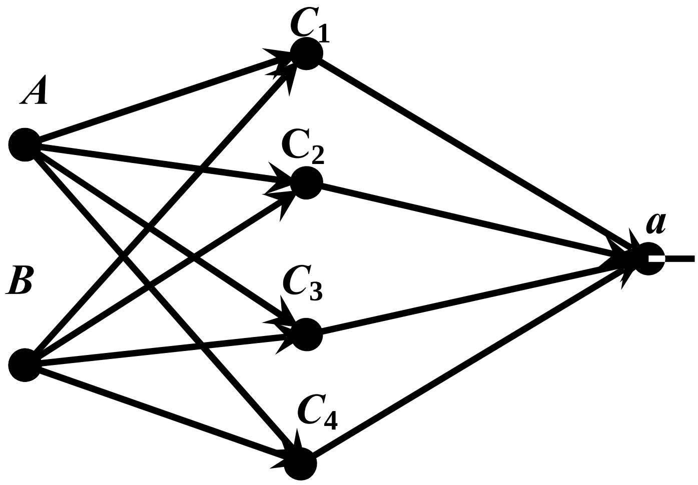
І.М. Пістунов, І.Ю. Турчанинова,
О.П. Антонюк

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ



$$y^* = \arg\min\{ f(y) : y \in Q \}$$

2008
Дніпропетровськ

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

До 110 річчя НГУ

І.М. Пістунов, І.Ю. Турчанінова, О.П. Антонюк

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ

(Навчальний посібник)

Дніпропетровськ
НГУ
2008

УДК 368.01 (075):51-7(075)
БКК 605.271
П34

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник по дисципліні "Економко-математичне моделювання та методи прийняття рішень” для студентів очної та заочної форм навчання зі спеціальності 8.050102 “Економічна кібернетика” (Протокол № від).

Рецензенти:
Н.К. Васильєва, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій (Дніпропетровський державний аграрний університет);
Б.І. Мороз, д-р. техн. наук, проф., начальник кафедри інформаційних систем і технологій (Академія митної служби України).

Пістунов І.М., Турчанінова І.Ю., Антонюк О.П.
П34 Методи прийняття управлінських рішень в економіці: Навч. посібник – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2008.– 120 с.

Подано теорію експертних оцінок, методи математичного програмування, прийоми прогнозування економічних процесів, методи імітаційного моделювання при вирішенні задач прийняття рішень.

Посібник містить приклади вирішення задач із застосування пакету Open Office вільного програмного забезпечення.

В посібнику подано завдання для самостійного вирішення, тому він може слугувати і як посібник для практичних чи лабораторних занять із застосуванням комп’ютерної техніки.

Призначено для студентів вищих учбових закладів і може бути корисним для економістів, плановиків, менеджерів та маркетологів.

Посібнику базується на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів та на досвіді викладання дисципліни „Економкоматематичне моделювання та методи прийняття рішень” в Національному гірничому університеті.

БКК 605.271

ЗМІСТ

ВСТУП

Процеси ухвалення рішень, що розуміються як вибір однієї з декількох можливих альтернатив, пронизують все людське життя.

Як правило, ці проблеми мають винятковий характер, що не повторюється, і пов'язані з розглядом цілого ряду альтернатив. У таких проблемах новим є або об'єкт вибору, або обстановка, в якій скоюється вибір. Такі проблеми ухвалення рішень називаються проблемами унікального вибору. Існує безліч різних проблем унікального вибору.

Найхарактернішими проблемами раціонального вибору є проблеми, що виникають перед людьми, що працюють в різних адміністративних службах, при управлінні організаціями і сукупністю організацій. Будь-який співробітник адміністративного апарату зобов'язаний бути раціональним хоча б для того, щоб мати нагоду пояснити іншим логічні підстави свого вибору. Проблеми раціонального вибору в унікальних ситуаціях, характерних для адміністративної діяльності (вибір плану капіталовкладень, вибір проектів проведення наукових досліджень і розробок, вибір плану виробництва виробів, вибір перспективного плану розвитку підприємства і ін.) завжди цікавили багато фахівців і дослідників.

Список подібних проблем досить широкий, але всі вони мають наступні загальні риси: - унікальність, не повторюваність ситуації вибору; - складний для оцінки характер даних альтернатив; - недостатня визначеність наслідків ухвалених рішень; - наявність сукупності різнорідних чинників, які слід взяти до уваги; - наявність особи або групи осіб, відповідальних за ухвалення рішень.

Проблеми раціонального вибору в унікальних ситуаціях існували завжди, але з ряду причин в останні десятиліття важливість їх значно зросла. Перш за все, різко зріс динамізм навколишнього середовища і зменшився період часу, коли ухвалені раніше рішення залишаються правильними. По-друге, розвиток науки і техніка привів до появи великого числа альтернативних варіантів вибору. По-третє, зросла складність кожного з варіантів, ухвалених рішень. Почетверте, збільшилася взаємозалежність різних рішень і їх наслідків. В результаті всього цього різко зросли труднощі раціонального рішення проблем унікального вибору. Ці проблеми істотно ускладнилися, і люди, керівники організацій, зустрічаються з ними все частіше. В майбутньому можна чекати ще більшої різноманітності важких і відповідальних проблем унікального вибору. Як же звичайно розв'язуються такі проблеми? З історії ми знаємо, що досвідчених керівників відрізняє уміння найкращим чином використовувати свій досвід і інтуїцію. У ситуаціях ухвалення унікальних рішень завжди існує брак інформації, покрити який можна лише вірою в одну з можливих гіпотез.

Раціональні рішення визначаються в процесі оптимізації. Під оптимізацією управлінських рішень розуміють вибір найбільш ефективного варіанту рішення із можливих альтернатив.

У найбільш загальному вигляді функцію оптимізації можна представити як

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

де **y** – параметр, за яким проводиться оптимізація; $\mathbf{x_1, x_2, \dots x_n}$ – варіанти рішень (альтернативи).

Параметр **у** може виступати у вигляді прибутку, обсягу робіт тощо, а варіанти рішень **х** визначаються ресурсами, організацією праці, виробничою площею тощо.

Наука управління використовується з метою розв'язання наступних завдань:

- регулювання транспортних потоків в містах;
- оптимізація графіку руху в аеропортах;
- складання розкладу при розв'язанні різних завдань;
- управління запасами на підприємствах, в організаціях;
- розробка нових видів продукції;
- розподіл витрат на рекламу різних видів продукції;
- оптимізація чисельності допоміжного персоналу у структурі управління;
- планування матеріального забезпечення та постачання;
- розподіл обладнання для різних видів виробництва;
- розподіл трудових ресурсів;
- розкрій матеріалу (листового металу, тканини тощо);
- оптимізація обсягів виробництва та послуг.

Згідно з положенням американського менеджменту наука управління як механізм оптимізації рішень може реалізовуватись з допомогою наступних підходів:

1. Застосування наукового методу.
2. Використання системної орієнтації.
3. Застосування моделей.

Науковий метод оптимізації управлінських рішень передбачає застосування схеми. Так в процесі оптимізації величини запасів на першому етапі збирається та аналізується інформація про попит, на другому – встановлюється вплив росту запасів на попит і визначається у вигляді гіпотези оптимальна величина запасів. Після третього етапу, який забезпечує процес перевірки гіпотези, можливі два варіанти:

1. Реалізація рішення, якщо гіпотеза вірна (четвертий етап).
2. Повернення з допомогою зворотного зв'язку на етап спостереження (перший етап), якщо гіпотеза не вірна.

В останньому випадку пошук оптимального варіанту продовжується.

Системна орієнтація в процесі оптимізації рішень базується на тому, що організація є відкритою системою, яка складається з взаємопов'язаних частин. В процесі своєї діяльності організація обробляє входи (ресурси, інформацію тощо), перетворюючи їх в продукцію, послуги, прибуток та ін. На основі вивчення цього процесу і здійснюється підбір найбільш ефективного варіанту рішення.

Використання моделей дозволяє приймати рішення, при обґрунтуванні яких враховуються всі фактори і альтернативи, що виникають в складних умовах виробничо-господарської діяльності. Тому моделювання розглядається як найефективніший спосіб оптимізації управлінських рішень.

1. ПРИНЦИПИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

В розділі розглядається повний цикл економіко-математичного моделювання, його методологічні основи, класифікація моделей.

1.1. Економіко-математичне моделювання як метод наукового пізнання

Моделювання в наукових дослідженнях стало застосовуватися в глибокій старовині, поступово захоплюючи всі нові області наукових знань: технічне конструювання, будівництво і архітектуру, астрономію, фізику, хімію, біологію і, нарешті, суспільні науки. Великі успіхи і визнання практично у всіх галузях сучасної науки приніс методу моделювання - XX вік. Проте методологія моделювання довгий час розвивалася незалежно окремими науками. Відсутня єдина система понять, єдина термінологія. Лише поступово стала усвідомлюватися роль моделювання як універсального методу наукового пізнання.

Термін модель широко використовується в різних сферах людської діяльності і має безліч смислових значень.

Модель – це відображення в схемі, формулі, взірці, тощо характерних ознак об'єкту, який досліджується. Вона є спрощеною життєвою (управлінською) ситуацією, іншими словами в моделях певним чином відображаються реальні події, обставини тощо.

Відрізняються такі моделі:

- фізичні. Вони відображають збільшення або зменшення описання об'єкту;
- аналогові. Ці моделі ведуть себе так як реальні об'єкти, але зовнішньо вони не схожі на них;
- математичні (символічні). Для опису властивостей або характеристик об'єкту використовують символи.

Світова практика виробила певний порядок розробки моделей. Найдоцільніше застосовувати наступний процес їх побудови:

1. Постановка завдання.
2. Формування моделі.
3. Перевірка моделі на достовірність.
4. Використання моделі.
5. Відновлення моделі.

В процесі перевірки, використання та відновлення моделей слід враховувати похибки, які знижують їх ефективність:

- недостовірні вхідні умови (припущення);
- інформаційні обмеження;

- страх користувачів;
- недостатня практична перевірка;
- надмірно висока вартість побудови;
- недостатнє врахування чинних факторів тощо.

Найбільш розповсюджені способи моделювання:

1. Теорія ігор. Моделює вплив прийнятого рішення на конкурентів. Ця теорія найперше розроблялась військовими.
2. Теорія черг. Визначає оптимальне число каналів обслуговування по відношенню до потреби в них (так звана модель оптимального обслуговування).
3. Моделювання управління запасами. Визначає розміщення замовлень, їх кількість, обсяг готової продукції на складі.
4. Лінійне програмування. Забезпечує оптимальний спосіб розгляду ресурсів при наявності конкретних потреб. Моделі лінійного програмування найбільш популярні у менеджменті.
5. Імітаційне моделювання. Дає практичний спосіб застосування моделі замість реальної системи.
6. Економічний аналіз, тобто метод оцінки витрат та економічних вигод. Базується на визначенні економічних умов, при яких підприємство стає вигідним. Зрозуміло, що основною умовою буде ситуація, коли загальний дохід зрівнюється з підсумковими витратами.
7. Платіжна матриця. Це статистичний метод, який дозволяє із кількох варіантів вибрати найбільш оптимальне рішення. При цьому платежі (грошові винагороди, доход тощо) представляються у формі таблиці.
8. Дерево рішень, являє собою схематичне відображення дій у менеджменті з урахування фінансових результатів, ймовірності отримання їх позитивного значення, можливості порівняння альтернатив.
9. Прогнозування, тобто моделювання майбутніх управлінських ситуацій. Оскільки воно відіграє суттєву роль у менеджменті, то його слід розглянути окремо.

Теорія ігор – метод моделювання оцінки дії ухваленого рішення на конкурентів. Теорію ігор спочатку розробили військові з тим, щоб в стратегії можна було врахувати можливі дії супротивника. У бізнесі ігрові моделі використовуються для прогнозування реакції конкурентів на зміну цін, нові компанії підтримки збуту, пропозиції додаткового обслуговування, модифікацію і освоєння нової продукції. Якщо, наприклад, за допомогою теорії ігор керівництво встановлює, що при підвищенні цін конкуренти не зробить того ж, вони, ймовірно, повинне відмовитися від цього кроку, щоб не потрапити в невигідне положення в конкурентній боротьбі.

Модель теорії черг або модель оптимального обслуговування використовується для визначення оптимального числа каналів обслуговування по відношенню потреби в них. До ситуацій, в яких моделі теорії черг можуть бути корисні, можна віднести дзвінки людей в авіакомпанію для резервування місця і отримання інформації, очікування в черзі на машинну обробку даних, майстрів по ремонту устаткування, черга вантажівок під розвантаження на склад, очікування клієнтами банку вільного касира. Якщо, наприклад, клієнтам доводиться дуже довго чекати касира, вони можуть вирішити перенести свої рахунки в інший банк. Так само, якщо вантажівкам доводиться дуже довго чекати розвантаження, вони не зможуть виконати стільки поїздок за день, скільки належить. Таким чином, принципова проблема, яку вирішує теорія черг, полягає в урівноваженні витрат на додаткові канали обслуговування і втрат від обслуговування на рівні нижче оптимального.

Модель управління запасами використовується для визначення часу розміщення замовлень на ресурси і їх кількості, а також маси готової продукції на складах. Будь-яка організація повинна підтримувати деякий рівень запасів щоб уникнути затримок на виробництві і в збуті. Мета даної моделі – зведення до мінімуму негативних наслідків накопичення запасів, що виражається в певних витратах. Ці витрати бувають трьох основних видів: на розміщення замовлень, на зберігання, а також втрати, пов'язані з недостатнім рівнем запасів.

Модель лінійного програмування застосовують для визначення оптимального способу розподілу дефіцитних ресурсів за наявності конкуруючих потреб. Даний вид моделі найбільш поширений на промислових підприємствах. Він полягає у тому, що допомагає максимізувати прибуток за наявності одного декількох ресурсів, кожний з яких використовується для виробництва декількох видів товару.

Типові варіанти застосування лінійного програмування в управлінні виробництвом:

1) укрупнене планування виробництва (складання графіків виробництва, який зменшує загальні витрати з урахуванням витрат у зв'язку із зміною ставки відсотка, заданих обмежень по трудових ресурсах і рівнях запасів);

2) планування асортименту виробів (визначення оптимального асортименту продукції, в якому кожному її вигляду властиві свої витрати і потреби в ресурсах);

3) маршрутизація виробництва виробу (визначення оптимального технологічного маршруту виготовлення виробу, який повинен бути послідовно пропущене через декілька оброблювальних центрів, причому кожна операція центру характеризується своїми витратами і продуктивністю);

4) управління технологічним процесом (зведення до мінімуму виходу стружки при різанні стали, відходів шкіри або тканини в рулоні або полотнищі);

5) регулювання запасів (визначення оптимального поєднання продуктів на складі або в сховищі);

6) календарне планування виробництва (складання календарних планів, що мінімізують витрати з урахуванням витрат на зміст запасів, оплата наднормової роботи і замовлень на стороні);

7) планування розподілу продукції (складання оптимального графіка відвантаження з урахуванням розподілу продукції між виробничими підприємствами і складами, складами і магазинами роздрібної торгівлі);

8) визначення оптимального місцеположення нового заводу (визначення якнайкращого пункту місцеположення шляхом оцінки витрат на транспо-

ртування між альтернативними місцями розміщення нового заводу і місцями його постачання і збуту готової продукції);

9) календарне планування транспорту (мінімізація витрат подачі вантажівок під вантаження і транспортних судів до вантажних причалів);

10) розподіли робітників (мінімізація витрат при розподілі робітників по верстатах і робочих місцях);

11) перевантаження матеріалів (мінімізація витрат при маршрутизації руху засобів перевантаження матеріалів, наприклад, автонавантажувачів, між відділеннями заводу і доставці матеріалів з відкритого складу до місць їх переробки на вантажних автомобілях різної вантажопідйомності).

Транспортні задачі – це задачі, за допомогою яких оптимізується доставка ресурсів за наявності декількох пунктів відправки і декількох пунктів отримання при різній вартості доставки в різні пункти. Є приватним видом задач лінійного програмування.

Імітаційне моделювання. Всі описані вище моделі мають на увазі застосування імітації в широкому значенні, оскільки всі є замінниками реальності. Проте, як метод моделювання, імітація конкретно позначає процес створення моделі і її експериментальне застосування для визначення змін реальної ситуації. Головна ідея імітації полягає у використовуванні потоку згенерованих даних, які розподілені за тим же законом, що і в реальному світі. Визначення поведінки моделі під впливом цих даних дозволяє прогнозувати реальну ситуацію в економіці.

Мережний аналіз. З мережного аналізу в основному використовується теорія графів. Теорія графів дозволяє складати оптимальні графіки здійснення різних проектів. Це дозволяє мінімізувати як час здійснення проекту, так і витрати по ньому.

Економічний аналіз. Майже всі керівники сприймають імітацію як метод моделювання. Проте багато хто з них ніколи не думав, що економічний аналіз – очевидно найпоширеніший метод – це теж одна з форм побудови моделі. Економічний аналіз вбирає в себе майже всі методи оцінки витрат і економічних вигод, а також відносної рентабельності діяльності підприємства. Типова «економічна» модель заснована на аналізі беззбитковості, методі ухвалення рішень з визначенням крапки, в якій загальний дохід зрівнюється з сумарними витратами, тобто крапки, в якій підприємство стає прибутковим. Ці моделі широко застосовуються в бухгалтерському і фінансовому обліку.

На додаток до моделювання, є ряд методів, здатних надати допомоги керівнику в пошуку об'єктивно обґрунтованого рішення по вибору з декількох альтернатив тієї, яка в найбільшій мірі сприяє досягненню цілей.

Платіжна матриця. Суть кожного ухваленого керівництвом рішення – вибір якнайкращої з декількох альтернатив по конкретних встановлених наперед критеріях. Платіжна матриця – це один з методів статистичної теорії рішень, метод, який може надати допомоги керівнику у виборі одного з декількох варіантів. В цілому платіжна матриця корисна, коли:

1) є розумно обмежене число альтернатив або варіантів стратегії для вибору між ними.

2) те, що може трапитися, з повною визначеністю не відоме.

3) результати ухваленого рішення залежать від того, яка саме вибрана альтернатива і які події насправді мають місце.

Дерево рішень – метод науки управління – схемне представлення проблеми ухвалення рішень – використовується для вибору якнайкращого напряму дій з наявних варіантів.

Використовуючи дерево рішень, керівник може розрахувати результат кожної альтернативи і вибрати якнайкращу послідовність дій. Результат альтернативи розраховується шляхом множення очікуваного результату на вірогідність і подальшим підсумовуванням таких же добутків, що знаходяться правіше на дереві рішень.

Прогнозування – це метод, в якому використовуються як накопичений досвід, так і поточні допущення щодо майбутнього з метою його визначення.

Різновиди прогнозів:

1) економічні прогнози використовуються для прогнозу загального стану економіки і об'єму збуту для конкретної компанії або по конкретному продукту.

2) Прогнози розвитку технології дозволять передбачити, розробки яких нових технологій можна чекати, коли це може відбутися, наскільки економічно прийнятними вони можуть бути.

3) Прогнози розвитку конкуренції дозволяють передбачати стратегію і тактику конкурентів.

4) Прогнози на основі опитування і досліджень дають можливість передбачити, що відбудеться в складних ситуаціях, використовуючи дані багатьох областей знань. Наприклад, майбутній ринок автомобілів можна оцінити тільки з урахуванням зміни стану економіки, суспільних цінностей, політичної обстановки, технології і стандартів, що насувається, по захисту навколишнього середовища від забруднення. Соціальне прогнозування, яким в даний час займається всього декілька крупних організацій, використовується для прогнозу змін в соціальних установках людей і стани суспільства

Можна виділити наступні групи методів прогнозування:

1. Неформальні методи:

- прогнозування на базі словесної (вербальної) інформації, отриманої з допомогою радіо, телебачення, розмов, телефонограм тощо;
- прогнозування на засадах письмової інформації, яка відображається у газетах, журналах, бюлетенях, звітах тощо;
- прогнозування за результатами промислового шпіонажу.

2. Формальні методи:

Кількісні методи прогнозування:

- аналіз минулих рядів. Виходить з того, що минуле може повторитися у майбутньому;

- причинно-наслідкове (каузальне) моделювання. Використовується у менеджменті для прогнозування тих ситуацій, які знаходяться у залежності більше ніж від однієї змінної величини. В статистиці цей спосіб прогнозування називається кореляцією.

Якісні методи прогнозування:

- думка журі. Представляє собою поєднання та усереднення думок експертів – членів журі (ради, комісії тощо);
- сукупна думка менеджерів по збуту. Ґрунтується на передбаченні попиту групою досвідчених торгових агентів;
- модель очікування споживача. Базується на результатах опитування клієнтів;
- метод експертних оцінок. Представляє собою процедуру, яка дозволяє групі експертів приходити до певної згоди.

Економіко-математичні моделі можуть призначатися для дослідження різних сторін народного господарства (зокрема, його виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структур) і його окремих частин.

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони підрозділяються на функціональні і структурні, а також включають проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях на народногосподарському рівні частіше застосовуються структурні моделі, оскільки для планування і управління велике значення мають взаємозв'язку підсистем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкту ("вихід") впливають шляхом зміни "входу". Прикладом може служити модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин. Один і той же об'єкт може описуватися одночасно і структурою, і функціональною моделлю. Так, наприклад, для планування окремої галузевої системи використовується структурна модель, а на народногосподарському рівні кожна галузь може бути представлена функціональною моделлю.

Застосування дескриптивного підходу в моделюванні економіки пояснюється необхідністю емпіричного виявлення різних залежностей в економіці, встановлення статистичних закономірностей економічної поведінки соціальних груп, вивчення вірогідних шляхів розвитку яких-небудь процесів за незмінних умов або таких, що протікають без зовнішнього впливу. Прикладами дескриптивних моделей є виробничі функції і функції купівельного попиту, побудовані на основі обробки статистичних даних.

Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей. Типова ситуація, коли нормативна модель складної структури об'єднує окремі блоки, які є приватними дескриптивними моделями. Наприклад, міжгалузева модель може включати функції купівельного попиту, що описують поведінку споживачів при зміні доходів. Подібні приклади характеризують тенденцію ефективного поєднання дескриптивного і нормативного підходів до моделювання економічних процесів. Дескриптивний підхід широко застосовується в імітаційному моделюванні.

По характеру віддзеркалення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють моделі жорстко детерміністи і моделі, що враховують випадковість і невизначеність. Необхідно розрізняти невизначеність, описувану законами вірогідності, і невизначеність, для опису якої закони теорії вірогідності непридатні. Другий тип невизначеності набагато складніший для моделювання.

За способами віддзеркалення чинника часу економіко-математичні моделі діляться на статичні і динамічні. У статичних моделях всі залежності відносяться до одного моменту або періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів в часі. По тривалості даного періоду часу розрізняються моделі короткострокового (до року), середньострокового (до 5 років), довгострокового (10-15 і більше років) прогнозування і планування. Сам час в економіко-математичних моделях може змінюватися або безперервно, або дискретно.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Особливо важливо виділити клас лінійних моделей, що найзручніших для аналізу і обчислень і одержали внаслідок цього велике розповсюдження. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями істотні не тільки з математичної точки зору, але і в теоретико-економічних відносинах, оскільки багато залежностей в економіці носять принципово нелінійний характер: ефективність використовування ресурсів при збільшенні виробництва, зміна попиту і споживання населення при збільшенні виробництва, зміна попиту і споживання населення при зростанні доходів і т.п. Теорія "лінійної економіки" істотно відрізняється від теорії "нелінійної економіки".

По співвідношенню екзогенних і ендогенних змінних, що включаються в модель, вони можуть розділятися на відкриті і закриті. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендогенну змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не включають екзогенних змінних, виключно рідкісні; їх побудова вимагає повного абстрагування від "середовища", тобто серйозного спрощення реальних економічних систем, що завжди мають зовнішні зв'язки. Переважна більшість економіко-математичних моделей займає проміжне положення і розрізняються по ступеню закритості.

Для моделей народногосподарського рівня важливий розподіл на агреговані і деталізовані. Залежно від того, чи включають народногосподарські моделі просторові чинники і умови або не включають, розрізняють моделі просторові і точкові.

Розглянемо тільки такі моделі, які є інструментами отримання знань.

Під моделюванням розуміється процес побудови, вивчення і застосування моделей. Воно тісне пов'язано з такими категоріями, як абстракція, аналогія, гіпотеза і ін. Процес моделювання обов'язково включає і побудову абстракцій, і висновку аналогічно, і конструювання наукових гіпотез.

Головна особливість моделювання у тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів - заступників. Модель виступає як своєрідний інструмент пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом і за допомогою якого вивчає об'єкт, що цікавить його. Саме ця особливість методу моделювання визначає специфічні форми використовування абстракцій, аналогій, гіпотез, інших категорій і методів пізнання.

Необхідність використовування методу моделювання визначається тим, що багато об'єктів (або проблеми, що відносяться до цих об'єктів) безпосередньо досліджувати або зовсім неможливо, або ж це дослідження вимагає багато часу і засоби.

Метод моделювання включає три елементи:

1) суб'єкт (дослідник);
2) об'єкт дослідження;
3) модель, що опосередковує відносини суб'єкта, що пізнає, і пізнаваного об'єкту.

Хай є або необхідно створити деякий об'єкт A. Ми конструюємо (матеріально або в думках) або знаходимо в реальному світі інший об'єкт B – модель об'єкту A. Розглянемо основні етапи моделювання (рис. 1.1).

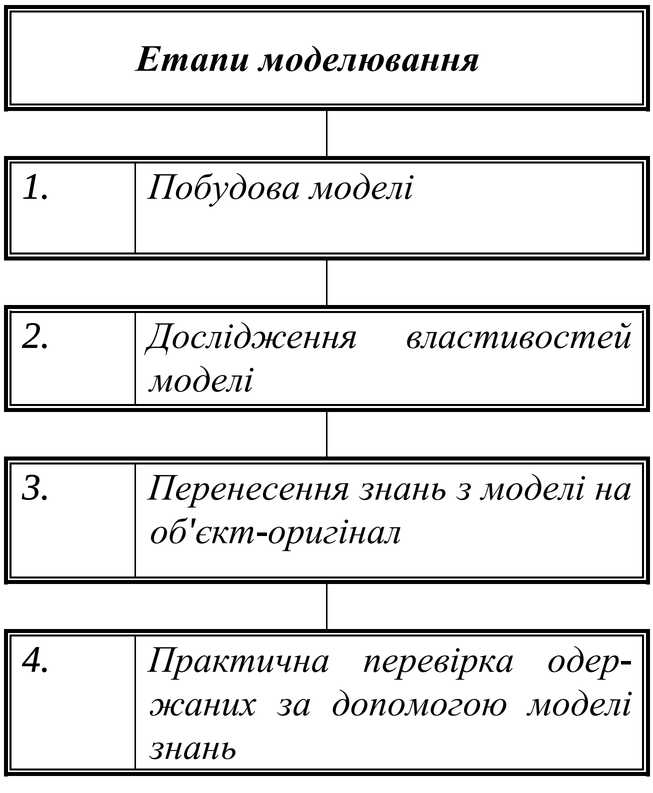


Рис. 1.1. Етапи моделювання

Етап побудови моделі припускає наявність деяких знань про об'єкт - оригінал. Пізнавальні можливості моделі обумовлюються тим, що модель відображає істотні риси об'єкту – оригіналу. Питання про необхідний і достатній захід схожості оригінала і моделі вимагає конкретного аналізу. Очевидно, модель втрачає своє значення як у разі тотожності з оригіналом (тоді він перестає бути оригіналом), так і у разі надмірної у всіх істотних відносинах відмінності від оригіналу.

Таким чином, вивчення одних сторін модельованого об'єкту здійснюється ціною відмови від віддзеркалення інших сторін. Тому будь-яка модель заміщає оригінал лише в строго обмеженому значенні. З цього виходить, що для одного об'єкту може бути побудовано декілька “спеціалізованих” моделей, які концентрують увагу на певних сторонах досліджуваного об'єкту, або ж характеризують об'єкт з різним ступенем деталізації.

На другому етапі процесу моделювання модель виступає як самостійний об'єкт дослідження. Однією з форм такого дослідження є проведення “модельних” експериментів, при яких свідомо змінюються умови функціонування моделі і систематизують дані про її «поведінку». Кінцевим результатом цього етапу є множина знань про модель *R*.

На третьому етапі здійснюється перенесення знань з моделі на оригінал формування множини знань *S* про об'єкт. Цей процес перенесення знань проводиться за певними правилами. Знання про модель повинні бути скоректовані з урахуванням тих властивостей об'єкту - оригіналу, які не знайшли віддзеркалення або були змінені при побудові моделі. Ми можемо з достатньою підставою переносити який-небудь результат з моделі на оригінал, якщо цей результат необхідно пов'язаний з ознаками схожості оригінала і моделі. Якщо ж певний результат модельного - дослідження пов'язаний з відмінністю моделі від оригіналу, то цей результат переносити неправомірно.

Четвертий етап - практична перевірка одержаних за допомогою моделей знань і їх використовування для побудови теорії об'єкту, яка б узагальнила наші знання про його перетворення або управління ним.

Для розуміння суті моделювання важливо не випустити з уваги, що моделювання - не єдине джерело звань про об'єкт. Процес моделювання “занурений” в загальніший процес пізнання. Ця обставина враховується не тільки на етапі побудови моделі, але і на завершальній стадії, коли відбувається об'єднання і узагальнення результатів дослідження, одержуваних на основі багатоманітних засобів пізнання.

Моделювання - циклічний процес. Це означає, що за першим чотирьохетапним циклом може слідувати другий, третій і т.д. При цьому знання про досліджуваний об'єкт розширяються і уточнюються, а початкова модель поступово удосконалюється. Недоліки, знайдені після першого циклу моделювання, обумовленою малим знанням об'єкту і помилками в побудові моделі, можна виправити в подальших циклах В методології моделювання, таким чином. закладені великі можливості саморозвитку.

Більшість об'єктів, що вивчаються економічною наукою, може бути охарактеризоване кібернетичним поняттям - “складна система”.

Найбільш поширене розуміння системи як сукупності елементів, що знаходяться у взаємодії і створюють деяку цілісність, єдність. Важливою якістю будь-якої системи є емерджентність – наявність таких властивостей, які не властиві жодному з елементів, що входять в систему. Тому при вивченні систем недостатньо користуватися методом їх розчленовування на елементи з подальшим вивченням цих елементів окремо. Одна з труднощів економічних досліджень - у тому, що майже не існує економічних об'єктів, які можна було б розглядати як окремі (позасистемні) елементи.

Складність системи визначається кількістю вхідних в неї елементів, зв'язками між цими елементами, а також взаємостосунками між системою і середовищем. Економіка країни володіє всіма ознаками дуже складної системи. Вона об'єднує величезне число елементів, відрізняється різноманіттям внутрішніх зв'язків і зв'язків з іншими системами (природне середовище, економіка інших країн і т. д.). У управлінні економікою взаємодіють природні, технологічні, соціальні процеси, об'єктивні і суб'єктивні чинники.

З економічної точки зору оптимальні рішення, одержані за допомогою економічно-математичного моделювання, володіють наступними основними властивостями (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Властивості оптимального рішення

1. Оптимальність рішення залежить від цілей, поставлених при плануванні процесу. Наприклад, вибір типу транспорту по критерію вартості перевезення відрізнятиметься від вибору за критерієм швидкості.

2. Оптимальність рішення залежить від поточної господарської обстановки (іншими словами, оптимум завжди конкретний, його не можна обчислювати абстрактно).

3. Істотні зміни оптимального варіанту відбуваються тільки при значних змінах обстановки - це властивість називається стійкістю базису оптимального плану щодо малих змін умов (тобто оптимальні рішення можна знаходити достатньо надійно, не дивлячись на приблизний характер майже всієї економічної інформації).

4. При визначенні взаємозалежності рішень по всіх об'єктах економіки особливе значення мають зворотний зв'язок об'єктів і витрати зворотного зв'язку. Наприклад, якщо підприємства *А* і *В* споживають один і той же обмежений ресурс, то збільшення частки підприємства *А* зменшує частку підприємства *В* (зворотний зв'язок). Можливо, споживання даного ресурсу (сировини, палива вищого сорту) знижує виробничі витрати. Тоді, збільшення частки підприємства *А* приведе до економії на цьому підприємстві і до додаткових витрат на підприємстві *В* в результаті заміни ресурсу менш ефективним (витрати зворотного зв'язку).

5. Оцінка раціональності конкретного заходу залежить від рівня управління: рішення, оптимальне для окремого підприємства, може бути неоптимальним для галузі або економіки а цілому.

Можливості використовування математичних моделей для вибору оптимальних рішень залежать від типу процесів, що оптимізуються, і характеру вирішуваних питань. Виділяють три типи багатоваріантних проблем планування і управління (рис. 1.3).

Об'єктом для економіко-математичного моделювання є повністю структуровані проблеми, характеристики яких приведені в блоці 1 рис. 1.3. Частково або слабо структуровані проблеми, визначаються в другому блоці, є об'єктами для методів системного аналізу, що поєднують неформалізовані рішення фахівців з модельними розрахунками по окремих предметах.

Неструктуровані проблеми (блок 3) є об'єктами для експертних вирішень, що приймаються на основі досвіду і інтуїції фахівців.

Вже тривалий час головним гальмом практичного застосування математичного моделювання в економіці є складність наповнення розроблених моделей конкретною і якісною інформацією. Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору і обробки багато в чому визначають вибір типів прикладних моделей. З другого боку, дослідження по моделюванню економіки висувають нові вимоги до системи інформації.

Залежно від модельованих об'єктів і призначення моделей використовувана в них початкова інформація має істотно різний характер і походження. Вона може бути розділена на дві категорії: про минулий розвиток і сучасний стан об'єктів (економічні спостереження і їх обробка) і про майбутній розвиток об'єктів, які включають дані про очікувані зміни їх внутрішніх параметрів і зовнішніх умов (прогнози). Друга категорія інформації є результатом самостійних досліджень, які так само можуть виконуватися за допомогою моделювання.

