УДК 621.89+512.24.001

И. Н. Пистунов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛП$_t$ - РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ И АНАЛИЗЕ ТРИБОТЕХНИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Увеличение сложности задач, встающих перед триботехникой в настоящее время, требует от теории планирования эксперимента разработки новых, более сложных планов (в основном смешанных, качественно-количественных), а от теории экспериментального поиска—надежного и быстрого отыскания в указанном диапазоне экстремумов функции со множеством вершин. Решение этих задач, на наш взгляд, можно найти, используя равномерное распределение. Разработанное И. М. Соболем [1] ЛП$_t$-распределение для равномерного заполнения многомерного куба обладает следующими свойствами:

1) характеристики равномерности заполнения гиперпространства являются наилучшими среди всех известных в настоящее время равномерно распределенных последовательностей;

2) каждая последующая точка ЛП$_t$-последовательности не нарушает, а улучшает равномерность заполнения гиперпространства.

Порядок расчета чисел ЛП$_t$-распределения заключается [2] в указании очередного номера точки последовательности **i**, *размерности гиперпространства* N *и в использовании функций выделения целой* Int *и дробной* Dec *части числа, а также заранее рассчитанной таблицы Т. Тогда* **j**-*я координата гиперпространства* $(1 \le j \le N)$ *будет найдена из выражения*

$$z_{ii} = \sum_{k=1}^{L_i}\sum_{l=k}^{L_i} \mathrm{int}\left[2Dec\left(T^{l+1-k}_{i,\frac{l}{2}}\right)\right] \times \mathrm{int}\left[2Dec\left(T^{l}_{i,\frac{l}{2}}\right)\right] \qquad (1)$$

$$L_i = 1 + \mathrm{int}(\log_2^{\,i}) \qquad (2)$$

На рис. 1 дано графическое представление двумерного ЛП$_t$ - распределения в диапазоне [0; I].

Планирование экспериментов. *Несмотря на неслучайный алгоритм получения чисел ЛП$_t$ - распределения, они имеют весьма* *низкий коэффициент корреляции. Поэтому с учетом других свойств планы, основанные на этих последовательностях, соответствуют принципу ортогональности, ротатабельности и композиционности [3].*

Рассмотрим случай построения плана для N качественных факторов, расположенных на M уровнях гиперпространства J. Обычно M=3 для линейного плана (когда x_i= - 1; 0; +1) или M=5 для нелинейного плана эксперимента (когда x_i = - a; -1; 0; +1; a). Нумерация уровней находится в диапазоне [1; M]. Введя функцию округления до целого Rnd и применяя (1)—(2), получим значение i-й точки плана для j-и переменной

$$x_{ii} = Rnd(1 + z_{ii} M) \qquad (3)$$

Пример такого плана приведен в табл. 1, где показаны варианты полимерной композиции, состоящей из основы и пяти видов присадок, относящихся к различным классам веществ (X_1 — медьсодержащее, X_2 — поверхностно-активное, x_3 — пластификатор, x_4 — углеродсодержащее, x_5—содержащее дисульфид молибдена). В каждом классе было взято семь веществ, т.е. N=5; M=7. Здесь значение x_i - номер вещества в t-м классе. Использование греко-латинского квадрата потребовало бы 49 экспериментов при негарантированном определении оптимального сочетания веществ. Для ЛП$_\tau$-распределения уже первые 20 точек обеспечивают равномерное сочетание различных веществ.

В более сложном случае при составлении плана типа «состав — свойство» необходимо определить не только количественные уровни пла-

Рис. 1. Пример двумерного ЛП$_{\tau}$-распределения в диапазоне 0...1. Число соответствует номеру точки в распределении, а положение точки — ее координатам

на для различных веществ, но и одновременно выбрать сочетание веществ, относящихся к различным классам (например, медьсодержащие, поверхностно-активные и т.д.), т.е. возникает задача смешанного качественно-количественного плана .
Обозначим через N число качественных факторов, для каждого из которых существует M_j значений уровня ($1 \le j \le N$) и, кроме того, заданы минимальные A_{minj} и максимальные A_{maxj} значения количественных изменении j-х факторов. Тогда план эксперимента определяется из выражения

$$X_{i,i,Rnd(1+x_{ii}M)} = \left[A_{\max i} - z_{li} \times \left(A_{\max i} - A_{\min i}\right)\right] \qquad (4)$$

где l—текущий номер точки последовательности (l ¹ 1), определяющий уровни изменения параметров, в диапазоне [A_{minj}; A_{maxj}]

