача 16. Нехай на території $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рівномірно розподілений ресурс, який використовує двоетапне виробництво. Припустимо, що цей ресурс може бути перероблений чотирма підприємствами першого етапу, які розташовані на території Ω . Продукт переробки направляється для подальшого використання на два підприємства другого етапу.

Функція, що описує витрати на транспортування сировини від постачальника з координатами (x, y) до підприємства з координатами $\tau_i^I = (\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I)$, для всіх підприємств однакова і задана у вигляді:

$$c_i^I(x, y, \tau_i^I) = \sqrt{(x - \tau_{1i}^I)^2 + (y - \tau_{2i}^I)^2}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Витрати на транспортування продукції від підприємства $\tau_i^I = (\tau_{1i}^I, \tau_{2i}^I)$ першого етапу до підприємства $\tau_j^II = (\tau_{1j}^II, \tau_{2j}^II)$ другого етапу описуються у вигляді:

$$c_{ij}^II(\tau_i^I, \tau_j^II) = \sqrt{(\tau_{1i}^I - \tau_{1j}^II)^2 + (\tau_{2i}^I - \tau_{2j}^II)^2}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}.$$

Запаси сировини рівномірно розподілені в області Ω . Для простоти вважаємо, що $\rho(x, y) = 1$. Обмеження на виробничі потужності підприємств другого етапу, задані рівними 0,2, і 0,8 відповідно.

Необхідно розбити область Ω на зони збору сировини і визначити обсяги поставок продукції від підприємств першого етапу до підприємств другого етапу таким чином, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат (2.16) доставки сировини і готової продукції за умов (2.17) - (2.18).

На рис. В.6, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів.

При цьому в якості початкових значень компонент вектор-функції $\lambda(\cdot)$ обирались наступні:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3 \\ 1, & i = 4, \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Тобто напочатку вважалось, що усі точки $x \in \Omega$ належать лише підмножині Ω_4 .

Для розв'язання поставленої задачі область Ω покривалася сіткою з кроком $h = 0,01$. Умовою припинення рахунку було виконання одного з нерівностей:

$$|I_k - I_{k-1}| \leq 10^{-6}, \quad \|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| \leq 10^{-6}.$$

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття області Ω , представлене на рис. В.7;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.3.);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,82; \quad b_2^I = 0; \quad b_3^I = 0,153; \quad b_4^I = 0,027.$$

- мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 0,92363$;

- значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 0,91954$.

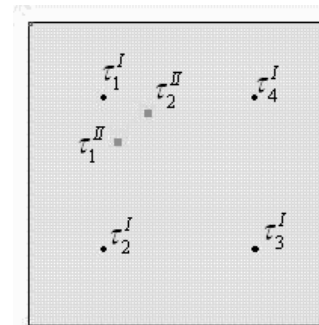


Рис. В.6. Вихідні дані модельної задачі 2

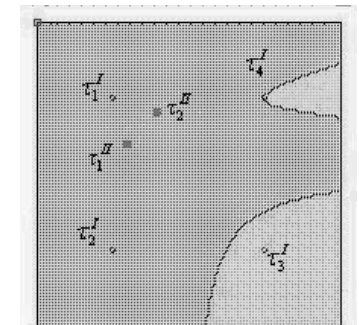


Рис. В.7. Результат розв'язання модельної задачі 2

Таблиця В.3

Обсяги перевезень, отримані при розв'язуванні модельної задачі 2

	τ_1''	τ_2''
τ_1'	0.2	0.62
τ_2'	0	0
τ_3'	0	0.153
τ_4'	0	0.027

Модельна задача 1в. Нехай в області $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рівномірно розподілений ресурс, який використовує двоетапне виробництво. Припустимо, що цей ресурс може бути перероблений чотирма підприємствами першого етапу, які розташовані в області Ω . Продукт переробки направляється для подальшого використання на два підприємства другого етапу.