Типи проблем планування і управління

1.	*<u>Повністю структуровані проблеми:</u>* ¬ *всі цілі оптимізації і чинники процесу оптимізації піддаються кількісному вимірюванню* ¬ *проблема може бути цілком представлена у вигляді економіко-математичної моделі або системи моделей* ¬ *оптимальне рішення знаходиться на основі побудованої моделі деяким математичним методом*
2.	*<u>Частково або слабо структуровані проблеми:</u>* ¬ *менш чітко визначена мета* ¬ *невідомі кількісні залежності між деякими чинниками* ¬ *кількісному аналізу і оптимізації піддаються окремі частини проблеми*
3.	*<u>Неструктуровані проблеми:</u>* ¬ *неможливість кількісного аналізу* ¬ *непередбачуваність чинників*

Рис. 1 3. Типи проблем планування і управління

Методи економічних спостережень і використовування результатів цих спостережень розробляються економетрикою. Тому варто відзначити тільки специфічні проблеми економічних спостережень, пов'язані з моделюванням економічних процесів.

У економіці багато процесів є масовими, вони характеризуються закономірностями, які не виявляються на підставі лише одного або декількох спостережень. Тому моделювання в економіці повинне спиратися на масові спостереження.

Інша проблема породжується динамічністю економічних процесів, мінливістю їх параметрів і структурних відносин. Внаслідок цього економічні процеси доводиться постійно тримати під спостереженням, необхідно мати стійкий потік нових даних. Оскільки спостереження за процесами і обробка емпіричних даних звичайно займають досить багато часу, то при побудові математичних моделей економіки вимагається коректувати початкову інформацію з урахуванням її запізнювання.

Пізнання кількісних відносин економічних процесів і явищ спирається на економічні вимірювання. Точність вимірювань в значній мірі зумовлює і точність кінцевих результатів кількісного аналізу за допомогою моделювання. Тому необхідною умовою ефективного використовування математичного моделювання є вдосконалення економічних вимірників. Застосування математичного моделювання загострило проблему вимірювань і кількісних різних аспектів і явищ соціально-економічного розвитку, достовірності і повноти одержуваних даних, їх захисту від навмисних і технічних спотворень.

В процесі моделювання виникає взаємодія „первинних" і „вторинних" економічних вимірників. Будь-яка модель в економіці спирається на певну систему економічних вимірників (продукції, ресурсів елементів і т.п.). В той же час одним з важливих результатів економіко-математичного моделювання є отримання нових (вторинних) економічних вимірників - економічно обґрунтованих цін на продукцію різних галузей, оцінок ефективності різноякісних природою ресурсів, вимірників суспільної корисності продукції. Проте, ці вторинні вимірники можуть випробовувати вплив не досить обґрунтованих первинних вимірників, що вимушує розробляти особливу методику коректування первинних вимірників для економічних моделей.

З погляду „інтересів" моделювання економіки в даний час найактуальнішими проблемами вдосконалення економічних вимірників є: оцінка результатів інтелектуальної діяльності (особливо у сфері науково-технічних розробок, індустрії інформатики), побудова узагальнюючих показників економічного розвитку, вимірювання ефектів зворотних зв'язків (вплив економічних і соціальних механізмів на ефективність виробництва).

Для методології планування економіки важливе значення має поняття невизначеності економічного розвитку. У дослідженнях по економічному прогнозуванню і плануванню розрізняють два типи невизначеності:

- "істинну", обумовлену властивостями економічних процесів,
- "інформаційну", пов'язану з неповнотою і неточністю наявної інформації про ці процеси. Істинну невизначеність не можна змішувати з об'єктивним існуванням різних варіантів економічного розвитку і можливістю свідомого вибору серед них ефективних варіантів. Йдеться про принципову неможливість точного вибору єдиного (оптимального) варіанту.

У розвитку економіки невизначеність викликається тим, що хід планованих і керованих процесів, а також зовнішні дії на ці процеси не можуть бути точно передбачені через дію випадкових чинників і обмеженості людського пізнання в кожен момент. Особливо характерно це для прогнозування науково-технічного прогресу, потреб суспільства, економічної поведінки. Неповнота і неточність інформації про об'єктивні процеси і економічну поведінку підсилюють істинну невизначеність.

На перших етапах досліджень по моделюванню економіки застосувалися в основному моделі типу детермініста. У цих моделях всі параметри передбачаються точно відомими. Проте, моделі детерміністів неправильно розуміти в механічному дусі і ототожнювати їх з моделями, які позбавлені всіх "ступенів вибору" (можливостей вибору) і мають єдине допустиме рішення. Класичним представником жорстко моделей детерміністів була модель оптимізації народного господарства, яка застосовувалася для визначення якнайкращого варіанту економічного розвитку серед безлічі допустимих варіантів.

В результаті накопичення досвіду використовування жорстко детермінованих моделей були створені реальні можливості успішного застосування досконалішої методології моделювання економічних процесів, що враховують невизначеність. Тут можна виділити такі основні напрями досліджень як: удосконалення методики моделей жорстке типа детермініста, проведення багатоваріантних розрахунків і модельних експериментів з варіацією конструкції моделі і її початкових даних, вивчення стійкості і надійності одержуваних рішень, виділення зони невизначеності, включення в модель резервів, застосування прийомів, що підвищують пристосовність економічних рішень вірогідним і непередбаченим ситуаціям, а також розповсюдження моделей, економічних процесів, що безпосередньо відображають складність і невизначеність, і відповідний математичний апарат: теорію вірогідності і математичну статистику, теорію ігор і статистичних рішень, теорію масового обслуговування, стохастичне програмування, теорію випадкових процесів.

1.2. Класифікація економіко-математичних моделей

Для класифікації математичних моделей економічних процесів і явищ використовуються різні ознаки (рис. 1.4.).

Рис. 1.4. Ознаки класифікації економіко-математичних моделей

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі діляться на теоретико-аналітичні, використовувані в дослідженнях загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і прикладні, вживані в рішенні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

При класифікації моделей по досліджуваних економічних процесах і змістовній проблематиці можна виділити моделі макро- і мікроекономіки, а також комплекси моделей виробництва, споживання, формування і розподілу доходів, трудових ресурсів, ціноутворення, фінансових зв'язків і таке інше. Зупинимося детальніше на характеристиці таких класів економіко-математичних моделей, з якими пов'язані найбільші особливості методології і техніки моделювання.

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони підрозділяються на функціональні і структурні, а також включають проміжні форми (структурно - функціональні). У дослідженнях він макроекономічному рівні частіший застосовуються структурні моделі, оскільки в плануванні і управлінні велике значення мають взаємозв'язку підсистем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкту (“вихід”) впливають шляхом зміни «входу». Прикладом може служити модель поведінки споживачів в умовах ринкових відносин. Один м той же об'єкт може описуватися одночасно і структурною, і функціональною моделлю. Так, наприклад, для планування окремої галузевої системи використовується структурна модель, а на макроекономічному рівні кожна галузь може бути представлена функціональною моделлю.

Наступною ознакою є характер моделі – дескриптивна або нормативна. Дескриптивні моделі відповідають на питання: як це відбувається? або як це найімовірніше може далі розвиватися?, тобто вони тільки пояснюють спостережувані факти або дають вірогідний прогноз. Нормативні моделі відповідають на питання: як це повинне бути?, тобто припускають цілеспрямовану діяльність. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі планування, що формалізують тим або іншим способом цілі економічного розвитку, можливості і засоби їх досягнення.

Застосування дескриптивного підходу з моделюванні економіки пояснюється необхідністю емпіричного виявлення різних залежностей в економіці. Встановлення статистичних закономірностей економічної поведінки соціальних груп, вивчення вірогідних шляхів розвитку яких-небудь процесів за умов, що не змінюються, або таких, що протікають без зовнішніх дій. Прикладами дескриптивних моделей є виробничі функції купівельного попиту, побудовані на основі обробки статистичних даних.

Чи є економіко-математична модель дескриптивною або нормативною, залежить не тільки від її математичної структури, але від характеру використовування цієї моделі. Наприклад, модель міжгалузевого балансу дескриптивна, якщо вона використовується для аналізу пропорцій минулого періоду. Але ця ж математична модель стає нормативною, коли вона застосовується для розрахунків збалансованих варіантів розвитку макроекономічних процесів.

Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей. Типова ситуація, коли нормативна модель складної структури об'єднує окремі блоки, які є приватними дескриптивними моделями. Наприклад, міжгалузева модель може включати функції купівельного попиту, що описують поведінку споживачів при зміні доходів. Подібні приклади характеризують тенденцію ефективного поєднання дескриптивного і нормативного підходів до моделювання економічних процесів, дескриптивний підхід широко застосовується в імітаційному моделюванні.

По характеру віддзеркалення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють моделі жорстко детерміновані і моделі, що враховують випадковість і невизначеність, при цьому необхідно розрізняти невизначеність, для опису якої закони теорії вірогідності непридатні. даний тип невизначеності набагато складніший для моделювання.

За способами віддзеркалення чинника часу економіко-математичні моделі діляться на статистичні і динамічні. У статистичних моделях всі залежності відносяться до одного моменту або періоду часу, динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів в часі. По тривалості даного періоду часу розрізняються моделі короткострокового (до року), середньострокового (до 5 років), довгострокового (10-15 і більше років) прогнозування і планування. Сам час в економіко-математичних моделях може змінюватися або безперервно, або дискретно.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Особливо важливо виділити клас лінійних моделей, що найзручніших для аналізу і обчислень і одержали внаслідок цього велике розповсюдження. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями істотні не тільки з математичної точки зору, але і в теоретико-економічних відносинах, оскільки багато залежностей в економіці носять принципово нелінійний характер: ефективність використовування ресурсів при збільшенні виробництва, зміна попиту і споживання населення при збільшенні виробництва, зміна попиту і споживання населення при зростанні доходів і т.п.

По співвідношенню екзогенних і ендогенних змінних, що включаються в модель, вони можуть розділятися на відкриті і закриті. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендогенну змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не включають екзогенних змінних, виключно рідкісні; їх побудова вимагає повного абстрагування від "середовища", тобто серйозного спрощення реальних економічних систем, що завжди мають зовнішні зв'язки. Переважна більшість економіко-математичних моделей займає проміжне положення, і розрізняються по ступеню відвертості (закритості).

Залежно від етапності ухвалених рішень моделі бувають одноетапні і багатоетапні. У одноетапних задачах вимагається ухвалити рішення щодо одноразово виконуваної дії, а в багатоетапних оптимальне рішення знаходиться за декілька етапів взаємозв'язаних дій.

Залежно від характеру системи обмежень виділяються моделі звичного вигляду і спеціальні види (транспортні, розподільні задачі), відмінні простішою системою обмежень і можливістю завдяки цьому використовувати простіші методи рішення.

Таким чином, загальна класифікація економіко-математичних моделей включає більше десяти основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації вживаних моделей ускладнюється. Разом з появою нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їх класифікації здійснюється процес інтеграції моделей різних типів в складніші модельні конструкції.

1.3. Економіко-математична модель оптимізаційної задачі

Обов'язковими елементами економіко-математичної моделі оптимізаційної задачі є змінні параметри процесу, обмеження задачі і критерії оптимальності (рис. 1.5).

Елементи математичної моделі оптимізаційної задачі

1. Змінні параметри процесу

2. Органічні задачі

3. Критерій оптимальності

Рис. 1.5. Елементи математичної моделі оптимізаційної задачі.

При цьому, змінні параметри процесу – це набір невідомих величин, чисельні значення яких визначаються в ході рішення і використовуються для раціональної організації процесу, обмеження задачі символічний запис обов'язкових умов організації даного процесу (як правило, лінійні нерівності або рівняння), критерій оптимальності економічний показник, зведення якого до максимуму або мінімуму говорить про якнайповніше досягнення цілей оптимізації. Запис критерію у вигляді функції від змінних задачі називається цільовою функцією.

Правильне встановлення обмежень є важливим етапом розробки оптимізаційної економіко-математичної моделі. При цьому слід уникати двох крайнощів: збільшення складності моделі, яке утрудняє підготовку даних і процес рішення, та спрощення моделі, яке може привести до отримання моделі, неадекватної реальному процесу. Типи обмежень показані на рис. 1.6.

У більшості задач оптимізації дотримується принцип єдності критерію. При виборі критерію оптимальності враховується ряд загальних вимог (рис. 1.7).

Типи обмежень

1.	*Завдання за об'ємом виробництва*

2. *Обмеження на об'єм використовуваних ресурсів*

3. *Балансові співвідношення між змінними*

4. *Спеціальні умови для захисту інтересів окремих підприємств*

5. *Вимога типізації і стандартизації технічного оснащення технічних процесів (умови зв'язності)*

Рис. 1.6. Типи обмежень

Критерію оптимальності можуть бути прийняті як тільки ті показники, які піддаються обчисленню для кожного можливого варіанту з помилкою не більш 2-3%, інакше порівняння варіантів стають ненадійним.

Вимоги до локального критерію оптимальності

1. *Відповідність глобальному критерію*

2. *Облік економічного результату ухвалених рішень*

3. *Виключення однакових по величині витрат*

4. *Облік реальної господарської обстановки даного періоду*

Рис. 1.7. Вимоги до локального критерію оптимальності

Складність економічних процесів і явищ і інші відмічені вище особливості економічних систем утрудняють не тільки побудову математичних моделей, але і перевірку їх адекватності, істинності одержуваних результатів.

Можна привести наступні приклади локальних критеріїв оптимальності: припустимо, підприємство випускає дефіцитну продукцію, в цьому випадку ланцюг оптимізації - максимальне збільшення випуску, а локальним критерієм може служити максимальний випуск продукції з одиниці виробничої потужності.

Якщо виробничі потужності підприємства достатні для повного задоволення потреб в продукції, що випускається, то при оптимізації вибирається якнайкращий варіант організації виробництва і можливий локальний критерій оптимальності в цьому випадку - одержуваний прибуток.

Якщо об'єм виробництва заданий і не підлягає варіації, то при оптимізації критерієм можуть служити витрати (у вартісному виразі) або мінімум витрати якого-небудь дефіцитного ресурсу.

У природних науках достатньою умовою істинності результатів моделювання і будь-яких інших форм пізнання є збіг результатів моделювання із спостережуваними фактами. Категорія "практика" співпадає тут з категорією «дійсність». У економіці і інших суспільних науках що розуміються таким чином принцип "практика - критерій істини" більшою мірою застосовний до простих дескриптивних моделей, використовуваних для пасивного опису і пояснення дійсності (аналізу минулого розвитку короткострокового прогнозування некерованих економічних процесів і т.п.)

Проте, основна задача економічної науки конструктивно розробка наукових методів планування і управління економікою. Тому поширений тип математичних моделей економіки – це моделі керованих і регульованих економічних процесів використовувані для перетворення економічної дійсності. Такі моделі називаються нормативними. Якщо орієнтувати нормативні моделі тільки на підтвердження дійсності те вони не зможуть служити інструментом рішення якісно нових економічних задач.

Специфіка верифікації нормативних моделей економіки полягає у тому, що вони, як правило, "конкурують" з іншими тим, що вже знайшов практичне застосування методами планування і управління. При цьому далеко не завжди можна поставити чистий експеримент по верифікації моделі, усунувши вплив інших управляючих дій на модельований об'єкт.

Ситуація ще більш ускладнюється коли ставиться питання про верифікацію моделей довгострокового прогнозування і Адже планування (як дескриптивних, так і нормативних) не можна ж 10-15 років і більш пасивно чекати настання подій, щоб перевірити правильність передумов моделі.

Не дивлячись на відмічені ускладнюючі обставини, відповідність моделі фактам і тенденціям реального економічного життя залишається найважливішим критерієм визначаючим напряму вдосконалення моделей. Аналіз розбіжностей, що виявляються, між дійсно і моделлю. зіставлення результатів по моделі з результату одержаними іншими методами, допомагають виробити шляхи корекції моделей.

Значна роль в перевірці моделей належить логічному аналізу, зокрема засобами самого математичного моделювання. Такі формалізовані прийоми верифікації моделей, як доказ існування рішення моделі, перевірка істинності статистичних гіпотез про зв'язки між параметрами і змінними моделі, зіставлення розмірності величин і т.д., дозволяють звузити клас потенційно "правильних" моделей

Внутрішня несуперечність передумов моделі перевіряється також шляхом порівняння один з одним одержуваних з її допомогою слідств, а також із слідствами "конкуруючих" моделей.

1.4. Етапи економіко-математичного моделювання

Розглянемо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

1. *Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз*.

Головна задача цього етапу – чітко сформулювати суть проблеми, допущення, що приймаються, і ті питання, на які вимагається одержати відповіді. Етап включає виділення найважливіших рис і властивостей модельованого об'єкту і абстрагування від другорядних; вивчення структури об'єкту, основних залежностей, що зв'язують його елементи; формування гіпотез (хоча б попередніх), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкту.

2. *Побудова математичної моделі*.

Це етап формалізації економічної проблеми, виразу її у вигляді конкретних математичних залежностей і відносин (функцій, рівнянь, нерівностей і т.д.). Звичайно, спочатку визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (конкретний перелік змінних і параметрів, форма зв'язків). Таким чином, побудова моделі підрозділяється в свою чергу на декілька стадій.

Неправильно вважати, що, чим більше фактів враховує модель, тим вона краща "працює" і дає кращі результати. Те ж можна сказати про такі характеристики складності моделі, як використовувані форми математичних залежностей (лінійні і нелінійні), облік чинників випадковості і невизначеності і т.д. Зайва складність і громіздкість моделі утрудняють процес дослідження. Потрібно враховувати не тільки реальні можливості інформаційного і математичного забезпечення але і зіставляти витрати на моделювання з одержуваним ефектом (при зростанні складності моделі приріст витрат може перевищити приріст ефекту).

Одна з важливих особливостей математичних моделей – потенційна можливість їх використовування для вирішення різноякісних проблем. Тому, навіть стикаючись з новою економічною задачею, не потрібно прагнути "винаходити" модель спочатку необхідно спробувати застосувати для вирішення цієї задачі вже відомі моделі.

В процесі побудови моделі здійснюється співставлення двох систем наукових знань – економічних і математичних. Природно прагнути до того, щоб одержати модель, що належить добре вивченому класу математичних задач. Часто це вдається зробити шляхом деякого спрощення початкових передумов моделі, які не спотворюють істотних рис модельованого об'єкту. Проте можлива і така ситуація, коли формалізація економічної проблеми приводить до невідомої раніше математичної структури. Потреби економічної науки і практики у середині XX в. сприяли розвитку математичного програмування, теорії ігор, функціонального аналізу, обчислювальної математики. Цілком ймовірно, що в майбутньому розвиток економічної науки стане важливим стимулом для створення нових розділів математики.

3. *Математичний аналіз моделі.*

Метою цього етапу є з'ясування загальних властивостей моделі, для чого застосовуються математичні прийоми дослідження. Найважливіший момент – доказ існування рішень в сформульованій моделі (теорема існування).. Якщо вдасться довести, що математична задача не має рішення, то необхідність в подальшій роботі по первинному варіанту моделі відпадає; слід скоректувати або постановку економічної задачі, або способи її математичної формалізації. При аналітичному дослідженні моделі з'ясовуються такі питання, як, наприклад, чи єдине рішення, які змінні (невідомі) можуть входити в рішення, які співвідношення між ними, в яких межах і залежно від яких початкових умов вони змінюються, які тенденції їх зміни і т.д. Аналітичне дослідження моделі в порівнянні з емпіричним (чисельним) має ту перевагу, що одержувані висновки зберігають свою силу при різних конкретних значеннях зовнішніх і внутрішніх параметрів моделі.

4. *Підготовка початкової інформації.*

Моделювання пред'являє жорстке вимоги до системи інформації. В той же час реальні можливості отримання інформації обмежують вибір моделей, що призначаються для практичного використовування. При цьому береться до уваги не тільки принципова можливість підготовки інформації (за певні терміни), але і витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використовування додаткової інформації.

5. *Чисельне рішення.*

Цей етап включає розробку алгоритмів для чисельного вирішення задачі, підбір необхідного програмного забезпечення і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу обумовлені перш за все великою розмірністю економічних задач і необхідністю обробки значних масивів інформації.

Звичайно розрахунки по економіко-математичній моделі носять багатоваріантний характер. Завдяки високій швидкодії сучасних комп'ютерів вдається проводити Численні “модельні” експерименти, вивчаючи “поведінку” моделі при різних змінах деяких умов. Дослідження, що проводиться чисельними методами, може істотно доповнити результати аналітичного дослідження, а для багатьох моделей воно є єдино здійсненним. Клас економічних задач, які можна вирішувати чисельними методами, значно ширше, ніж клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

6. *Перевірка моделі на достовірність.*

Після побудови моделі її слід перевірити на достовірність. Один з аспектів перевірки полягає у визначенні ступеня відповідності моделі реальному світу. Фахівець з науки управління повинен встановити – чи всі істотні компоненти реальної ситуації вбудовані в модель. Перевірка багатьох моделей управління показала, що вони не досконалі, оскільки не охоплюють всіх релевантних змінних. Природно, чим краще модель відображає реальний мир, тим вище її потенціал як засіб надання допомоги керівнику в ухваленні хорошого рішення, якщо припустити, що модель не дуже складна у використовуванні. Другий аспект перевірки моделі пов'язаний зі встановленням ступеня, в якій інформація, одержувана з її допомогою дійсно, допомагає керівництву співволодіти з проблемою.

7. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування.*

На цьому завершальному етапі циклу встає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про ступінь практичної застосовності останніх.

Математичні методи перевірки можуть виявляти некоректні побудови моделі і тим самим звужувати клас потенційно правильних моделей. Неформальний аналіз теоретичних висновків і чисельних результатів, одержуваних за допомогою моделі, зіставлення їх з наявними знаннями і фактами дійсності також дозволяють знаходити недоліки постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі, її інформаційного і математичного забезпечення.

Звернемо увагу на зворотні зв'язки етапів моделювання, що виникають унаслідок того, що в процесі дослідження виявляються недоліки попередніх етапів процесу. Вже на етапі побудови моделі може з'ясуватися, що постановка задачі суперечлива або приводить до дуже складної математичної моделі. Відповідно до цього початкова постановка задачі коректується. далі, математичний аналіз моделі може показати, що невелика модифікація постановки задачі або її формалізації дає цікавий аналітичний результат. Найчастіше необхідність повернення до попередніх етапів моделювання виникає при підготовці початкової інформації. Тоді доводиться повертатися до постановки задачі і її формалізації, змінюючи їх так, щоб пристосуватися до наявної інформації.

<u>Контрольні запитання</u>

1. Які ви знаєте основні етапи створення економіко-математичної моделі?
2. В чому виражається зворотній зв’язок при створенні моделі?
3. Чим відрізняються стохастичні та детерміновані моделі?
4. Дайте класифікацію економіко-математичної моделі.
5. Як суб'єкт взаємодіє з об'єктом дослідження для створення моделі?

Вивчивши матеріали цього розділу, студенти опанують основні методологічні принципи створення економіко-математичних моделей.

2. СТАТИСТИЧНІ ОСНОВИ ОЦІНОК ЯКОСТІ ПРОГНОЗУВАННЯ, АПРОКСИМАЦІЇ ТА ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

У цьому розділі наведено основні положення математичної статистики при оцінці точності розрахунку середнього, стандарту, віднесення вибірки до певного закону розподілу та якості апроксимації та прогнозування.

2.1. Статистичні характеристики процесу

Велике поширення в статистиці мають середні величини, бо вони характеризують якісні показники будь-якої діяльності.

Середня – це один з найбільш розповсюджених прийомів узагальнень. Правильне розуміння сутності середньої визначає її особливу значимість в умовах ринкової економіки, коли середня через одиночне і випадкове дозволяє виявити загальне і необхідне, виявити тенденцію закономірностей економічного розвитку. Середня величина – це узагальнюючий показник, у якому знаходить вираження дія загальних умов, закономірностей досліджуваного явища.

Статистичні середні розраховуються на основі даних правильно статистично організованого масового спостереження. Однак статистична середня буде об’єктивною і типовою, якщо вона розраховується по масовим даним для якісно однорідної сукупності. Середня величина є відображенням значень досліджуваної ознаки, отже, вимірюється в тій же розмірності, що і ця ознака. Кожна середня величина характеризує досліджувану сукупність по який-небудь одній ознаці. Щоб одержати повне і всебічне представлення про досліджувану сукупність по ряду істотних ознак, у цілому необхідно мати систему середніх величин, що можуть описати явище з різних сторін.

Середня арифметична проста (незважена) дорівнює сумі окремих значень ознаки діленої на кількість цих значень.

$$M_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i , \qquad (2.1)$$

де X_i –окреме значення ознаки; N – число одиниць сукупності.

Але середня величина – це абстрактна, узагальнююча характеристика ознаки досліджуваної сукупності, вона не показує будівлі сукупності, що дуже істотно для її пізнання. Середня величина не дає представлення про те, як окремі значення досліджуваної ознаки групуються навколо середньої, чи зосереджені вони поблизу чи значно відхиляються від неї. У деяких випадках окремі значення ознаки близько примикають до середньої арифметичної і мало від неї відрізняються. У таких випадках середня добре представляє всю сукупність. В інші, навпаки, окремі значення сукупності далеко знаходяться від середньої, і середня погано представляє всю сукупність.

Коливання окремих значень характеризують показники варіації. Більшість статистичних закономірностей виявляється через варіацію. Вивчаючи варіацію значень ознаки в сполученні з його частотними характеристиками, ми виявляємо закономірності розподілу. Розглядаючи варіацію однієї ознаки паралельно зі зміною іншого, ми виявляємо взаємозв'язок між цими ознаками чи його відсутність. Варіації в статистиці виявляються подвійно, або через зміни значень ознаки в окремих одиницях сукупності, або через наявність чи відсутність досліджуваної ознаки в окремих одиницях сукупності.

Вивчення варіації в статистиці має як самостійну мету, так є і проміжним етапом більш складних статистичних досліджень.

Під варіацією в статистиці розуміють такі кількісні зміни величини досліджуваної ознаки в межах однорідної сукупності, що обумовлені перехресним впливом дії різних факторів.

Аналіз систематичної варіації дозволяє оцінити ступінь залежності змін у досліджуваній ознаці від визначаючих її факторів. Наприклад, вивчаючи силу і характер варіації у сукупності, можна оцінити, наскільки однорідною є дана сукупність у кількісному, а іноді і якісному відношенні, а отже, наскільки характерною є обчислена середня величина. Ступінь близькості даних окремих одиниць до середнього виміряється низкою абсолютних, середніх і відносних показників. Серед них:

Дисперсія – показник, що характеризує розсіювання значень ознаки щодо його середньої величини. Дисперсія – це середнє квадратичне відхилення всіх варіантів ряду віл середньої арифметичної.

$$D_X = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - M_X^2 , \tag{2.2}$$

де X_i –окреме значення ознаки; M_X – середня арифметична ознаки; N – число значень ознаки.

Середнє квадратичне відхилення – це узагальнююча характеристика абсолютних розмірів варіації ознаки в сукупності. Середнє квадратичне відхилення є мірилом надійності середньої. Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим краще середня арифметична відбиває собою всю сукупність, що представляється. Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії.

$$s_X = \sqrt{D_X} , \tag{2.3}$$

де D_X – дисперсія ознаки.

Незважаючи на логічну подібність, дисперсія є більш чуттєвим до варіації, а, отже, й частіше застосовуваним показником.

Оскільки числові характеристики випадкової величини ми знаходимо за вибіркою конечного розміру, то ми не можемо визначити їх точно, а знаходимо тільки якусь оцінку, виникає питання, а на скільки ж воно відрізняється від справжнього значення середнього чи дисперсії?

Нехай нас цікавить величина інтервалу ε на який відхилиться від справжньої оцінки числової характеристики, розраховане за результатами експериментальної вибірки. При цьому ми повинні наперед визначити ймовірність β, значення якої викликало б у нас довіру до цього інтервалу (тобто високу ймовірність – 0.8, 0.9, 0.95...). Цей інтервал так і називається – “довірчим”.

Отже нам треба зробити дію, зворотну визначенню ймовірності того, що справжнє значення числової характеристики випадкової величини ($Чх[X]$)буде відрізнятися від його оцінки $O[X]$ не більше ніж на величину ε

$$P\left(\left|Чх[X]-O[X]\right|<e\right)=b. \tag{2.4}$$

Коли буде знайдено ε, то справжнє значення числової характеристики буде знаходитися в межах $O[X]- \varepsilon < Чх[X] < O[X]+ \varepsilon$.

Розмір довірчого інтервалу для кожної числової характеристики можна знайти із застосуванням функції Лапласа (тут наведено варіант формули для квантиля таблиці $t = \frac{X_i - M_X}{s_X}$):

– для середнього

$$e_m = \tilde{s}_x \Phi^{-1}(b); \tag{2.5}$$

– для дисперсії

$$e_D = \tilde{D}_X \Phi^{-1}(b)\sqrt{\frac{0,8N+1,2}{N(N-1)}}, \tag{2.6}$$

де, $\tilde{s}_m = \sqrt{\frac{D_X}{N}}$; $\Phi^{-1}(\beta)$– зворотне значення функції Лапласа, тобто таке значення аргументу (квантиля), при якому функція Лапласа дорівнює β.

Функція Лапласа має вигляд:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \tag{2.7}$$

але цей інтеграл у явному вигляді взяти неможливо, тому використовують таблиці його значень.

В деяких випадках перед початком статистичного аналізу потрібно виконати нормування чисельних значень нашої вибірки. Воно провадиться за формулою:

$$X_i^{н} = \frac{X_i - M_X}{s_X}. \tag{2.8}$$

Таке нормування з імовірністю 98% переведе всі значення X у діапазон [-4;+4] з середнім, що дорівнює 0, та стандартом, що дорівнює 1.

Якщо в процесі розрахунків за нормованими даними виникає потреба виконати денормування, то потрібна формула:

$$X_i = s_X X_i^{н} + M_X \,. \tag{2.9}$$

Мірою відносного відхилення значень випадкової величини відносно оцінки його середнього служить варіація та коефіцієнт варіації

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\hat{D}(x)}{\hat{M}(X)}; \qquad K\mathrm{var}(X) = \frac{\hat{s}(x)}{\hat{M}(X)}.$$

<u>Приклад</u>

Економічний процес було досліджено на 4-ма параметрами. Було отримано 5 точок значень цих параметрів (табл. 2.1). Провести нормування цих параметрів.

Таблиця 2.1

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	87	0,39	560	2770
2	25	0,82	430	2590
3	67	0,29	270	2870
4	62	0,52	860	1920
5	53	0,54	790	2770

Рішення цієї задачі будемо виконувати у додатку Calc пакету Open Office. Розрахуємо середні для кожного параметра із застосуванням функції AVERAGE(), у дужках через двокрапку вкажемо діапазон адрес клітинок, які містять зміни значення першого фактора для всіх 5-ти точок. Далі знаходимо стандарт, використовуючи функцію STDEVA(), де так само подано діапазон клітинок для 1-го фактора. І нарешті, за допомогою формули STANDARDIZE(X; M_X; s_X) виконуємо нормування. Тут перше число – адреса клітинки, яка має бути нормована, 2-е – адреса клітинки, де є середнє, 3-є – клітинка, де є стандарт.

Вікно функції STANDARDIZE представлене на рис. 2.1, а таблиця нормованих значень подана нижче.

Таблиця 2.2

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1,25	-0,61	-0,09	0,48
2	-1,49	1,54	-0,62	0,02
3	0,36	-1,11	-1,27	0,74
4	0,14	0,04	1,13	-1,73

5	-0,26	0,14	0,85	0,48

2.2. Оцінка якості апроксимації та прогнозування

Знати закон розподілу випадкової величини потрібно, щоб скористатися всіма вже раніше зробленими висновками щодо можливих характеристик цієї випадкової величини.

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати цей закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «**нуль-гіпотезу**» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини з певною довірчою ймовірністю *p*.

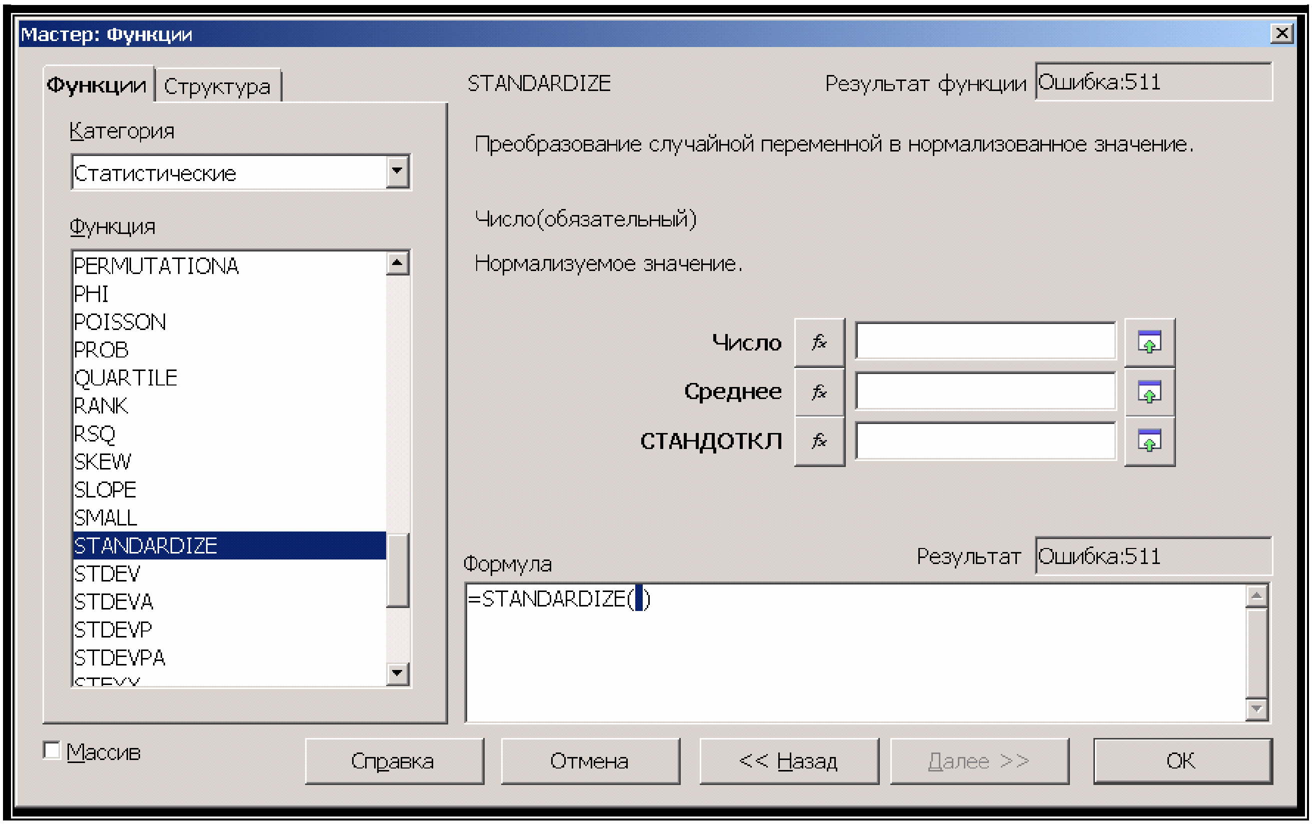


Рис. 2.1. Вікно функції STANDARDIZE електронних таблиць Calc

Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони і знаходимо відносні частоти k_i. Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за відомою вже формулою

$$P(x_i < x < x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i), \qquad (2.10)$$

де x_i, x_{i+1} – значення випадкової величини на верхній і нижній межах i-го діапазону, $F(x)$ – прийнята ними як нуль-гіпотеза, функція розподілу, у якій параметрами математичного сподівання та дисперсії використовуються їхні оцінки, розраховані з експериментальної вибірки.

