УДК 330.015 : 330.105

Пістунов І.М., Ситников О.А.

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕЖІ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ МАРКОВІЦА

Отримані практичні результати для межі застосування оптимального портфелю цінних паперів Марковіца Запропонована так звана, "ризиково-доходна" модель, яка забезпечує розрахунок оптимального портфелю в умовах невизначеності рівня середніх доходності та ризику.

Practical results are taken for a useful border of the Markowitz optimal portfolio of the stock papers. A so-named "risk -incomes" model to present. This model to provide optimal portfolio soling in the undefined conditions of the level of average incomes and risk.

В наш час фондовий ринок пропонує все більше і більше різноманітних видів цінних паперів. Завдяки засобам телекомунікацій, торгівля цінними паперами стала міжнародним явищем, коли, не виходячи з офісу ви можете, здійснювати управління вашим пакетом цінних паперів на всіх фондових біржах світу. Кожен тип цінних паперів має свою доходність, яка з часом коливається, тому вибір тих типів цінних паперів, які варто включити у власні активи, складає певну проблему.

Ця проблема вирішується за допомогою найбільш відомої моделі портфелю цінних паперів Марковіца, для якої може бути знайдено оптимальне рішення за допомогою методів лінійного програмування [1-2] для:

– максимуму доходів при заданому значенні ризику

$$\begin{cases} m_p = \sum_i x_i d_i \to \max \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ \sum x_i = 1 \end{cases}, \qquad (1)$$

– мінімуму ризику при заданому значенні доходності портфелю цінних паперів

$$\begin{cases} v_p = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \to \min \\ \sum_i x_i d_i = m_p \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases}, \qquad (2)$$

де x_i – частка капіталу, витрачена на покупку цінних паперів i-го виду, d_i- середня прибутковість цінних паперів i-го виду у відсотках в розрахунку на одну грошову одиницю, m_p – задана середня прибутковість цінних паперів усього портфелю, v_{ij} –ковариація доходностей цінних паперів i – го та j – го видів, v_p – ковариація усього портфелю цінних паперів, якою вимірюється ризик портфелю, r_p – задана середня коваріація цінних паперів усього портфелю.

Ця модель широко застосовується зараз і для розрахунку ефективності інвестиційних проектів (див., наприклад, [3-5]). Але це використання провадиться без критичного аналізу можливої межі застосування моделі виду (1)-(2).

В зв'язку з вищесказаним, виникають наступні задачі:

- виявлення можливості використання матриці коефіцієнтів кореляції [6] $r_{ij} = \frac{n_{ij}}{s_i s_j}$, (де s_i – середнє квадратичне відхилення доходності цінних паперів i-го типу) замість матриці коваріації. Коефіцієнт кореляції є безрозмірним і завжди коливається в межах [±1], що робить його значно зручнішим для аналізу ситуації та визначення допустимого рівня ризику, аніж коваріація. Особливо це стосується моделі (1), де потрібно задавати певний, наперед визначений рівень ризику;
- проведення аналізу по типу матриці коваріації – для якого типу це рішення можливе чи існує?
- і останнє, чи не можна спростити моделі (1)-(2) і звести їх у єдину модель виду

$$
\begin{cases}
\dfrac{\sum\limits_i \sum\limits_j x_i x_j r_{x_i x_j}}{\sum\limits_i x_i d_i} \to \min \\
\sum\limits_i x_i = 1 \\
x_i \geq 0
\end{cases}, \qquad (3)
$$

щоб не задумуватися над проблемою визначення допустимого рівня ризику для кожного портфелю. В (3) в якості цільової функції вибрано відношення, в якому середній ризик поділено на середню доходність портфелю. Очевидно, що така цільова функція має прагнути мінімуму. Назвемо таку модель "ризиково-доходною".

Рішення поставлених задач виконувалося із застосуванням функцій СЛУЧМЕЖДУ, "Ковариация", "Корелляция" та "Поиск решения" електронних таблиць Excel.

На першому етапі досліджень було проведено вирішення задачі Марковіца для максимуму прибутку та мінімуму ризику, згідно з моделями (1) та (2), використовуючи в розрахунках ризику матрицю коваріації та кореляції для однакових початкових даних. Для цього було згенеровано датчиком випадкових чисел з рівномірним розподілом початкові значення доходностей для шести видів цінних паперів. Зразок таких даних наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

Згекнеровані датчиком випадкових чисел доходності цінних паперів

Кількість спостережень зміни доходності	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	10,74	10,84	14,75	14,30	14,76	14,30
2	13,49	13,44	15,97	12,84	10,37	10,39
3	12,80	12,39	15,18	12,45	10,93	15,27
4	15,18	13,33	12,61	10,84	13,28	14,12
5	12,89	10,75	13,87	12,07	10,47	10,00
6	15,11	12,70	12,32	11,88	13,15	12,46

За даними з табл. 1 розраховувалися матриці коваріації (табл. 2) та кореляції (табл. 3). В обох матрицях показано тільки нижній трикутник, оскільки вони є діагонально симетричними.