Таблица №1. План экспериментов для пяти качественных факторов, расположенных на семи уровнях

№ п/п	ФАКТОРЫ				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	4	4	4	4	4
2	3	6	3	6	3
3	6	3	6	3	6
4	2	5	6	6	5
5	5	2	3	3	2
6	3	3	5	2	6
7	6	6	2	5	3
8	1	7	5	3	2
9	4	4	2	6	5
10	3	2	7	4	4
11	6	5	4	1	7
12	2	3	3	5	4
13	5	6	6	2	1
14	4	4	1	4	6
15	7	1	4	7	3

16	*1*	*4*	*3*	*2*	*4*
17	*4*	*1*	*6*	*5*	*7*
18	*3*	*3*	*2*	*7*	*2*
19	*6*	*6*	*5*	*4*	*5*
20	*2*	*2*	*4*	*6*	*6*

Использование $ЛП_\tau$ *распределения*

Таблица №2 ***План эксперимента для трех качественных факторов***

№ п/п	*Качественные факторы*								
	X_1			X_2			X_3		
	Количественные факторы			*Количественные факторы*			*Количественные факторы*		
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{31}	X_{32}	X_{33}
1	-	-	*5,25*	-	-	*3,00*	-	*30,00*	-
2	-	-	*2,88*	-	-	*3,50*	-	*20,00*	-
3	-	-	*7,63*	-	-	*2,50*	-	*40,00*	-
4	-	-	*1,96*	-	-	*3,25*	-	*45,00*	-
5	-	-	*6,44*	-	-	*2,25*	-	*25,00*	-
6	-	*4,06*	-	-	-	*2,75*	-	*35,00*	-
7	-	*8,81*	-	-	-	*3,75*	-	*15,00*	-
8	-	*1,09*	-	-	-	*4,88*	-	*37,50*	-
9	-	*5,84*	-	-	-	*2,88*	-	*17,50*	-
10	-	*3,47*	-	-	-	*2,38*	-	*47,50*	-
11	-	-	*8,22*	-	*3,38*	-	-	-	*27,50*
12	-	-	*2,28*	-	*2,63*	-	-	-	*22,50*
13	-	-	*7,03*	-	*3,63*	-	-	-	*42,50*
14	-	-	*4,66*	-	*3,13*	-	-	-	*12,50*
15	-	-	*9,41*	-	*2,13*	-	-	-	*32,50*
16	*0,80*	-	-	-	-	*3,06*	-	-	*26, 25*
17	*5,55*	-	-	-	-	*2,06*	-	-	*46,25*
18	*3,17*	-	-	-	-	*2,56*	-	-	*16,25*
19	*7,92*	-	-	-	-	*3,56*	-	-	*36,25*
20	*1,98*	-	-	-	-	*2,31*	-	-	*31,25*
21	-	-	*6,73*	-	*3,31*	-	-	*11,25*	-
22	-	-	*4,36*	-	*3,81*	-	-	*41,25*	-
23	-	-	*9,11*	-	*2,81*	-	-	*21,25*	-
24	-	-	*1,39*	-	*3,94*	-	-	*43,75*	-

25	-	-	*6,14*	-	*3,44*	-	-	*23,75*	-
26	-	*3,77*	-	-	*2,44*	-	-	*33,75*	-
27	-	*8,52*	-	-	*3,69*	-	-	*13,75*	-
28	-	*2,58*	-	-	*2,69*	-	-	*18,75*	-
29	-	*7,33*	-	-	*2,19*	-	-	*38,75*	-
30	-	*4,95*	-	-	-	-	-	*28,75*	-
31	-	-	-	*9.70*	-	*3,19*	*48,75*	-	-
32	-	-	-	*0,65*	-	*3,59*	*48,13*	-	-
33	-	-	-	*3,40*	-	*2,59*	*28,13*	-	-
34	-	-	-	*3,02*	-	*2,09*	*38,13*	-	-
35	-	-	-	*7,77*	-	*3,09*	*18,13*	-	-

Примечание. Качественный фактор x_1 имеет четыре уровня, x_2-2,x_3-три уровня. Каждый качественный уровень имеет количественное распределение в диапазоне: x_1-0….10%; x_2 – 0….4%; x_3 – 0…50%

Здесь третий индекс определяет номер вещества в j-и группе. Для остальных веществ в этой группе количественный уровень равен нулю. Пример плана дан в табл. 2. Здесь определяется сочетание веществ трех классов (см. выше) как присядки к фенилону, причем в качестве медьсодержащих выбраны четыре вещества (x_{11}—X14), поверхностно-активных - два вещества (x_{21} и X_2) и пластификатора—три вещества (X_{21} - x_{22}). Для всех классов веществ выбирается пять точек количественных значений, находящихся в диапазоне: для x_1 —-0...10% общем массы; x_2—0...4; x_3 _ О...50%. Отсутствие процентного содержания какого-либо вещества в таблице означает, что в данном эксперименте оно не участвует.