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат»)

$$c_P^2 = n\sum_{i=1}^{d}\frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}, \qquad (2.11)$$

буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.. Тут n – розмір вибірки, k_i – частоти на відповідних діапазонах; p_i – імовірності попадання випадкової величини в той же діапазон, по якому розраховані і відносні частоти.

Щільність теоретичного закону розподілу знаходиться за формулою:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{m}{2-1}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad m \in N. \qquad (2.12)$$

Параметрами цього закону є довірча ймовірність та число степенів свободи, яке знаходиться як $r = d – s - 1$, де s – число параметрів закону розподілу випадкової величини, що було використано при розрахунку ймовірностей попадання у інтервал значень випадкової величини. Так, для рівномірного, експоненціального закону і закону Пуассона $s = 1$, бо для цих законів треба знати тільки математичне сподівання (дисперсія жорстко пов`язана з математичним сподіванням простою формулою), а для нормального $s = 2$, тому що для визначення цього закону потрібно знати вже два параметри M та σ.

Для визначення теоретичної величини „хі-квадрат” скористатися такою функцією електронних таблиць Calc з пакету Open Office

CHIINV(довірча ймовірність; число степенів свободи)

Інколи цю задачу вирішують через визначення рівня довірчої ймовірності. Тобто, за розрахованим значенням $\chi 2$ та за числом степенів свободи знаходять, якій імовірності вони відповідають. А потім приймають рішення, чи можна довіряти отриманим результатам з такою ймовірністю. Для таких розрахунків існує функція Calc

CHIDIST(розраховане значення $\chi 2$;число степенів свободи)

Розподіл „хі-квадрат” використовується також для визначення якості апроксимації та прогнозування математичної моделі за наступною процедурою:

1. Проводиться розрахунок вихідних значень математичної моделі, підставляючи в неї реальні вхідні значення, за якими ця модуль була побудована.

2. Для кожної пари розрахованих $y_{\Pi i}$ та реальних y_{Pi} значень розраховується критерій „хі-квадрат” за формулою:

$$c_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{Pi} - y_{\Pi i})^2}{y_{Pi}} \tag{2.13}$$

3. Визначається число ступенів свободи як $r = n - 2$.

4. Знаходиться теоретичне значення „хі-квадрат” за наперед визначеною довірчою ймовірністю. Якщо це значення більше розрахованого, модель вважається адекватною з визначеною довірчою ймовірністю. В іншому випадку – модель не адекватна, тобто, погано описує процес.

5. У випадку, коли потрібно визначити якість прогнозування, для побудови моделі використовується тільки частина реальних значень параметрів економічної системи. А для тих значень, що залишилися, розраховується прогнозні величини вихідного параметра і далі діємо за п.2-4.

Часто дослідник має у своєму розпорядженні не одну вибірку даних, а декілька. Наприклад, можна визначати зміну у часі валюти балансу підприємств роздрібної торгівлі, та металургійних комбінатів. При побудові математичної моделі потрібно вирішити для себе, чи можні ці вибірки поєднати в одну чи ні? Вирішенням цієї задачі займається декілька додаткових статистичних характеристик.

Кореляційний момент (в англомовній літературі цей параметр називається ко-варіація), яка розраховується за вибірками двох різних випадкових величин. Це дозволяє визначити міру взаємного зв`язку цих величин

$$\mathrm{cov}(X,Y) = R_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y). \tag{2.14}$$

де, *X, Y* – відповідно перша і друга випадкові величини, а M_x, M_y – оцінка їх середніх (математичних сподівань). Чим більший кореляційний момент – тим більший зв`язок цих випадкових величин між собою. Якщо потрібно розглянути спільний зв’язок трьох і більше пар вибірок випадкових величин, подібні розрахунки можуть дати величини ко-варіації, які порівняти буду неможливо. Для приведення кореляційних моментів різних пар випадкових величин до одного масштабу, знаходиться коефіцієнт кореляції (в англомовній літературі цей параметр інколи називається кореляція)

$$cor(X,Y) = r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\tilde{\sigma}_X \cdot \tilde{\sigma}_Y}, \tag{2.15}$$

де $\tilde{\sigma}_X$, $\tilde{\sigma}_Y$ – оцінки середніх квадратичних відхилень для випадкових величин *X* та *Y*. Завдяки такому перетворенню коефіцієнт кореляції змінюється в діапазоні [±1]. Коли він близький нуля, це означає, що зв`язку між цими випадковими величинами немає, а коли його значення близьке до 1, це означає що ці випадкові величини пов'язані між собою лінійним співвідношенням виду $x = ay + b$. Знак „мінус” означає, що зі збільшенням однієї випадкової величини зменшується інша, а знак „плюс” – що інша зростає.

В електронних таблицях Calc є функції, що автоматично розраховують ко-варіацію та кореляцію

COVAR(адреси клітинок першого масиву даних; адреси клітинок другого масиву даних)

CORREL(адреси клітинок першого масиву даних; адреси клітинок другого масиву даних)

Критерій Стьюдента використовується, щоб визначити, наскільки вірогідно, що дві вибірки узяті з генеральних сукупностей, мають одне і те ж середнє. Закон розподілу Стьюдента має вигляд

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\cdot p}\cdot\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}}, & x\ge 0,\\ 0, \quad x<0, & \end{cases} \quad m\in N. \tag{2.16}$$

Якщо ймовірність невелика (<0,55), можна вважати, що вибірки мають істотно відмінні середні, а отже, їх не можні поєднувати в одну для побудови математичної моделі. Треба будувати дві різні моделі.

Для реалізації цього закону розподілу існує функція ТТЕСТ електронних таблиць Calc

ТТЕСТ(Дані 1; Дані 2; Режим; Тип)

Дані 1 перший масив даних.
Дані 2 другий масив даних.
Режим = 1, то функція використовує односторонній розподіл, якщо **Режим** = 2, той двосторонній розподіл.
Тип є типом t - тесту (для перевірки за критерієм Стьюдента). Тип 1 означає двосторонній. Тип 2 означає дві вибірки, рівну вірогідність (гомоскедастичний). Тип 3 означає дві вибірки, нерівну вірогідність (гетероскедастічний).

F-тест (Фішера) визначає односторонню вірогідність того, що дисперсії аргументів массив1 і массив2 розрізняються неістотно. Ця функція використовується для того, щоб визначити, чи мають дві вибірки різні дисперсії. Наприклад, якщо дані результати тестування для приватних і суспільних шкіл, то можна визначити, чи мають ці школи різні рівні різнорідності учнів за наслідками тестування.

Якщо ймовірність буде невеликою (<0,55), це означає, що за дисперсією вибірки відрізняються істотно, а отже, при імітаційному моделюванні не можна використовувати дані з вибірок водночас.

Для реалізації цього тесту існує функція FTECT електронних таблиць Calc

FTECT(масив1;масив2)

Загальні принципи порівняння вибірок наступний:

1. Розраховуємо кореляцію, t- тест та F- тест для кожної пари вибіркових значень.
2. Вибірки можна об'єднувати в одну якщо кореляцію позитивна, а тести дають значну ймовірність (>0.65).
3. В інших випадках поєднувати вибірки не можна, бо вони є статистично відмінними.

Приклад

Визначити відмінність дисперсій двох вибірок, представлених нижче

0,45	0,59	0,78	0,04	0,44	0,32	0,92
0,34	0,29	0,88	0,87	0,68	0,28	0,88

Скористаємося функцією FTECT електронних таблиць Calc. Результат розрахунку показано на рис. 2.2. Імовірність 0,88 означає, що ці вибірки статистично взяті з однієї генеральної сукупності. Отже, їх можна поєднати в одну для побудови економіко-математичної моделі.

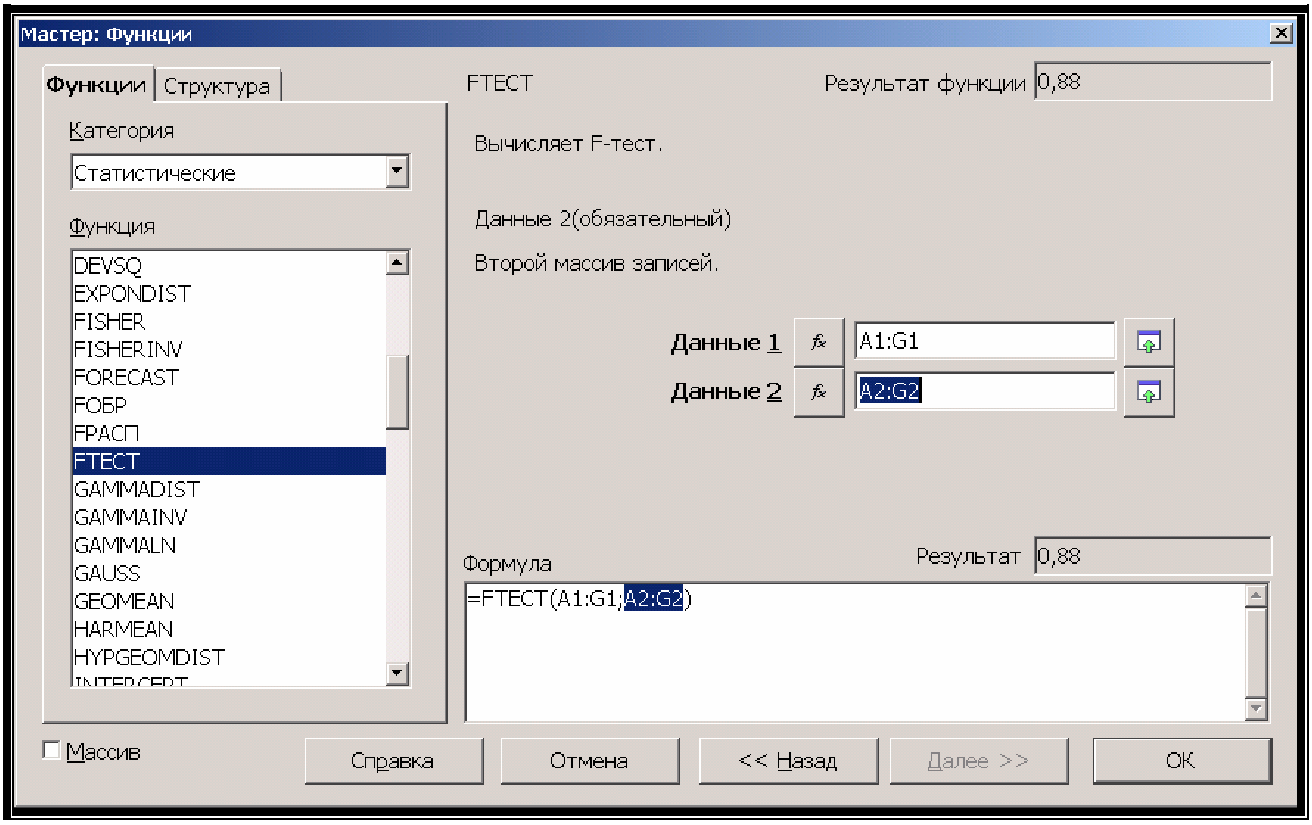


Рис. 2.2. Приклад роботи функції FTEST

2.3. Оцінка експертних висновків

У тих випадках, коли об'єктивній інформації виявляється не досить для визначення чисельних значень необхідного критерію при ухваленні рішення, повинні використовуватися суб'єктивні оцінки, засновані на накопиченому досвіді, знаннях, ідеях, думках і припущеннях фахівців, привернутих до вироблення суб'єктивної оцінки.

Отримання об'єктивних оцінок базується на наступних загальних положеннях:

1) ***аксіома незміщеності***, яка стверджує, що думка більшості є компетентною;

2) ***аксіома транзитивності***, яка стверджує, що суб'єктивні оцінки можуть бути переміщені.

З цього виходить, що мірою якості суб'єктивних оцінок є їх розсіяння.

Для визначення взаємозв'язку між ознаками, які можна зранжувати, передусім на основі бальних оцінок, застосовуються методи рангової кореляції. Рангами називають числа натурального ряду, які згідно зі значеннями ознаки надаються елементам сукупності і певним чином упорядковують її. Ранжування проводиться за кожною ознакою окремо: перший ранг надається найменшому значенню ознаки, останній – найбільшому або навпаки. Кількість рангів дорівнює обсягу сукупності. Очевидно, зі збільшенням обсягу сукупності ступінь «розпізнаваності» елементів зменшується. З огляду на те, що рангова кореляція не потребує додержання будь-яких математичних передумов щодо розподілу ознак, зокрема вимоги нормальності розподілу, рангові оцінки щільності зв'язку доцільно використовувати для сукупностей невеликого обсягу, якими найчастіше і є економічні дані.

Для визначення міри зв'язку використовують коефіцієнт рангової кореляції, запропонований К. Спірменом.

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}, \qquad (2.17)$$

де n – число одиниць сукупності, d_i - різниця рангів за ознакою x та за ознакою y для і-ої одиниці сукупності.

Цей коефіцієнт має такі саме властивості, як і лінійний коефіцієнт кореляції: змінюється в межах від - 1 до + 1, водночас оцінює щільність зв'язку та вказує на його напрям.

Але при наявності співпадаючих значень рангів вищенаведена формула не працює. Тому замість неї використовують коефіцієнт кореляції рангів Кенделла, який порівнює ранги для всіх пар одиниць сукупності, що заздалегідь підпорядковані по значенню познаки x.

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{d} r_{ij} - \frac{d(m+1)}{2})^2}{d^2(m^3 - m)}, \quad (2.18)$$

де d – кількість експертів, m – кількість критеріїв.

Його використання доцільне, оскільки при розрахунку цього коефіцієнта не використовуються самі значення рангів, а тільки встановлюється більше або менше ранг даної одиниці, тобто немає необхідності при тотожності значень ознаки розраховувати середній ранг.

Але незважаючи на всі переваги традиційних методів, основаних на формулах Пірсона, Спірмена и рангової конкордації Кенделла, вони часто не дають змоги отримати потрібний результат при недостатній погодженості об'єктів по одному з вимірювань та малому обсязі сукупності вимірювань. Крім того, подані формули потребують обробки при тотожності рангів об'єктів.

Для рішення даної проблеми пропонується використовувати модифікований коефіцієнт конкордації:

$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - x_i|}{n(k_i - 1)}, \quad (2.19)$$

де n - об'єм вибірки, k_i - кількість ознак по і-му елементу вибірки.

В разі, коли $\forall_i (k_i = n)$ вид (2.19) спрощується

$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - x_i|}{n(n-1)}, \quad (2.20)$$

Формула (2.20) є аналогом коефіцієнта конкордації Кенделла, але не має обмежень, що покладаються на формулу Кенделла. Наприклад, для знаходження кореляції між результатами, формула Кенделла потребує рангового перетворення з наступним усередненням показників для рівних рангів. Подібні перетворення потребують додаткових затрат часу, як за рахунок винятково затрат на перетворення, так и за рахунок перекладу вихідних даних у речове представлення.

Модифікований коефіцієнт конкордації може працювати безпосередньо з вихідними даними. При цьому необхідно або зменшити все значення сукупності на величину мінімального значення, або привести (2.20) до виду

$$W = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|}{n(k - m)}, \quad (2.21)$$

де n - об'єм вибірки, k - максимально можливе значення ознаки, m - мінімально можливе значення ознаки.

Щоб можна було скористатися цими формулами, в електронних таблицях Calc є функція автоматично визначення рангів чисел у вибірці

RANK(Число;Адреси клітинок масиву;Тип)

Адреси клітинок масиву треба задавати як константи, тобто додавати до них символ $. Тип = 0, якщо ранжування виконується у зростаючому порядку і Тип = 1, – якщо в убуваючому.

Приклад

Сім експертів подали свої оцінки чисельного значення економічних факторів X_1 та X_2. Знайти міру узгодженості їх думок.

Чисельні значення експертних висновків наведено в табл.2.3. Там же подано ранжування у зростаючому порядку їх значень за допомогою функції RANK електронних таблиць Calc. На рис. 2.3 подано фрагмент цих розрахунків.

Таблиця 2.3

	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
Параметри	X_1	0,55	0,06	0,54	0,92	0,27	0,32	0,6
	X_2	0,78	0,77	0,98	0,14	0,93	0,29	0,78
Ранги	X_1	3	7	4	1	6	5	2
	X_2	3	5	1	7	2	6	4

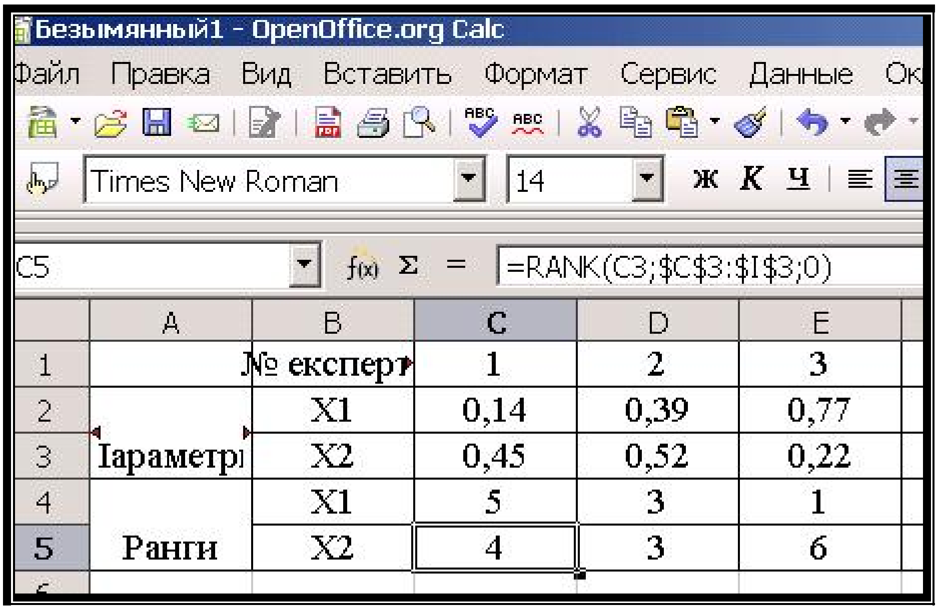


Рис. 2.3. Приклад визначення рангів експертних оцінок

Для вирішення подальшої задачі, скористаємося коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена (2.17). Число одиниць сукупності n=7. Суму різниць рангів в квадраті знайдемо, використавши функцію **SUMXMY2(масив1; масив2)**. Вона дорівнює 67. Тоді, коефіцієнт Спірмена дорівнює -0,2.

Отже, міра узгодженості експертних оцінок двох економічних параметрів показує нам, що думки експертів не узгоджені, а отже, їх не можна використовувати для побудови економіко-математичної моделі.

2.4. Індивідуальні завдання № 1. Статистичні розрахунки

Мета завдання: Вивчити методи розрахунків статистичних параметрів та міри узгодженості експертних оцінок.

Сім експертів подали свої думки щодо п’яти економічних параметрів. Визначити статистичні характеристики (середнє, стандарт) цих оцінок, можливість поєднати ці вибірки в одну та міру узгодженості за модифікованим коефіцієнтом конкордації (через ранги та абсолютні значення). Студент обирає свій варіант за номером у списку групи. Рекомендація: перед розрахунком проведіть нормування факторів X_i.

Таблиця 2.4

Варіанти завдань

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
1	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
2	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
3	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
4	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
5	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
6	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
7	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848

Продовження таблиці 2.4

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_2	**0,7**	**800**	**3040**	**362,51**	**5646,0**	**2,79134**	**1,54545**
	X_3	**0,46**	**570**	**2950**	**459,07**	**8082,1**	**3,52407**	**1,62121**
	X_4	**0,52**	**360**	**1810**	**499,73**	**7766,8**	**3,83810**	**3,92424**
	X_5	**0,68**	**790**	**1610**	**481,09**	**2206,8**	**10,0837**	**1,40909**
8	X_1	**0,5**	**440**	**2510**	**333,71**	**5273,4**	**7,53663**	**4,77272**
	X_2	**0,65**	**350**	**860**	**282,89**	**3840,4**	**9,63014**	**1,90909**
	X_3	**0,88**	**550**	**2350**	**506,50**	**8282,7**	**8,33914**	**3,25757**
	X_4	**0,46**	**430**	**1830**	**171,09**	**5187,4**	**7,11793**	**1,90909**
	X_5	**0,89**	**750**	**3090**	**501,42**	**8082,1**	**6,35031**	**3,30303**
9	X_1	**0,54**	**800**	**1670**	**242,24**	**7222,3**	**10,5024**	**1,78787**
	X_2	**0,54**	**250**	**1870**	**154,15**	**7136,3**	**8,82763**	**1,68181**
	X_3	**0,62**	**540**	**790**	**169,4**	**4213,0**	**6,55966**	**4,66666**
	X_4	**0,76**	**440**	**1750**	**169,4**	**7938,8**	**8,16468**	**3,06060**
	X_5	**0,88**	**820**	**1000**	**262,57**	**4814,8**	**2,89602**	**3,75757**
10	X_1	**0,7**	**520**	**2690**	**154,15**	**5273,4**	**10,3977**	**3,87878**
	X_2	**0,39**	**600**	**1460**	**525,14**	**4213,0**	**4,53593**	**3,42424**
	X_3	**0,38**	**490**	**3130**	**469,23**	**7021,7**	**9,24633**	**4,27272**
	X_4	**0,64**	**870**	**890**	**499,73**	**6419,8**	**6,35031**	**4,39393**
	X_5	**0,77**	**440**	**1900**	**398,09**	**4127,0**	**10,7117**	**3,33333**
11	X_1	**0,51**	**610**	**2180**	**160,93**	**4786,2**	**7,78087**	**4,46969**
	X_2	**0,81**	**270**	**1580**	**453,99**	**2522,0**	**4,71039**	**3,07575**
	X_3	**0,79**	**730**	**2110**	**406,56**	**3353,2**	**8,09490**	**3,62121**
	X_4	**0,54**	**280**	**2890**	**311,69**	**4814,8**	**7,32728**	**3,5**
	X_5	**0,53**	**760**	**1190**	**176,17**	**7824,1**	**4,32658**	**3,98484**
12	X_1	**0,45**	**440**	**1390**	**359,12**	**8426,0**	**7,57152**	**2,51515**
	X_2	**0,83**	**540**	**1670**	**282,89**	**4012,4**	**10,3279**	**3,27272**
	X_3	**0,51**	**330**	**1200**	**489,56**	**7967,4**	**10,3279**	**2,90909**
	X_4	**0,3**	**500**	**2220**	**506,50**	**7222,3**	**4,60572**	**2,98484**
	X_5	**0,88**	**460**	**3060**	**237,16**	**6591,8**	**4,46615**	**1,77272**
13	X_1	**0,74**	**470**	**2290**	**411,64**	**3066,6**	**9,56036**	**1,63636**
	X_2	**0,6**	**660**	**2820**	**374,37**	**4069,7**	**9,59525**	**4,71212**
	X_3	**0,31**	**540**	**1290**	**425,19**	**4413,6**	**7,88555**	**1,80303**
	X_4	**0,82**	**680**	**1020**	**477,70**	**6219,2**	**6,38520**	**1,83333**
	X_5	**0,62**	**720**	**1690**	**340,49**	**6104,5**	**10,8513**	**3,63636**
14	X_1	**0,67**	**750**	**1980**	**238,85**	**6161,9**	**8,19958**	**3,86363**
	X_2	**0,5**	**800**	**2650**	**477,70**	**7766,8**	**9,69993**	**2,27272**
	X_3	**0,73**	**810**	**1910**	**421,80**	**3381,8**	**4,98953**	**1,60606**
	X_4	**0,67**	**700**	**2610**	**442,13**	**3496,5**	**9,66503**	**3,46969**
	X_5	**0,31**	**630**	**1740**	**333,71**	**5416,7**	**9,42079**	**2,75757**
15	X_1	**0,37**	**410**	**1260**	**362,51**	**8941,9**	**2,86113**	**2,28787**
	X_2	**0,88**	**850**	**1170**	**216,83**	**2206,8**	**5,58269**	**4,60606**
	X_3	**0,72**	**490**	**2410**	**413,33**	**7021,7**	**6,00139**	**2,30303**
	X_4	**0,5**	**570**	**1960**	**496,34**	**3553,8**	**7,43196**	**4,22727**
	X_5	**0,61**	**850**	**2380**	**513,28**	**4184,3**	**5,86182**	**2,16666**

№ п/п	№ екс-перта	1	2	3	4	5	6	7
16	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
17	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
18	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
19	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
20	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
21	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
22	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
23	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
24	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060

Закінчення таблиці 2.4

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_5	**0,88**	**820**	**1000**	**262,57**	**4814,8**	**2,89602**	**3,75757**
25	X_1	**0,7**	**520**	**2690**	**154,15**	**5273,4**	**10,3977**	**3,87878**
	X_2	**0,39**	**600**	**1460**	**525,14**	**4213,0**	**4,53593**	**3,42424**
	X_3	**0,38**	**490**	**3130**	**469,23**	**7021,7**	**9,24633**	**4,27272**
	X_4	**0,64**	**870**	**890**	**499,73**	**6419,8**	**6,35031**	**4,39393**
	X_5	**0,77**	**440**	**1900**	**398,09**	**4127,0**	**10,7117**	**3,33333**
26	X_1	**0,51**	**610**	**2180**	**160,93**	**4786,2**	**7,78087**	**4,46969**
	X_2	**0,81**	**270**	**1580**	**453,99**	**2522,0**	**4,71039**	**3,07575**
	X_3	**0,79**	**730**	**2110**	**406,56**	**3353,2**	**8,09490**	**3,62121**
	X_4	**0,54**	**280**	**2890**	**311,69**	**4814,8**	**7,32728**	**3,5**
	X_5	**0,53**	**760**	**1190**	**176,17**	**7824,1**	**4,32658**	**3,98484**
27	X_1	**0,45**	**440**	**1390**	**359,12**	**8426,0**	**7,57152**	**2,51515**
	X_2	**0,83**	**540**	**1670**	**282,89**	**4012,4**	**10,3279**	**3,27272**
	X_3	**0,51**	**330**	**1200**	**489,56**	**7967,4**	**10,3279**	**2,90909**
	X_4	**0,3**	**500**	**2220**	**506,50**	**7222,3**	**4,60572**	**2,98484**
	X_5	**0,88**	**460**	**3060**	**237,16**	**6591,8**	**4,46615**	**1,77272**
28	X_1	**0,74**	**470**	**2290**	**411,64**	**3066,6**	**9,56036**	**1,63636**
	X_2	**0,6**	**660**	**2820**	**374,37**	**4069,7**	**9,59525**	**4,71212**
	X_3	**0,31**	**540**	**1290**	**425,19**	**4413,6**	**7,88555**	**1,80303**
	X_4	**0,82**	**680**	**1020**	**477,70**	**6219,2**	**6,38520**	**1,83333**
	X_5	**0,62**	**720**	**1690**	**340,49**	**6104,5**	**10,8513**	**3,63636**
29	X_1	**0,67**	**750**	**1980**	**238,85**	**6161,9**	**8,19958**	**3,86363**
	X_2	**0,5**	**800**	**2650**	**477,70**	**7766,8**	**9,69993**	**2,27272**
	X_3	**0,73**	**810**	**1910**	**421,80**	**3381,8**	**4,98953**	**1,60606**
	X_4	**0,67**	**700**	**2610**	**442,13**	**3496,5**	**9,66503**	**3,46969**
	X_5	**0,31**	**630**	**1740**	**333,71**	**5416,7**	**9,42079**	**2,75757**
30	X_1	**0,37**	**410**	**1260**	**362,51**	**8941,9**	**2,86113**	**2,28787**
	X_2	**0,88**	**850**	**1170**	**216,83**	**2206,8**	**5,58269**	**4,60606**
	X_3	**0,72**	**490**	**2410**	**413,33**	**7021,7**	**6,00139**	**2,30303**
	X_4	**0,5**	**570**	**1960**	**496,34**	**3553,8**	**7,43196**	**4,22727**
	X_5	**0,61**	**850**	**2380**	**513,28**	**4184,3**	**5,86182**	**2,16666**

Контрольні запитання

1. Що показує такий параметр як стандарт?
2. Що є мірою тісноти зв'язку двох різних вибірок?
3. Для чого використовується тест за критерієм Стьюдента?
4. Які ви знаєте критерії міри узгодженості експертних оцінок?
5. Для чого потрібно нормування вибіркових даних?

Вивчивши матеріали цього розділу, студенти опанують основні методологічні принципи визначення статистичних характеристик вибірок, міру узгодженості експертних оцінок, можливість поєднання різних вибірок в одну.

3. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Подано основні поняття про різні методи математичного програмування та прийоми знайдення оптимуму за допомогою комп’ютера.

До економічних об'єктів відносяться підприємства промисловості, сільського господарства, будівництва, торгівлі, виробництва, окремі цехи і інші, у тому числі і наше підприємство. При управлінні подібними об'єктами потрібно прагнуть, щоб управління було оптимальним. Під оптимальним управлінням розуміється таке управління, яке спільно з накладеними на систему обмеженнями забезпечує екстремальне значення критерію ефективності (максимального або мінімального залежно від конкретного вибору цільової функції) Отже, необхідно досягти мети з найбільшою ефективністю при нейтралізації зовнішніх збурюючих дій, при цьому економіко-математична модель вимагає оптимізації його цільової функції.

Кожна економіко-математична модель, що носить оптимізаційний характер, включає в склад:

- цільову функцію, значення якої мінімізується або максимізується;
- систему рівнянь, визначаючу залежність між всіма змінними в задачі;
- набір обмежень, визначаючий межі значень змінних в задачі.

У загальному вигляді економіко-математична модель виглядає таким чином:

– цільова функція

$$\mathrm{E} = \Psi(Ci \cdot Xi) \to Extr\,, \tag{3.1}$$

при наступних обмеженнях:

$$\left[\begin{array}{c} \sum j\ (aij \cdot Xi)\{=<;=;>=\}bj,(\,j=\overline{(1,m)} \\ dj <= Xi <= Di,(i=\overline{(1,m)} \end{array}\right. , \tag{3.2}$$

де E – цільова функція, C_i – коефіцієнти при змінних в цільовій функції, X_i – змінні задачі, B_j – праві частини обмежень, A_{ij} – коефіцієнти при змінних в обмеженнях, d_i - мінімально можливі значення змінних, D_i- максимально можливі значення змінних, φ та Ψ – якісь функції від цих параметрів.

В залежності від виду функцій φ та Ψ цей оптимізацій ний алгоритм розпадається різні методи математичного програмування, які і визначають спосіб знайдення екстремуму (3.1). Але з появою обчислювальної техніки, зокрема функції Solwer (рис. 3.1-3.2) електронних таблиць Calc у пакеті прикладних програм Open Office, нас уже не цікавить алгоритм знайдення оптимуму. Головне в сучасних умовах, сформувати математичну модель і передати її для вирішення комп’ютеру.

