



МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра механічної та біомедичної інженерії

С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ В СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум)

з розділу «Статика»

дисципліни «Теоретична механіка»

для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка»,

132 «Матеріалознавство»

Дніпро
НТУ «ДП»
2022

Онищенко С.В., Колосов Д.Л.

Розв'язання задач статички в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 208 с.

Автори

С.В. Онищенко, к.т.н., доц. каф. МБМІ

Д.Л. Колосов, д.т.н., доц., зав. каф. МБМІ

Затверджено на засіданні кафедри механічної та біомедичної інженерії №8 від 09 вересня 2022 р.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 131 «Прикладна механіка», технічні науки (протокол №3 від 19.10.2022 р.).

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 132 «Матеріалознавство», технічні науки (протокол №2 від 08.12.2022 р.).

Затверджено до видання редакційною радою (протокол №12 від 27.12.2022) за поданням методичних комісій спеціальностей 131 Прикладна механіка (протокол №3 від 19.10.2022), 132 Матеріалознавство (протокол №2 від 08.12.2022 р.).

Розглянуто основні теми практичних занять з розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» з чотирма прикладами виконання індивідуальних розрахункових завдань різної складності для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство».

Відповідальний за випуск заступник завідувача кафедри механічної та біомедичної інженерії С.В. Онищенко, к.т.н.

ЗМІСТ

ВСТУП	7
1 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ЗА ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ (ТМ-1)	8
1.1 ТМ-1, приклад 1. Двоопорна балка під дією довільної плоскої системи сил	9
1.1.1 ТМ-1, приклад 1. Визначення реакцій в'язей двоопорної балки аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	12
1.2 ТМ-1, приклад 2. Консольна рама під дією довільної плоскої системи сил	14
1.2.1 ТМ-1, приклад 2. Визначення реакцій в'язей консольної рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	18
1.3 ТМ-1, приклад 3. Двоопорна шарнірна рама під дією довільної плоскої системи сил	21
1.3.1 ТМ-1, приклад 3. Визначення реакцій в'язей двоопорної шарнірної рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	24
1.4 ТМ-1, приклад 4. Жорстко затиснена рама під дією довільної плоскої системи сил	25
1.4.1 ТМ-1, приклад 4. Визначення реакцій в'язей жорстко затисненої рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	29
1.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-1)	31
2 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР І ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ (ТМ-2)	47
2.1 ТМ-2, приклад 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої однопанельної прямокутної ферми	48

2.1.1 ТМ-2, приклад 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої однопанельної прямокутної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	54
2.2 ТМ-2, приклад 2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної прямокутної ферми	57
2.2.1 ТМ-2, приклад 2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної прямокутної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	66
2.3 ТМ-2, приклад 3. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої трипанельної трикутної ферми	70
2.3.1 ТМ-2, приклад 3. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої трипанельної трикутної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	81
2.4 ТМ-2, приклад 4. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної паралелограмподібної ферми	85
2.4.1 ТМ-2, приклад 4. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної паралелограмподібної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	95
2.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-2)	99
3 РІВНОВАГА СИЛ З УРАХУВАННЯМ ЗЧЕПЛЕННЯ (СИЛ ТЕРТЯ СПОКОЮ) (ТМ-3)	111
3.1 ТМ-3, приклад 1. Визначення реакцій опор у системі трьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та вертикальним важелем	112
3.1.1 ТМ-3, приклад 1. Визначення реакцій опор у системі трьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та важелем аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	117
3.2 ТМ-3, приклад 2. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним штоком	119

3.2.1 ТМ-3, приклад 2. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним штоком аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	124
3.3 ТМ-3, приклад 3. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним важелем	126
3.3.1 ТМ-3, приклад 3. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним важелем аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	131
3.4 ТМ-3, приклад 4. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та довільно орієнтованим штоком	133
3.4.1 ТМ-3, приклад 4. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та довільно орієнтованим штоком аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	138
3.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-3)	140
4 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ПРОСТОРОВІЙ ДОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ СИЛ (ТМ-4)	156
4.1 ТМ-4, приклад 1. Визначення реакцій опор просторової рами ...	157
4.1.1 ТМ-4, приклад 1. Визначення реакцій опор просторової рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	162
4.2 ТМ-4, приклад 2. Визначення реакцій опор просторового горизонтально орієнтованого вала	164
4.2.1 ТМ-4, приклад 2. Визначення реакцій опор просторового горизонтально орієнтованого вала аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	168