Функція, що описує витрати на транспортування сировини від постачальника з координатами (x, y) до підприємства з координатами $\tau_i' = (\tau_{1i}', \tau_{2i}')$, для всіх підприємств однакова і задана у вигляді:

$$c_i'(x, y, \tau_i') = \sqrt{(x - \tau_{1i}')^2 + (y - \tau_{2i}')^2}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Витрати на транспортування продукції від підприємства $\tau_i' = (\tau_{1i}', \tau_{2i}')$ першого етапу до підприємства $\tau_j'' = (\tau_{1j}'', \tau_{2j}'')$ другого етапу описуються у вигляді:

$$c_{ij}''(\tau_i', \tau_j'') = \sqrt{(\tau_{1i}' - \tau_{1j}'')^2 + (\tau_{2i}' - \tau_{2j}'')^2}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}.$$

Запаси сировини рівномірно розподілені в області Ω . Для простоти вважаємо, що $\rho(x, y) = 1$. Обмеження на виробничі потужності підприємств другого етапу, задані рівними 0,2, і 0,8 відповідно.

Необхідно розбити область Ω на зони збору сировини і визначити обсяги поставок продукції від підприємств першого етапу до підприємств другого

етапу таким чином, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат (2.16) доставки сировини і готової продукції за умов (2.17) - (2.18).

На рис. В.8, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів. При цьому в якості початкових значень компонент вектор-функції $\lambda(\cdot)$ обирались наступні:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3 \\ 1, & i = 4, \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Тобто напочатку вважалось, що усі точки $x \in \Omega$ належать лише підмножині Ω_4 .

Для розв'язання поставленої задачі область Ω покривалася сіткою з кроком $h = 0,01$. Умовою припинення рахунку було виконання одного з нерівностей:

$$|I_k - I_{k-1}| \leq 10^{-6},$$

$$\|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| \leq 10^{-6}.$$

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття області Ω , представлене на рис. В.9;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.4.);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1' = 0,15; b_2' = 0,5; b_3' = 0,16; b_4' = 0,19.$$

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 0,9756$;

– значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 0,98505$.

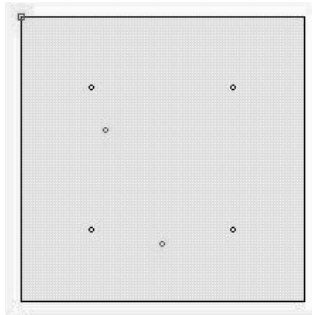


Рис. В.7. Вихідні дані модельної задачі 2

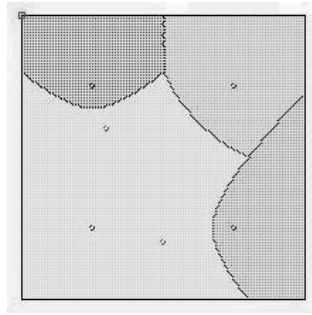


Рис. В.8. Результат розв'язання модельної задачі 2

Таблиця В.4

Обсяги перевезень, отримані при розв'язуванні модельної задачі 2

	τ_1''	τ_2''
τ_1^I	0,15	0
τ_2^I	0	0,5
τ_3^I	0	0,16
τ_4^I	0,5	0,14

Модельна задача 1г. Умови цієї задачі аналогічні задачі 1а, за виключенням місць розташування підприємств другого етапу, а саме:

$$\tau_1'' = (0,3;0,4), \tau_2'' = (0,4;0,3), \tau_3'' = (0,5;0,6)$$

На рис. В.9, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів.

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття області Ω , представлено на рис. В.10;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.5.);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,14; b_2^I = 0,31; b_3^I = 0,25; b_4^I = 0,30.$$

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 1,11259$

– значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66):
 $G^* = 1,11963.$