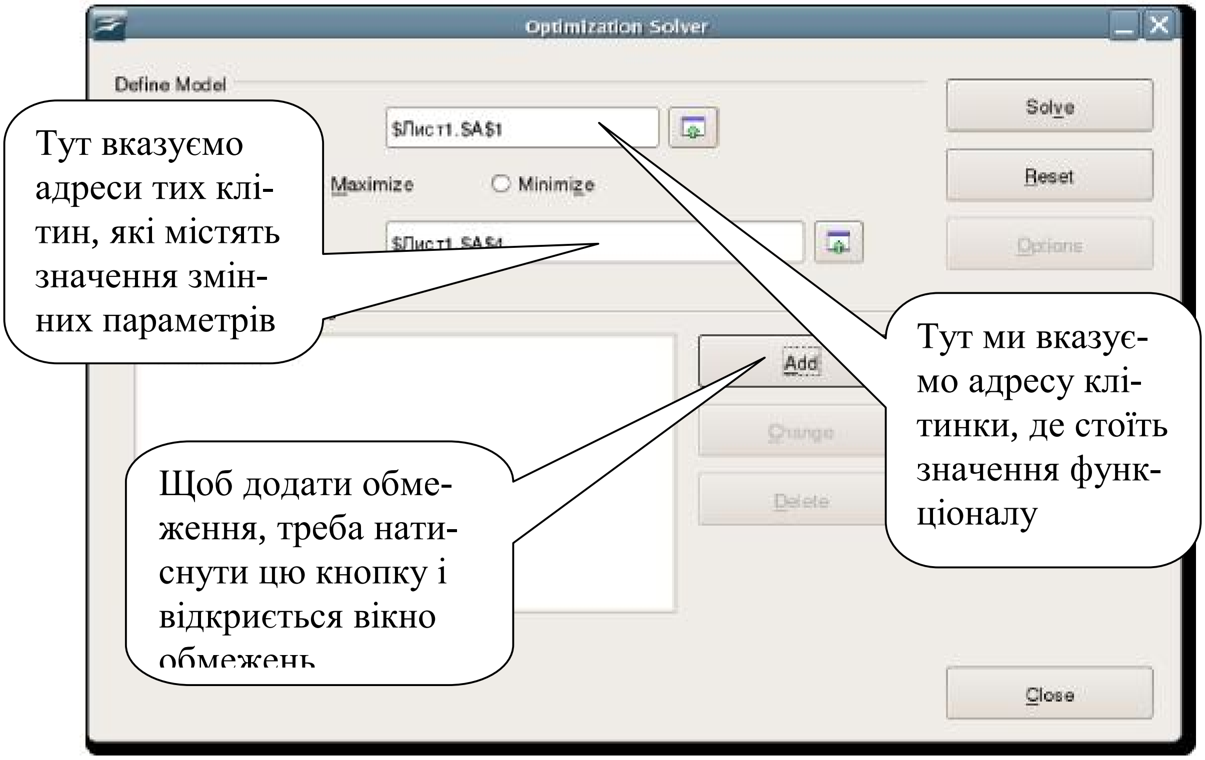


Рис. 3.1. Головне вікно функції Solwer

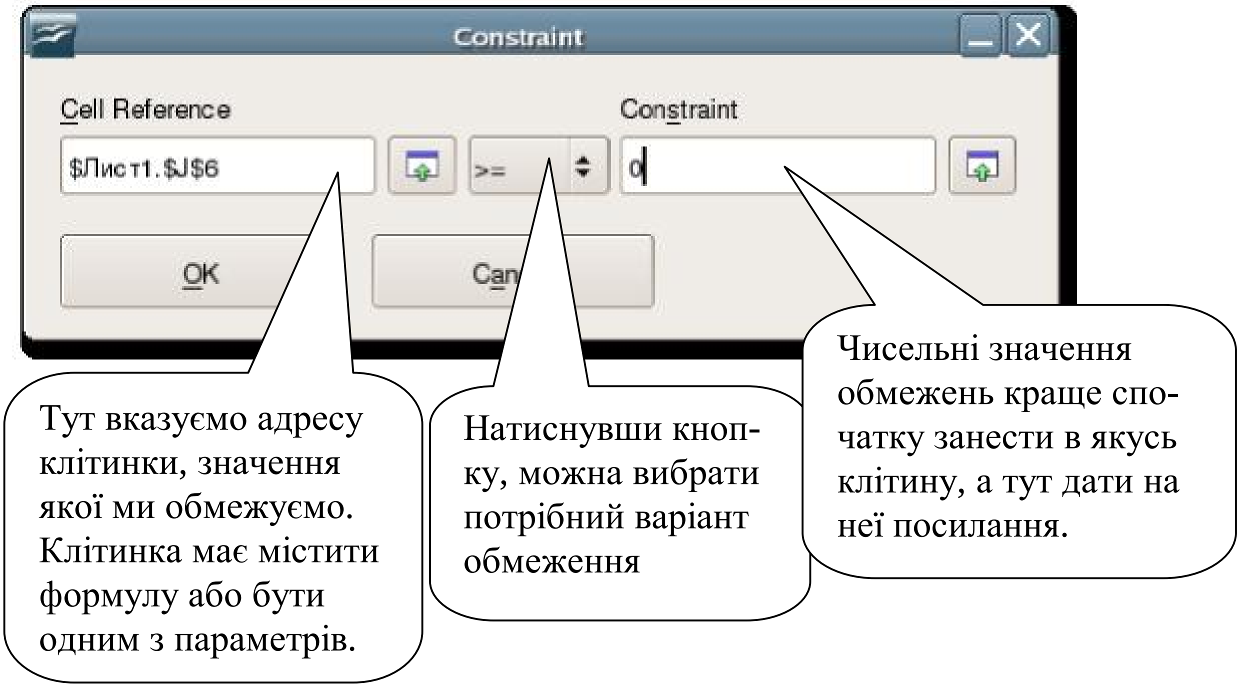


Рис. 3.2. Вікно уведення обмежень функції Solwer

Тому, в наступних пунктах цього розділу, та і наступних теж, увага приділяється набуттю уміння по класифікації економічної системи за ознакою типу математичного програмування, створенню систем рівнянь виду (3.1) – (3.2) та визначенню за ними оптимального рішенні через функцію Solwer.

3.1. Лінійне програмування

Загальна постановка задачі лінійного програмування має вигляд:

– Цільова функція

$$E = \sum C_i X_i \to Extr\ ; \tag{3.3}$$

– обмеження

$$\begin{cases} \sum aij \cdot Xi\{=<;=;>=\}bj, (j = \overline{(1,m)} \\ dj <= Xi <= Di, (i = \overline{(1,m)} \end{cases} . \tag{3.4}$$

Умовні позначення тут ті самі, що і у формулах (3.1) – (3.2).

<u>Приклад</u>

Знайти оптимальний план випуску товарної продукції. Інші умови подані в процесі вирішення задачі.

Цільова функція – це максимізація доходу від випуску товарної продукції

$$\sum P_i C_i \to \max\ , \tag{3.5}$$

де P_i – ціна одиниці продукції, C_i – об'єм випуску кожного виду продукції.

Накладемо на цільову функцію набір обмежень. Основним буде недолік виробничих площ. Всього в наявності є 230 місць, кожне з яких займає 7,4 квадратних метрів, враховуючи проходи до них. Необхідно також розвернути мінімум 10 робочих місць для інженерів, кожне з яких займає 8,5 квадратних метрів. Загальна площа виробничих приміщень становить 2000 квадратних метрів. Одержуємо обмеження

$$7{,}4L + 8{,}5Li \le 2000, \qquad Li \ge 10,\ L \le 230, \tag{3.6}$$

де L – кількість робочих місць, Li – кількість місць для інженерів.

Другою групою обмежень є обмеження по складських приміщеннях. Їх не можна пристосувати під виробничі, і крім того вони абсолютно необхідні для тимчасового зберігання випущеної продукції, а також займаються під склади деталей і матеріалів. Вважатимемо, що площа, необхідна для розміщення готової продукції кожного виду становить:

$0{,}3A$, де A – кількість телевізорів, що випускаються за місяць;

$0{,}35B$, де B – кількість відеомагнітофонів, що випускаються за місяць;

$0{,}4C$, де C – кількість музичних центрів, що випускаються за місяць.

Тоді для всього випуску потрібно складська площа у розмірі $0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C$,. Загальна площа обладнаних складських приміщень становить 600 квадратних метрів. Обмеження по об'єму складських приміщень

$$0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C \le 600. \tag{3.7}$$

Тепер розглянемо ціну товарної продукції: телевізор – 180 $, відеомагнітофон – 260 $, музичний центр - 420 $.

Собівартість складається з витрат на оренду площі – 4000 $, витрат на комплектуючі – 100, 170, 315 відповідно на випуск одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру; інших витрат – 4500 $. Необхідна зарплата інженерів складає 400, директора - 600, робітників на конвеєрі - 350. Для підприємства нашого масштабу необхідно 3 директори незалежно від випуску і 1 на кожні 150 одиниць продукції. Необхідно 1-2 інженери на кожні 150 одиниць випуску продукції.

Одержуємо обмеження, що собівартість не може перевищувати доходів від продажу продукції:

$$4000+100A+170B+315C+4500+400Li+350L+600\leq A\cdot P1+B\cdot P2+C\cdot P3, \quad (3.8)$$
$$P1\leq 180,\ P2\leq 260,\ P3\leq 420,$$

де $P1$, $P2$, $P3$ – відповідно ціни одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру.

Фонд заробітної платні, обмежений через податкові проблеми у 260,5 млн. $. Обмеження на фонд зарплати:

$$3\cdot 600+600(A+B+C)/150+2\cdot 400(A+B+C)/150+350L\leq 260500000. \quad (3.10)$$

Позначивши як змінні параметри величини A, B, C, $P1$, $P2$, $P3$, L, Li, виконаємо розрахунки за допомогою функції Solwer. Одержуємо, що оптимальним випуском є виробництво 3800 телевізорів, 2000 відеомагнітофонів і 1500 музичних центрів в місяць за умови збереження наявної тактики поведінки на ринку.

3.2. Цілочисельне програмування

Цілочисельне програмування має таку ж постановку задачі як і лінійне, тобто його цільова функція та обмеження мають вигляд (3.3) – (3.4). Відміною тут є те, що змінні параметри X можуть приймати тільки цілі значення. Це стосується, наприклад визначення кількості осіб, що працюють на підприємстві. Не можна ж призначити на роботу 1,5 особи.

Деякою відміною є 0-1 програмування. В ньому параметри X можуть приймати тільки значення 0 та 1.

Приклад

Потрібно розмістити на складі якомога більше різних видів продукції, запакованої у ящики. Позначимо як S – загальну площу складських приміщень; X_i – кількість ящиків i-го виду продукції, N – кількість видів продукції, C_i – ціна одиниці продукції, K_i – кількість продукції i-го виду у одному ящику. S_1 – площа, що займає один ящик Ящики можна розташовувати у три яруси.

Цільова функція визначає максимізацію вартості продукції на складі

$$E = \sum_{i=1}^{N} C_i K_i X_i \to \max . \qquad (3.11)$$

Тоді, – площа на складі, яку займає i-тий вид продукції $S_i = X_i S_1$, а загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно $X_3 = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Обмеження по площі мають вигляд

$$3S \geq S_1 \sum_{i=1}^{N} X_i . \qquad (3.12)$$

Ще одне обмеження визначає, що $X_i \geq 0$ та ще те, що всі X_i є цілочисельними. Вирішимо цю задачу для S = 250 кв. метри, N = 5, C_i = 2, 3, 5, 7, 15 грн. відповідно, K_i = 35, 40, 12, 55, 36 штук відповідно, S_1 = 2,5 кв. метри.

Підставивши ці дані у формули (3.11) – (3.12) і застосувавши функцію Solwer при змінних параметрах X_i, отримаємо наступне рішення X_1 =0, X_2 =0, X_3 = 0, X_4 =0, X_5 = 300 ящиків. Отже, весь склад вигідніше всього завантажити продукцією 5-го типу.

3.3. Нелінійне програмування

Якщо функції φ та Ψ у (3.1) – (3.2) мають нелінійний характер, така постановка задачі називається нелінійним програмування. Наприклад, якщо параметр X буде зведено у квадрат.

Приклад

Попит на продукцію виражається залежністю

$$Q = 20 + 2{,}3C - 0{,}05C^2 , \qquad (3.13)$$

де Q – обсяг спожитої продукції, C – ціна одиниці продукції.

Накладні витрати на виробництво продукції виражаються залежністю

$$P = 130 + 2{,}3Q, \qquad (3.14)$$

Знайти оптимальну ціну на продукцію при умові найбільшого прибутку.

Прибуток, це різниця між доходами та витратами. Остання умова вимагає, щоб ця різниця прагнула максимуму, отже, це і буде цільова функція

$$E = QC\text{-}130\text{-}2{,}3Q \to \max. \qquad (3.15)$$

Тоді, (3.13) буде обмеженням. Змінним параметром буде ціна C, для якої теж є обмеження $C \geq 0$.

Як видно з утвореної системи, вона є нелінійною, оскільки ціна у (3.13) входить у квадраті.

Вирішимо цю задачу за допомогою функції Solwer. В результаті отримаємо, що Q = 39,2479, C = 35,00175, E = 1153,475.

3.4. Багатокритеріальні задачі

Лише в окремих випадках мета, яку особа, що ухвалює рішення (ОУР) прагне досягти в плановані їм операції, вдається описати за допомогою одного кількісного показника. Різноманіття цілей ОУР адекватніше може бути описане за допомогою деякої сукупності часткових критеріїв (ч-критеріїв), що характеризують ступінь досягнення приватних цілей. Суперечливий характер цілей обумовлює, як правило, і суперечність ч-критеріїв. З формальної точки зору це призводить до того, що свої екстремальні значення ч-критерії одержують в різних точках області допустимих рішень (ОДР) – *Dx*. Отже, ОУР приймаючи рішення x' завжди повинен йти на компроміс, в розумних межах допускаючи погіршення значень одних ч-критеріїв в ім'я поліпшення значень інших. Саме цей етап творчої діяльності ОУР якнайменше формалізований і вимагає залучення попереднього досвіду, інтуїції і навіть мистецтва ОУР, що володіє практичним досвідом у відповідній наочній області. Рішення, що приймається ОУР із залученням сукупності ч-критеріїв, називатимемо компромісним, раціональним або просто рішенням ОУР, уникаючи при цьому терміну «оптимальний», що має визначений і цілком точний сенс.

Основна ідея обґрунтування і ухвалення рішення ОУР в умовах багатокрітеріальності полягає в послідовному звуженні ОДР *Dx* до мінімальних розмірів, що полегшує ухвалення остаточного рішення ОУР. Першим, найістотнішим кроком в цьому напрямі буде звуження ОДР *Dx* до деякої підмножини $Dx^p \subset Dx$ на підставі принципу домінування.

3.4.1. Формальна постановка багатокритеріальної задачі

Формальна схема багатокритеріальної задачі математичного програмування від звичної відрізняється наявністю декількох цільових функцій

$$L^r(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^r \cdot x_j + c_0^r \to \max_x, \quad r = \overline{1;R}, \tag{3.16}$$

$$D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i, \Rightarrow e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1;m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1;n}, \end{cases} \tag{3.17}$$

де e_i – ненегативні змінні (нев'язність, i = 1; m).

Знак max означає той факт, що бажаним є збільшення кожної з лінійних форм $Lr(x)$, що відображає деяку r-у мету задачі.

Вимога тільки максимізації не звужує загальності задачі. Так, наприклад, вимога мінімізації витрат деяких ресурсів еквівалентна вимозі максимізації залишку від спочатку виділених ресурсів. Наявність багатьох ч-критеріїв дозволяє зробити модель (3.16) – (3.17) адекватній ситуації, що вивчається, проте виводить її з класу задач математичного програмування і вимагає розробки нових способів її аналізу. Початковий аналіз таких задач полягає у видаленні з області допустимих рішень (ОДР) Dx явно гірших, рішень, які домінують x. Рішення x' домінує рішення x ($x' > x$), якщо при x' хоча б один ч-критерій має більше значення при рівності інших. Тому рішення x може бути виключене з подальшого розгляду, як явно гірше, ніж x'. Якщо рішення x, не домінує із жодним з рішень $x \in Dx$, то його називають Паретто-оптимальним (π - оптимальним) або ефективним рішенням (π - рішенням). Таким чином, π-решення – це не краще (таке, що не домінує) рішення, і ясно, що рішення задачі повинно володіти цією властивістю – інші рішення немає сенсу розглядати.

Формальне визначення π-оптимальності рішення x' записується як вимога про відсутність такого рішення x Î Dx, при якому б були виконані умови

$$L^r(x) \geq L^r(x'), \forall r, \tag{3.18}$$

і хоча б одне з них – строго (із знаком >).

Іншими словами, умови (4) виражають вимогу неможливості поліпшення рішення x' в межах ОДР Dx ні по одному ч-критерію без погіршення хоча б по одному з інших.

3.4.2. Зведення до задачі лінійного програмування

Щоб можна було перевірити умову (3.18) для деякої довільно узятої точки x', не вдаючись до попарного порівняння з іншими, умову, сформулюємо її у вигляді наступної задачі лінійного програмування

$$d^r = L^r(x) - L^r(x') = \sum_{j=1}^{n} c_j^r x_j - \sum c_j x_j', \forall d^r, \tag{3.19}$$

$$\Delta = \Delta(x) = \sum_{r=1}^{R} d^r \to \max_x, \tag{3.20}$$

$$x \in D_x, \forall x_j \geq 0. \tag{3.21}$$

Значення задачі лінійного програмування неважко зрозуміти, якщо врахувати, що δr – це приріст ч-критерію Lr, одержане при зсуві рішення x, в точку x. Тоді, якщо після рішення задачі виявиться Δmax = 0, то це означатиме, що жоден з ч-критеріїв не можна збільшити, якщо не допускати зменшення будь-якого з інших ($\forall\ \delta r \geq 0$). Але це і є умова π-оптимальності х,. Якщо ж при рішенні виявиться, що $\Delta \geq 0$, то значить якийсь ч-критерій збільшив своє значення без погіршення значень інших ($\forall\ \delta r \geq 0$), і значить х, $\notin$ Dπx.

<u>Приклад</u>

Дані цільові функції:

$$\left.\begin{aligned} L1 &= -x1 + 2x2 + 2, \\ L2 &= x1 + x2 + 4, \\ L3 &= x1 - 4x2 + 20, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

і система обмежень:

$$\left.\begin{aligned} & x1 + x2 \leq 15, \\ & 5x1 + x2 \geq 1, \\ & -x1 + x2 \leq 5, \\ & x2 \leq 20, \\ & \forall xj \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Перетворимо цільові функції в одну, згідно з (3.19) – (3.20):

$$\left.\begin{aligned} & \delta^1 = x1 - 2x2 + 1, \\ Dxk\ & \delta^2 = x1 + x2 - 8, \\ & \delta^3 = -x1 + 4x2 - 7, \\ & \Delta = x1 + 3x2 - 14 \to \max. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Тепер ми маємо одну цільову функцію, яку і можемо вирішити за допомогою функції Solwer: x1=5, x2=10, Δ = 21.

3.4.3. Метод гарантованого результату

При будь-якому довільному рішенні $x \in$ Dx кожний з ч-критеріїв прийме певне значення і серед них знайдеться, принаймні, один, значення якого буде якнайменшим:

$$j = j(x) = \min_{1 \leq r \leq R} L^r(x) \to \max_x . \tag{3.25}$$

Метод гарантованого результату дозволяє знайти таке гарантоване рішення, при якому значення «якнайменшого» критерію стане максимальним. Таким чином, цільова функція (ЦФ) є деякою згорткою ч-критеріїв (3.25), а рішення зводиться до задачі частково-опуклого програмування при ОДР Dx, заданої лінійними обмеженнями.

<u>Приклад</u>

Для прикладу з п.3.4.2, формули (3.22) - (3.23), застосувати метод гарантованого результату. Для цього вирішимо три задачі лінійного програмування з трьома різними критеріями оптимізації та з однаковими обмеженнями.

Застосувавши функцію Solwer, отримуємо, що при пошуку максимуму для L1 та L2, значення змінних параметрів буде однаковим x1=5, x2=10. При цьому L1 = 17, L2 = 19. А при пошуку максимальних значень відносно L3, отримуємо x1= 53687096, x2= -2,1 10^8, L3= 9,1 10^8. Отже, згідно з принципу (3.25) останнє рішення треба відкинути і взяти перше.

3.4.4. Метод згортки часткових критеріїв

Лінійна згортка ч-критеріїв виходить як х сума з деякими ваговими коефіцієнтами μr

$$L(x) = \sum_{r=1}^{R} m_{\kappa} L^r(x), \tag{3.26}$$

Коефіцієнти ваги звичайно знаходять шляхом опиту експертів з відповідної наочної області. Оскільки вектор μ = (μr) – суть вектор-градієнт Lμ(x), то передбачається, що він указує напрям до екстремуму невідомої функції корисності. Найкращою лінійна згортка ч-критеріїв може виявитися у тому випадку, коли ч-критерії однорідні і мають єдиний еквівалент, що погоджує їх найбільш природним чином. Позитивна сторона такого підходу – нескладність, не завжди компенсує його серйозний недолік – втрату фізичного значення лінійної згортки різнорідних ч-критеріїв. Це утрудняє інтерпретацію результатів, тому одержане таким шляхом рішення, слід розглядати тільки як можливий (альтернативний) варіант рішення задач лінійного програмування. Для його порівняльного аналізу слід привертати будь-які інші варіанти і, звичайно, значення ч-критеріїв, одержувані при цьому.

Іноді при отриманні згортки ч-критеріїв заздалегідь нормуються наступним способом:

1. Знаходиться часткове рішення за кожним з критеріїв окремо.
2. Оптимальне значення кожного критерію $L^r_{ОПТ}(x)$ використовується для подальшого нормування критеріїв

$$\frac{L^r(x) - L^r_{ОПТ}(x)}{L^r_{ОПТ}(x)}. \tag{3.27}$$

Таке нормування зводить різнорідні критерії в один масштаб.

3. Нормовані значення критеріїв зводяться в один функціонал, для якого і знаходиться його мінімальне значення.

Цей принцип можна застосовувати до будь-якого виду цільових функцій та обмежень: як лінійних так і нелінійних.

Принципи зведення не нормованих критеріїв в один функціонал залежать від того, куди прагне кожен ч-критерій:

1. Якщо всі критерії прагнуть максимуму, достатньо утворити їх суму з ваговими коефіцієнтами.

2. Якщо є критерії, що прагнуть мінімуму, потрібно їх перетворити на такі, що прагнуть максимуму $L_{MAX}^{r}\left(x\right)=\frac{1}{L_{MIN}^{r}\left(x\right)+1}$. Далі утворюється сума ч-критеріїв з ваговими коефіцієнтами, яка буде цільовою функцією, що прагне максимуму. Одиниця у знаменнику додана для випадку, коли $L_{MIN}^{r}\left(x\right)$ у своєму русі до оптимуму буде проходити через нуль, що викличе зупинку процесу пошуку екстремуму.

3. Як варіант, можливе утворення функціоналу виду

$$L\left(x\right)=\frac{\sum_{r=1}^{R} m_{ђ} L_{MAX}^{r}\left(x\right)}{\sum_{r=1}^{R} m_{ђ} L_{MIN}^{r}\left(x\right)+1}, \tag{3.28}$$

де в чисельнику стоять ч-критерії, що прагнуть максимуму, а у знаменнику, такі, що прагнуть мінімуму.

<u>Приклад</u>

Для прикладу з п. 3.2. знайти оптимальний план співвідношень продукції (соків та вина), яку накопичує на складі торгова фірма, з урахуванням статистичних досліджень попиту.

До позначень з п.3.2 додамо ще наступні: Xi - вид товарної групи (асортиментна позиція); m - кількість місяців; Q_1, Q_2 - нижня й верхня межі обсягів товарообігу для складу; P_{1i} - ціна покупки одиниці товару; P_{2i} - ціна реалізації одиниці товару; k_1 - собівартість плюс додаткові витрати на зберігання 1 шт продукту, який не був проданий у встановлений час, оскільки попит на нього виявився меншим від того, що прогнозується; k_2 - утрата прибутку на 1 шт продукту, зумовлена відсутністю товару, попит на який перевищив замовлену кількість; Параметри ящика: l - довжина; h –висота ; w – ширина; $S_{\text{од}}$ –площа, що займає одиниця продукції (ящик); $X_{\text{заг.ск.}}$ – загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно;X_{onm} – оптимальний (розрахункова) кількість товару і-того виду на складі;$C_{\text{збі}}$ – вартість зберігання товару і –того виду; $C_{\text{зб/оді}}$ - вартість зберігання одиниці товару і –того виду.

Статистичний метод розрахунку оптимального запасу продукції базується на спостереженнях за попитом товару протягом певного часу.

На підставі цього спостереження будується емпірична функція розподілу вигляду

$$F(X)=P(x<X), \tag{3,29}$$

де P – імовірність того, що попит – x – буде менше наперед заданого значення

X.

Тоді оптимальний попит ($X_{опт}$) буде знайдено за оптимальним значенням цієї функції, який розраховується за

$$F(X_{опт}) = k_1 / (k_1 + k_2), \tag{3.30}$$

Потрібне вирішення (2) відносно ($X_{опт}$). Оскільки, частіше всього емпірична функція розподілу описується функцією виду

$$F(X_{опт}) = a + b\ln(X_{опт}), \tag{3.31}$$

де a, b – константи, рішення має вигляд

$$X_{опт} = \exp\left(\frac{1}{b}\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} - a\right)\right). \tag{3.32}$$

Торгове підприємство має обмежену площу складу (S) і номенклатуру продукції з n найменувань, які представлені на складі у кількості x_i. Для кожного найменування відомо площу, яку займає одиниця продукції s_i ($1<i<n$).

В цих умовах задача стає багатокритеріальною. З одного боку потрібно, щоб прибуток був максимальним. З іншого боку бажано, щоб різниця між оптимальним значенням запасу продукції і реальним була б мінімальною.

$$Пр = \sum_{i=1}^{n} k_{1i} x_i, \tag{3.33}$$

$$Оз = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \exp\left(\frac{1}{b_i}\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} - a_i\right)\right)\right|, \tag{3.34}$$

Знак „по модулю” означає, що відхилення x_i від оптимального запасу може бути в обидва боки. Обмеженням тут виступає загальна площа складу

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i. \tag{3.35}$$

Для вирішення цієї задачі пропонується функціонал виду

$$\frac{Пр}{Оз + 1} \to \max, \tag{3.36}$$

або

$$\frac{\sum_{i=1}^{19} k_{1i} x_i}{\sum_{i=1}^{19}\left[\frac{k_{1i}}{k_{1i} + k_{2i}} - (a + b\ln x_i)\right] + 1} \to \max \tag{3.37}$$

з обмеженнями на площу (загальна площа складських приміщень в цьому обмеженні множиться на 5, так як, піддони з ящиками можна ставити один на один у висоту, але не більше 5 штук.)

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le S * 5, \tag{3.38}$$

та на ненегативні значення кількості кожного виду продукту.

$$x_i \ge 0$$
$$(1 \le i \le n). \tag{3.39}$$

Введемо додаткові обмеження на верхні та нижні межі товарообігу на складі:

$$Q_{1i} \le xi \le Q_{2i} \tag{3.40}$$

Вирішення подібної задачі для торгового підприємства, яке має номенклатуру з 19 продуктів і обмежений склад. Емпіричні функції розподілу було розраховано за спостереженнями попиту продукту протягом 1 року. Результати рішення наведені у наступній таблиці

Таблиця 3.1

	Кількість продукції по видам	обмеження по кількості кожного виду, min	обмеження по кількості кожного виду, max	Площа під вид продукції, м^2
	Xi^*	Q_1	Q_2	Si
Вина кріплені	271	90	271	85
Вина сухі	64	64	192	20
Вина СК	242	81	242	76
ДАР 0,2	8 822	2 941	8 822	2779
ДАР 1	11 202	3 734	11 202	3529
ДАР 1,5	4 564	1 521	4 564	1438
ДАР 2	5 662	1 887	5 662	1784
Садочок 0,2л	11 686	3 895	11 686	3681
Садочок 0,5л	266	266	797	84
Садочок 1л	18 263	6 088	18 263	5753
Садочок 1,5л	5 947	1 982	5 947	1873
Соки «Класика України»	1 452	484	1 452	457
Соки «Фрукти»	814	271	814	256
Соки Класик 1л	4 527	1 509	4 527	1426
Соки Gold 1,5л	4 850	1 617	4 850	1528
Соки Gold 1л	18 449	6 150	18 449	5812
Соки Gold 0,25л	5 566	1 855	5 566	1753
Напої 0,2	199	66	199	63
Напої 1	18	18	53	6
Загалом	102862	34 519	103 558	32 402

3.4.5. Складання зведеної таблиці

Як видно з п. 3.4.1 – 3.4.4, остаточне прийняття рішення про те, як використовувати отримані результати вирішення оптимізації багатокритеріальних задач, має приймати особа, що ухвалює рішення.

Для цього всі рішення зводиться в таблицю, де записуються альтернативні варіанти. Розглядаючи таблицю, ОУР визначається з тим, який з варіантів влаштовує його найбільше, або найменш ризикованим.

Приклад

Таблиця 3.2

Зведена таблиця оптимізації багатокритеріальних задач

Метод	Оптимальні значення змінних параметрів, $x0$	Критерії оптимізації			Сума оптимальних значень критеріїв L^{Σ}
		L1	L2	L3	
Метод гарантованого результату	(27/2 ; 3/2)	25/2	19	25/2	44
Метод згортки	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
Оптимізація L1	(15;0)	17	19	5	41
Оптимізація L2, L3	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
$x \notin Dx^{\pi}$	(5;3)	1	12	-13	0

3.5. Транспортна задача

Транспортні задачі відомі у двох постановках: матричній і мережній (рис. 3.3).

<u>Матрична постановка транспортної задачі:</u>
Хай є ряд пунктів споживання і підприємств-постачальників деякої продукції.

Дано:

Ai – ресурс *i*-го постачальника (запас продукції або план відвантаження з поточного виробництва).

Bj – потреби в тій же продукції в пунктах *j*.

Cij – відстань або вартості перевезення з *i* в *j*.

Вимагається знайти такі розміри поставок від кожного постачальника кожному споживачу *Xij* (змінні задачі), при яких загальна сума витрат або загальний пробіг будуть мінімальними.

Розрізняють наступні різновиди транспортних задач (рис. 3.3)

Система обмежень закритої задачі: передбачає поставку кожному споживачу кількість продукції, рівного потребі в ній (3.41.) і вивіз продукції від кожного постачальника в кількості, рівній її ресурсу (3.42.)

$\Sigma X_{ij} = B_i$, (j=1,2, … n – кількість постачальників), (3.41)

$\Sigma X_{ij} = A_i$, (i= 1,2, … m – кількість споживачів); (3.42)

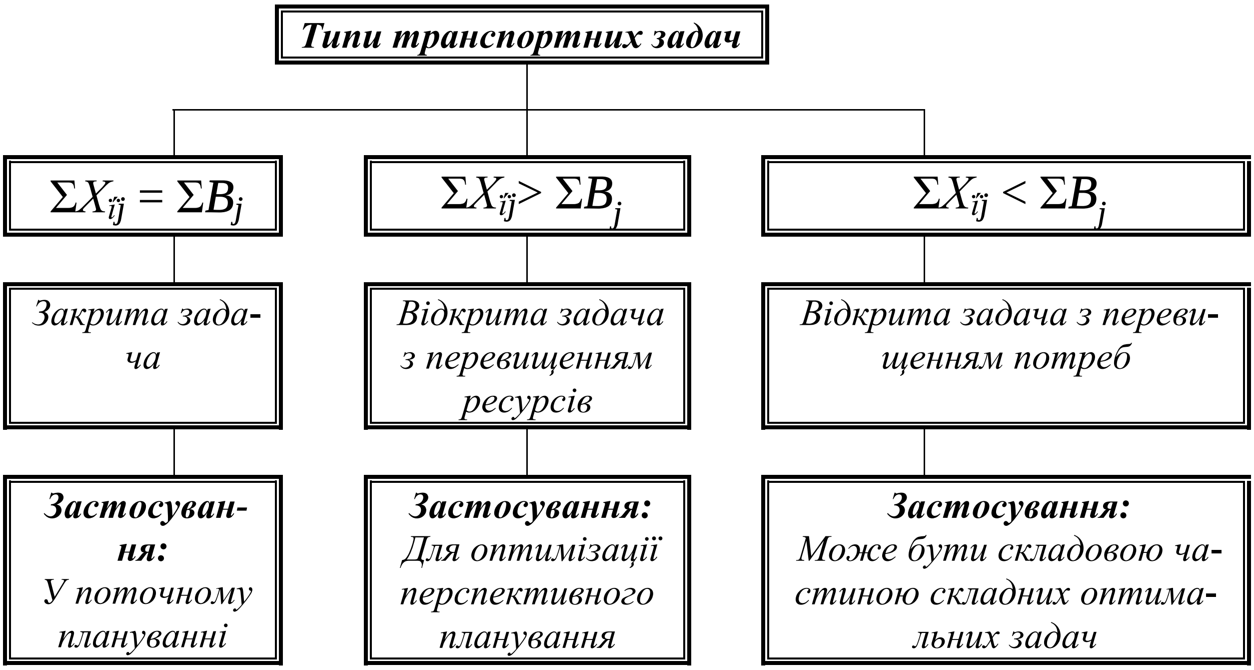


Рис. 3.3. Різновиди транспортних задач

У відкритій задачі з перевищенням ресурсів можливий вивіз менше наявності

$$\Sigma X_{ij} < A_i, \tag{3.43}$$

У відкритій задачі з перевищенням потреб можливе постачання менше наявності

$$\Sigma X_{ij} < \Sigma B_j, \tag{3.44}$$

Критерієм оптимальності рішення є мінімум загальних витрат по перевезенню або з пробігу в тонно-километрах (вагоно-кілометрах) по всіх планованих відправленнях. Якщо вартість перевезення (відстань) від i до j - позначити як C_{ij} те цільова функція визначиться таким чином

$$\mathrm{F} = \Sigma\, \Sigma\, C_{ij}\, X_{ij} \rightarrow \min, \tag{3.45}$$

Мережна транспортна задача:

Оптимальне планування перевезень може бути проведене безпосередньо на схемі мережі шляхів сполучення (рис. 3.4). Схема складається з дуг і вузлів (або вершин). Вершинами є пункти або (центри агрегації) вантаження і вивантаження, а також всі реальні вузлові пункти мережі. Вершини без вантаження і вивантаження даного вантажу є транзитними.

Кожну ділянку мережі між двома сусідніми вершинами звичайно розглядають як дві дуги протилежного напряму з рухом в одну сторону по кожній дузі.

Кожна дуга характеризується показником відстані (або вартості) перевезення одиниці вантажу або довжині дуги. При рішенні задач за критерієм вартості довжина прямої і зворотної дуг звичайно різна (оскільки витрати перевезення по ділянці “туди і назад” не співпадають).

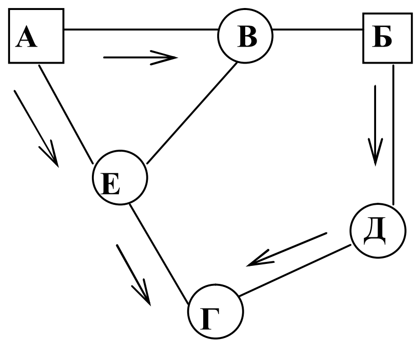


Рис. 3.4. Схема транспортної мережі:
+10 Б - Пункти і розміри відправлення
-8 - Пункти і розміри прибуття
← - стрілка – потік вантажу
$X_{AB} = 8$ - розмір вантажу

Змінними мережної транспортної задачі є потоки вантажу по кожній дузі. Потік може включати багато відправок, наприклад, потік по дузі Б-Д включає поставки з Б в Д – 8 одиниць вантажу, а з Б в Г – 7 одиниць вантажу.