Выражение (4) определяет наиболее общий случай планов такого типа. Оно допускает построения более сложных сочетаний факторов, в которых некоторые факторы могут иметь как чисто качественное или количественное, так и смешанное значение. При этом в нервом случае необходимо задать M_j=1, A_{minj} = 1, A_{maxj} = M и применить функцию Rnd к правой части выражения, а во втором—только M_j=1. В табл. 3 дан пример такого плана. В этом случае для 1-го и 2-го класса выбраны по одному веществу, процент прибавки которого не превышает 1. Для 3-го класса выбраны четыре вещества, а для 4-го — три, тоже с процентом содержания не более 1. Два последних фактора — это давление и скорость (имеющие пять фиксированных уровней изменения, от — -a до +a). Анализ полученных результатов показывает не только возможность впервые получить планы такого типа, но и возможность снижения числа экспериментов для качественных планов перед существующим ранее для числа факторов свыше 10 без снижения равномерности распределения.

Построение аппроксимирующих зависимостей для приведенных планов вызывает затруднения в применении обычных методов теории планирования эксперимента [4], поскольку параболические кривые не всегда описывают равномерное распределение точек плана. Поэтому целесообразнее применять метод пошаговой регрессии [5], который, сохраняя

Т а б л и ц а № 3 . ***Смешанный качественно-количественный план***

№ п/п	*Факторы*										
	количественные		*Качественно-количественные*							*качественные*	
	X_1	X_2	X_3				X_4			X_5	X_6
			X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{41}	X_{42}	X_{43}		
1	0,50	0,50	-	-	0,50	-	-	0,50	-	3,00	3,00
2	0,25	0,75	-	-	0,25	-	-	0,75	-	2,00	4,00
3	0,75	0,25	-	-	0,75	-	-	0,25	-	4,00	2,00
4	0,13	0,63	-	-	0,88	-	-	0,88	-	4,00	2,00
5	0,63	0,13	-	-	0,38	-	-	0,38	-	2,00	4,00
6	0,38	0,38	-	0,63	-	-	-	-	0,13	5,00	5,00
7	0,88	0,88	-	0,13	-	-	-	-	0,63	3,00	3,00
8	0,06	0,94	-	0,69	-	-	-	-	0,31	3,00	1,00
9	0,56	0,44	-	0,19	-	-	-	-	0,81	4,00	3,00
10	0,31	0,19	-	0,94	-	-	-	-	0,56	3,00	4,00
11	0,81	0,69	-	-	0,44	-	-	0,06	-	5,00	2,00
12	0,19	0,31	-	-	0,31	-	-	0,69	-	3,00	2,00
13	0,69	0,81	-	-	0,81	-	-	0,19	-	1,00	4,00
14	0,44	0,56	-	-	0,06	-	-	0,44	-	4,00	5,00
15	0,94	0,06	-	-	0,56	-	-	0,94	-	2,00	3,00
16	0,03	0,53	-	-	-	0,41	-	-	0,22	3,00	2,00

17	*0,53*	*0,03*	-	-	-	*0,91*	-	-	*0,72*	*5,00*	*4,00*
18	*0,34*	*0,72*	-	-	*0,59*	-	*0,66*	-	-	*1,00*	*3,00*
19	*0,84*	*0,22*	-	-	*0,09*	-	*0,16*	-	-	*3,00*	*1,00*
20	*0,22*	*0,84*	-	-	*0,22*	-	*0,53*	-	-	*5,00*	*3,00*
21	*0,72*	*0,34*	-	-	*0,72*	-	*0,03*	-	-	*3,00*	*5,00*
22	*0,47*	*0,09*	-	-	*0,47*	-	*0,28*	-	-	*4,00*	*4,00*
23	*0,97*	*0,39*	*0,97*	-	-	-	-	*0,78*	-	*4,00*	*5,00*
24	*0,02*	*0,80*	*0,95*	-	-	-	-	*0,67*	-	*4,00*	*5,00*
25	*0,52*	*0,30*	*0,45*	-	-	-	-	*0,17*	-	*2,00*	*3,00*
26	*0,27*	*0,05*	*0,70*	-	-	-	-	*0,42*	-	*3,00*	*2,00*
27	*0,77*	*0,55*	*0,20*	-	-	-	-	*0,92*	-	*1,00*	*4,00*