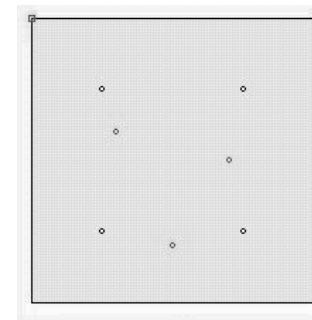


Рис. В.9 - Вихідні дані модельної задачі 2

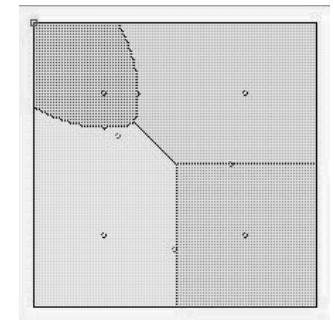


Рис. В.10. Результат розв'язання модельної задачі 2

Таблиця В.5

Обсяги перевезень, отримані при розв'язуванні модельної задачі 2

	τ_1''	τ_2''	τ_3''
τ_1^I	0,14	0	0
τ_2^I	0,06	0,25	0
τ_3^I	0	0,15	0,1
τ_4^I	0	0,	0,3

Модельна задача 1д. Умови цієї задачі аналогічні задачі 1а, за виключенням місць розташування підприємств другого етапу, а саме:

$$\tau_1'' = (0,3;0,4), \tau_2'' = (0,4;0,3), \tau_3'' = (0,3;0,5)$$

На рис. В.11, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів.

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

- оптимальне розбиття області Ω , представлено на рис. В.12;
- оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.6.);
- потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,24; b_2^I = 0,44; b_3^I = 0,16; b_4^I = 0,16.$$

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 1,0516$

– значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 1,05466$.

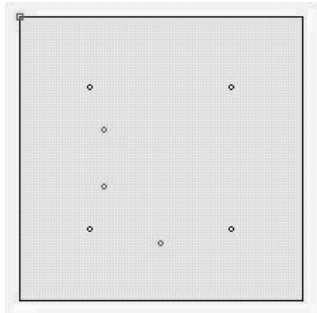


Рис.В.11. Вихідні дані модельної задачі 2

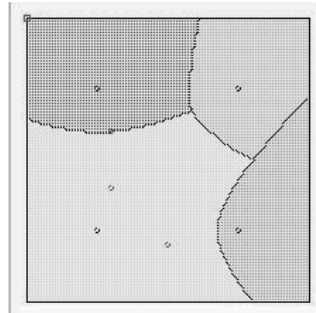


Рис. В.12. Результат розв'язання модельної задачі 2

Таблиця В.6

Обсяги перевезень, отримані при розв'язуванні модельної задачі 2

	τ_1''	τ_2''	τ_3''
τ_1^I	0,2	0	0,04
τ_2^I	0	0,08	0,36
τ_3^I	0	0,16	0
τ_4^I	0	0,16	0

Модельна задача 1е. Умові цієї задачі аналогічні задачі 1а, за виключенням місць розташування підприємств другого етапу, а саме: $\tau_1'' = (0,3;0,4)$, $\tau_2'' = (0,4;0,3)$, $\tau_3'' = (0,8;0,2)$

На рис. В.13, представлені вихідні дані, взяті для розв'язання задачі і розміщення центрів підприємств першого (кола) і другого (квадрати) етапів.

В результаті застосування описаного алгоритму були отримані наступні результати:

– оптимальне розбиття області Ω , представлено на рис. В.14;

– оптимальні обсяги перевезень (вказані в табл. В.7);

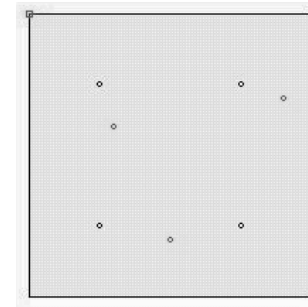


Рис. В.13. Вихідні дані модельної задачі 2

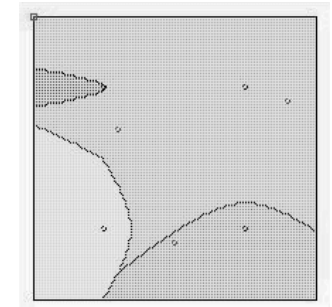


Рис. В.14. Результат розв'язання модельної задачі 2

Таблиця В.7

Обсяги перевезень, отримані при розв'язуванні модельної задачі 2

	τ_1''	τ_2''	τ_3''
τ_1^I	0,04	0	0
τ_2^I	0	0,16	0
τ_3^I	0	0,19	0
τ_4^I	0,16	0,05	0,4

– потужності підприємств першого етапу, рівні відповідно:

$$b_1^I = 0,04; b_2^I = 0,16; b_3^I = 0,19; b_4^I = 0,61.$$

– мінімальне значення цільового функціоналу, отримане за формулою (2.16): $I = 1,32187$

– значення двоїстого функціоналу, отримане за формулою (2.66): $G^* = 1,33131$.