До вирішення задачі, як правило, невідомо, в яку сторону перевозитиметься вантаж по ділянці в оптимальному варіанті. Тому в число змінних включаються потоки в обох напрямах, а загальне число змінних приймається рівним подвоєному числу ділянок мережі. (При значному числі постачальників і одержувачів число змінних при мережній постановці значне менше ніж при матричній, що полегшує рішення задачі, Наприклад, за наявності на мережі 600 ділянок, 50 пунктів відправлення і 200 пунктів призначення, число змінних при мережній постановці складе 1200 (600·2), а при матричній постановці воно буде набагато більше (200·50=10000 змінних).

Обов'язковою умовою мережної задачі є вимога балансування прибуття і відправлення вантажу в кожній вершині мережі: прийом вантажу зі всіх напрямів плюс власне вантаження рівні здачі на всі напрями власне вивантаження

$$\Sigma X_{ks} - \Sigma X_{kr} = R_k , \qquad (3.46)$$

де K – довільна вершина; R_k – завантаження (+) або вивантаження (-) (Rk =0 для транзиту) вершини K; X_{ks} – потоки від K до всіх сусідніх вершин S; X_{kr} – потоки до K від сполучених вершин r;

Цільова функція закритої мережної задачі має вигляд

$$F = \Sigma\, \Sigma\, C_{rs}\, X_{rs} \rightarrow \min. \qquad (3.47)$$

Підсумовування виконується по всіх дугах мережі.

Описана модель мережної задачі не враховує пропускної спроможності ділянок мережі – для цього вводиться додаткове обмеження

$$X_{rs} < d_{rs} , \qquad (3.48)$$

де d_{rs} – пропускна спроможність ділянки мережі r-s в напрямі від r до s.

З урахуванням (3.45) - (3.47) одержуємо мережну транспортну задачу з обмеженням пропускної спроможності в простому вигляді (для перевезення одного вантажу).

Мережна і матрична моделі в більшості випадків взаємозамінні.

В деяких випадках обирається інший, ніж мінімум витрат на перевезення, критерій оптимальності Вибір критерію залежить від: характеру проблеми, наявної інформації і необхідної точності знаходження оптимуму.

Прикладами локального критерію оптимальності транспортної задачі можуть служити:

а) критерій мінімуму сумарного пробігу (придатний тільки для вирішення закритих транспортних задач в межах одного виду транспорту).

б) при оптимізації перевезень в межах року звичним вартісним критерієм є сума залежних приведених витрат

$$З = Езав + Епер + Еп + (Кпс + Сгр), \qquad (3.49)$$

де Езав – залежні від руху експлуатаційні витрати; Кпс – капітальні вкладення на пересувний склад; Сгр – вартість вантажів, що знаходяться в процесі перевезення; Епер – витрати по перевалюваннях; Еп – вартість поставки вантажів.

в) При складанні оптимальних схем перевезень на перспективу можливе посилення пропускної спроможності ліній залежно від розміщення на них оптимальних вантажопотоків. Тому в критерії оптимальності враховується:

Кпост – витрати на необхідний розвиток пропускної спроможності по постійних пристроях; Енез – незалежні експлуатаційні витрати.

$$З = Езав + Енез + Еп + (Кпс + Кпост + Сгр), \qquad (3.50)$$

г) в деяких випадках при рішення відкритих транспортних задач допускається використовування як критерій - сума витрат виробництва і тарифної платні за перевезення.

д) у окремих задачах по оптимізації термінових перевезень як критерій виступає час: тонно-часи (вагони-годинник) перебування вантажу в процесі перевезення або загальний час завершення певної перевізної операції.

<u>Приклад</u>

У трьох постачальників, кожен з яких має наступні ресурси – 25, 75, 13, є п’ять споживачів, які потребують таку кількість ресурсів – 15, 35, 22, 18, 23. розробити схему оптимальних перевезень, якщо вартості перевезень C_{ij}, разом з обсягами запасів та споживання подані в таблиці (3.3).

Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закриту транспортну задачу.

Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закриту транспортну задачу.

Таблиця 3.3

			Споживачі, номер та обсяг споживання				
			1	2	3	4	5
			15	35	22	18	23
Постачальники, номер та обсяг поставок	1	25	2	6	3	4	6
	2	75	4	3	2	5	4
	3	13	6	4	3	4	3

Сформуємо ці дані в електронних таблицях Calc. Відведемо окрему матрицю під значення обсягів перевезень X_{ij} з i-го постачальника до j-го споживача. Знайдемо суму всіх X_{ij}, оскільки це потрібно для формування обмежень виду (3.43) - (3.44). Знайдемо добуток всіх X_{ij} на C_{ij} та їх суму, щоб сформувати цільову функцію виду (3.45).

Застосовуємо функцію Solwer і отримуємо рішення, яке показано в таблиці, що розташована нижче

Таблиця 3.4

		Споживачі					
		1	2	3	4	5	$\Sigma\ X_{ij}$
Постачальники	1	15	0	0	10	0	25
	2	0	35	22	5,1991	12,8009	75
	3	0	0	0	2,8009	10,1991	13
$\Sigma\ X_{ij}$		15	35	22	18	23	

Тут ми бачимо обсяги оптимальних перевезень з кожного постачальника на кожного споживача. Наприклад, з першого постачальника треба відправити на першого споживача 15 одиниць продукції, а на четвертого – 10. Мінімальна вартість усіх перевезень – 338 умовних одиниць.

3.6. Динамічне програмування

3.6.1. Основи методу

Динамічне програмування – це математичний метод пошуку оптимального управління, спеціально пристосований до багатокрокових процесів.

Наприклад, хай планується діяльність групи підприємств на N років. Тут кроком є один рік. На початку 1-го року на розвиток підприємств виділяються кошти, які повинні бути якось розподілені між цими підприємствами. В процесі їх функціонування виділені кошти частково витрачаються. Кожне підприємство за рік приносить деякий доход, залежний від вкладених засобів. На початку року наявні засоби можуть перерозподілятися між підприємствами. Кожному з них виділяється якась частка засобів.

Ставиться питання: як на початку кожного року розподіляти наявні засоби між підприємствами, щоб сумарний дохід від всіх підприємств за N років був максимальним?

Перед нами типова задача динамічного програмування, в якій розглядається керований процес – функціонування групи підприємств. Управління процесом полягає в розподілі (і перерозподілі) засобів. Управляючою дією (УД) є виділення якихось засобів кожному з підприємств на початку року.

УД на кожному кроці повинне вибиратися з урахуванням всіх його наслідків в майбутньому. Дійсно, припустимо, що в розглянутій групі підприємств одні зайняті випуском предметів споживання, а інші випускають для цього машини. Причому метою є отримання за N років максимального об'єму випуску предметів споживання. Хай плануються капіталовкладення на перший рік. Виходячи їх вузьких інтересів даного кроку (роки), ми повинні були б всі засоби вкласти у виробництво предметів споживання, пустити наявні машини на повну потужність і добитися до кінця року максимального об'єму продукції. Але чи правильним буде таке рішення в цілому? Очевидно, ні. Маючи на увазі майбутнє, необхідно виділити якусь частку засобів і на виробництво машин. При цьому об'єм продукції за перший рік, природно, знизиться, зате будуть створені умови, що дозволяють збільшувати її виробництво в подальші роки.

У формалізмі рішення задач методом динамічного програмування використовуватимуться наступні позначення:

N – число кроків; $\bar{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk})$ – вектор, що описує стан системи на k-му кроці; $\bar{x}_0$ – початковий стан, тобто стан на 1-у кроці; $\bar{x}_N$ – кінцевий стан, тобто стан на останньому кроці; X_k – область допустимих станів на k-му кроці; $\bar{u} = (u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{mk})$ – вектор УД на k-му кроці, який забезпечує перехід системи із стану x_{k-1} в стан x_k; Uk – область допустимих УД на *-ом* кроці; Wk – величина виграшу, одержаного в результаті реалізації k-го кроку; S – загальний виграш за N кроків; $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$ – вектор оптимальної стратегії управління або ОУД за N кроків; $S_{k+1}(\bar{x}_k)$ – максимальний виграш, одержуваний при переході з будь-якого стану $\bar{x}_k$ у кінцевий стан $\bar{x}_0$ при оптимальній стратегії управління починаючи з k-го кроку; $S_1(\bar{x}_0)$ – максимальний виграш, одержуваний за N кроків під час переходу системи з початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцеве $\bar{x}_N$ при реалізації оптимальної стратегії управління $\bar{u}^*$. Очевидно, що $S = S_1(\bar{x}_0)$, якщо $\bar{x}_0$ – фіксовано.

Метод динамічного програмування спирається на умову відсутності післядії і умову адитивності цільової функції.

Умова відсутності післядії. Стан $\bar{x}_k$, в яке перейшла система за один k-й крок, залежить від стану $\bar{x}_{k-1}$ і вибраної УД $\bar{u}_k$ і не залежить від того, яким чином система прийшла в стан $\bar{x}_{k-1}$, тобто

$$\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{3.51}$$

Аналогічно, величина виграшу *Wk* залежить від стану $\bar{x}_{k-1}$ і вибраного УД $\bar{u}_k$, тобто

$$W_k = W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k)., \tag{3.52}$$

Умова адитивності цільової функції. Загальний виграш за *N* кроків обчислюється за формулою

$$S = \sum_{k=1}^{N} W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{3.53}$$

Визначення. Оптимальною стратегією управління $\bar{u}^*$ називається сукупність УД $\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*$, тобто $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$, в результаті реалізації яких система за *N* кроків переходить з початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцеве $\bar{x}_N$ і при цьому загальний виграш *S* приймає найбільше значення.

Умова відсутності післядії дозволяє сформулювати принцип оптимальності Белмана: Яким би не був допустимий стан системи $\bar{x}_{i-1} \in X_{i-1}$ перед черговим *i-м* кроком, треба вибрати допустиме УД $\bar{u}_i \in U_i$ на цьому кроці так, щоб виграш *Wi* на *i-м* кроці плюс оптимальний виграш на всіх подальших кроках був максимальним.

Як приклад постановки задачі оптимального управління продовжимо розгляд задачі управління фінансуванням групи підприємств. Хай на початку *i*-го року групі підприємств $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ виділяються відповідно кошти: $u_{1i}, u_{2i}, ..., u_{mi}$. сукупність цих значень можна вважати управлінням на i-м кроці, тобто $\bar{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, ..., u_{mi})$. Управління $\bar{u}$ процесом в цілому є сукупністю всіх крокових управлінь, тобто $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_N)$.

Управління може бути хорошим або поганим, ефективним або неефективним. Ефективність управління $\bar{u}$ оцінюється показником *S*. Виникає питання: як вибрати крокові управління $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_N$, щоб величина *S* звернулася в максимум ?

Поставлена задача є задачею оптимального управління, а управління, при якому показник *S* досягає максимуму, називається оптимальним. Оптимальне управління $\bar{u}^*$ багатокроковим процесом складається з сукупності оптимальних крокових управлінь $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$.

Таким чином, перед нами стоїть задача: визначити оптимальне управління на кожному кроці $\bar{u}_i^*$ ($i=1,2,...N$) і, значить, оптимальне управління всім процесом $\bar{u}^*$.

3.6.2. Процедура методу динамічного програмування

Ми відзначили, що плануючи багатоkроковий процес, необхідно вибирати УД на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на ще майбутніх кроках. Проте, з цього правила є виключення. Серед всіх кроків існує один, який може плануватися без "заглядання в майбутнє". Який це крок? Очевидно, останній — після нього інших кроків немає. Цей крок, єдиний зі всіх, можна планувати так, щоб він як такий приніс найбільшу вигоду. Спланувавши оптимально цей останній крок, можна до нього пристроювати передостанній, до передостаннього — перед передостанній і т.д.

Тому процес динамічного програмування на 1-у етапі розвертається від кінця до початку, тобто раніше всіх планується останній, *N-й* крок. А як його спланувати, якщо ми не знаємо, чим кінчився передостанній? Очевидно, потрібно зробити всі можливі припущення про те, чим кінчився передостанній, $(N — 1)$ -й крок, і для кожного з них знайти таке управління, при якому виграш (дохід) на останньому кроці був би максимальний. Вирішивши цю задачу, ми знайдемо умовно оптимальне управління (УОУ) на *N-м* кроці, тобто управління, яке треба застосувати, якщо $(N — 1)$ -й крок закінчився певним чином.

Припустимо, що ця процедура виконана, тобто для кожного результату $(N - 1)$-го кроку ми знаємо УОУ на N-му кроці і відповідний йому умовно оптимальний виграш (УОВ). Тепер ми можемо оптимізувати управління на передостанньому, $(N - 1)$ -у кроці. Зробимо всі можливі припущення про те, чим кінчився перед передостанній, тобто $(N - 2)$ -й крок, і для кожного з цих припущень знайдемо таке управління на $(N - 1)$ -у кроці, щоб виграш за останні два кроки (з яких останній вже оптимізовано) був максимальний. Далі оптимізується управління на $(N - 2)$ -у кроці, і т.д.

Тепер припустимо, що УОУ на кожному кроці нам відомо: ми знаємо, що робити далі, в якому б стані ні був процес до початку кожного кроку. Тоді ми можемо знайти вже не "умовне", а справді оптимальне управління на кожному кроці.

Таким чином, в процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес "проходиться" двічі:

– перший раз – від кінця до початку, внаслідок чого знаходяться УОУ на кожному кроці і оптимальний виграш (теж умовний) на всіх кроках, починаючи з даного і до кінця процесу;

– другий раз – від початку до кінця, внаслідок чого знаходяться оптимальні управління на всіх кроках процесу.

Приклад

Є технологічна лінія, тобто ланцюжок, послідовність операцій. На кожну операцію можна призначити устаткування тільки якогось одного вигляду, а устаткування, здатного працювати на даній операції, - декілька видів.

Таблиця 3.5

Початкові дані для прикладу

i	1		2		3	
j	1	2	1	2	1	2
x_{ij}	10	8	4	5	8	9
x_{ij}	10	8	4	5	8	9
y_{ij}	12	8	4	6	9	9
y_{ij}	12	8	4	6	9	9
R_{ij}	20	18	6	8	10	12

Вартість сировини $C_0 = 100$. Витрати, зв'язані з використанням одиниці устаткування *j*-го типу на *i*-ї операції R_{ij}. Продуктивності, відповідно, по виходу і входу x_{ij} і y_{ij} для *j*-го типу устаткування, що претендує на *i*-ую операцію.

Для того, щоб вирішити дану задачу методом динамічного програмування введемо наступні позначення: $N = 3$ – число кроків, $\bar{x}_i$ - Технологічна лінія.

$\bar{x}_0 =$ (0,0,0); $\bar{x}_N = (u_1, u_2, u_3)$,

де $\bar{u}_i$ – вибір устаткування для і-ой операції, *Ui* – область допустимих УД на *i-м* кроці. $\bar{u}_i \in U_i$, тобто. $\bar{u}_1 = \{1, 2\}, \bar{u}_2 = \{1, 2\}, \bar{u}_3 = \{1, 2\}$, *Wi* – оцінка мінімальної собівартості, одержана в результаті реалізації *i-го* кроку, *S* – функція загального виграшу тобто мінімальна собівартість.

$$S = \frac{R_{1j}}{x_{1j}} + \frac{y_{1j}}{x_{1j}} \left\{ \frac{R_{2j}}{x_{2j}} + \frac{y_{2j}}{x_{2j}} \left\{ \frac{R_{3j}}{x_{3j}} + \frac{y_{3j}}{x_{3j}} C_0 \right\} \right\} \qquad (3.54)$$

$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + \bar{u}_i$ – вектор - функція, що описує перехід системи із стану $\bar{x}_{i-1}$ в стан $\bar{x}_i$ під дією УД, $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$ - вектор УД, який забезпечує на *i*-му кроці, перехід системи із стану x_{i-1} в стан x_i, тобто оптимальний вибір устаткування за *N* кроків, $S_{i+1}(\bar{x}_i)$ – максимальний виграш (у нашому випадку мінімальна собівартість), одержуваний при переході з будь-якого стану $\bar{x}_i$ у кінцевий стан $\bar{x}_0$ при оптимальній стратегії управління починаючи з -го кроку. $S_1(\bar{x}_0)$ – максимальний виграш, одержуваний за N кроків під час переходу системи з початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцеве $\bar{x}_N$ при реалізації оптимальної стратегії управління $\bar{u}^*$. Очевидно, що $S = S_1(\bar{x}_0)$, якщо $\bar{x}_0 = 0$.

Запишемо вектори допустимих значень

$$\bar{x}_1 = (u_1, 0, 0) \qquad \bar{x}_2 = (u_1, u_2, 0) \qquad \bar{x}_3 = (u_1, u_2, u_3)$$

Запишемо вектора допустимих управляючих дій

$$\bar{u}_1 = (u_1, 0, 0) \qquad \bar{u}_2 = (0, u_2, 0) \qquad \bar{u}_3 = (0, 0, u_3)$$

Запишемо вектор – функцію, що описує перехід системи зі стану $\bar{x}_{i-1}$ в стан $\bar{x}_i$ під дією УД

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{u}_2 = (u_1, u_2, 0), \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \bar{u}_1 = (u_1, 0, 0), \quad \bar{x}_3 = \bar{x}_2 + \bar{u}_3 = (u_1, u_2, u_3)$$

Запишемо основне функціональне рівняння

$$S_i(\bar{x}_{i-1}) = \min_{\bar{u}_i \in U_i} \left\{ \frac{R_{ij}}{x_{ij}} + \frac{y_{ij}}{x_{ij}} S_{i+1}(\bar{f}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{u}_i)) \right\} \tag{3.55}$$

1) Зворотний прохід

Для i=3
$$S_3(\bar{x}_2) = \min \left\{ \frac{R_{3j}}{x_{3j}} + \frac{y_{3j}}{x_{3j}} S_4(\bar{x}_2 + \bar{u}_3) \right\}$$

Враховуючи те, що цей крок у нас останній і наступної операції вже не буде, а також те, що ми на зворотному проході, замість функції S_4 візьмемо вартість сировини $C_0 = 100$

при $\bar{u}_3 = (0,0,1)$ $\quad S_3(\bar{x}_2) = \min \left\{ \frac{R_{31}}{x_{31}} + \frac{y_{31}}{x_{31}} C_0 \right\} = \frac{10}{8} + \frac{9}{8} 100 = 113{,}7$

при $\bar{u}_3 = (0,0,2)$ $\quad S_3(\bar{x}_2) = \min \left\{ \frac{R_{32}}{x_{32}} + \frac{y_{32}}{x_{32}} C_0 \right\} = \frac{12}{9} + \frac{9}{9} 100 = 101{,}3$

Для i=2
$$S_2(\bar{x}_1) = \min \left\{ \frac{R_{2j}}{x_{2j}} + \frac{y_{2j}}{x_{2j}} S_3(\bar{x}_1 + \bar{u}_2) \right\}$$

при $\bar{u}_2 = (0,1,1)$ $$S_2(\bar{x}_1) = \min\left\{\frac{R_{21}}{x_{21}} + \frac{y_{21}}{x_{21}} S_3(\bar{x}_1 + \bar{u}_2)\right\} = \frac{6}{4} + \frac{4}{4}113{,}7 = 115,$$

при $\bar{u}_2 = (0,2,1)$ $$S_2(\bar{x}_1) = \min\left\{\frac{R_{22}}{x_{22}} + \frac{y_{22}}{x_{22}} S_3(\bar{x}_1 + \bar{u}_2)\right\} = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}113{,}7 = 138,$$

при $\bar{u}_2 = (0,1,2)$ $$S_2(\bar{x}_1) = \min\left\{\frac{R_{21}}{x_{21}} + \frac{y_{21}}{x_{21}} S_3(\bar{x}_1 + \bar{u}_2)\right\} = \frac{6}{4} + \frac{4}{4}101{,}3 = 102{,}8$$

при $\bar{u}_2 = (0,2,2)$ $$S_2(\bar{x}_1) = \min\left\{\frac{R_{22}}{x_{22}} + \frac{y_{22}}{x_{22}} S_3(\bar{x}_1 + \bar{u}_2)\right\} = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}101{,}3 = 123,$$

Для i=1 $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{1j}}{x_{1j}} + \frac{y_{1j}}{x_{1j}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\}$$

при $\bar{u}_1 = (1,1,1)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{11}}{x_{11}} + \frac{y_{11}}{x_{11}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\} = \frac{20}{10} + \frac{12}{10}115{,}2 = 140{,}2$$

при $\bar{u}_1 = (1,1,2)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{11}}{x_{11}} + \frac{y_{11}}{x_{11}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\} = \frac{20}{10} + \frac{12}{10}102{,}8 = 125{,}3$$

при $\bar{u}_1 = (2,1,1)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{12}}{x_{12}} + \frac{y_{12}}{x_{12}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\} = \frac{18}{8} + \frac{8}{8}115{,}2 = 117{,}451$$

при $\bar{u}_1 = (2,1,2)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{12}}{x_{12}} + \frac{y_{12}}{x_{12}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\} = \frac{18}{8} + \frac{8}{8}102{,}8 = 105{,}05$$

при $\bar{u}_1 = (1,2,1)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{\frac{R_{11}}{x_{11}} + \frac{y_{11}}{x_{11}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1)\right\} = \frac{20}{10} + \frac{12}{10}113{,}7 = 138{,}44$$

при $\bar{u}_1 = (2{,}2{,}1)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{ \frac{R_{12}}{x_{12}} + \frac{y_{12}}{x_{12}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1) \right\} = \frac{18}{8} + \frac{8}{8}113{,}7 = 115{,}95$$

при $\bar{u}_1 = (1{,}2{,}2)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{ \frac{R_{11}}{x_{11}} + \frac{y_{11}}{x_{11}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1) \right\} = \frac{20}{10} + \frac{12}{10}123{,}1 = 124{,}3$$

при $\bar{u}_1 = (2{,}2{,}2)$ $$S_1(\bar{x}_0) = \min\left\{ \frac{R_{12}}{x_{12}} + \frac{y_{12}}{x_{12}} S_2(\bar{x}_0 + \bar{u}_1) \right\} = \frac{18}{8} + \frac{8}{8}123{,}1 = 125{,}35$$

2) Прямий прохід

Враховуючи те, що $\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + \bar{u}_i$ і $\bar{x}_0 = (0{,}0{,}0)$ маємо

i=1 $\bar{u}_1^* = \bar{u}_1^0(x_0) = (2,0,0)$ $\bar{x}_1^* = \bar{x}_0 + \bar{u}_1 = (2{,}0{,}0)$

i=2 $\bar{u}_2^* = \bar{u}_2^0(\bar{x}_1^*) = (0{,}1{,}0)$ $\bar{x}_2^* = \bar{x}_1 + \bar{u}_2 = (2{,}1{,}0)$

i=3 $\bar{u}_3^* = \bar{u}_3^0(\bar{x}_2^*) = (0{,}0{,}2)$ $\bar{x}_3^* = \bar{x}_2 + \bar{u}_3 = (2{,}1{,}2)$

Таким чином оптимальний вибір складу устаткування технологічної лінії припускає наступне:

На 1-у операцію призначимо устаткування 2-го вигляду.
На 2-у операцію призначимо устаткування 1-го вигляду.
На 3-ю операцію призначимо устаткування 2-го вигляду.
Оцінка мінімальної собівартості складе 105,5.

3.7. Індивідуальні завдання №2. Знайдення оптимального рішення економічних задач[1]

Задача № 1

Підприємство випускає три виду продукції А, Б і С (таблиця 2). Для виробництва цієї продукції потрібні такі ресурси, як матеріали, праця робочих та ІТР. Для прийняття рішення оптимального випуску продукції, треба: визначити параметри оптимізації задачі та скласти якісну та математичну моделі задачі на основі операційної методології. Виконати формалізацію задачі, описати методи її рішення і методику дослідження отриманої моделі.

[1] (С) Завдання розроблено доц.., к.т.н. Паршиною О.А.

Таблиця 3.6

Вхідні данні

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
1	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	295
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	60	300	
2	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,35	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	7	280
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	65	300	
3	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	6	275
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
4	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,4	70
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	5	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
5	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	0,45	0,4	80
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	6	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	270	

Продовження таблиці 3.6

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
6	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	2	0,5	85
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	60	265	
7	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	110	265	
8	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	7	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	125	265	
9	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	6	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	125	75	
10	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	1	1	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	120	170	
11	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	120

Продовження таблиці 3.6

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	185	125	170	
12	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	3	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	180	135	175	
13	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	130
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	4	5	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	140	180	
14	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	5	4	140
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	155
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	150	210	
15	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	3	145
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	6	7	160
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	6	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	205	155	215	
16	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	4	150
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	165

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	7	6	215
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	225	160	220	
17	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	4	7	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	5	6	230
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	215	165	210	
18	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	1	90
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	115
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	270	120	260	
19	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	125
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	4	2	250
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	260	180	270	
20	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	1	2	265
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	195	260	
21	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	145
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	245

Продовження таблиці 3.6

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	275	255	
22	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	3	2	115
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	180
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	285	270	
23	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	265	275	
24	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	1	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	3	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	275	285	
25	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	135
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	140
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	200
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	265	280	285	
26	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	5	6	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	210

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	290	280	
27	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	165
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	260	245	
28	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	4	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	250	260	
29	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	6	170
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	5	180
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	240	250	255	
30	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	4	7	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	185
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	210	195	

Задача № 2

Для прийняття оптимального рішення по розподілу робітників комерційної галузі за операціями треба надати постановку задачі, визначити цільову функцію та розробити математичну модель. Вхідну інформацію надано у таблиці 3.

Таблиця 3.7

Хронометраж по витратам часу

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 6$	$t_{13} = 5$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 3$	$t_{23} = 2$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 2$	$t_{33} = 5$
2	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 3$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
3	Іванов	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$t_{13} = 3$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 4$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
4	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 7$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 3$	$t_{33} = 5$
5	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 4$	$t_{33} = 5$
6	Іванов	$t_{11} = 9$	$t_{12} = 10$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 8$	$t_{32} = 9$	$t_{33} = 7$
7	Іванов	$t_{11} = 15$	$t_{12} = 14$	$t_{13} = 9$
	Сидоров	$t_{21} = 17$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 10$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 8$
8	Іванов	$t_{11} = 13$	$t_{12} = 15$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 20$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 18$
9	Іванов	$t_{11} = 23$	$t_{12} = 16$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 25$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 25$
	Петров	$t_{31} = 26$	$t_{32} = 15$	$t_{33} = 28$
10	Іванов	$t_{11} = 18$	$t_{12} = 12$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 21$
	Петров	$t_{31} = 19$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 17$
11	Іванов	$t_{11} = 17$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 14$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 18$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 28$
12	Іванов	$t_{11} = 33$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 22$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 20$
13	Іванов	$t_{11} = 32$	$t_{12} = 27$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 33$	$t_{22} = 28$	$t_{23} = 26$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 25$	$t_{33} = 28$
14	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 39$	$t_{22} = 24$	$t_{23} = 16$
	Петров	$t_{31} = 38$	$t_{32} = 22$	$t_{33} = 18$
15	Іванов	$t_{11} = 53$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 27$

Закінчення таблиці 3.7

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Петров	$t_{31} = 50$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
16	Іванов	$t_{11} = 55$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 57$	$t_{22} = 47$	$t_{23} = 36$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 44$	$t_{33} = 38$
17	Іванов	$t_{11} = 51$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 27$
	Сидоров	$t_{21} = 53$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
18	Іванов	$t_{11} = 57$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 54$	$t_{22} = 46$	$t_{23} = 39$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 48$	$t_{33} = 38$
19	Іванов	$t_{11} = 54$	$t_{12} = 31$	$t_{13} = 26$
	Сидоров	$t_{21} = 55$	$t_{22} = 36$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 56$	$t_{32} = 35$	$t_{33} = 28$
20	Іванов	$t_{11} = 64$	$t_{12} = 51$	$t_{13} = 46$
	Сидоров	$t_{21} = 65$	$t_{22} = 56$	$t_{23} = 49$
	Петров	$t_{31} = 66$	$t_{32} = 55$	$t_{33} = 48$
21	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 39$
	Сидоров	$t_{21} = 75$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 32$
	Петров	$t_{31} = 74$	$t_{32} = 54$	$t_{33} = 30$
22	Іванов	$t_{11} = 72$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 59$
	Сидоров	$t_{21} = 83$	$t_{22} = 48$	$t_{23} = 56$
	Петров	$t_{31} = 84$	$t_{32} = 45$	$t_{33} = 58$
23	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 69$
	Сидоров	$t_{21} = 99$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 67$
	Петров	$t_{31} = 90$	$t_{32} = 58$	$t_{33} = 68$
24	Іванов	$t_{11} = 34$	$t_{12} = 71$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 76$	$t_{23} = 89$
	Петров	$t_{31} = 36$	$t_{32} = 75$	$t_{33} = 88$
25	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 85$	$t_{13} = 96$
	Сидоров	$t_{21} = 72$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 93$
	Петров	$t_{31} = 76$	$t_{32} = 81$	$t_{33} = 95$
26	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 75$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 90$	$t_{22} = 74$	$t_{23} = 84$
	Петров	$t_{31} = 92$	$t_{32} = 77$	$t_{33} = 85$
27	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 67$	$t_{13} = 77$
	Сидоров	$t_{21} = 40$	$t_{22} = 68$	$t_{23} = 79$
	Петров	$t_{31} = 42$	$t_{32} = 65$	$t_{33} = 75$
28	Іванов	$t_{11} = 95$	$t_{12} = 83$	$t_{13} = 76$
	Сидоров	$t_{21} = 92$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 71$
	Петров	$t_{31} = 94$	$t_{32} = 85$	$t_{33} = 75$
29	Іванов	$t_{11} = 63$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 55$
	Сидоров	$t_{21} = 67$	$t_{22} = 44$	$t_{23} = 57$
	Петров	$t_{31} = 60$	$t_{32} = 46$	$t_{33} = 51$
30	Іванов	$t_{11} = 52$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 78$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 45$	$t_{23} = 80$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 42$	$t_{33} = 79$

Задача № 3

Підприємство випускає продукцію (продукція може бути швидко псуватися), яку можна: зразу відправити споживачу (стратегія А1); відправити на склад для зберігання (стратегія А2); підвергнути додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія А3).

Споживач може купувати продукцію: негайно (стратегія В1); у термін невеликого часу (стратегія В2); після тривалого періода часу (стратегія В3).

У випадку стратегій А2 та А3, підприємство несе додаткові витрати на зберігання та обробку продукції, які не потрібні для А1. Але, при вибору стратегії А2, слід взяти до уваги можливі збитки із-за псування продукції.

Визначити оптимальні пропорції продукції для застосовування стратегій А1, А2 та А3. Слід надати графічну інтерпретацію оптимального рішення. Рекомендовано використовувати мінімаксний критерій (гарантований середній рівень збитку) при матриці витрат.

Таблиця 3.8

Вхідні данні

Варіант № 1				Варіант № 2				Варіант № 3			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	8	7	11	A_1	6	8	9	A_1	8	10	11
A_2	11	10	8	A_2	7	11	12	A_2	12	9	14
A_3	5	4	3	A_3	12	9	10	A_3	7	8	9
Варіант № 4				Варіант № 5				Варіант № 6			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	9	11	A_1	11	9	10	A_1	10	9	11
A_2	13	12	8	A_2	14	13	8	A_2	13	14	15
A_3	9	7	6	A_3	10	8	7	A_3	9	8	10
Варіант № 7				Варіант № 8				Варіант № 9			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	8	11	A_1	11	10	7	A_1	11	7	12
A_2	12	14	15	A_2	14	12	13	A_2	13	14	15
A_3	8	7	9	A_3	10	9	6	A_3	10	6	11
Варіант № 10				Варіант № 11				Варіант № 12			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	8	A_1	11	9	12	A_1	10	9	11
A_2	13	12	14	A_2	12	13	14	A_2	11	13	15
A_3	11	9	7	A_3	9	8	10	A_3	9	7	10
Варіант № 13				Варіант № 14				Варіант № 15			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	9	12	A_1	10	9	8	A_1	11	9	8
A_2	12	13	15	A_2	14	12	13	A_2	16	13	15
A_3	9	8	10	A_3	9	8	7	A_3	10	8	7

Закінчення таблиці 3.8

Варіант № 16				Варіант № 17				Варіант № 18			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	7	12	A_1	12	8	14	A_1	12	11	10
A_2	14	15	16	A_2	15	16	17	A_2	16	14	15
A_3	9	6	11	A_3	10	7	12	A_3	11	10	9
Варіант № 19				Варіант № 20				Варіант № 21			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	13	A_1	13	12	14	A_1	12	10	14
A_2	14	15	16	A_2	14	15	16	A_2	13	14	15
A_3	11	10	11	A_3	11	10	13	A_3	10	9	12
Варіант № 22				Варіант № 23				Варіант № 24			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	13	11	14	A_1	14	13	12	A_1	13	11	14
A_2	14	16	17	A_2	18	14	17	A_2	15	17	18
A_3	11	10	12	A_3	12	11	10	A_3	12	10	13
Варіант № 25				Варіант № 26				Варіант № 27			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	14	12	15	A_1	14	13	15	A_1	16	15	14
A_2	15	17	18	A_2	15	18	19	A_2	18	16	19
A_3	11	10	13	A_3	11	10	12	A_3	15	13	12
Варіант № 28				Варіант № 29				Варіант № 30			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	15	13	16	A_1	15	14	16	A_1	17	16	14
A_2	17	19	20	A_2	16	19	20	A_2	20	17	19
A_3	14	12	15	A_3	13	12	14	A_3	15	14	12

Задача № 4

Підприємство може випускати три виду продукції (A_1, A_2 та A_3), при цьому отримує прибуток, який залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів (B_1, B_2, B_3 або B_4). Дана матриця (таблиця 5), її елементи a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску і-ої продукції з j-им змістом попиту.