4.3 ТМ-4, приклад 3. Визначення реакцій опор просторової довільно орієнтованої плити	170
4.3.1 ТМ-4, приклад 3. Визначення реакцій опор просторової довільно орієнтованої плити аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	175
4.4 ТМ-4, приклад 4. Визначення реакцій опор просторового вертикально орієнтованого вала.....	177
4.4.1 ТМ-4, приклад 4. Визначення реакцій опор просторового вертикально орієнтованого вала аналітичним методом з використанням пакету Mathcad	181
4.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-4)	183
ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ	199
Рекомендована література	207

ВСТУП

Теоретична механіка є однією з базових інженерних дисциплін, з якої починається підготовка студентів багатьох спеціальностей.

Метою нормативної дисципліни «Теоретична механіка» є формування компетентностей щодо виконання інженерного аналізу технічних об'єктів в галузі прикладної механіки, матеріалознавства та машинобудування, моделювання елементів, об'єктів та технічних систем за допомогою абстракцій механіки, проведення розрахунків на рівновагу і взаємодію об'єктів та систем, та механічний рух об'єктів і систем.

Мета методичних рекомендацій – засвоєння теоретичних знань та практичних навичок щодо основних понять, принципів та підходів до статичних розрахунків елементів обладнання та систем з урахуванням їхньої надійності та економічності, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів при побудові фізико-математичної моделі роботи елементів або частин інженерних об'єктів, конструкцій і систем, постановки та розв'язання задач теоретичної механіки.

ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

1. Знати і розуміти засади теоретичної механіки, що лежать в основі прикладної механіки і матеріалознавства.

2. Знати і розуміти перспективи розвитку теоретичної, прикладної механіки і матеріалознавства.

3. Застосовувати методи теоретичної механіки для інженерних розрахунків технічних об'єктів в галузі прикладної механіки і матеріалознавства.

4. Аналізувати інженерні об'єкти, використовуючи методи теоретичної механіки.

5. Розробляти розрахункові схеми технічних об'єктів в галузі прикладної механіки і матеріалознавства, використовуючи моделі теоретичної механіки.

1 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ЗА ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ (ТМ-1)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Плоска довільна система сил – це така система, де усі силові фактори діють у одній площині. В рамках цієї теми розглянемо 2 типи конструкцій – плоска рама та балка. Балкою умовно вважаємо таку конструкцію, у якій один із розмірів значно перевищує два інших, тому балку можна розглядати як лінійну конструкцію. Плоска рама має дві розмірності – висоту та довжину. В задачах розглянемо три типи в'язей – шарнірно-нерухому, шарнірно-рухому опори та жорстке затиснення.

План теми 1

- 1.1 [ТМ-1, приклад 1. Двоопорна балка](#)
 - 1.1.1 [ТМ-1, приклад 1. Двоопорна балка у MathCAD](#)
- 1.2 [ТМ-1, приклад 2. Консольна рама](#)
 - 1.2.1 [ТМ-1, приклад 2. Консольна рама у MathCAD](#)
- 1.3 [ТМ-1, приклад 3. Двоопорна шарнірна рама](#)
 - 1.3.1 [ТМ-1, приклад 3. Двоопорна шарнірна рама у MathCAD](#)
- 1.4 [ТМ-1, приклад 4. Жорстко затиснена рама](#)
 - 1.4.1 [ТМ-1, приклад 4. Жорстко затиснена рама у MathCAD](#)
- 1.5 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-1\)](#)

1.1 ТМ-1, приклад 1. Двоопорна балка під дією довільної плоскої системи сил

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно тверду балку закріплено на двох опорах (рис. 1.1). Опора A є шарнірно-нерухомою, опора B – шарнірно-рухома. На балку діє зовнішня зосереджена сила P , спрямована під кутом α до горизонталі, розподілене навантаження постійної інтенсивності q та момент пари сил M . Визначити опорні реакції в'язей такої конструкції, якщо відомо, що $a = 5$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $P = 2$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $q = 1$ кН/м, $M = 5$ кН·м.