ДОДАТОК В
ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ, ОТРИМАНІ В РЕЗУЛЬТАТІ
ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

№ експерименту Вихідні данні	Оптимальне розбиття	Оптимальні координати центрів підмножин та їх потужності																																																															
№ 73 $N = 4$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.8334</td><td>0.7285</td><td>0.2702</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.8149</td><td>0.2496</td><td>0.2419</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.3717</td><td>0.2523</td><td>0.2407</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.6242</td><td>0.7476</td><td>0.2469</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0.016000</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>0.254200</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0.245999</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>0.238999</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>0.245799</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,8731</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.8334	0.7285	0.2702	2	0.8149	0.2496	0.2419	3	0.3717	0.2523	0.2407	4	0.6242	0.7476	0.2469	x 1	x 2	V	1	1	0.016000	2	1	2	0.254200	3	2	1	0.245999	4	3	1	0.238999	5	4	2	0.245799																					
Tav	X	Y	bl																																																														
1	0.8334	0.7285	0.2702																																																														
2	0.8149	0.2496	0.2419																																																														
3	0.3717	0.2523	0.2407																																																														
4	0.6242	0.7476	0.2469																																																														
x 1	x 2	V																																																															
1	1	0.016000																																																															
2	1	2	0.254200																																																														
3	2	1	0.245999																																																														
4	3	1	0.238999																																																														
5	4	2	0.245799																																																														
№ 74 $N = 4$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.4142</td><td>0.5574</td><td>0.2755</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.7577</td><td>0.4897</td><td>0.3583</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.1275</td><td>0.7989</td><td>0.1099</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.5930</td><td>0.7514</td><td>0.2164</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.31520</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>0.35839</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0.10990</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>0.07489</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>0.14160</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,8175</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.4142	0.5574	0.2755	2	0.7577	0.4897	0.3583	3	0.1275	0.7989	0.1099	4	0.5930	0.7514	0.2164	x 1	x 2	V	1	1	1	0.31520	2	2	2	0.35839	3	3	1	0.10990	4	4	1	0.07489	5	4	2	0.14160																				
Tav	X	Y	bl																																																														
1	0.4142	0.5574	0.2755																																																														
2	0.7577	0.4897	0.3583																																																														
3	0.1275	0.7989	0.1099																																																														
4	0.5930	0.7514	0.2164																																																														
x 1	x 2	V																																																															
1	1	1	0.31520																																																														
2	2	2	0.35839																																																														
3	3	1	0.10990																																																														
4	4	1	0.07489																																																														
5	4	2	0.14160																																																														
№ 75 $N = 5$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.2786</td><td>0.3096</td><td>0.2218</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.2892</td><td>0.8551</td><td>0.0783</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.2796</td><td>0.7325</td><td>0.1126</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.5306</td><td>0.7906</td><td>0.2215</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.5230</td><td>0.3956</td><td>0.3259</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.261500</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>0.078300</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>0.112600</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>0.221599</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>0.238499</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>0.087500</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,6075</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.2786	0.3096	0.2218	2	0.2892	0.8551	0.0783	3	0.2796	0.7325	0.1126	4	0.5306	0.7906	0.2215	5	0.5230	0.3956	0.3259	x 1	x 2	V	1	1	1	0.261500	2	2	2	0.078300	3	3	2	0.112600	4	4	2	0.221599	5	5	1	0.238499	6	5	2	0.087500												
Tav	X	Y	bl																																																														
1	0.2786	0.3096	0.2218																																																														
2	0.2892	0.8551	0.0783																																																														
3	0.2796	0.7325	0.1126																																																														
4	0.5306	0.7906	0.2215																																																														
5	0.5230	0.3956	0.3259																																																														
x 1	x 2	V																																																															