Розробити математичну модель для визначення оптимальних пропорцій випуску продукції, які гарантують середню величину прибутку при різноманітному стані попиту. Зробіть висновки щодо прийняття оптимального рішення.

Таблиця 3.9

Вхідні данні

Варіант № 1					Варіант № 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	7	9	A_1	4	6	7	10
A_2	10	11	5	3	A_2	11	13	6	4
A_3	8	9	5	4	A_3	10	11	7	6

Продовження таблиці 3.9

Варіант № 3					Варіант № 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	8	7	9	A_1	4	6	7	8
A_2	9	12	6	2	A_2	9	10	6	3
A_3	8	9	5	4	A_3	7	9	5	4
Варіант № 5					Варіант № 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	5	7	9	A_1	7	8	7	10
A_2	11	10	8	3	A_2	11	10	9	3
A_3	10	9	6	5	A_3	10	9	5	5
Варіант № 7					Варіант № 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	9	8	A_1	8	7	10	9
A_2	11	10	6	4	A_2	11	10	4	5
A_3	10	9	5	6	A_3	12	11	5	6
Варіант № 9					Варіант № 10				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	9	10	A_1	7	8	9	10
A_2	8	4	5	8	A_2	6	5	7	8
A_3	9	5	6	9	A_3	9	6	6	9
Варіант № 11					Варіант № 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	7	8	10	A_1	9	7	10	11
A_2	7	5	7	8	A_2	5	6	8	9
A_3	8	4	6	9	A_3	8	10	9	10
Варіант № 13					Варіант № 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	8	11	A_1	7	6	9	11
A_2	6	8	7	9	A_2	6	9	7	9
A_3	8	10	9	10	A_3	9	8	8	10
Варіант № 15					Варіант № 16				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	6	11	12	A_1	10	6	11	12
A_2	8	10	9	11	A_2	8	9	10	13
A_3	7	9	8	10	A_3	11	11	9	11
Варіант № 17					Варіант № 18				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	10	11	12	A_1	11	7	10	11
A_2	10	9	12	13	A_2	10	8	12	13
A_3	11	8	9	11	A_3	7	10	9	10
Варіант № 19					Варіант № 20				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	11	12	A_1	11	9	12	14
A_2	10	8	9	13	A_2	10	12	9	13
A_3	7	11	10	11	A_3	8	11	13	15
Варіант № 21					Варіант № 22				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	14	13	12	14	A_1	14	11	13	14
A_2	9	12	14	17	A_2	11	12	15	17

Закінчення таблиці 3.9

A_3	8	14	11	15	A_3	15	14	11	15
Варіант № 23					Варіант № 24				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	11	13	14	A_1	10	11	12	14
A_2	11	9	7	10	A_2	11	9	8	10
A_3	15	14	12	15	A_3	12	7	12	15
Варіант № 25					Варіант № 26				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	12	10	A_1	12	11	12	10
A_2	11	9	8	7	A_2	11	10	8	9
A_3	9	7	12	11	A_3	10	8	13	11
Варіант № 27					Варіант № 28				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	10	8	A_1	12	11	10	9
A_2	11	7	8	9	A_2	11	8	7	6
A_3	10	8	11	11	A_3	10	9	11	10
Варіант № 29					Варіант № 30				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	10	11	8	A_1	12	10	11	9
A_2	11	9	7	6	A_2	13	11	8	6
A_3	10	7	8	11	A_3	11	9	10	11

Контрольні запитання

1. Чому векторний спосіб постановки транспортної задачі більш економний, аніж матричний?
2. Який порядок користування функцією Solwer електронних таблиць Calc?
3. Наведіть основні принципи формулювання багатокритеріальної задачі, як задачі математичного програмування.
4. Що таке цілочисельне програмування?
5. Що таке „зворотній шлях розрахунку” у динамічному програмуванні?

В розділі розглянуто основні принципи формулювання задач оптимізації для подальшого їх вирішення на комп’ютері.

4. ТЕОРІЯ ІГОР

Вивчивши матеріал цього розділу, студент опанує поняття платіжної матриці антагоністичної гри, визначення оптимальних стратегій гри, прийняття рішень в умовах невизначеності.

4.1. Поняття платіжної матриці гри

Звичайно теорію гри визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити оптимальні правила поведінки кожної сторони, що бере участь у рішенні конфліктної ситуації.

У економіці, наприклад, виявився недостатнім апарат математичного аналізу, що займається визначенням екстремумів функцій. З'явилася необхідність вивчення так званих оптимальних мінімаксних і максимінних рішень. Отже, теорію гри можна розглядати як новий розділ оптимізаційного підходу, що дозволяє вирішувати нові задачі при прийнятті рішень.

Гра - спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що вироблені певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; вихід гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін.

Виграш або програш сторін оцінюється чисельно, інші випадки в теорії гри не розглядаються, хоч не всякий виграш насправді можна оцінювати кількісно.

Гравець - це одна зі сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця - це його правила дії в кожній з можливих ситуацій гри.

Платіжна матриця (матриця ефективності, матриця гри) включає всі значення виграшів (в кінцевій грі). Нехай гравець 1 має m стратегій A_i гравець 2 - n стратегій B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Гра може бути названа грою m/n. Подамо матрицю ефективності гри двох осіб.

Таблиця 4.1

Гравець 2 / Гравець 1	B_1	B_2	………	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}	α_2
………	………	….	………	………	………
A_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	………	β_n	

У даній матриці елементи a_{ij} - значення виграшів гравця 1 - можуть означати й математичне сподівання виграшу (середнє значення), якщо виграш є випадковою величиною. Величини α_i, $i = \overline{1,m}$, и β_j, $j= \overline{1,n}$, - відповідно мінімальні значення елементів a_i по рядках і максимальні - по стовпцях.

Ігри діляться на кінцеві й нескінченні. У кінцевій грі кожний з гравців має кінцеве число можливих стратегій. Якщо хоч би один з гравців має нескінченне число можливих стратегій, гра є нескінченною.

Ще ігри діляться на кооперативні, коаліційні і безкоаліційні. Якщо гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції, то така гра відноситься до безкоаліційних; якщо гравці можуть вступати в угоди, створювати коаліції - коаліційних. Кооперативна гра – це гра, в якій заздалегідь визначені коаліції.

Є критерій, що дозволяє класифікувати гру з нульовою і з ненульовою сумою. Гра з нульовою сумою передбачає умову: «сума виграшів усіх гравців у кожній партії дорівнює нулю». Гра двох гравців з нульовою сумою відноситься до класу антагоністичних. Природно, виграш одного гравця при цьому рівний програшу іншого. Прикладами гри з нульовою сумою служить більшість економічних задач. У них загальний капітал всіх гравців перерозподіляється між гравцями, але не міняється. До гри з ненульовою сумою також можна віднести велику кількість економічних задач. Наприклад, внаслідок торгових взаємовідносин країн, що беруть участь у грі, усі учасники можуть виявитися у виграші. Гра, в якій треба вносити внесок за право участі в ній, є грою з ненульовою сумою.

Кількість ходів. Згідно з цим критерієм ігри можна розділити на одноходові та багатоходові. Одноходові ігри закінчуються після одного ходу кожного гравця. Так, в матричній грі після одного ходу кожного з гравців відбувається розподіл виграшів. Багатоходові ігри бувають позиційними, стохастичними, диференціальними та ін.

Інформованість сторін. За даним критерієм розрізнюють гру з повною та неповною інформацією. Якщо кожний гравець на кожному ходу гри знає всі раніше застосовані іншими гравцями на попередніх ходах стратегії, така гра визначається як гра з повною інформацією. Якщо гравцеві не всі стратегії попередніх ходів інших гравців відомі, то гра класифікується як гра з неповною інформацією. Гра з повною інформацією має рішення. Рішенням буде сідлова точка при чистих стратегіях.

Міра неповноти інформації. За цим критерієм ігри поділяються на статистичні (в умовах часткової невизначеності) і стратегічні (в умовах повної невизначеності). Гру з природою часто відносять до статистичної гри. У статистичній грі є можливість отримання інформації на основі статистичного експерименту, при якому обчислюється або оцінюється розподіл імовірностей стану (стратегій) природи. З теорією статистичної гри тісно пов'язана теорія прийняття економічних рішень.

Розглянемо матричну гру, представлену матрицею виграшів $m\,´n$, де число рядків $i = \overline{1,m}$, а число стовпців $j = \overline{1,n}$ Застосуємо принцип отримання максимального гарантованого результату при найгірших умовах. Гравець 1 прагне прийняти таку стратегію, яка повинна забезпечити максимальний програш гравця 2. Відповідно гравець 2 прагне прийняти стратегію, що забезпечує мінімальний виграш гравця 1. Розглянемо обидва підходи.

Підхід гравця 1. Він має отримати максимальний гарантований результат при найгірших умовах. Значить, при виборі своєї чистої стратегії, що відповідає цим умовам він повинен вибрати гарантований результат в найгірших умовах, тобто найменше значення свого виграшу a_{ij}, яке визначимо як

$$a_i = \min_j a_{ij}.$$

Щоб цей гарантований ефект в найгірших умовах був максимальним, треба з усіх α_i, вибрати найбільше значення. Визначимо його α і назвемо чистою нижньою ціною гри («максимін»)

$$a_i = \max_i a_i = \max_i \min_J a_{ij}, \tag{4.1}$$

Таким чином, максимінній стратегії відповідає рядок матриці, якому відповідає елемент α. Які б стратегії не застосовував гравець 2, гравець 1 максимінною чистою стратегією гарантував собі виграш, не менший, ніж α. Така оптимальна поведінка гравця 1.

Підхід гравця 2. Своїми оптимальними стратегіями він прагне зменшити виграш гравця 1, тому при кожній j-й чистій стратегії він відшукує величину свого максимального програшу як

$$b_i = \max_i a_{ij}.$$

в кожному j-му стовпці, тобто визначає максимальний виграш гравця 1, якщо гравець 2 застосує j-у чисту стратегію. З усіх своїх n j-х чистих стратегій він відшукує таку, при якій гравець 1 отримає мінімальний виграш, тобто визначає чисту верхню ціну гри («мінімакс»)

$$b_i = \max_i b_j = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{4.2}$$

Чиста верхня ціна гри показує, який максимальний виграш може гарантувати гравець 1, застосовуючи свої чисті стратегії, - виграш, не менший, ніж α. Гравець 2 за рахунок вказаного вище вибору своїх чистих стратегій не допустить, щоб гравець 1 міг отримати виграш, більший, ніж β. Таким чином, мінімаксна стратегія відображається стовпцем платіжної матриці, в якому знаходиться елемент β. Вона є оптимальною чистою, яка гарантує стратегію гравця 2, якщо він нічого не знає про дії гравця 1.

Чиста ціна гри v - ціна даної гри, якщо нижня і верхня її ціни співпадають

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v. \qquad (4.3)$$

У цьому випадку гра називається грою з сідловою точкою.

4.2. Методи знайдення оптимальної стратегії

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка в чистих стратегіях, то знаходять верхню і нижню ціни гри. Вона показує, що гравець 1 не отримає виграшу, який би перевершив верхню ціну гри, а також, що гравцеві 1 гарантований виграш, не менший нижньої ціни гри. Чи не поліпшиться результат гравця 1, якщо інформація про дії противної сторони буде відсутньою, але гравець буде багато разів застосовувати чисті стратегії випадковим чином з певною ймовірністю?

У такій ситуації, виявляється, можна отримувати виграші, у середньому більші за нижню ціну гри, але менші верхньої.

Змішана стратегія гравця - це повний набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в одних і тих же умовах із заданими ймовірностями. Підведемо підсумки сказаного і перерахуємо умови застосування змішаних стратегій:

- гра без сідлової точки;
- гравці використовують випадкову суміш чистих стратегій із заданими ймовірностями;
- гра багато разів повторюється в подібних умовах;
- при кожному з ходів жоден гравець не інформований про вибір стратегії іншим гравцем;
- допускається осереднення результатів гри.

Застосовуються наступні позначення змішаних стратегій.

Для гравця 1 змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$ з відповідними імовірностями (частотою) $p_1, p_2 \dots p_m$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2, & \dots, & A_m \\ p_1 & p_2, & \dots, & p_m \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0 \qquad (4.4)$$

Для гравця 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2, & \dots, & B_n \\ q_1 & q_2, & \dots, & q_n \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0; \qquad (4.5)$$

q_j - імовірність застосування чистої стратегії B_j.

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи матрицю A (вона відноситься й до гравця 1, і до гравця 2), можна визначити при заданих векторах $\overline{p}$ і $\overline{q}$, середній виграш (математичне сподівання ефекту) гравця 1

$$M(A,\overline{p},\overline{q})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i q_j \quad , \qquad (4.6)$$

де $\overline{p}$ і $\overline{q}$, - вектори; p_i і q_j - компоненти векторів.

Шляхом застосування своїх змішаних стратегій гравець 1 прагне максимально збільшити свій середній виграш, а гравець 2 - довести цей ефект до мінімально можливого значення.

Гравець 1 прагне досягнути $b=\min_{\overline{q}}\max_{\overline{p}} M(A,\overline{p},\overline{q})$.

Гравець 2 домагається того, щоб виконувалася умова

$$a=\max_{\overline{p}}\min_{\overline{q}} M(A,\overline{p},\overline{q}) .$$

Позначимо $\overline{p}^0$ і $\overline{q}^0$ вектори, відповідні оптимальним змішаним стратегіям гравців 1 і 2, тобто. такі вектори $\overline{p}^0$ і $\overline{q}^0$, при яких буде виконане рівняння $\min_{\overline{q}}\max_{\overline{p}} M(A,\overline{p},\overline{q})=\max_{\overline{p}}\min_{\overline{q}} M(A,\overline{p},\overline{q})=M(A,\overline{p}^0,\overline{q}^0)$.

Ціна гри γ - середній виграш гравця 1 при використанні обома гравцями змішаних стратегій. Отже, рішенням матричної гри є:

1) $\overline{p}^0$ - оптимальна змішана стратегія гравця 1;
2) $\overline{q}^0$ - оптимальна змішана стратегія гравця 2:
3) γ - ціна гри.

Змішані стратегії будуть оптимальними ($\overline{p}^0$ і $\overline{q}^0$), якщо вони утворять сідлову точку для функції М(А, $\overline{p},\overline{q}$), М(А, $\overline{p},\overline{q}^0$) $\le$ М(А, $\overline{p}^0$, $\overline{q}^0$) $\le$ М(А, $\overline{p}^0,\overline{q}$).

Потрібно зазначити, що при виборі оптимальних стратегій гравцеві 1 завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, при будь-якій фіксованій стратегії гравця 2 (і, навпаки, для гравця 2). Активними стратегіями гравців 1 і 2 називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців з імовірностями, відмінними від нуля. Значить, до складу оптимальних змішаних стратегій гравців можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

<u>Приклади</u>

Приклад 1. Визначити верхню та нижню ціни при заданій матриці гри і указати максимінну і мінімаксну стратегії. Представимо матрицю гри з позначеннями стратегій, A_j, B_i;

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	1	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Визначимо нижню ціну гри: α_1 =1; α_2 =4; α =4 (див. стовпець α_i,).

Визначимо верхню ціну гри: β_1 = 4 ; β_2 = 5; β_3 = 6; β = 4 (див. рядок β_j).

Таким чином, $\alpha = \beta = 4$, тобто $\max\limits_{i} \min\limits_{j} \alpha_{ij} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} \alpha_i = 4$.

Значить, $\alpha = \beta = v = 4$ - чиста ціна гри при стратегіях A_2 і B_1. Отже, маємо гру з сідловою точкою.

Приклад 2. Визначимо максимінну і мінімаксну стратегії при заданій матриці ефективності.

Визначимо максимінну стратегію: $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha = 4$ - рядок A_2. Визначимо мінімаксну стратегію: $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$; $\beta_3 = 9$; $\beta_4 = 10$; $\beta = 7$ - стовпець B_2. Тут $\alpha < \beta$, отже, сідлової точки немає.

Гравець 2 / Гравець 1	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	7	6	10
A_2	8	4	9	5

Приклад 3. Дана матриця гри $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти її змішані стратегії.

Побудуємо цільову функцію згідно (4.6)

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = 25p_1q_1 + p_1q_2 + 3p_2q_1 + 5p_2q_2 + p_3q_1 + 9p_3q_2 \to \max,$$

та враховуючи обмеження (4.4) – (4.5), знайдемо оптимальні значення імовірностей застосування різних стратегій, застосувавши функцію Solwer. Рішенням цієї гри є те, що всі ймовірності дорівнюють нулю, окрім $p_1 = 1$ $q_1 = 1$. Отже ця гра повинна виконуватися у чистих стратегіях.

4.3. Ігри з природою

Нерідко економічна ситуація є унікальною, і рішення в умовах невизначеності повинно прийматися одноразово. Це породжує необхідність розвитку методів моделювання прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику. Традиційно наступним етапом такого розвитку є гра з природою. Формальне вивчення гри з природою, так само як і стратегічних, повинно починатися з побудови платіжної матриці, що є, по суті, найбільш трудомістким етапом підготовки прийняття рішення. Помилки в платіжній матриці не можуть бути компенсовані ніякими обчислювальними методами і приведуть до невірного підсумкового результату.

Помітна особливість гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, у більшості випадків званий гравцем 1. Гравець 2 (природа) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як такий, що не має конкретної мети і партнер по грі, що випадковим чином вибирає чергові «ходи» . Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не треба розуміти буквально, хоч цілком можуть зустрітися ситуації, в яких «гравцем» 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або з природними стихійними силами).

На перший погляд відсутність обдуманої протидії спрощує гравцеві задачу вибору рішення. Однак, хоч ОУР ніхто не заважає, їй важче обґрунтувати свій вибір, оскільки в цьому випадку гарантований результат не відомий.

Нехай гравець 1 має m можливих стратегій: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а у природи є n можливих станів (стратегій): $П_1, П_2, \ldots, П_n$, Тоді умови гри з природою задаються матрицею A виграшів гравця 1.

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & \ldots & П_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right)$$

Платить, звичайно, не природа, а деяка третя сторона (або сукупність сторін, що впливають на прийняття рішень гравцем 1 і об'єднаних у поняття «природа»).

Можливий ще й інший спосіб завдання матриці гри з природою: не у вигляді матриці виграшів, а у вигляді так званої матриці ризиків $R = ||r_{ij}||_{m,n}$ або матриці упущених можливостей. Величина ризику - це розмір плати за відсутність інформації про стан середовища. Матриця R може бути побудована безпосередньо з умов задачі або на основі матриці виграшів A. Ризиком r_{ij} гравця при використанні ним стратегії A_i і при стані середовища $П_j$ будемо називати різницю між виграшем, який гравець отримав би, якби він знав, що станом середовища буде $Пj$, і виграшем, який гравець отримає, не маючи цієї інформації.

Знаючи стан природи (стратегію) $П_j$, гравець вибирає ту стратегію, при якій його виграш максимальний, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ при заданому j.

Приклад

Для матриці виграшів $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 9$.

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & П_3 & П_4 \\ \hline A_1 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ A_2 & 3 & 8 & 4 & 3 \\ A_3 & 4 & 6 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

Згідно з уведеними визначеннями r_{ij} і β_j отримуємо матрицю ризиків:

$$r = \begin{array}{ccccc} & П_1, & П_2, & П_3, & П_4 \\ A_1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ A_3 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{array}$$

Незалежно від вигляду матриці гри потрібно вибрати таку стратегію гравця (чисту або змішану, якщо остання має значення), яка була б найбільш вигідною в порівнянні з іншими. Необхідно зазначити, що в грі з природою поняття змішаної стратегії гравця не завжди правомірне, оскільки його дії можуть бути альтернативними, тобто вибір однієї зі стратегій відкидає всі інші стратегії (наприклад, вибір альтернативних проектів).

4.3.1. Прийняття рішень при відомих імовірностях стану природи

У тих випадках, коли внаслідок попередніх досліджень відомі ймовірності настання того чи іншого стану природи p_j, вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається як

$$a = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \, , \tag{4.7}$$

всі позначення такі ж як в пп. 4.1-4.2. Тобто, знаходиться середнє по рядку платіжної матриці гри і обирається та стратегія, яка дає найбільше середнє значення.

В деяких випадках імовірності настання певних станів природи подаються обумовлені, що точність визначення цих імовірностей менше 100%. Частіше, для кожного стану природи $П_j$ вказується своя точність розрахунку ймовірності його стану t_j, яка як і ймовірність змінюється в діапазоні від 0 до 1 (від о% до 100%). У цьому випадку , вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається із залученням матриці ризиків $\boldsymbol{r_{ii}}$

$$a = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j t_j - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j (1 - t_j) \right), \tag{4.8}$$

Тобто, при визначенні середнього, його складові коректуються на величину точності визначення його ймовірності. В той же час визначається середній ризик, скоректований на можливий рівень не точності визначення станів природи. Відповідні значення середнього виграшу і середнього ризику віднімаються по рядках, а потім обирається та стратегія, яка дає найбільший результат.

<u>Приклади</u>

Приклад 1. Компанія «Сири України» - невеликий виробник різних продуктів з сиру на експорт. Один з продуктів - сирна паста - постачається в країни ближнього зарубіжжя. Генеральний директор повинен вирішити, скільки ящиків сирної пасти потрібно виробляти протягом місяця. Імовірності того, що попит на сирну пасту протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, становить відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Витрати на виробництво одного ящика є 45 грн. Компанія продає кожний ящик по ціні 95 грн. Якщо ящик з сирною пастою не продається протягом місяця, то вона псується й компанія не отримує прибутку. Скільки ящиків потрібно виробляти протягом місяця?

Користуючись початковими даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (компанія «Сири України») є різні показники числа ящиків з сирною пастою, які йому, можливо, потрібно проводити. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків. Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який отримає виробник, якщо він зробить 8 ящиків, а попит буде тільки на 7. У результаті отримаємо наступну платіжну матрицю в грі з природою (див. таблицю). Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток є 352,5 грн. Він відповідає виробництву 8 ящиків.

На практиці частіше за все в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Обираючи такий підхід, можна зупинитися на рекомендації проводити 8 ящиків, і для більшості ОУР рекомендація була б обґрунтованою. Саме так поступаємо ми, коли розглядаємо різні прикладні задачі прийняття рішень у грі з природою.

Таблиця 4.2

Попит на ящики / Виробництво ящиків	6 (0,1)*	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)	Середній очікуваний прибуток
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

* У дужках приведена ймовірність попиту на ящики.

Приклад 2. Розглянемо проблему закупівлі вугілля для обігріву будинку. Є наступні дані про потрібну кількість і ціни на вугілля, необхідного зимою для опалювання будинку.

Таблиця 4.3

Зима	Кількість вугілля, т	Середня ціна за 1 т в грн.
М`яка	4	60
Звичайна	5	75
Холодна	6	80

Рішення. Побудуємо платіжну матрицю, вказавши імовірності зимового стану.

Таблиця 4.4

Імовірність / Зима	0,35	0,5	0,15
	М`яка	Звичайна	Холодна
М`яка (4 т)	4*60	4*60+1*75	4*60+2*80

Звичайна (5 т)	5*60	5*60+0*75	5*60+1*80
Холодна (6 т)	6*60	6*60+0*75	6*60+0*80

Зробимо розрахунок очікуваної середньої плати за вугілля

Таблиця 4.5

Зима	Очікувана середня плата
М`яка	240*0,35+315*0,5+400*0,15 = 301,5
Звичайна	300*0,35+300*0,5+380*0,15 = 312
Холодна	360*0,35+360*0,5+360*0,15 = 360

Як бачимо з таблиці, найменша очікувана середня плата доводиться на випадок м'якої зими (301,5 грн.). Відповідно, якщо не враховувати міри ризику, то представляється доцільним літом закупити 4 т вугілля, а взимку, якщо зажадається, докупити вугілля за більш високими зимовими цінами.

Приклад 3. Акціонерне товариство (АТ) «Фото і колір» - невеликий виробник хімічних реактивів і обладнання, які використовуються деякими фотостудіями при виготовленні 35-мм фільмів. Один з продуктів, який пропонує «Фото і колір», - ВР-6. Акціонерне товариство продає протягом тижня 11, 12 або 13 ящиків ВР-6. Від продажу кожного ящика воно отримує 35 грн. прибутку. Як і деякі інші фотографічні реактиви, ВР-6 має дуже малий термін придатності. Тому, якщо ящик не проданий до кінця тижня, він повинен бути знищений. Кожний ящик обходиться підприємству в 56 грн. Імовірності продати 11, 12 і 13 ящиків протягом тижня рівні відповідно 0,45; 0,35; 0,2. Як ви радите чинити? Як ви порекомендуєте діяти, ураховуючи, що «Фото і колір» міг би зробити ВР-6 з добавкою, що значно продовжує термін його придатності?

Матрицю гри з природою (тут АТ «Фото і колір» - гравець з природою, а природа - торгова кон'юнктура) будуємо аналогічно з розглянутими вище задачами.

Таблиця 4.6

Попит на ящики / Виробництво ящиків	11 (0,45)*	12 (0,35)	13(0,2)	Очікуваний середній прибуток
11	35*11=385	35*11=385	35*11= 385	385
12	35*11-56*1=329	35*12=420	35*12=420	379,05
13	35*11-56*2=273	35*11-56*1=364	35*13=455	341,25

*У дужках приведені ймовірності попиту на ящики.

Розрахунок середнього очікуваного прибутку проводиться з використанням імовірностей станів природи.

Висновок. Найбільший з середніх очікуваних прибутків (385 грн.) відповідає при заданих можливостях попиту виробництву 11 ящиків, яке і потрібно рекомендувати АТ «Фото і колір».

4.3.2. Прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Невизначеність, пов'язану з відсутністю інформації щодо ймовірності станів середовища (природи), називають «безнадійною» або «поганою». У таких випадках для визначення найкращих рішень використовуються наступні критерії.

Критерії максимакса. З його допомогою визначається стратегія, яка максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій крайнього оптимізму. Найкращим признається рішення, при якому досягається максимальний виграш, рівний $M = \max\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Потрібно зазначити, що ситуації, що вимагають застосування такого критерію, в економіці загалом нерідкі, і користуються ними не тільки оптимісти, але й гравці, поставлені в безвихідне становище, коли вони вимушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій даного критерію природа розглядається як агресивно настроєний і свідомо діючий противник типу тих, які протидіють у стратегічній грі. Вибирається рішення, для якого досягається значення $W = \max\limits_{1 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Це перестраховочна позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не так зацікавлений у великому успіху, але хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається відношенням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів *A*, а матрицею ризиків *R*): $S = \min\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} r_{ij}$.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій при виборі рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія в матриці *A* вибирається у відповідності зі значенням $H_A = \max\limits_{1 \le i \le m} \{p \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}\}$, де p - коефіцієнт песимізму ($0 \le p \le 1$). При $p=0$ критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, а при $p = 1$ - з критерієм Вальда.

Коли за прийнятим критерієм рекомендується до використання декілька стратегій, вибір між ними робиться за додатковим критерієм, наприклад в розрахунок можуть прийматися середні квадратичні відхилення від середніх виграшів при кожній стратегії. Вибір може залежати від схильності до ризику ОУР.

Приклад

Приклад 1. Приведемо результати застосування розглянутих вище критеріїв для наступної матриці виграшів:

$$\begin{pmatrix} & П_1 & П_2 & П_3 & П_4 \\ A_1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A_2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A_3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A_4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix}$$

Для гравця 1 кращими є стратегії:

- за критерієм Вальда A_3;
- за критерієм Севіджа A_2 і A_3;
- за критерієм Гурвіца (при p= 0,6) - A_3;
- за критерієм максимакса A_4

Оскільки стратегія A_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох перевірених, міру її надійності можна визнати досить високою для того, щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

Приклад 2. Є певні кошти на зведення підприємства. Необхідно найбільш ефективно використати капіталовкладення з урахуванням кліматичних умов, під'їзних шляхів, витрат по перевезеннях і т.д. Поєднання цих чинників по впливу на ефективність капіталовкладень можна розбити на чотири стани природи B_1, B_2,, B_3, B_4. Типи підприємств визначимо A_1, A_2, A_3, A_4. Ефективність будівництва визначається як процент приросту прибутку по відношенню до суми капітальних вкладень. Інформацію, що відображає постановку задачі, представимо в таблиці.

Таблиця 4.7

Стани природи Тип підприємства	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	Середня ефективність $(\min\limits_j a_{ij}+\max\limits_j a_{ij})/2$
A_1	6	3	9	5	3	9	6
A_2	3	4	5	13	3	13	8
A_3	9	6	4	11	4	11	7,5
A_4	2	5	3	9	2	9	5,5
$\max\limits_i a_{ij}$	9	6	9	13			

Варіанти рішень:

1. За принципом стратегічної гри, за принципом максиміна:

$\max \min a_{ij}$ =4. Треба будувати підприємство A_3.

$i \quad j$

2. Змінимо умови задачі й припустимо, що в таблиці відображені витрати на будівництво підприємств, тоді вибір типу підприємств потрібно здійснити за принципом мінімакса: $\max_i \min_j a_{ij} = 9$. Треба будувати підприємство A_1 або A_4.
3. Рішення за принципом Гурвіца. Якщо відомі всі ймовірності, що визначають стани природи, зробимо вибір за допомогою середнього арифметичного кращого і гіршого результатів. Згідно з таблицею це буде рекомендація будувати підприємство A_2, що забезпечує максимальну середню ефективність $\Phi = (13+3)/2 = 8$.
4. Застосуємо принцип Байєса при рівних імовірностях станів природи $P(B_1)=P(B_2)= P(B_3)= =P(B_4) =1/4=0,25$. Визначимо рентабельність, відповідну рішенню A_1 тобто M_1

   6*0,25+3*,025+9*0,25+5*0,25=5,75.

   Далі так само визначається M_2, M_3, M_4: $M_2 = 6,25$; $M_3 = 7,5$; $M_4 =4,75$.

Висновки. Припускаючи, що всі імовірності станів природи рівні, потрібно будувати підприємство A_3, оскільки $M_3 =7,5 = \max (M_1, M_1, M_1, M_1)$.

4.4. Індивідуальні завдання № 3. Розрахунок оптимальних стратегій

Завдання складається з декількох задач, кожну з яких студент має вирішити із застосуванням функції Solwer електронних таблиць Calc. В кожній задачі використовується параметри: N – це остання цифра номеру залікової книжки студента; M – це номер студента у списку групи.

1. Побудуйте платіжну матрицю двопальцевої гри Морра, яка полягає в наступному. У гру грають дві людини: кожна з них показує один або два пальці і одночасно називає число пальців, яке, на думку одного з учасників, покаже його противник (природно, противник цього не бачить). Якщо один із гравців вгадує правильно, він виграє суму, рівну сумі пальців, показаних ним і його противником. У іншому випадку – нічия (виграш рівний нулю). Знайдіть нижню і верхню ціни гри.

2. Кожному з гравців видається по бубновому і жировому тузу. Гравець 1 отримує також бубнову двійку, а гравець 2 – жирову. При першому ході гравець 1 вибирає і відкладає одну зі своїх карт, а гравець 2, не знаючи карти, вибраної гравцем 1, також відкладає одну зі своїх карт. Якщо були відкладені карти однієї масті, то виграє гравець 1, у іншому випадку таким, що виграв, вважається гравець 2. Якщо відкладені дві двійки, виграш рівний нулю. Розмір виграшу визначається картою, відкладеною переможцем (тузу приписується одне очко, двійці – два).побудуйте платіжну матрицю гри і сформулюйте відповідну модель лінійного програмування.

3. Визначимо максимінну і мінімаксну стратегії при заданій матриці ефективності.

Таблиця 4.8

Гравець 1 / Гравець 2	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	N	7	6	M
A_2	8	4	9	5

4. Знайдіть оптимальні стратегії для таких платіжних матриць:

$$\begin{pmatrix} N & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & M & 1 & 1 \\ 1 & 2 & N & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & M & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & M \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & M & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ N & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & N \\ M & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -N \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ M+N & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & M-N & 0 & 0 & 0 & N \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ M & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & N & 2 \\ 4 & M+N & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Контрольні запитання

1. Чому теорія ігор відповідає процесу прийняття рішень в економіці?
2. Що таке платіжна матриця гри?
3. Що таке чиста і змішана стратегії?
4. Як знайти змішану стратегію за допомогою лінійного програмування?
5. Що таке „гра з природою”?
6. Назвіть критерії вибору стратегії при повній невизначеності.
7. Як уточнити імовірності настання станів природи?

В розділі розглянуто застосування теорії ігор до прийняття економічних рішень, визначено платіжну матрицю гри, Максимівну чисту і змішану стратегію, гру з природою.

5. ЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ, ПОБУДОВАНІ НА ПІДСТАВІ СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДІВ

В розділі показано основні прийоми утворення математичних моделей, отриманих на підставі статистичних досліджень економічних процесів.

5.1. Методи побудови моделей довільної форми

Статистичні дослідження економічних систем і процесів, що відбуваються в них, провадяться для утворення їх результатів – таблиць з чисельними значеннями різних економічних факторів. Збирання даних провадиться частіше всього для різних моментів часу (пороках, кварталах місяцях) або для одного моменту часу, але для різних економічних об'єктів. Їх розташовують в одному стовпці для одного моменту часу або для одного економічного об'єкту. Приклад таких статистичних таблиць наведено нижче.

Таблиця 5.1

Статистика по шахті № 7 за 2006 р

Період	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
I квартал	5%	2500000	5200000
II квартал	4%	2200000	5100000
III квартал	1%	2800000	5400000
IV квартал	12%	1200000	5800000

Таблиця 5.2

Статистика по підприємствам за I квартал

Підприємства	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
Вагоноремонтний завод	2%	25000	690000
Металургійний комбінат	15%	9900000	5800000
Шахта № 7	5%	2500000	5200000
Трамвайне депо	-0,2%	12000	2800000

На першому етапі збирання статистичних даних всі фактори вважаються рівнозначними. Але для подальшої роботи по створенню математичних моделей, фактори треба розділити на вхідні і вихідні, або інакше, залежні і незалежні. Цей розподіл виконується довільно, згідно задач, які ставить перед собою дослідник. Наприклад, якщо потрібно побудувати модель впливу на рентабельність матеріалів та основних засобів, то рентабельність буде залежним фактором, а матеріали та основні засоби – незалежними. Залежних і незалежних факторів може бути декілька. Залежні позначаються як y_1, y_2, y_3......., а незалежні як x_1, x_3, x_3….