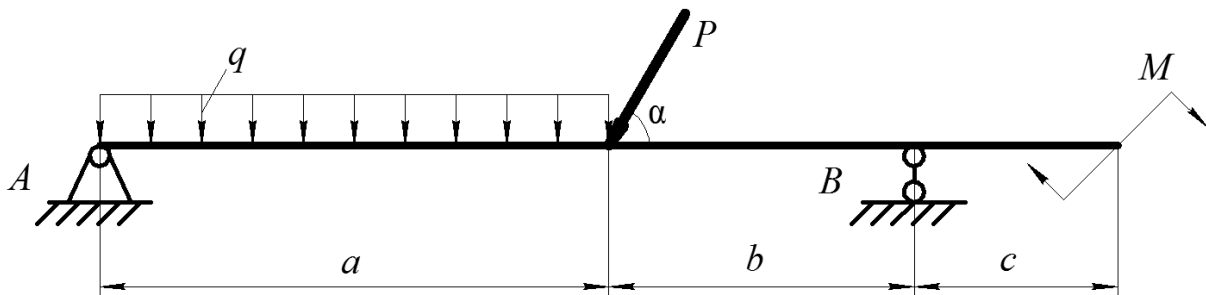


Рисунок 1.1 - Двоопорна балка (ТМ-1, приклад 1)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.2)
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;
 - зазначимо, що шарнірно-нерухома опора A має дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Ax} та R_{Ay} , які не дозволяють конструкції рухатись у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно, а шарнірно-рухома опора B має одну реакцію, спрямовану вздовж вісі рухомого шарніра B , що не дозволяє конструкції рухатись лише вертикально, проте разом опори A та B забезпечують рівновагу балки;
 - спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , R_B у довільних напрямках на схемі;

– замінимо розподілене навантаження q зосередженою силою Q , що є рівнодіючою цього розподіленого навантаження;

– визначимо силу Q за формулою площі тієї геометричної фігури, яку утворює розподілена сила q (в даному випадку – прямокутник)

$$Q = q \cdot a = 1 \cdot 5 = 5 \text{ кН};$$

– позначимо силу Q на схемі у центрі мас фігури, яку утворює q (в даному випадку у точці перетину діагоналей прямокутника), напрямком Q має співпадати з напрямком q ;

– розкладемо похилу силу P на схемі на її складові, які є проєкціями на вісі координат x та y (косинусна складова буде та, до якої прилягає кут α)

$$P_x = P \cdot \cos(\alpha); P_y = P \cdot \sin(\alpha).$$

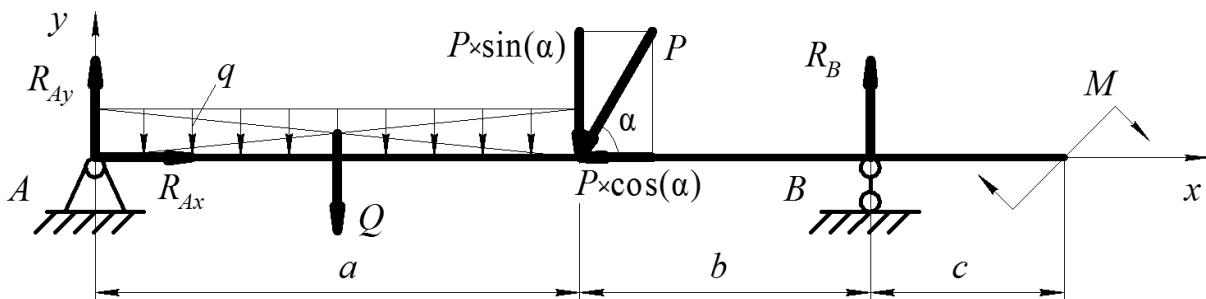


Рисунок 1.2 - Розрахункова схема (ТМ-1, приклад 1)

2. Складемо рівняння рівноваги. Перше та друге рівняння – суми проєкцій сил на вісі x та y . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Третє рівняння – це рівняння моментів сил відносно точки A на схемі. Точку A було обрано з тією метою, щоб спростити рівняння та розрахунки. Це можливо тому, що у точці A перетинаються дві невідомі реакції опори, які до того ж не створюють моменту відносно точки A . У цьому рівнянні зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої точки A проти годинникової стрілки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} - P \cdot \cos(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - Q - P \cdot \sin(\alpha) + R_B = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -Q \cdot \frac{a}{2} - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + R_B \cdot (a + b) - M = 0. \end{array} \right.$$