Таблиця 2

Матриця коваріації, розрахована за даними з табл. 1

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	2,2983					
Акції типу 2	1,2048	1,1737				
Акції типу 3	-1,2973	-0,1007	1,7542			
Акції типу 4	-1,4237	-0,5953	0,9063	1,1031		
Акції типу 5	-0,2984	-0,2963	-1,0046	0,3977	2,7612	
Акції типу 6	-0,4168	0,1388	-0,2628	0,1589	1,8416	3,97428

Таблиця 2

Матриця кореляції, розрахована за даними з табл. 1

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	1					
Акції типу 2	0,7335	1				
Акції типу 3	-0,6461	-0,0702	1			
Акції типу 4	-0,8941	-0,5232	0,6515	1		
Акції типу 5	-0,1184	-0,1646	-0,4564	0,2279	1	
Акції типу 6	-0,1379	0,0643	-0,0995	0,0759	0,5559	1

Було проведено 9 розрахунків за обома моделями (1) та (2). Результати показали повну тотожність значення доходності портфеля при розрахунках ризику за матрицями коваріації та кореляції. Відміна значень середньої доходності портфеля не перевищувала 0,7%. Тому всі подальші розрахунки проводилися з використанням матриці кореляції.

Наступну серію чисельних експериментів було проведено для визначення залежності доходності портфеля (1) від типу кореляційної матриці Для цього у кожному новому розрахунку було задано матрицю кореляції, зі значеннями коефіцієнтів, які лежать в різних діапазонах: [-1;-0.8], [-0.8;-0.6],…..[-0.1;+0.1]….[0.6;0.8], [+0.8;+1], Для того, щоб охарактеризувати кореляційну матрицю одним числом, було застосовано коефіцієнт множинної кореляції [7-8]. Наприклад, для трьох величин y, x_1 і x_2 цей коефіцієнт розраховується за формулою:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_2} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} \quad , \tag{4}$$

де r_{yx_1} приведений коефіцієнт кореляції між y і x_1. Цей коефіцієнт змінюється в діапазоні [0; 1] Для вирішення задачі цього етапу було проведено 61 оптимальний розрахунок по моделі (1). Для того, щоб можна було відрізнити значення R_{yx1x2} при позитивних та негативних діапазонах зміни коефіцієнтів матриці кореляції, йому було присвоєно знак мінус, для негативних діапазонів. Результати дослідження представлені на рис. 1.

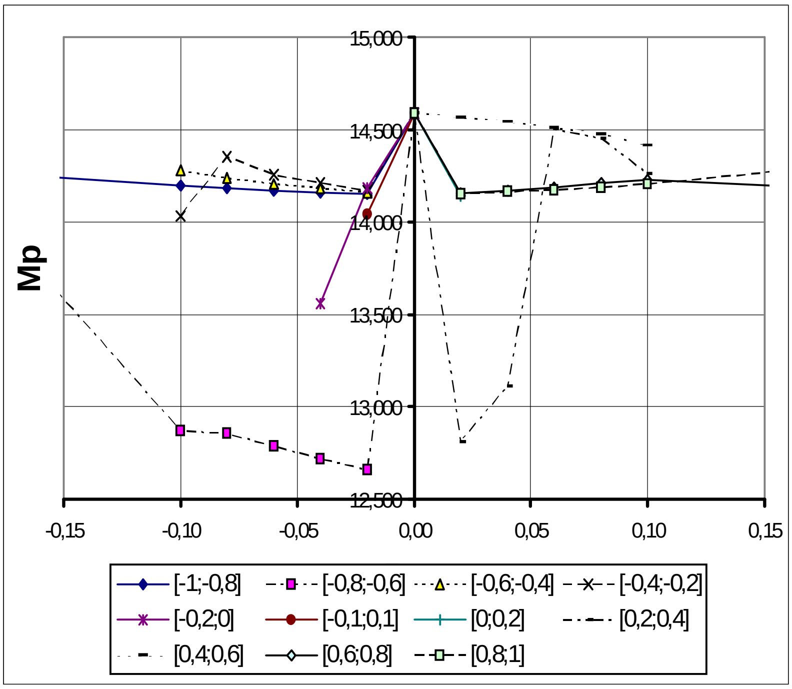

Рис. 1. Залежність доходності портфеля (M_p) від коефіцієнта множинної кореляції (R_{xyz}) для різних діапазонів існування значень коефіцієнтів взаємної кореляції (у квадратних дужках).

Як видно з графіка, найкращі рішення знаходяться, коли коефіцієнт множинної кореляції близький нуля. Це не суперечить класичним положенням теорії управління ризиками [9]. Новим є те, що для коєфіцієнтів кореляції, розташованих в діапазонах [-0.8; -0.6] та [0.2; 0.4] існує небезпека, при відхиленні коефіцієнта множинної кореляції від нуля більше, ніж на 0.1, отримати рішення, на 13% гірше, аніж тоді, коли $R_{YX_1X_2}$ дорівнює нулю.