1	1	1	0.261500																																																														
2	2	2	0.078300																																																														
3	3	2	0.112600																																																														
4	4	2	0.221599																																																														
5	5	1	0.238499																																																														
6	5	2	0.087500																																																														
№ 76 $N = 6$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.3753</td><td>0.7635</td><td>0.0470</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.2555</td><td>0.3577</td><td>0.2011</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.5101</td><td>0.3136</td><td>0.3240</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.3003</td><td>0.8486</td><td>0.0533</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.5451</td><td>0.7816</td><td>0.2357</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.2402</td><td>0.7579</td><td>0.0990</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0.086600</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0.175900</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0.025299</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>0.324099</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>0.053300</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>0.235799</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>0.099000</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,5243</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.3753	0.7635	0.0470	2	0.2555	0.3577	0.2011	3	0.5101	0.3136	0.3240	4	0.3003	0.8486	0.0533	5	0.5451	0.7816	0.2357	6	0.2402	0.7579	0.0990	x 1	x 2	V	1	1	2	0.086600	2	2	1	0.175900	3	2	2	0.025299	4	3	1	0.324099	5	4	2	0.053300	6	5	2	0.235799	7	6	2	0.099000				
Tav	X	Y	bl																																																														
1	0.3753	0.7635	0.0470																																																														
2	0.2555	0.3577	0.2011																																																														
3	0.5101	0.3136	0.3240																																																														
4	0.3003	0.8486	0.0533																																																														
5	0.5451	0.7816	0.2357																																																														
6	0.2402	0.7579	0.0990																																																														
x 1	x 2	V																																																															
1	1	2	0.086600																																																														
2	2	1	0.175900																																																														
3	2	2	0.025299																																																														
4	3	1	0.324099																																																														
5	4	2	0.053300																																																														
6	5	2	0.235799																																																														
7	6	2	0.099000																																																														
№ 77 $N = 6$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.8334</td><td>0.2907</td><td>0.1903</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.7787</td><td>0.5811</td><td>0.1946</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.3009</td><td>0.7420</td><td>0.2132</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.8550</td><td>0.4096</td><td>0.0544</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.8996</td><td>0.4079</td><td>0.0759</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.2587</td><td>0.5063</td><td>0.2713</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.1903000</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0.1793999</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0.0153000</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>0.2132999</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>0.0544000</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>0.0759000</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td><td>5.5511512</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>2</td><td>0.2713999</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,5896</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.8334	0.2907	0.1903	2	0.7787	0.5811	0.1946	3	0.3009	0.7420	0.2132	4	0.8550	0.4096	0.0544	5	0.8996	0.4079	0.0759	6	0.2587	0.5063	0.2713	x 1	x 2	V	1	1	1	0.1903000	2	2	1	0.1793999	3	2	2	0.0153000	4	3	2	0.2132999	5	4	1	0.0544000	6	5	1	0.0759000	7	6	1	5.5511512	8	6	2	0.2713999
Tav	X	Y	bl																																																														
1	0.8334	0.2907	0.1903																																																														
2	0.7787	0.5811	0.1946																																																														
3	0.3009	0.7420	0.2132																																																														
4	0.8550	0.4096	0.0544																																																														
5	0.8996	0.4079	0.0759																																																														
6	0.2587	0.5063	0.2713																																																														
x 1	x 2	V																																																															
1	1	1	0.1903000																																																														
2	2	1	0.1793999																																																														
3	2	2	0.0153000																																																														
4	3	2	0.2132999																																																														
5	4	1	0.0544000																																																														
6	5	1	0.0759000																																																														
7	6	1	5.5511512																																																														
8	6	2	0.2713999																																																														