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = P \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ (кН)}; \\ R_B = \frac{Q \cdot \frac{a}{2} + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + M}{(a + b)} = \frac{5 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 0,866 \cdot 5 + 5}{(5 + 3)} = 3,27 \text{ (кН)}; \\ R_{Ay} = Q + P \cdot \sin(\alpha) - R_B = 5 + 2 \cdot 0,866 - 3,27 = 3,46 \text{ (кН)}. \end{array} \right.$$

Як бачимо із розрахунків, усі отримані реакції в'язей мають знак «+». Це означає, що істинні напрямки реакцій в'язей співпадають з напрямками, позначеними на розрахунковій схемі ([рис. 1.2](#)).

Результуючу реакцію R_A в опорі A визначаємо за теоремою Піфагора

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{1^2 + 3,46^2} = 3,6 \text{ (кН)}$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно будь-якої іншої точки на схемі (точки B). У цьому рівнянні зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої точки B проти годинникової стрілки.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(F_i) &= 0; -R_{Ay} \cdot (a + b) + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b - M = \\ &= -3,46 \cdot (5 + 3) + 5 \left(\frac{5}{2} + 3\right) + 2 \cdot 0,866 \cdot 3 - 5 = 0. \end{aligned}$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = 1$ кН, $R_{Ay} = 3,46$ кН, $R_B = 3,27$ кН.

1.1.1 ТМ-1, приклад 1. Визначення реакцій в'язей аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{llll}
 a := 5\text{m} & b := 3\text{m} & c := 2\text{m} & \alpha := 60\text{deg} \\
 P := 2\text{kN} & q := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & M := 5\text{kN}\cdot\text{m} &
 \end{array}$$

- визначення рівнодіючої сили Q

$$Q := q \cdot a = 5 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.2](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & R_{ax} - P \cdot \cos(\alpha) = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & R_{ay} - Q - P \cdot \sin(\alpha) + R_b = 0 \\
 \sum_i M_A(F_i) = 0 & R_b \cdot (a + b) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - M - Q \cdot \frac{a}{2} = 0
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$R_b := \frac{M + \frac{Q \cdot a}{2} + P \cdot a \cdot \sin(\alpha)}{a + b} = 3.27 \cdot \text{kN}$$

$$R_{ax} := P \cdot \cos(\alpha) = 1 \cdot \text{kN}$$

$$R_{ay} := Q - R_b + P \cdot \sin(\alpha) = 3.462 \cdot \text{kN}$$

$$R_a := \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = 3.604 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad -R_{ay} \cdot (a + b) + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + b \right) - M + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b = 1.819 \times 10^{-15} \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом з використанням функції **Given-Find** у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом.

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$a := 5\text{m} \quad b := 3\text{m} \quad c := 2\text{m} \quad \alpha := 60\text{deg}$$

$$P := 2\text{kN} \quad q := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M := 5\text{kN}\cdot\text{m}$$

- визначення рівнодіючої сили Q

$$Q := q \cdot a = 5 \cdot \text{kN}$$

- задання початкових наближень для невідомих

$$R_{ax} := 1 \text{ kN} \quad R_{ay} := 1 \text{ kN} \quad R_b := 1 \text{ kN}$$

Given

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.2](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{ax} - P \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{ay} - Q - P \cdot \sin(\alpha) + R_b = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad R_b \cdot (a + b) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - M - Q \cdot \frac{a}{2} = 0$$

- визначення невідомих за допомогою функції Find

$$\text{Find}(R_{ax}, R_{ay}, R_b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.462 \\ 3.27 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, результати розрахунків різними методами співпадають.

1.2 ТМ-1, приклад 2. Консольна рама під дією довільної плоскої системи сил

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно тверду раму (рис. 1.3) закріплено у точці A за допомогою жорсткого затиснення. Рама знаходиться під дією зовнішніх силових факторів – зосередженої сили P , спрямованої під кутом α до горизонталі, зосередженої сили F , спрямованої під кутом β до вертикалі, розподіленого навантаження змінної інтенсивності з максимальною інтенсивністю q_{max} та моменту пари сил M . Визначити опорні реакції в'язей такої конструкції, якщо відомо, що $a = 8$ м, $b = 4$ м, $c = 3$ м, $P = 3$ кН, $\alpha = 30^\circ$, $F = 4$ кН, $\beta = 75^\circ$, $q_{max} = 2$ кН/м, $M = 7$ кН·м.