Примечание. Диапазон количественных факторов x_1 и X_2 составляет 0…1; качественные уровни качественно-количественных факторов x_3 – 4 и x_4 – 3 изменяются от 0 до 1; качественные факторы x_5 и x_6 изменяются на пяти качественных уровнях.

принцип минимума суммы относительных ошибок оценок, включает в построение зависимости наиболее значимые факторы в убывающем порядке. Критерием значимости служит степень уменьшения сумм квадратов разностей расчетного и экспериментальных значений зависимого фактора. При этом производится пересчет коэффициентов при ранее введенных в функцию отклика факторах. Позднее этот метод был дополнен для обеспечения построения гиперболической, параболической, экспоненциальной зависимостей или их сочетаний [6]. Методика планирования была использована для разработки группы антифрикционных материалов на основе фенилона [7] и обеспечила снижение объема экспериментов по сравнению с греко-латинскими квадратами более чем и 2 раза, с выходом па оптимум добавок.

Поиск экстремума. *Для зависимостей, имеющих множество экстремумов, методы их поиска, основывающиеся на движении в наиболее крутом направлении склона поверхности отклика, практически не применимы, так как результат расчета зависит от первоначальной выбранной точки поиска. В этих условиях* *целесообразнее использовать методы глобального поиска экстремума, где всю область существования «засевают» пробными точками [2], как это показано па рис. 1. При достаточно большом количестве этих точек экстремум может быть найден немедленно. Однако вероятность такого события достаточно низка. Применение чисел ЛПt -последовательности позволяет повысить эту вероятность. Сочетание этих чисел с методом половинного деления |5| позволяет легко решать задачу поиска экстремума для самых сложных зависимостей.*

Пусть существует поверхность отклика

$$y = y\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots, x_N)$$

$1 \le j \le N$, для которой заданы границы существования независимых не ременных $x_j [A_{minj}$ и $A_{vaxj}]$. Задавая множество M значений независимых параметров X_{ij} $(1 \le I \le M)$, получим множество значений функции отклика y_i. Проведем разбиение области существования каждой независимой переменной на две:

$$B_i = \left[A_{\min i}; \frac{A_{\max i} - A_{\min i}}{2} \right]$$

$$C_i = \left[\frac{A_{\max i} - A_{\min i}}{3}; A_{\max i} \right]$$

Введем правила сужения области поиска

$$A_{\min i} = \begin{cases} A_{\min i}; \textit{если}\_\min(y_i) \in B_i \\ \dfrac{A_{\max i} - A_{\min i}}{2}, \textit{если}\_\min(y_i) \in C_i \end{cases}$$

(5)

$$A_{\max i} = \begin{cases} \dfrac{A_{\max i} - A_{\min i}}{2}, \textit{если}\_\min(y_i) \in B_i \\ A_{\max i}, \textit{если}\_\min(y_i) \in C_i \end{cases}$$

(6)

После чего снова производится набор точек y_i в уменьшенной области поиска и так до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность поиска ε, т. е. чтобы

$$\varepsilon \geq \left|\frac{A_{\min i} - A_{\min i}}{A_{\min i}}\right| \qquad (7)$$

В качестве примера покажем поиск минимума функции $y=\left(1-e^{-3x}\right)\sin 4\pi x+1$ в диапазоне [0; 1]] (рис. 2). Эта функция была выбрана для демонстрации преимуществ метода, поскольку она расположен;) в первом квадрате и имеет на указанном диапазоне три локальных минимума. Такие функции отклика могут иметь многокритериальные задачи в машиностроении [2].

После первого этапа поиска область X была сужена вдвое в диапазоне |0,5; 1]. Второй этап поиска дал выбор диапазона [0,75; 1], третий— [0,75; 0,875] и т. д. В табл. 4 показано преимущество чисел ЛП$_i$,-

распределения перед равномерными распределениями той же функции. Разбиение на семь равномерных интервалов дает минимум в диапазоне [0; 0,5], т. е. найден локальный минимум, а такое же количество чисел ЛП$_i$ сразу указывает значение y_i, близкое к глобальному минимуму.