№ 78 $N = 6$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.5074</td><td>0.6597</td><td>0.0764</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.6742</td><td>0.2932</td><td>0.2453</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.4287</td><td>0.2938</td><td>0.2536</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.5835</td><td>0.7944</td><td>0.0574</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.4029</td><td>0.7416</td><td>0.2165</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.7092</td><td>0.7461</td><td>0.1505</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.0755000</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>0.0009000</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0.2453999</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>0.2536999</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>0.0574000</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>0.2165999</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td><td>0.1505</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,6222</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.5074	0.6597	0.0764	2	0.6742	0.2932	0.2453	3	0.4287	0.2938	0.2536	4	0.5835	0.7944	0.0574	5	0.4029	0.7416	0.2165	6	0.7092	0.7461	0.1505	x 1	x 2	V	1	1	1	0.0755000	2	1	2	0.0009000	3	2	2	0.2453999	4	3	2	0.2536999	5	4	1	0.0574000	6	5	1	0.2165999	7	6	1	0.1505																																																																
Tav	X	Y	bl																																																																																																																										
1	0.5074	0.6597	0.0764																																																																																																																										
2	0.6742	0.2932	0.2453																																																																																																																										
3	0.4287	0.2938	0.2536																																																																																																																										
4	0.5835	0.7944	0.0574																																																																																																																										
5	0.4029	0.7416	0.2165																																																																																																																										
6	0.7092	0.7461	0.1505																																																																																																																										
x 1	x 2	V																																																																																																																											
1	1	1	0.0755000																																																																																																																										
2	1	2	0.0009000																																																																																																																										
3	2	2	0.2453999																																																																																																																										
4	3	2	0.2536999																																																																																																																										
5	4	1	0.0574000																																																																																																																										
6	5	1	0.2165999																																																																																																																										
7	6	1	0.1505																																																																																																																										
№ 79 $N = 8$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.6074</td><td>0.6882</td><td>0.0511</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.6744</td><td>0.4404</td><td>0.1111</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.5706</td><td>0.7973</td><td>0.05</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.6737</td><td>0.2448</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.4292</td><td>0.2921</td><td>0.26</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.054700000000</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0.028499999999</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0.081600000000</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>0.051800000000</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>0.156899999999</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>0.261499999999</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td><td>0.0111</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>1</td><td>0.220899999999</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>1</td><td>0.133000000000</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,6005</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.6074	0.6882	0.0511	2	0.6744	0.4404	0.1111	3	0.5706	0.7973	0.05	4	0.6737	0.2448	0.15	5	0.4292	0.2921	0.26	6	0.4411	0.9478	0.12	7	0.4411	0.9478	0.12	8	0.4411	0.9478	0.12	x 1	x 2	V	1	1	1	0.054700000000	2	2	1	0.028499999999	3	2	2	0.081600000000	4	3	1	0.051800000000	5	4	2	0.156899999999	6	5	2	0.261499999999	7	6	1	0.0111	8	7	1	0.220899999999	9	8	1	0.133000000000																																																
Tav	X	Y	bl																																																																																																																										
1	0.6074	0.6882	0.0511																																																																																																																										
2	0.6744	0.4404	0.1111																																																																																																																										
3	0.5706	0.7973	0.05																																																																																																																										
4	0.6737	0.2448	0.15																																																																																																																										
5	0.4292	0.2921	0.26																																																																																																																										
6	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
7	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
8	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
x 1	x 2	V																																																																																																																											
1	1	1	0.054700000000																																																																																																																										
2	2	1	0.028499999999																																																																																																																										
3	2	2	0.081600000000																																																																																																																										
4	3	1	0.051800000000																																																																																																																										
5	4	2	0.156899999999																																																																																																																										
6	5	2	0.261499999999																																																																																																																										
7	6	1	0.0111																																																																																																																										
8	7	1	0.220899999999																																																																																																																										