Останній етап досліджень присвячений перевірці моделі (3). Було проведено близько 20 оптимальних розрахунків за цією моделлю, і в усіх випадках, розрахунок виходив на нульову середню ризикованість портфелю, а серед цінних паперів вибиралась тільки одна, та, у якої середня доходність була найбільшою. Такий результат не може вважатися задовільним, оскільки фактична ризикованість портфелю, що складається тільки з акцій одного типу, пропорційна середньому квадратичному відхиленню доходності цих акцій [1, 9].

Тому, за рекомендаціями [10], середня ризикованість портфелю була перетворена до вигляду

$$R_p = \sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}}\ , \tag{5}$$

де v_i – те саме, що і s_i.

Тоді "ризиково-доходна" модель (3) набула наступного вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_j x_i x_j n_{x_i x_j}}}{\sum_i x_i d_i} \to \min \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} , \tag{6}$$

За цією моделлю було проведено більше 40 оптимальних розрахунків, використовуючи випадкові значення доходностей, розподілених згідно рівномірного закону. На підставі отриманих результатів було побудовано графік на рис. 2. Залежність оптимальної доходності портфеля від модифікованого ризику має нелінійний характер. При зміні ризику від 0 до 0,5 спостерігається лінійний приріст доходності на 8%, від 0,5 до 1, – темп росту уповільнюється до 3%. Подальше зростання ризику не викликає помітних змін у доходності.

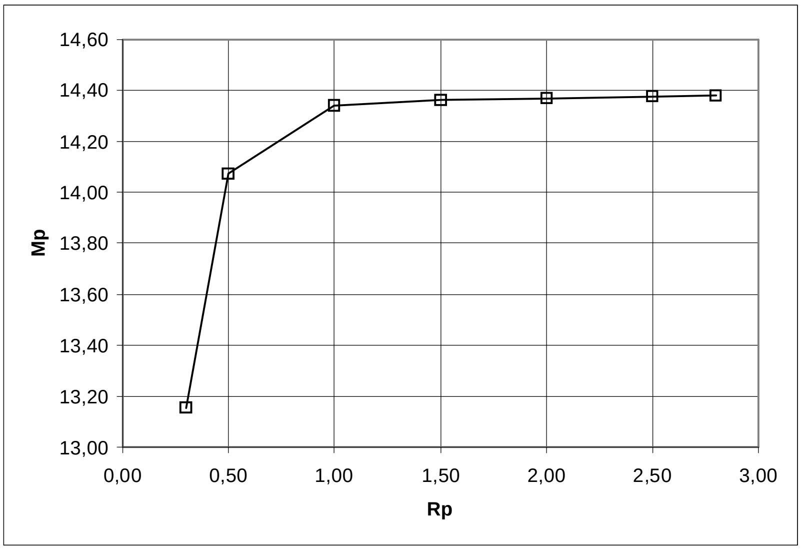

Рис. 2. Залежність доходності портфеля цінних паперів (M_p) від середньої ризикованості (R_p) для моделі (6)

На підставі проведених експериментів можна зробити наступні висновки щодо оптимальної моделі портфелю цінних паперів Марковіца:

1. Використання матриці кореляцій дає тотожні результати з використанням матриці коваріацій.
2. Найбільш ефективним є портфель, який складається зі слабокорельованих цінних паперів.
3. “Ризиково-доходна”.модель виду (6) може бути застосована для випадку, коли складно визначитися з допустимими рівнями ризику чи доходності за моделями виду (1) – (2).
4. Результати оптимальних розрахунків за моделлю (6) варто приймати для випадків, коли модифікований ризик не перевищує 1.

Список літератури

1. Фабоцци Ф. Управление инвестициями: пер. с англ. – М.: ИНФРА-М. – 2000. – 932 с.
2. Мицель А.А., Каштанова О.В. Об одном алгоритме формирования опт имального портфеля инвестиционных проектов. /Экономика и математические методы. – №4. – Т.37. – 2001. – С.103-108.
3. Виленский В.П. Об одном подходе к учету влияния неопределенности и риска на эффективность инвестиционных проектов./Экономика и математические методы. – №4. – Т.38. – 2002. – С.24-31.
4. Бекларян Л.А., Сотский С.В. Оптимизация уровня инвестируемого капитала в задаче согласования инвестиционного контракта. /Экономика и математические методы. – №4. – Т.36. – 2000. – С.67-82.
5. Єлейко Я.І., Музичук А.А. Моделювання фінансових стратегій у випадковому середовищі. / Фінанси України. – №2. – 2002. – С.49-53
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.:Наука, 1962. – 564 С.
7. Енциклопедія кібернетики. Головна редакція українських радянських енциклопедій. Т.1,2. - Київ, 1973. - 680 С.
8. Губарев В.М. Теория статистики. – М.: Аудит. – 1998. – 350 с
9. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. - М.: Финансы и статистика, 1999. - 168 с.
10. Каплин А., Портфельные риски в теории Марковица. **HTTP://WWW.GAAP.RU/BIBLIO/CORPFIN/STATISTICS/005.HTM**

Рекомендована до публікації д.е.н., проф..О.С.Галушко, 25.06.2003