Для зручності подальшої обробки даних на комп'ютері, залежні і незалежні фактори розташовуються у сусідніх стовпцях таблиці, – кожна група окремо.

5.1.1. Загальний алгоритм побудови моделей довільної форми

Алгоритм базується на положеннях регресивного аналізу, який дозволяє знайти емпіричну формулу залежності вихідних факторів від вхідних

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n), \tag{5.1}$$

На першому етапі розробки моделі довільної форми, висувається гіпотеза про можливий вигляд такої моделі.

Це може бути (тут і далі наводяться формули для одного залежного і одного незалежного фактора)

– поліном *n*-го порядку

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \ ; \tag{5.2}$$

– експоненційна функція

$$y = a_0 \lambda^{a_1 x} ; \tag{5.3}$$

– логарифмічна функція по *n*-й основі

$$y = a_0 \log_n x \ ; \tag{5.4}$$

– обернена степенна

$$y = a_0 + \sum_{i=-n}^{-1} a_i x^i \ , \tag{5.5}$$

де a_0 – константа, а a_i – коефіцієнти при незалежних факторів.

Якщо незалежних факторів декілька, можна утворити з них комплекси типу $x_1\, x_2$, $x_1/\, x_2$, x_1-x_2, $\log x_1\, x_2$, і т. д, об'єднуючи їх по двоє, троє і більше.

Другим етапом роботи є додавання до початкової таблиці стовпців результатів математичних перетворень вигляду (5.2) – (5.5). Ці перетворення можна зробити як для незалежних так і для залежних факторів. Причому, результати перетворення кожного фактора бажано розташовувати в сусідніх колонках таблиці, поруч з самим фактором.

Третій етап вимагає нормування всіх факторів статистичної таблиці разом з їх перетвореннями згідно (2.8). Нормуванню піддаються також і всі математичні перетворення.

Для відбору вхідних техніко-економічних параметрів, що істотно впливають на вихідні параметри, обчислюється матриця коефіцієнтів парної кореляції для всіх пар нормованих факторів згідно (2.15). Якщо цих факторів було N, то загальна кількість пар буде $N(N\text{-}1)/2$. Наприклад, якщо в початковій статистичній таблиці було 2 незалежних фактора і 1 залежний, а до них було додано 3 перетворення виду (5.2) – (5.5), то потрібно буде розрахувати кореляцію для 6(6-1)/2 = 15 пар. Звичайно, цю кількість можна скоротити за рахунок того, що розраховувати кореляцію тільки між усіма вхідним та вихідними факторами і не визначати – поміж вхідними і вхідними та вихідними і вихідними. Тоді потрібно буде розрахувати тільки nm коефіцієнтів, де n – кількість вхідних факторів, m – кількість вихідних. Для нашого прикладу це буде 5х1=5.

Тепер потрібно провести аналіз величини отриманих коефіцієнтів кореляції залежних факторів з незалежними та їх перетвореннями. Якщо коефіцієнти менше 0,3-0,5, це означає, що ці вхідні фактори слабо впливають на вихідні і ним можна знехтувати.

Тому на наступному етапі розробки математичної моделі довільної форми потрібно з таблиці нормованих значень факторів видалити стовпці, що відповідають цим малозначимим факторам.

Тепер таблиця підготовлена до розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії виду

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i \; ; \qquad (5.6)$$

де K – кількість вхідних факторів моделі. Оскільки при розрахунку коефіцієнтів регресії ми використовуємо чисельні значення не тільки самих вхідних факторів, але і їх математичні перетворення, фактично ми отримуємо нелінійну залежність y від x.

Для визначення параметрів лінійної регресії скористайтеся функцією електронних таблиць Calc

LINEST(Data_Y; Data_X; Linear_Type; Stats),

де **Data_Y** – масив даних вихідних факторів *y*. Тільки один стовпець; **Data_X** – масив вхідних параметрів, *x*, скільки потрібно стовпців; **Linear_Type** – ознака проходження лінії регресії через 0 (0 – проходить, 1 – не проходить); **Stats** – потреба виводити статистичні дані про розрахунок параметрів лінійної регресії (1 – якщо потрібно, 0 – непотрібно).

Наприклад, для таблиці значень вхідних факторів $X1$ та $X2$, та стовпчика значень Y. Покажемо фрагмент електронної таблиці. В ній незалежні фактори займають стовпчик А та В, а залежний – С.

Запишемо тепер формулу з адресами конкретних клітинок

=LINEST(C2:C8;A2:B8;1;1)

тут, **Data_Y** - це C2:C8; **Data_X** - це A2:B8; **Linear_Type** і **Stats** обоє дорівнюють 1.

Таблиця 5.3

	A	B	C	D	E	F	G
1	X1	X2	Y		Значення LINEST		
2	4	7	100		4,17	-3,48	82,33
3	5	9	105		5,46	10,96	9,35
4	6	11	104		0,87	5,06	#NA
5	7	12	108		13,21	4	#NA
6	8	15	111		675,45	102,26	#NA
7	9	17	120				
8	10	19	133				

Як тільки натиснемо кнопку **OK**, Calc виведе результати розрахунку в наступні клітинки:

E2 і F2: Коефіцієнти a_1 при вхідних параметрах залежності виду $y=a_0+a_1 \cdot x$ для значень X1 і X2. Порядок подання цих коефіцієнтів зворотній – в E2 коефіцієнт для X2 і в F2 коефіцієнт для X1.

G2: Коефіцієнт a_0.

E3 і F3: Стандартна помилка значення коефіцієнтів a_1.

G3: Стандартна помилка коефіцієнта a_0.

F4: Стандартна помилка регресії, обчисленої для значення Y.

E5: Значення F - критерію для аналізу якості апроксимації.

F5: Ступені свободи для аналізу якості апроксимації.

E6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від їх середнього.

F6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від наданих значень Y.

Можна скористатися також функцією **LOGEST,** яка обчислює коефіцієнти залежності виду $y= a_0+a_1^x$. Синтаксис її написання та розташування вихідних даних таке ж, як і у функції LINEST.

Якщо якість апроксимації відповідає заданому рівню довірчої ймовірності (як це зробити, викладено в п.2.2), адже розраховане значення F - критерію та число ступенів свободи вже дано, а табличне значення можна взяти з функції FTEST, можна переходити до останнього пункту створення моделі довільного вигляду.

Виконаємо деформування коефіцієнтів при незалежних факторах та скорегуємо значення коефіцієнта a_0.

Пояснимо на прикладі це положення. Нехай шукалася залежність виду

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2. \tag{5.7}$$

Очевидно, що і для параметру x і для параметру x^2 було визначено своє середнє та стандарт, відповідно, M_x, σ_x, та M_{x2}, σ_{x2}. Нормувався також і вихідний параметр y. Параметри його нормування будуть M_y, σ_y. Тоді, для переходу від нормованих значень факторів до звичайних, потрібно у формулу (5.7) підставити формули їх нормування вигляду (2.8). Тоді одержимо

$$\frac{y-M_y}{s_y} = a_0 + a_1\frac{x-M_x}{s_x} + a_2\frac{x^2-M_{x2}}{s_{x2}}. \tag{5.8}$$

Після нескладних перетворень отримаємо таку корекцію розрахованих коефіцієнтів регресії

$$y = \left[M_y + s_y\left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{s_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{s_{x2}}\right)\right] + \frac{a_1 s_y}{s_x}x + \frac{a_2 s_y}{s_{x2}}x^2. \tag{5.9}$$

Якщо всі фактори перед нормуванням було піддано логарифмуванню нормальними логарифмом, то початкова формула матиме вигляд (для двох вхідних факторів)

$$\mathrm{Ln}y = a_0 + a_1 \cdot \mathrm{Ln}x_1 + a_2 \cdot \mathrm{Ln}x_2. \tag{5.10}$$

Після денормування формула матиме вигляд

$$\mathrm{Ln}y = \left[M_y + s_y\left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{s_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{s_{x2}}\right)\right] + \frac{a_1 s_y}{s_x}\mathrm{Ln}x_1 + \frac{a_2 s_y}{s_{x2}}\mathrm{Ln}x_2 \tag{5.11}$$

Але, враховуючи властивості логарифму, її можна перетворити на таку

$$y = \lambda^{\left[M_y + s_y\left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{s_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{s_{x2}}\right)\right]} x_1^{\frac{a_1 s_y}{s_x}} x_2^{\frac{a_2 s_y}{s_{x2}}}. \tag{5.12}$$

5.1.2. Авторегресійні моделі

Інколи, економічні фактори спостерігаються поодинці, тобто не має можливості поставити їм у відповідність якісь інші фактори, які можна було б позначити як незалежні, щоб побудувати модель. Буває й так, що фактори спостерігаються в залежності від часу, але інтервали спостереження дуже нерівномірні і кореляція між часом і цим фактором незначна. Тобто, час теж не можна вважати незалежним фактором, який впливає на фактор, що розглядається.

В цих випадках при побудові статистичної моделі в якості незалежних факторів беруть попередні значення фактора, зміна якого вивчається і для якого потрібно побудувати модель.

В залежності від кількості взятих попередніх значень фактора, модель може мати будь яку кількість вхідних факторів, але не більше ніж N-2, де N – кількість значень фактора, отриманих шляхом статистичних спостережень.

В загальному вигляді ця модель записується як

$$y = f(y_{-1}, y_{-2}, y_{-3} \dots y_{-N+2}), \tag{5.13}$$

Функція ж залежності може бути будь-якою, обраною згідно принципів, викладених у п.5.1.1.

Для прикладу, користаємося таблицею, поданою на початку 5 розділу і побудуємо таблицю даних для рентабельності, в залежності від її попереднього значення. Перенесемо попередні значення рентабельності в сусідній стовпець зі зміщенням на 1 позицію так, як це показують стрілочки. При цьому, загальна кількість даних, яка буде використана для розрахунку коефіцієнтів регресійної моделі буде зменшена на 1.

Рентабельність	**Попереднє значення рентабельності**
5%	**-**
4%	**5%**
1%	**4%**
12%	**1%**

5.1.3. Циклічні моделі

Економічні цикли, сезонність продаж, цикл життя товару або послуги та інші чинники можуть суттєво впливати на економічні показники окремого підприємства. Періодичність економічних процесів викликана зміною життєвої активності людей протягом доби, тижня, місяця та року (існують і більші періоди циклічності).

Тому перед дослідниками постає задача підбору такого виду функції, яка б своєю формою відповідала основним формам періодичних і неперіодичних залежностей економічних процесів. Другою задачею є визначення коефіцієнтів обраної функції за вибіркою статистичних даних.

Існуючі в економіці залежності повинні мати не тільки періодичні функції, але й експоненціальні та степеневі. Тому була обрана наступна формула

$$y = Ax^B + C(1 - e^{Dx})Sin(Ex^F + G) + H \,, \tag{5.14}$$

де x – аргумент, y – функція, A - H – константи, e – основа натурального логарифму. В залежності від чисельних значень констант, ця формула дає множину кривих, представлену на рис. 5.1.

Вирішення другої задачі ускладнюється тим, що не існує таких математичних перетворень, які б дозволили лінеаризувати (5.14), щоб потім отримати значення констант A - H методом регресії. Тому був застосований наступний оптимізаційний підхід:

1. Встановити довільні значення констант A - H .

2. Для всіх значень аргументу і довільних значень констант розрахувати величину y, яку позначимо як y_p за формулою (5.14).

3. Для кожного значення функції знайти $(y_p - y_ф)^2$, де $y_ф$ – фактичне значення функції, отримане за статистичними даними.

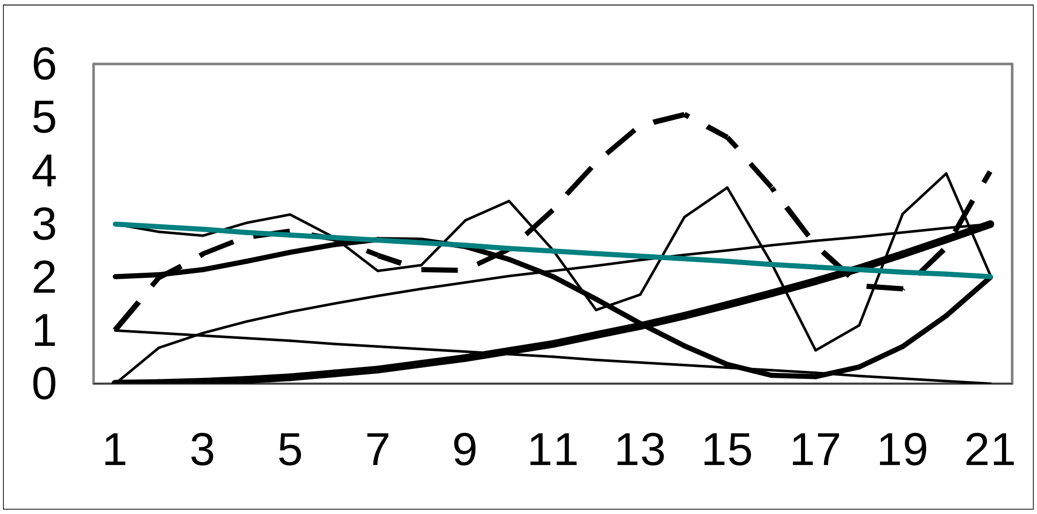


Рис. 1. Типи кривих, які можна створити за допомогою формули (5.14)

4. Вирішити оптимальну задачу з функціоналом виду

$$\sum_{i=1}^{N}(\text{y}_\text{р} - \text{y}_\text{ф})^2 \to 0, \qquad (5,15)$$

а параметрами, що змінюються, будуть константи A - H . Де N – розмір статистичної вибірки.

Для збільшення точності розрахунку, рекомендується встановлювати обмеження на значення констант за наступним правилом:

1. На графіку, який було побудовано за статистичними даними, виділяється елемент кривої, що нагадує синусоїду і знаходиться проміжок значень аргументу, на якому ця синусоїда здійснює повне коливання – Δx. Тоді, для константи E треба встановити наступне обмеження

$$E \le (0{,}5 - 1{,}5)\ 2\pi/\Delta x_1. \qquad (5.16)$$

2. Початкові значення констант B та F рекомендується становити рівними одиниці, константи H – середньому арифметичному статистичного значення функції, константу – D = 0.05, A = 0.

3. Константа C визначається з максимальної амплітуди Δy тієї частини графіку, яка визначена як синусоїдальна, і має наступні обмеження

$$C \le (0{,}4 - 0{,}6)\ \Delta y. \qquad (5.17)$$

Приклад

Застосуємо запропоновану методику для різних періодичних процесів в економіці. В наступній таблиці подані значення констант з (5.14) для цих графіків, знайдені з урахуванням (5.15)–(5.17). В малюнках прийняті наступні умовні позначення y_p – ■ $y_ф$ – ♦.

Таблиця 5.4

Номер рисунка	Значення констант для (5.14)							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
5.2	0,00145	7,34660	150000	-29,39	0,9	-0,436	-0,39	98923
5.3	11042,3	-3,901	25396,8	-0,899	0,855	0,8772	0,41	226049
5.4	-22,22	0,7731	4204,4	-0,009	0,0006	4,5492	7,83	285,39
5.5	595,51	-4,862	60	0,024	1	0,8697	9,5	45
5.6	17,0537	0,57627	19,9770	-0,05	201,3	-94,12	1,68	30,100

Споживання палива енергогенеруючою компанією.

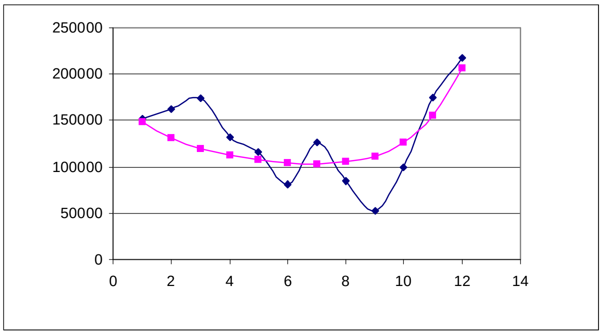


Рис. 5.2. За місяцями

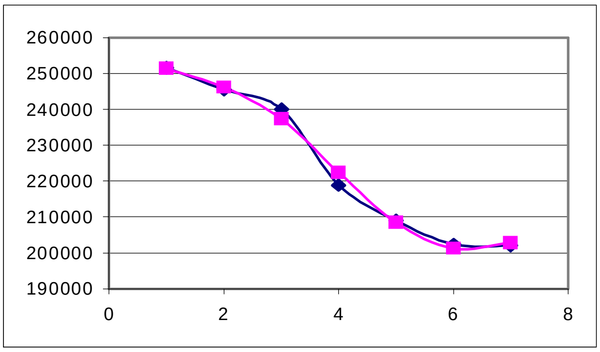


Рис. 5.3. За днями тижня

Потік замовлень на підприємство зв'язку.

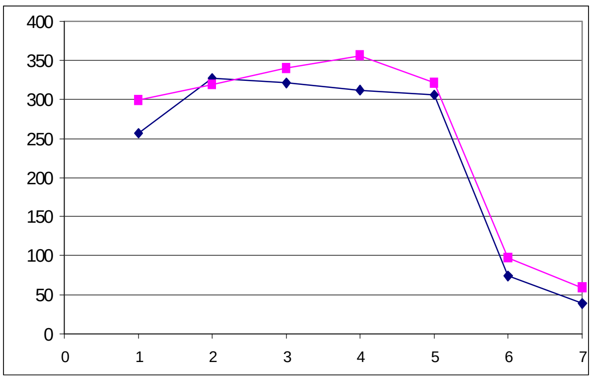


Рис. 5.4. За днями тижня

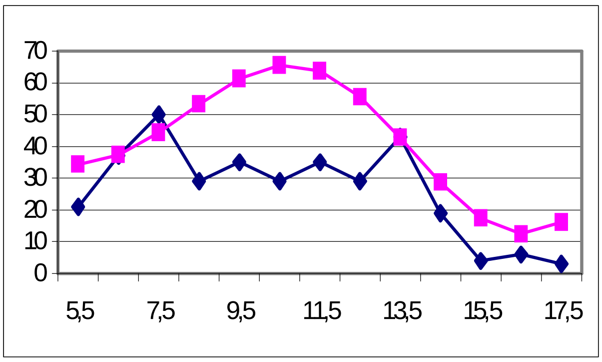


Рис. 5.5. За годинами робочого дня

<u>Залежність прибутку приватного підприємства від свого попереднього значення.</u>

В цьому випадку була використана авторегресійна модель, тобто залежність прибутків та збитків (прибутків зі знаком мінус) від своїх попередніх значень.

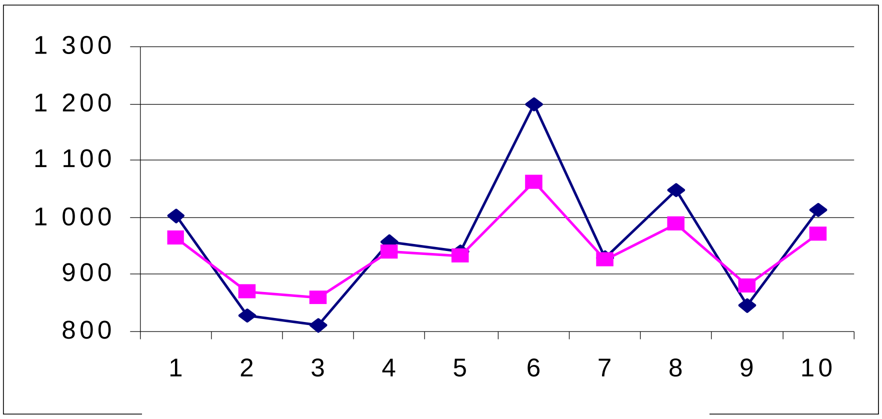


Рис. 5.6. Прибуток за кварталами

5.2. Нейронні сітки

При моделюванні економічних процесів однією з найбільш складних задач є вибір виду функції апроксимації. Це пояснюється тим, що характер залежності одного економічного параметра від іншого є невідомим. Фактично, нам необхідно, знаючи певний набір значень вхідних параметрів, віднести значення вихідного параметра до певного класу чи значення.

Для вирішення поставленої задачі найбільш прийнятним є використання такого математичного методу як нейронні сітки.

Нейронні сітки – це сітки, що складаються зі зв'язаних між собою простих елементів - формальних нейронів. Ядром використовуваних представлень є ідея про те, що нейрони можна моделювати досить простими формулами, а вся складність процесу моделювання визначається зв'язками між нейронами. Кожен зв'язок представляється як зовсім простий елемент, що служить для передачі сигналу.

Навчання нейтронної сітки звичайно будується так: існує задачник – набір прикладів із заданими відповідями. Ці приклади пред'являються системі. Нейрони одержують по вхідних зв'язках сигнали – «умови прикладу», перетворять їх, кілька разів обмінюються перетвореними сигналами і, нарешті, видають відповідь – також набір сигналів. Відхилення від правильної відповіді штрафується. Навчання складається в мінімізації штрафу як (неявної) функції зв'язків.

Неявне навчання приводить до того, що структура зв'язків стає «незрозумілою» – не існує іншого способу її прочитати, крім як запустити функціонування сітки. Стає складно побудувати зрозумілу людині логічну конструкцію, що відтворює дії сітки.

Модель нейрона як найпростішого процесорного елемента, що виконує обчислення перехідної функції від скалярного добутку вектора вхідних сигналів *xi* і вектора вагових коефіцієнтів *wi*.

Показана на рис. 5,7 модель нейрона описується наступною системою рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} net = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \\ f(net) = \operatorname{sgn}(net) = \begin{cases} +1, & net > 0 \\ -1, & net < 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad (5.18)$$

Інколи в (5.18) додається ще параметр θ – порогової чутливості, яка віднімається від суми зважених сигналів.

Функція *f(net)* , яку ще позначають як *OUT(net),* називається активізуючою. Тому в штучних нейронних мережах використовують інші функції вації, найбільш популярною з яких є так звана логістична уніполярна сигмоїдальна функція (сигмоїд)

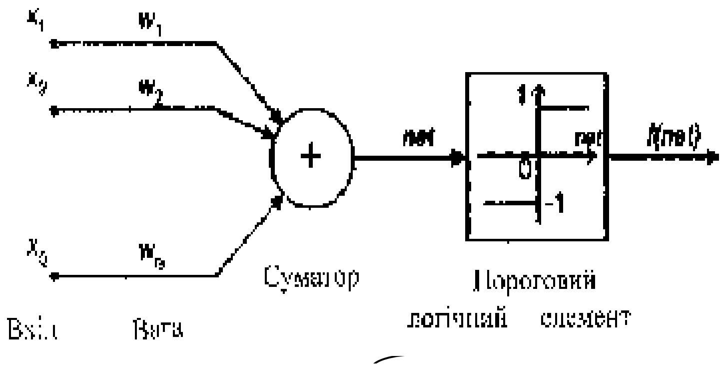


Рис. 5.7. Модель граничного нейрона МакКаллоха-Піттса

$$f(net) = \frac{1}{1+e^{-l\cdot net}}, \quad (5.19)$$

$$f(net) \in [0; +1]$$

$\lambda > 0$ – коефіцієнт крутості безупинної функції *f(net)* біля *net=0.5* . Функція симетрична відносно NET=0, OUT=1/2.

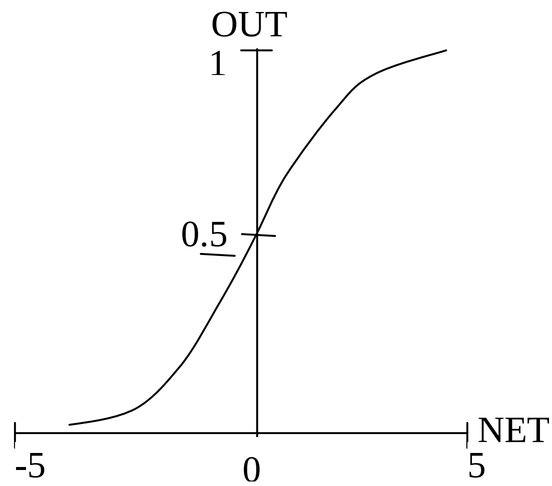


Рис. 5.8. Вид логістичної функції

Режими навчання з учителем нейронних сіток можуть бути різними, але найбільш ефективним є так зване “дельта-правило”:

1. Початкові ваги можуть бути будь-якими. Корекція провадиться пропорційно величині похідної по даній координаті. Похідна береться від функції активації. Підстроювання *j* ваги для *i* нейрона здійснюється за формулою

$$\Delta w_{ij} = h \cdot [d_i - f(net_i)] \cdot f'(net_i) \cdot x_j \quad (5.20)$$

де *j=1,2,...,n* $\eta > 0$ - коефіцієнт навчання, підбирається евристично

2. Помилка при навчанні на *k* кроці:

$$E_k = \frac{1}{2}[d_i - f(net_i)]^2, \quad (5.21)$$

де d_i - очікуваний вихід

3. Загальна помилка при навчанні:

$$E = \frac{1}{2 \cdot p} \sum_{k=1}^{p} \left[d_i - f\left(net_i\right) \right]^2 \quad , \qquad (5.22)$$

де p - число прикладів у навчальній вибірці

4. Похідна від сигмоїди

$$f'(net) = l \cdot f(net) \cdot \left[1 - f\left(net\right)\right] , \qquad (5.23)$$

де p - число прикладів y навчальній вибірці.

Побудуємо нейронну сітку для двох варіантів економічних процесів. Перший стосується розпізнавання безперервних економічних процесів, а другий – дискретних.

Почнемо зі створення апроксимуючої залежності для даних про кількість замовлень підприємства зв'язку по годинах робочого дня.

В якості моделі було обрано одношаровий перцептрон з логістичною функцією активації та з одним нейроном на три входи (рис. 5.9). На кожен вхід подавалося значення трьох послідовних значень кількості викликів від початку доби. Кожне значення вхідного параметру x бралося з вагою w та з певним значенням порогової чутливості θ. Таким чином, математична модель такого перцептрона мала наступний загальний вигляд

$$OUT = \frac{1}{1 + \lambda^{-(w_1 x_i - q_1 + w_2 x_{i+1} - q_2 + w_3 x_{i+2} - q_3)}} . \qquad (5.24)$$

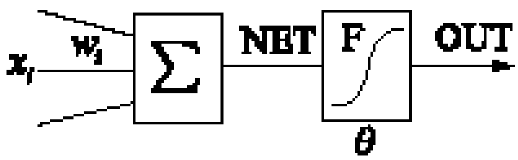


Рис. 5.9. Загальний вигляд схеми перцептрона з одним нейроном та суматором на вході

На кожному наступному кроці, підставлялося нове значення x, як i+2–й елемент перцептрона, а i–е значення x відкидалося. Значення OUT порівнювалося зі значенням у з розрахунком погрішності прогнозування вигляду $x` = \frac{(x - m_x)}{s_x}$. На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом

$$\begin{aligned} \Delta w_{ij} &= e\left(d_j^s - y_j^s\right) x_{sj} \\ \Delta q_j &= -e\left(d_j^s - y_j^s\right) \end{aligned} . \qquad (5.25)$$

де $d = y$, $y = OUT$, ε – число, яке характеризує швидкість навчання. Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку t $\varepsilon' = \varepsilon/1.5668$, де ε' – нове значення швидкості навчання.

Перед початком навчання перцептрона всі дані були нормовані за правилом (2.8)

В результаті навчання перцептрона було отримано показане на малюнку співпадіння розрахованих і реальних значень *y*. При цьому, сама апроксимуюча формула для нормованих значень параметрів, має вигляд

$$OUT = \frac{1}{1+\lambda^{-(1{,}58x_i+0{,}37x_{i+1}+1{,}15x_{i+2}+1{,}62)}} \tag{5.26}$$

На рис. 5.10 показано графіки навчальної вибірки та кривої, яка реалізується за (5.26), в якій бралися три попередніх значення кількості викликів. Можна бачити, що точність апроксимації поступово збільшується, оскільки експериментальна і розрахована криві поступово зближуються.

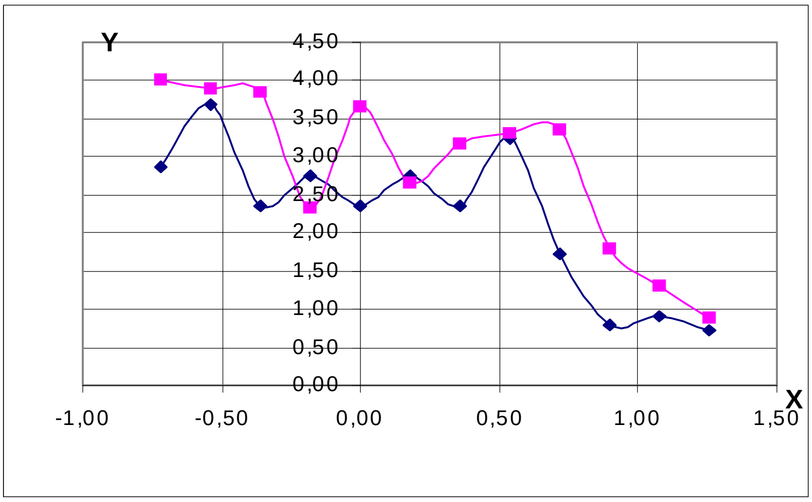


Рис. 5.10. Графік кількості викликів Y по годинам робочого дня X (♦ – експериментальна крива, ■ – розрахована крива)

Побудуємо тепер прогнозуючу модель зміни курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара (дані взяти по відомостям НБУ за період 01.02.2000 по 31.10.2000). В цьому випадку нас цікавить передбачення самого факту збільшення чи зменшення крос-курсу.

Для вирішення цієї задачі було розроблено двошаровий перцептрон (рис. 5.11), на вхід якого подавалося значення трьох попередніх значеннях крос-курсу австрійського шилінга і робився прогноз вихідного параметра, який являє собою функцію знаку числа

$$OUT = Sign(NET) = \begin{cases} 1, & NET > 0 \\ 0, & NET = 0 \\ -1, & NET < 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

В якості активуючих функцій першого шару були взяті логістичні (5.19). Навчання перцептрона виконувалося так. На кожному наступному кроці, підставлялися нові значення *xi* як для дієздатних так для недієздатних вузлів. Причому, вихідними значення *di* бралися числа: -1 – для випадку перебільшення курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара, +1 – для протилежного випадку дієздатність якого експертами оцінюється як критична, +1 – для випадку спів падіння курсів. Значення *OUT* порівнювалося зі значенням *di* з розрахунком погрішності прогнозування (7). На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом (5.25). Було встановлено наступне правило зменшення *ε* на кожному кроці розрахунку t *ε'*=*ε*/1.5668, де *ε'* – нове значення швидкості навчання.

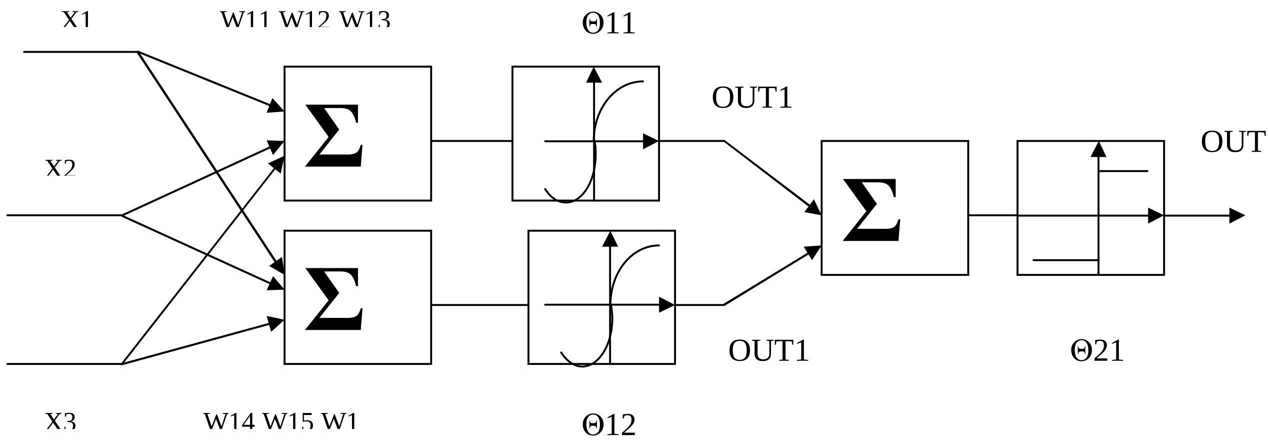


Рис. 5.11. Схема двошарового перцептрона
з трьома входами на кожному нейроні

Перед початком навчання перцептрона вхідні дані були нормовані за правилом (2.8)

На рис. 5.12. представлено схему застосування електронних таблиць Calc для розрахунків такого перцептрона.

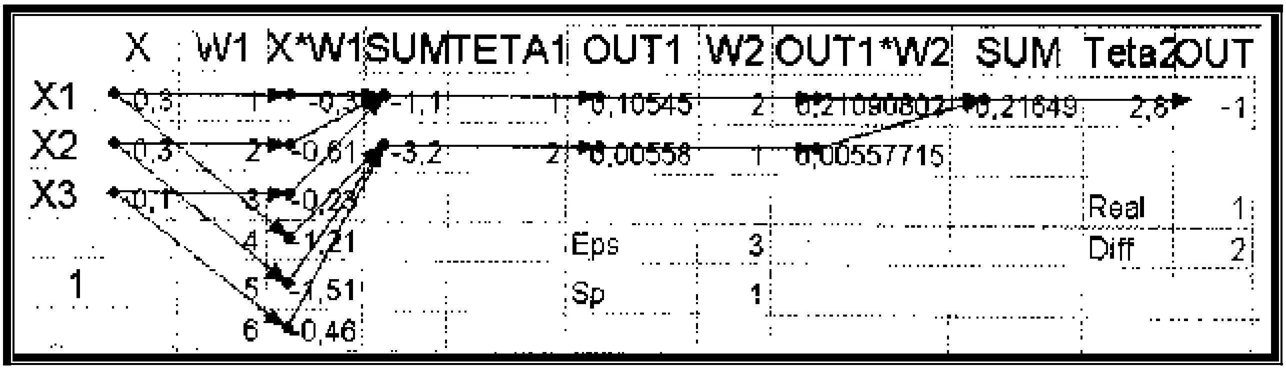


Рис. 5.12. Фрагмент таблиці Excel, яка реалізує перцептрон з рис. 5

Стрілки на рис. 5.12 показують порядок передачі даних. Потім вхідні дані поновлювалися на один крок, тобто, використовувалися чергові значення вхідних параметрів для іншого вузла Знаходилася розбіжність поміж значеннями, які видає перцептрон та справжньою оцінкою стану вузла. в порівнянні зі своїм попереднім значенням з корегуванням ваг та порогових функцій. Цей алгоритм показано на рис. 5.13.