9	8	1	0.133000000000																																																																																																																										
№ 80 $N = 12$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.1480</td><td>0.7105</td><td>0.09</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.0628</td><td>0.8564</td><td>0.01</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.2650</td><td>0.8306</td><td>0.01</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.2118</td><td>0.9208</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.3085</td><td>0.7010</td><td>0.07</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0.13580</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>0.0152</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>0.0154</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>0.0041</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>0.07520</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>0.12540</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>2</td><td>0.0129</td></tr> <tr><td>8</td><td>8</td><td>2</td><td>0.0085</td></tr> <tr><td>9</td><td>9</td><td>2</td><td>0.006</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,8293</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.1480	0.7105	0.09	2	0.0628	0.8564	0.01	3	0.2650	0.8306	0.01	4	0.2118	0.9208	0.00	5	0.3085	0.7010	0.07	6	0.4411	0.9478	0.12	7	0.4411	0.9478	0.12	8	0.4411	0.9478	0.12	9	0.4411	0.9478	0.12	10	0.4411	0.9478	0.12	11	0.4411	0.9478	0.12	12	0.4411	0.9478	0.12	x 1	x 2	V	1	1	2	0.13580	2	2	2	0.0152	3	3	2	0.0154	4	4	2	0.0041	5	5	2	0.07520	6	6	2	0.12540	7	7	2	0.0129	8	8	2	0.0085	9	9	2	0.006																																
Tav	X	Y	bl																																																																																																																										
1	0.1480	0.7105	0.09																																																																																																																										
2	0.0628	0.8564	0.01																																																																																																																										
3	0.2650	0.8306	0.01																																																																																																																										
4	0.2118	0.9208	0.00																																																																																																																										
5	0.3085	0.7010	0.07																																																																																																																										
6	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
7	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
8	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
9	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
10	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
11	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
12	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
x 1	x 2	V																																																																																																																											
1	1	2	0.13580																																																																																																																										
2	2	2	0.0152																																																																																																																										
3	3	2	0.0154																																																																																																																										
4	4	2	0.0041																																																																																																																										
5	5	2	0.07520																																																																																																																										
6	6	2	0.12540																																																																																																																										
7	7	2	0.0129																																																																																																																										
8	8	2	0.0085																																																																																																																										
9	9	2	0.006																																																																																																																										
№ 81 $N = 16$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>0.6718</td><td>0.2708</td><td>0.26</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.4358</td><td>0.9243</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.3670</td><td>0.7728</td><td>0.10</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.4279</td><td>0.9596</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>15</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>16</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>17</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>18</td><td>0.4049</td><td>0.9497</td><td>0.00</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>9</td><td>1</td><td>0.0004</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>1</td><td>0.0939000</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>1</td><td>0.0047</td></tr> <tr><td>13</td><td>12</td><td>1</td><td>0.0076000</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>1</td><td>0.0084</td></tr> <tr><td>15</td><td>14</td><td>1</td><td>0.0031</td></tr> <tr><td>16</td><td>15</td><td>1</td><td>0.1804999</td></tr> <tr><td>17</td><td>16</td><td>1</td><td>0.0200999</td></tr> <tr><td>18</td><td>16</td><td>2</td><td>7.2858368</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,6625</p>	Tav	X	Y	bl	5	0.6718	0.2708	0.26	6	0.4358	0.9243	0.00	7	0.3670	0.7728	0.10	8	0.4279	0.9596	0.00	9	0.4049	0.9497	0.00	10	0.4049	0.9497	0.00	11	0.4049	0.9497	0.00	12	0.4049	0.9497	0.00	13	0.4049	0.9497	0.00	14	0.4049	0.9497	0.00	15	0.4049	0.9497	0.00	16	0.4049	0.9497	0.00	17	0.4049	0.9497	0.00	18	0.4049	0.9497	0.00	x 1	x 2	V	10	9	1	0.0004	11	10	1	0.0939000	12	11	1	0.0047	13	12	1	0.0076000	14	13	1	0.0084	15	14	1	0.0031	16	15	1	0.1804999	17	16	1	0.0200999	18	16	2	7.2858368																								
Tav	X	Y	bl																																																																																																																										
5	0.6718	0.2708	0.26																																																																																																																										
6	0.4358	0.9243	0.00																																																																																																																										
7	0.3670	0.7728	0.10																																																																																																																										
8	0.4279	0.9596	0.00																																																																																																																										
9	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
10	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
11	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
12	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
13	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
14	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
15	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
16	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
17	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
18	0.4049	0.9497	0.00																																																																																																																										