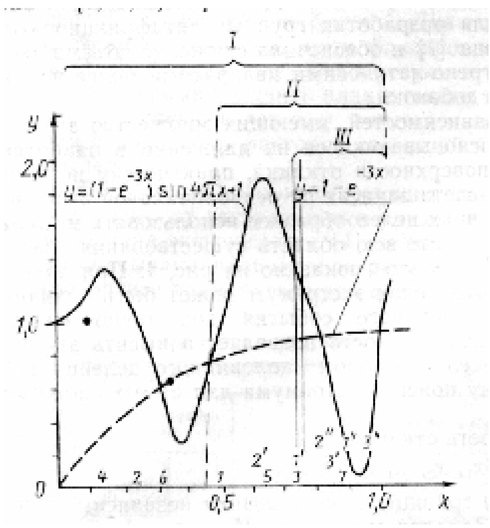

Рис. 2. Пример поиска минимума функции $y=\left(1-e^{-3x}\right)\sin 4\pi x+1$ методом половинного деления с использованием ЛП$_i$ -распределения: /, //, ///—этапы поиска минимума. Цифры вдоль оси абсцисс—номера значений x, полученных

согласно ЛП$_i$ -распределению на 1 этапе; цифры со штрихом—на // этапе; с двумя штрихами — на ///

По предложенным методикам разработаны программы для ЭВМ ЕС-1036 на FORTRAN. Численные эксперименты показали, что время поиска минимума возрастает пропорционально количеству факторов, а для других методов время расчета пропорционально квадрату числа факторов, т. с. получен выигрыш во времени на 15...50% для числа факторов 6—12. Это время может быть еще уменьшено, если воспользоваться правилом

$$M = (15...30)N, \tag{8}$$

для первого засевания области существования х, с уменьшением этого

числа по правилу

$$M_i = [1-(0,01\ldots0,1)i]M \tag{9}$$

Время, необходимое для построения табл. 1—3, не превышало 40 с для параллельного режима с расчетом выведения каждой строки плана.

Таблица №4. Значения функции $y=\left(1-e^{-3x}\right)\sin 4px+1$ *при равномерном распределении и при ЛП$_i$ – распределении*

№ п/п	Равномерное распределение		ЛП$_i$ - распределение	
	x	y	x	Y
1	0	1	0,5	0,9
2	0,17	1,2	0,25	1,0
3	0,33	0,44	0,75	1,2
4	0,5	0,95	0,13	1,3
5	0,67	1,88	0,63	1,83

6	*0,83*	*0,83*	*0,30*	*1,32*
7	*1,00*	*1,00*	*0,88*	*0,3*

Обозначения

Int—функция выделения целой части числа; Dec—функция выделения дробной части числа; Rnd—функция округления числа до целого; Т—двумерная таблица чисел И. М. Соболя; N—размерность гиперпространства (количество факторов); M_j - количество уровней изменения /-го фактора; z_{ij} – ЛПt - число с порядковым номером i для фактора j; x_{ij} - j -и фактор планирования эксперимента (1 ≤ I ≤ N) для i-го уровня (1 ≤ j ≤ N); L_i—наибольший номер столбца таблицы Т для i-й точки плана;
а—численное значение уровней факторов для «звездных точек» в теории планирования экспериментов [4]; i—номер точки плана; j—номер координаты гиперпространства; k, I—переменные параметры функции суммирования.

Summary

Possibility is shown of the use of ЛПt -distribution for the planning of tribotechnical experiment in the case of qualitative, quantitative and combined plans and for searching of function minimum after mathematical approximation of the results obtained.

Литература

1. Соболь И. М. *Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. М.. 1985.*
2. Соболь И. М., Статников Р. Б. *Наилучшие решения — где их искать. М., 1982.*
3. Зедгинидзе И. Г. *Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М., 1976.*
4. Евдокимов Ю. *А.,* ***Колесников В. Н., Тетерин А. Н.*** *Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. М., 1980.*
5. Химмельблау Д. *Анализ процессов статистическими методами. М., 1973.*
6. Пистунов И. Н., Чичинадзе А. В., Казимиров И. П. *и др. // Пробл. трения и изнашивания, 1987. Вып. 32. С. 3—7.*
7. Пистунов И. Н., Лымарь В. В. *// Триботехнические испытания в проблеме качества материалов и конструкций: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. М., 1989. С. 154—155.*

Днепропетровское НПО «Дніпро» *23. 02. 90*