В процесі навчання вже на 9-му кроці перцептрон давав більшість правильних відповідей на наступних значеннях курсу. Тому, процес навчання було припинено, а результуюча функція набула вигляду

$$OUT = Sign\left[\frac{10,37669298}{\left[1+\lambda^{-(-1,443525248X_1+1,561436345X_2+1,582503396X_3+4,683681367)}\right]}+ \frac{7,940045065}{\left[1+\lambda^{-(1,556474752X_1+4,561436345X_2+4,582503396X_4+-3,683681367)}\right]}+ 2,883681367\right]. \qquad (5.28).$$

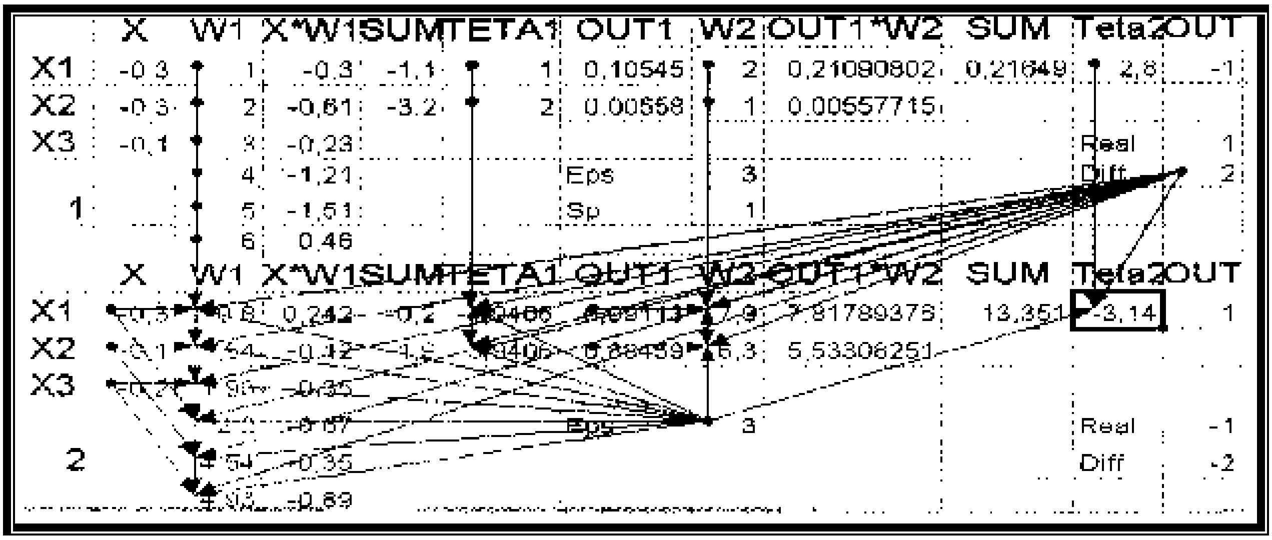


Рис. 5.13. Схема корегування ваг та порогів на наступному кроці, враховуючи результати з попереднього.

5.3. Теорія масового обслуговування

При вивченні явищ природи, процесів техніки, економіки або транспортних систем доводиться часто зустрічатися з таким положенням, що опис цих явищ або процесів проводиться за допомогою випадкових величин, які змінюються у часі.

У багатьох практично важливих ситуаціях доводиться з'ясовувати закономірності появи певного типу подій, який називається потоком подій: прибуття судів в морський порт, відмови в роботі складного пристрою, заміни електричних лампочок, що перегоріли, обривів ниток на ватерній машин і т. д. Розрахунок роботи багатьох підприємств побутового обслуговування – перукарень, кас магазинів, кількості громадського транспорту, необхідної кількості ліжок в лікарнях, пропускної спроможності шлюзів, переїздів, мостів і т. д. тісно пов'язаний з вивченням такого роду потоків. Цим займається теорія масового обслуговування.

Визначимо через *t* проміжок часу, який нас цікавить, і покладемо, що $P_k(t)$ є ймовірність появи *k* подій потоку за цей проміжок часу. Тоді за формулою закону розподілу Пуассона, при *k*=0, 1, 2,. .. з великою точністю виконується рівність

$$P_k(t) = \frac{(l t)^k}{k!} e^{-l t}, \tag{5.29}$$

де l – позитивна постійна, що характеризує «інтенсивність» надходження подій потоку. Зокрема, імовірність того, що за проміжок часу *t* не поступить жодної події потоку, є

$$P_0(t) = e^{-l t}. \tag{5.30}$$

Для розрахунку ймовірності за (5.29) можна скористатися функцією електронних таблиць Calc у такому порядку

POISSON(*k*; l **t*;0)*2.

Оскільки вимоги на обслуговування поступають у випадкові моменти часу і тривалість їх обслуговування також випадкова, виникає питання, як будуть задоволені потреби клієнтів, якщо обладнано *n* робочих місць обслуговування?

Уведемо припущення: 1) Потік вимог на обслуговування є найпростішим; 2) Тривалість обслуговування випадкова і ймовірність того, що на обслуговування доведеться затратити час, не менший ніж *t*, дорівнює e^{-ut}, де $u>0$ константа; 3) Кожна вимога обслуговується одним робочим місцем; кожне робоче місце обслуговує тільки одну вимогу в момент, коли він зайнятий; 4) Якщо є черга на обслуговування, то робоче місце, що звільнилося, без втрат часу переходить до обслуговування чергової вимоги; 5) Кількість точок обслуговування є n .

Визначимо $P_k(t)$ імовірність того, що в момент *t* в черзі знаходиться *k* вимог. У сформульованих нами умовах ці ймовірності можуть бути знайдені при будь-якому *k*=0, 1, 2,. ..

При $1 \le k \le n$

$$r_k = \frac{r^k}{k!} r_0; \tag{5.31}$$

при $k \ge n$

$$r_k = \frac{r^k}{n! n^{n-k}} r_0 \tag{5.32}$$

де

$$r_0 = [\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)}]^{-1} \quad \text{для} \quad r < n \tag{5.33}$$

$$\rho_0 = 0 \qquad \text{для} \qquad r \ge n .$$

У цих формулах $\rho = l / u$. Звернемо увагу на те, що при $r \geq n$ імовірність r_0=0. На підставі формул (5.31) - (5.33) виявляється, що і при будь-якому $k \geq 1$, P_k=0. Іншими словами, при $\rho \geq n$ в сталому процесі обслуговування застати в системі будь-яке кінцеве число вимог ми можемо лише з імовірністю нуль, тобто з імовірністю одиниця в такій системі буде нескінченно багато вимог, і утвориться нескінченна черга. Це означає наступне: у всіх випадках, коли $r \geq n$, черга на обслуговування необмежено зростає з часом.

Розрахунок за формулами (5.31) - (5.33) можна спростити, якщо використати функцію визначення факторіалу FACT(число).

Скориставшись функцією Solwer, можна вирішити зворотну задачу: при заданій довірчій ймовірності? відомій інтенсивності надходження заявок λ та середній швидкості їх обслуговування υ, кількості робочих місць обслуговування n, визначити розмір черги k. Для цього потрібно сформулювати задачу оптимізації на базі формул (5.31) - (5.33). Наперед, потрібно визначитися, чи буде $k \geq n$, чи ні, щоби знати, яку з цих формул треба застосовувати. Можна провести також розрахунок за обома. Далі, від їх значення треба відняти заданий рівень довірчої ймовірності і цю різницю взяти по модулю та спрямувати цей результат до мінімуму. Ця формула і буде цільовою функцією. Змінним параметром буде k. В обмеженнях потрібно вказати, що k>0.

<u>Приклад</u>

Розрахуємо ймовірність того, що при λ=4, υ=3, n=5, черга буде k = 7.

Розрахунки в середовищі Calc за формулами (5.31) - (5.33) проводяться послідовно, починаючи з визначення ρ, далі суми у формулі (3.54), далі – ρ_0, далі – ймовірність утворення черги, довжиною k.

Оскільки r =1,333, розрахунки вестимемо за формулою (5.32). Результат – p = 0,410057063. Отже, ймовірність того, що черга буде великою, є достатньою, щоб утворити нове робоче місце. На рис. 5.14 представлено фрагмент цього розрахунку в середовищі електронних таблиць Calc.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	λ=	4		k	0	1	2	3
2	υ=	3		$\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}$	1	1,3333	0,8889	0,3951
3	n=	5			3,7937			
4	k=	4		$\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}$			$\rho_0 =$	0,2627
5	ρ =	1,3333			=	0,0128		
6								
7								
8	$\rho_k = \frac{\rho^k}{n!n^{n-k}} \rho_0 =$			0,001383837				
9								

Рис. 5.14. Розрахунок імовірності утворення черги

Визначимо тепер, яку кількість робочих місць потрібно мати, щоб імовірність черги в 7 замовлень була не більше ніж 0,01?

Для цього від формули (5.32) віднімемо 0,01, візьмемо цю різницю по модулю, а змінним параметром зробимо *n*. Вкажемо також, що цей параметр більше нуля і є цілим. Функція отримання числа по модулю є ABS(число). Застосувавши функцію Solwer і взявши результат по модулю, як цільова функція, що прагне мінімуму, отримаємо результат $n = 6$ з імовірністю 0,00644783. Імовірність незначна, отже, черга такого розміру буде не часто.

5.4. Метод Монте-Карло

Методи Монте-Карло - це загальна назва групи методів для рішення різних задач за допомогою випадкових послідовностей. Ці методи (як і вся теорія імовірностей) виросли зі спроб людей поліпшити свої шанси в азартній грі. Цим пояснюється і той факт, що назву цій групі методів дало місто Монте-Карло – столиця європейського грального бізнесу.

Імітаційне моделювання за методом Монте-Карло (Monte-Carlo Simulation) дозволяє побудувати математичну модель для економічного об’єкту з невизначеними значеннями параметрів, і, знаючи закони розподілу параметрів об’єкту, а також зв'язок між змінами параметрів (кореляцію) отримати розподіл вихідних факторів об’єкту.

Перший крок при застосуванні методу імітації полягає у визначенні функції розподілу кожного незалежного (вхідного) фактору, який впливає на формування вихідних факторів за методикою, викладеною у п.2.2.

Як тільки функція розподілу визначена, можна застосовувати процедуру Монте-Карло:

Крок 1. Спираючись на використання статистичних функцій електронних таблиць Calc, випадковим чином вибираємо, засновуючись на функції закону розподілу значення всіх вхідних факторів.

Крок 2. Ці значення підставляємо у наперед складену модель економічного об’єкта, щоб визначити величину вихідних факторів.

Кроки 1 і 2 повторюються багато разів, наприклад 1000, і отримані 1000 значень вихідних факторів використовуються для визначення емпіричної щільності розподілу зі своїм власним математичним сподіванням і стандартним відхиленням.

Крок 3. Використовуючи значення математичного сподівання і стандартного відхилення, можна обчислити коефіцієнт варіації вихідних факторів і потім оцінити індивідуальний ризик проекту.

Крок 4. Тепер необхідно визначити мінімальне і максимальне значення критичного вихідного фактора, та знайти, за допомогою емпіричної функції розподілу, ймовірності виходу значень цього фактора за критичні.

Крок 5. Експерт приймає рішення, чи є ці ймовірності вагомими.

Крок 6. Якщо ймовірності виходи вихідних факторів за критичні межі є вагомими, приймається рішення про перебудову економічного об'єкта таким чином, щоби подальші розрахунки за його моделлю давали меншу ймовірність виходу вихідного фактора за критичну межу.

Незважаючи на свої переваги, метод Монте-Карло не поширений і не використовується дуже широко в бізнесі. Одна з головних причин цього - потреба у визначенні функцій щільності вхідних факторів, а почасти це є складним або і неможливим. Тому, коли ці функції невідомі, застосовується нормальний закон розподілу.

Порядок розрахунку емпіричної функції розподілу наступний.

Нехай ми маємо вибірку значень випадкової величини $X= x_1, x_2, \ldots. x_n$, з кількістю спостережень – N. Розіб`ємо весь діапазон можливих значень спостережень випадкової величини на d однакових ділянок. Знайдемо значення випадкової величини на правій межі кожної ділянки як

$$d_{\max}(i)=x_{\min}+\frac{(x_{\max}-x_{\min})\cdot i}{d}, \tag{5.34}$$

де, i – номер ділянки [1; d]; x_{max}, x_{min} – відповідно найбільше та найменше значення випадкової величини у вибірці. Права межа i-ї ділянки водночас є лівою межею $i+1$ ділянки. Ліва межа для 1-ї ділянки – це x_{min}. А права межа останньої ділянки – це x_{max}.

Орієнтовно, кількість цих ділянок може бути визначена як

$$d_{op}=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{1+3{,}332\cdot\ln N}, \tag{5.35}$$

але ця формула не є обов'язковою для використання. Дослідник може прийняти рішення про розбиття діапазону на довільну кількість ділянок.

Визначимо кількість значень випадкової величини, що попали в ту чи іншу ділянку як K_i. Це число називається "частотою". "Відносною частотою" називається число

$$k_i=\frac{K_i}{N}. \tag{5.36}$$

Відкладемо по осі абсцис значення випадкової величини X, розділивши ці значення на діапазони згідно (5.34). По осі ординат відкладемо для кожного діапазону значення частоти або відносної частоти у вигляді горизонтальної лінії для кожного діапазону. Ми отримаємо графік, який містить набір прямокутників і називається "**гістограма**". Цей графік має широке застосування в математичній статистиці і частково заміняє собою функцію щільності розподілу, але не є її повним еквівалентом. Якщо середини цих вершин прямокутників поєднати ламаною лінією, то утвориться крива, що називається „**полігон**" або емпірична щільність розподілу випадкової величини.

Побудуємо нову таблицю, в якій кожному діапазону значень випадкової величини поставимо у відповідність свою відносну частоту. На підставі цієї таблиці знайдемо емпіричну функцію розподілу або **кумуляту** за формулою:

$$F(d_i) = \sum_{l=0}^{i-1} k_l \tag{5,37}$$

де, k_l –відносна частота; *i* – номер діапазону для якого знаходиться значення кумуляти ($1 \le i \le d_i$).

Емпірична функція розподілу дозволяє визначити ймовірність попадання випадкової величини у наперед заданий діапазон значень [$X_А$; $X_В$]

$$p(X_А < X < X_В) = F(X_В)\text{-}F(X_А). \tag{5.38}$$

Приклад

Економіко-математична модель залежності прибутку *Y* (%) від ціни товару (*X*, грн) має вигляд Y=100+20X-2X^2. Знайти середній прибуток, його варіацію та ймовірність того, що фірма матиме збитки, тобто прибуток буде менше 0%, якщо:

А) Середнє значення ціни становить 10 грн., міра коливання ціни – стандарт – 3 грн.

Б) Закон розподілу ціни невідомий.

Задачу будемо вирішувати методом Монте-Карло із застосуванням електронних таблиць Calc.

Оскільки закон розподілу ціни нам невідомий, приймемо, що він – нормальний.

За допомогою функції RAND() згенеруємо 55 чисел, які рівномірно розподілені в діапазоні [0; 1]. Вважаючи їх імовірностями, використаємо функцію NORMINV(*p*; *Mx*; *σx*) для генерації 55 чисел зі значенням ціни. Ця функція повертає значення *X*, розподілене за нормальним законом, якщо задати значення ймовірності *p*, середнього *Mx* та стандарту *σx*.

Підставимо по черзі всі 55 значень *X* у формулу, яка реалізує модель прибутку і отримаємо 55 значень прибутку. Знайдемо його середнє за допомогою функції AVERAGEA(масив значень *Y*) та стандарт, за допомогою функції STDEVA(масив значень *Y*). Вони дорівнюють відповідно 87,99 та 53,5. Варіація дорівнює 0,61. Такий рівень варіації показує, що прибуток може коливатися у дуже великих межах, отже, економічний процес, модель якого розглядається, є високо ризиковим.

Для розрахунку емпіричної функції розподілу знайдемо оптимальну кількість діапазонів за (5.35). Для X_{min} =-64,67, X_{max} =149,83, вона становить 14,95. Приймаємо 14. Розраховуємо за (5.34) чисельні значення лівої і правої межі діапазонів. Всі розрахунки зведено у наступну таблицю. Негативні значення прибутку означають збитки.

Тепер потрібно знайти частоту попадання значення *Y* в кожен з 14 діапазонів. Для цього скористаємося функцією FREQUENCY(масив значень *Y*; масив значень лівої межі діапазонів). Праворуч від цих масивів функція виводить масив значень частот *Ki*. Розділивши їх на 55 (кількість значень *Y*), отримаємо відносні частоти ***ki***. Додавши їх за правилом (5.37), отримаємо емпіричну функцію розподілу ***Fi***. Графіки функцій наведені на рис. 5.15.

Імовірність того, що прибуток буде менше нуля, знайдемо за (5.38) за емпіричною функцією розподілу. Фактично, нас цікавить діапазон [-64,67%;0%].

За графіком на рис. 5.15.Б ці ймовірність буде дорівнювати

$$p(-64{,}67\% < Y < 0\%) = \mathrm{F}(0\%)-\mathrm{F}(-64{,}67\%)=0{,}1-0=0{,}1.$$

Отже, з імовірністю 10% можна стверджувати, що при заданому рівні коливань ціни, підприємство понесе збитки.

Таблиця 5.5

Di	*Min*	*Max*	*Ki*	*ki*	*Fi*
1	-64,67	-49,35	1	0,02	0
2	-49,35	-34,03	1	0,02	0,02
3	-34,03	-18,71	3	0,05	0,04
4	-18,71	-3,39	0	0	0,09
5	-3,39	11,94	0	0	0,09
6	11,94	27,26	2	0,04	0,09
7	27,26	42,58	4	0,07	0,13
8	42,58	57,9	3	0,05	0,2
9	57,9	73,22	4	0,07	0,25
10	73,22	88,54	5	0,09	0,33
11	88,54	103,87	5	0,09	0,42
12	103,87	119,19	7	0,13	0,51
13	119,19	134,51	7	0,13	0,64
14	134,51	149,83	13	0,24	0,76
		165,15	0	0	1

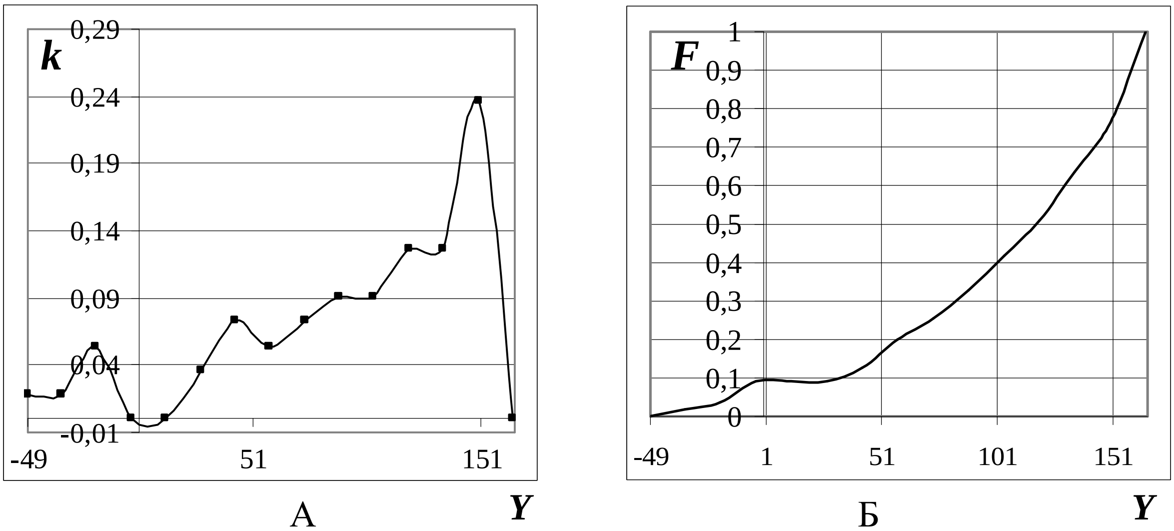


Рис. 5.15. Графіки емпіричних функцій відносних частот (А) та розподілу (Б)

5.5. Індивідуальні завдання №4. Розрахунки моделей довільного виду

Завдання 1

Використовуючи функцію RANDBITWEEN(число1;число2) електронних таблиць Calc, згенерувати три стовпці по 50 чисел. Перші два стовпці позначити як X_1 та X_2 (вхідні фактори), а третій – як Y (вихідний фактор).

Підставити у функцію число1= 2N, число2= 10(N+n), де N – номер студента за списком групи, n – остання цифра номеру залікової книжки.

Провести первинний статистичний аналіз результатів моделювання. Методами кореляційного і регресійного аналізу результатів моделювання дослідити залежність Y=f(X_1. X_2) для лінійної модної, моделі третього порядку, змішаної моделі. Оцінити адекватність одержаних моделей.

Скористатися функцією LINEST електронних таблиць Calc.

Завдання 2[1]

Задача 1

На телефонну лінію філіалу банку продуктивністю *m* викликів за хвилину і простим потоком обслуговування поступає простий потік викликів клієнтів з інтенсивністю *l* викликів на хвилину.

Розробити імітаційну модель для дослідження характеристик ефективності функціонування системи масового обслуговування залежно від параметра - час. Побудувати графічні залежності характеристик ефективності функціонування системи масового обслуговування - телефонної лінії.

Визначити граничні значення відносної пропускної спроможності ***Q***, абсолютної пропускної спроможності *A* і вірогідність відмови телефонної лінії, які впливають на підсумковий дохід філіалу. Визначити також середній час обслуговування одного виклику, середній час простою каналу і вірогідність того, що канал вільний або зайнятий. Номер варіанта відповідає номеру студента за списком групи.

[1] (С) Завдання розроблено доц.., к.т.н. Панщиною О.А.

Таблиця 5.6

Початкові дані

Варіант завдання	Продуктивність μ викликів/хв.	Інтенсивність λ викликів/ хв.	Діапазон зміни часу t, хв.
Варіант № 1	0,75 - 0,79	0,80 - 0,85	від 10 до 40
Варіант № 2	0,85 - 0,90	0,91 – 0,95	від 20 до 60
Варіант № 3	0,80 - 0,85	0,87 – 0,90	від 30 до 50
Варіант № 4	0,80 - 0,90	0,91 – 0,95	від 15 до 30
Варіант № 5	0,75 - 0,80	0,85 – 0,90	від 25 до 50
Варіант № 6	0,70 - 0,75	0,80 – 0,85	від 10 до 30
Варіант № 7	0,75 - 0,85	0,90 – 0,95	від 15 до 35
Варіант № 8	0,70 – 0,75	0,80 – 0,85	від 20 до 60
Варіант № 9	0, 65 - 0,75	0,77 – 0,85	від 10 до 60
Варіант № 10	0,65 - 0,70	0,75 – 0,80	від 20 до 50
Варіант № 11	0,76 - 0,80	0,81 - 0,87	від 20 до 50
Варіант № 12	0,86 - 0,92	0,92 – 0,97	від 30 до 60
Варіант № 13	0,81 - 0,87	0,88 – 0,92	від 20 до 40
Варіант № 14	0,81 - 0,92	0,92 – 0,97	від 10 до 30
Варіант № 15	0,76 - 0,82	0,86 – 0,92	від 20 до 60
Варіант № 16	0,71 - 0,77	0,81 – 0,87	від 20 до 50
Варіант № 17	0,76 - 0,87	0,91 – 0,97	від 20 до 55
Варіант № 18	0,71 – 0,77	0,81 – 0,87	від 10 до 50
Варіант № 19	0, 66 - 0,77	0,78 – 0,87	від 20 до 60
Варіант № 20	0,66 - 0,72	0,76 – 0,82	від 15 до 55
Варіант № 21	0,70 - 0,75	0,79 - 0,85	від 0 до 30
Варіант № 22	0,80 - 0,85	0,87 – 0,93	від 10 до 30
Варіант № 23	0,75 - 0,80	0,83 – 0,89	від 20 до 40
Варіант № 24	0,75 - 0,85	0,87 – 0,93	від 25 до 55
Варіант № 25	0,70 - 0,75	0,80 – 0,85	від 25 до 45
Варіант № 26	0,65 - 0,70	0,73 – 0,77	від 15 до 50
Варіант № 27	0,70 - 0,80	0,85 – 0,90	від 15 до 45
Варіант № 28	0,65 – 0,75	0,79 – 0,84	від 20 до 40
Варіант № 29	0, 60 - 0,75	0,78 – 0,83	від 5 до 35
Варіант № 30	0,70 - 0,85	0,87 – 0,91	від 5 до 25

Задача 2

Розробити імітаційну модель багатоканальної системи масового обслуговування банку (n - кількість каналів), що відкриває філіал в іншому місті. На вхід системи поступає потік заявок ($K_{ср}$ - середнє число зайнятих каналів). Продуктивність кожного каналу рівна m. Обслуговування однієї заявки (клієнта) приносить середній дохід $C1$. Створення одного каналу обслуговування (оператора) вимагає середніх витрат $C2$, а експлуатація одного каналу в одиницю часу - $C3$. З використанням імітаційної моделі визначити час t, через який філіал банку (система) почне приносити прибуток. Представити графічну інтерпретацію задачі і визначити шляхи підвищення ефективності функціонування СМО банку. Початкові дані представлені в таблиці. Номер варіанта відповідає номеру студента за списком групи.

Таблиця 5.7

Початкові дані

Варіант	n	μ	Kcp	C1	C2	C3
Варіант № 1	5	0,8	0,3	10	9	3
Варіант № 2	3	0,75	0,4	9	8	3
Варіант № 3	2	0,7	0,5	10	7	2
Варіант № 4	4	0,65	0,5	11	7	3
Варіант № 5	5	0,75	0,6	17	13	5
Варіант № 6	6	0,65	0,7	21	15	6
Варіант № 7	5	0,85	0,6	25	17	8
Варіант № 8	4	0,75	0,55	47	33	15
Варіант № 9	2	0,8	0,5	55	37	19
Варіант № 10	3	0,7	0,45	67	33	23
Варіант № 11	4	0,75	0,25	15	5	7
Варіант № 12	4	0,7	0,25	20	7	9
Варіант № 13	3	0,7	0,35	25	10	9
Варіант № 14	3	0,77	0,38	30	15	10
Варіант № 15	4	0,79	0,45	35	10	5
Варіант № 16	5	0,8	0,55	30	12	7
Варіант № 17	4	0,7	0,25	30	6	12
Варіант № 18	3	0,75	0,25	25	15	9
Варіант № 19	4	0,71	0,2	29	10	12
Варіант № 20	4	0,68	0,3	19	8	6
Варіант № 21	3	0,6	0,35	19	9	7
Варіант № 22	5	0,65	0,35	25	11	9
Варіант № 23	5	0,6	0,45	30	12	7
Варіант № 24	5	0,6	0,45	25	10	10
Варіант № 25	3	0,65	0,5	30	9	11
Варіант № 26	3	0,75	0,5	20	10	12
Варіант № 27	3	0,75	0,35	20	15	10
Варіант № 28	5	0,7	0,45	35	20	10
Варіант № 29	3	0,85	0,55	45	25	15
Варіант № 30	5	0,8	0,35	50	20	21

Контрольні запитання

1. Чи можна отримати модель у вигляді експоненційної залежності?
2. Як відрізнити циклічний економічний процес від не циклічного?
3. Коли треба будувати авторегресійні моделі?
4. Що є перешкодою для широкого застосування методу Монте-Карло при моделюванні економічних процесів?
5. Чи в усіх випадках можна застосовувати нейронні сітки?

В розділі розглянуто моделювання економічних об'єктів на підставі результатів статистичних досліджень, такі як регресійний, авторегресії, моделювання циклічних процесів, Монте-Карло, нейронні сітки.

ПІДСУМКИ

Прийняття економічних рішень повинно базуватися на економіко-математичному моделюванні процесів чи об'єктів, для яких потрібно здійснити керуючий вплив. Моделі використовуються для визначення оптимального значення вихідних факторів. При цьому визначається і величина вхідних факторів моделі, при яких і досягається заданий оптимум.

Статистичні спостереження за зміною різних факторів економічного об'єкту дозволяють визначити їх середнє значення та міру відхилення від середнього – стандарт. Варіація показує рівень ризикованості цього фактору. Окрім того, такі спостереження дають інформацію про закон розподілу цього фактору.

У випадках, коли немає можливості точно виміряти чисельне значення фактора, використовується метод експертних оцінок. Розроблено методи визначення рівня об'єктивності експертів.

Математичне програмування об'єднує в собі методи визначення оптимуму при наявності цільової функції, яка має прагнути мінімуму або максимум, змінних параметрів та обмежень.

Лінійне програмування визначає оптимум для лінійних моделей. Його варіантом є цілочисельне програмування, в якому змінні параметри не можуть приймати дробових значень.

Нелінійне програмування дозволяє знайти оптимальне рішення для моделей, визначених нелінійними залежностями.

Почасти, в економічних задачах виникає декілька критеріїв оптимізації. Вирішенню таких задач присвячено спеціальний розділ. В усіх випадках ці задачі зводяться до математичного програмування, але оптимум знаходиться у декілька кроків розрахунку.

Якщо при вирішенні економічних задач існує можливість визначити величину втрат чи прибутків від своїх певних дій та можливої реакції конкурентів, проблему вибору найкращої своєї дії можна вирішити за допомогою теорії ігор. Теорія дозволяє знайти рішення навіть у випадку повної невизначеності про можливі рішення другої сторони.

Статистичні таблиці дають можливість побудувати моделі економічних об'єктів будь-якого вигляду. Існують спеціальні прийоми при моделюванні циклічних процесів та у випадку відсутності даних про вхідні фактори.

Метод Монте-Карло визначає статистичні характеристики вихідних факторів для уже розробленої моделі, а метод нейронних сіток побудує модель навіть тоді, коли не має можливості навіть припустити по вид математичної залежності.

Ці потужні інструменти дають в руки економістам можливість об'єктивного і ефективного управління економічними об'єктами і процесами.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1993. – 336 с.
2. Ансофф И. Стратегическое управление. — М.: Экономика, 1989. – 220 с.
3. Аргінбаєв К.М. Оцінка ризику інвестиційних проектів і обґрунтування планів - прогнозів виробництва в умовах невизначеності. – Київ, 1997. – 190 с.
4. Арженовский С.В. Экономико-математическое моделирование динамики фирмы. Инвестиционный аспект. – М: МГУ, 2001 – 96 с.
5. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.– 448 с.
6. Балдин К.В. Математические методы в экономике. –М.: Издательство – Москва; Воронеж: МОДЭК, 2003. – 230 с.
7. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь. 1988. – 128 с.
8. Бендерская Е.Н., Колесников Д.Н., Пахомова В.И. и др. Моделирование систем с использованием теории массового обслуживания. Под ред. Д.Н. Колесникова – СПб: СПбГТУ, 2003. – 180с.
9. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 399 с.
10. Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Математические методы принятия решений: Учеб.пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004.– 124 с.
11. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1977. – 204 с.
12. Вентцель Е.С. Исследования операций: задачи, принципы методологии. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
13. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. –М.: Мир, 1985. – 509 с.
14. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987.– 336 с.
15. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986. –320 с.
16. Жураховский С.В. Управление портфелем. – К.:Киев,2003. – 346с.
17. Исследование операций / Под ред. Дж. Маддер, С. Элмагараби. – М.: Мир, 1981. Т. 1. – 712 с.

18. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Физматмет, 2000. – 264 с.

19. Клейнер Г. В., Тамбовцев В. Л., Качалов Р. М. Предприятия в нестабильной экономической среде: риски, стратегия, безопасность. — М.: Экономика, 1997. – 150 с.

20. Козлов В.Н., Колесников Д.Н., Сиднев А.Г. Решение задач математического программирования. Учебное пособие. – СПб.: СПбГТУ, 1992,– 104с.

21. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. –350 с.

22. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

23. Нікітіна Г.В. Інвестиції і ризик в умовах ринкової економіки. – Донецьк: ДонНУ 2002. – 120 с.

24. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

25. Пістунов І М., Пістунов М.І. Моделювання періодичних процесів в економіці/ Економіка: проблеми теорії та практики. – Дніпропетровськ: ДДУ, 2004. – С. 123-129.

26. Полак Э. Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1997. – 376 с.

27. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 110с.

28. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа.1998. – 319 с.

29. Степанова Т.О. Моделювання інвестиційних процесів на підприємстві. – Донецьк: ДонНТУ. – 110 с.

30. Сухарев А.Г., Тимофеев А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 325 с.

31. Трояновский Математическое моделирование в менеджменте. – М.: РДЛ, 2002. – 320 с.

32. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

33. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. – СПб.: СПбГУ, 1998. – 260 с.

34. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 150 с.

35. Численные методы условной оптимизации. / Под ред. Ф.Гилла и У.Мюррея. – М.: Мир,1977. – 290 с.

36. Швайцер М.Экономика предприятия. – М: Инфра-М,2001 г. – 342 с.

37. Эддонс М., Стенсфильд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

38. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. – М.: Наука, 1989. – 316 с.

Навчальне видання

Пістунов Ігор Миколайович
Турчанінова Інна Юріївна
Антонюк Оксана Петрівна

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ

(Навчальний посібник)

Редакційно-видавничий комплекс

У редакції авторів

Комп’ютерна верстка І.М. Пістунова

Електронне видання