x 1	x 2	V																																																																																																																											
10	9	1	0.0004																																																																																																																										
11	10	1	0.0939000																																																																																																																										
12	11	1	0.0047																																																																																																																										
13	12	1	0.0076000																																																																																																																										
14	13	1	0.0084																																																																																																																										
15	14	1	0.0031																																																																																																																										
16	15	1	0.1804999																																																																																																																										
17	16	1	0.0200999																																																																																																																										
18	16	2	7.2858368																																																																																																																										
№ 82 $N = 20$; $b_j'' = 0.5, j = \overline{1,2}$		<table border="1"> <thead> <tr><th>Tav</th><th>X</th><th>Y</th><th>bl</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.4975</td><td>0.2397</td><td>0.02</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.4715</td><td>0.2852</td><td>0.01</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.5085</td><td>0.4451</td><td>0.06</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.3622</td><td>0.8206</td><td>0.09</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.5468</td><td>0.1854</td><td>0.04</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>15</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>16</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>17</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>18</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>19</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> <tr><td>20</td><td>0.4411</td><td>0.9478</td><td>0.12</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>x 1</th><th>x 2</th><th>V</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.02409999</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0.0111</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0.04060000</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>0.02039999</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>0.09080000</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>0.04350000</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td><td>0.00830000</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>1</td><td>0.08130000</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>2</td><td>0.11940000</td></tr> </tbody> </table> <p>I=0,4334</p>	Tav	X	Y	bl	1	0.4975	0.2397	0.02	2	0.4715	0.2852	0.01	3	0.5085	0.4451	0.06	4	0.3622	0.8206	0.09	5	0.5468	0.1854	0.04	6	0.4411	0.9478	0.12	7	0.4411	0.9478	0.12	8	0.4411	0.9478	0.12	9	0.4411	0.9478	0.12	10	0.4411	0.9478	0.12	11	0.4411	0.9478	0.12	12	0.4411	0.9478	0.12	13	0.4411	0.9478	0.12	14	0.4411	0.9478	0.12	15	0.4411	0.9478	0.12	16	0.4411	0.9478	0.12	17	0.4411	0.9478	0.12	18	0.4411	0.9478	0.12	19	0.4411	0.9478	0.12	20	0.4411	0.9478	0.12	x 1	x 2	V	1	1	1	0.02409999	2	2	1	0.0111	3	3	1	0.04060000	4	3	2	0.02039999	5	4	2	0.09080000	6	5	1	0.04350000	7	6	1	0.00830000	8	7	1	0.08130000	9	8	2	0.11940000
Tav	X	Y	bl																																																																																																																										
1	0.4975	0.2397	0.02																																																																																																																										
2	0.4715	0.2852	0.01																																																																																																																										
3	0.5085	0.4451	0.06																																																																																																																										
4	0.3622	0.8206	0.09																																																																																																																										
5	0.5468	0.1854	0.04																																																																																																																										
6	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
7	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
8	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
9	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
10	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
11	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
12	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
13	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
14	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
15	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
16	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
17	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
18	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
19	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
20	0.4411	0.9478	0.12																																																																																																																										
x 1	x 2	V																																																																																																																											
1	1	1	0.02409999																																																																																																																										
2	2	1	0.0111																																																																																																																										
3	3	1	0.04060000																																																																																																																										
4	3	2	0.02039999																																																																																																																										
5	4	2	0.09080000																																																																																																																										
6	5	1	0.04350000																																																																																																																										
7	6	1	0.00830000																																																																																																																										
8	7	1	0.08130000																																																																																																																										
9	8	2	0.11940000																																																																																																																										

Ольга Дмитрівна **Станіна**
Світлана Альбертівна **Ус**
Лариса Сергіївна **Коряшкіна**

**МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ДВОЕТАПНОГО
ВИРОБНИЦТВА З НЕПЕРЕРВНО РОЗПОДІЛЕНИМ
РЕСУРСОМ**

Монографія

Авторська редакція

Підп. до друку 30.11.2021. Формат 30x42/4.
Папір офсетн. Ризографія. Ум. друк. арк. 11,7.
Обл.-вид. арк. 12,8. Наклад 100 прим.
Замовлення № 5102/489.

Видавець «Свідлер А.Л.»
49041, м. Дніпро, а/с 2493, тел. +38 (067) 635-78-83
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи:
Серія ДК № 3876 від 10.09.2010 р.
Надруковано в типографії видавця «Свідлер А.Л.»
<http://garant-sv.com.ua>