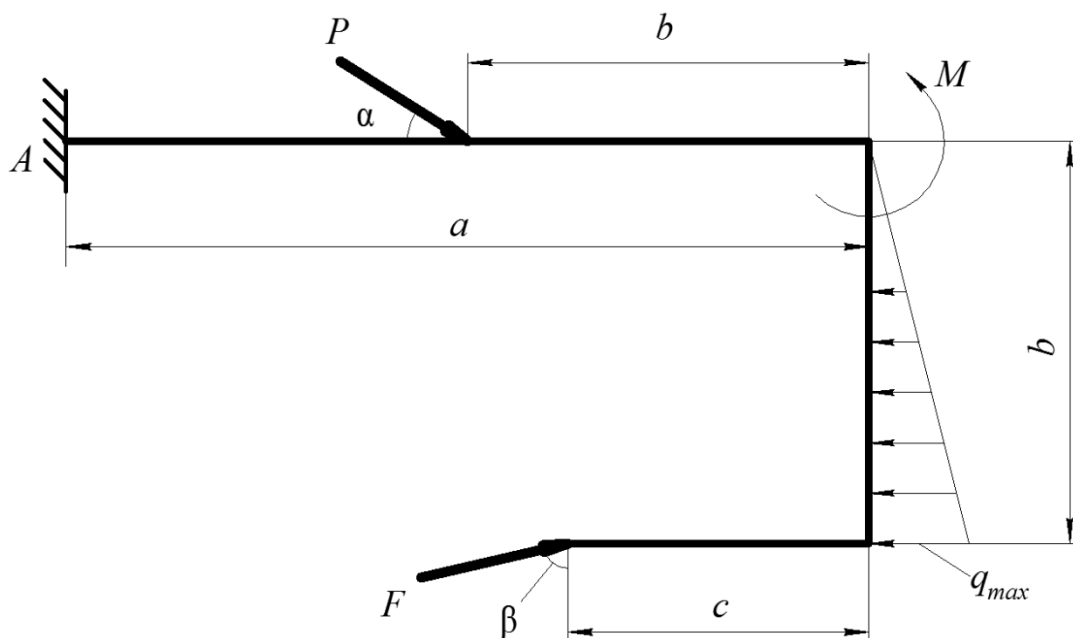


Рисунок 1.3 - Консольна жорстко затиснена рама (ТМ-1, приклад 2)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.4)
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , M_A відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;

– зазначимо, що жорстке затиснення A має дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Ax} та R_{Ay} , які не дозволяють конструкції рухатись у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно, а також опорний (реактивний) момент M_A , який не дозволяє конструкції обертатись навколо точки A , і загалом, одного жорсткого затиснення достатньо, щоб забезпечити рівновагу конструкції у плоскій задачі;

– спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , M_A у довільних напрямках на схемі;

– замінимо розподілене навантаження q_{max} зосередженою силою Q , що є рівнодіючою цього розподіленого навантаження;

– визначимо силу Q за формулою площі тієї геометричної фігури, яку утворює q_{max} (в даному випадку – прямокутний трикутник)

$$Q = \frac{1}{2} \cdot q_{max} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ кН};$$

– позначимо силу Q на схемі у центрі мас фігури, яку утворює q_{max} (в даному випадку у точці перетину медіан прямокутного трикутника), напрямок Q має співпадати з напрямком q_{max} , відстань від q_{max} до Q дорівнює $1/3$ від довжини, на якій розподілене навантаження;

– розкладемо похилі сили P та F на схемі на їхні складові, що є проекціями на вісі координат x та y (косинусна складова буде та, до якої прилягає кут α чи β)

$$P_x = P \cdot \cos(\alpha); P_y = P \cdot \sin(\alpha); F_x = F \cdot \sin(\beta); F_y = F \cdot \cos(\beta).$$

2. Складемо рівняння рівноваги. Перше та друге рівняння – суми проекцій сил на вісі x та y . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Третє рівняння – це рівняння моментів сил відносно точки A на схемі. Точку A було обрано з тією метою, щоб спростити рівняння та розрахунки. Це можливо тому, що у точці A перетинаються дві невідомі реакції опори, які до того ж не створюють моменту відносно точки A . Правило знаків у цьому рівнянні наступне – зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої точки A проти годинникової стрілки.

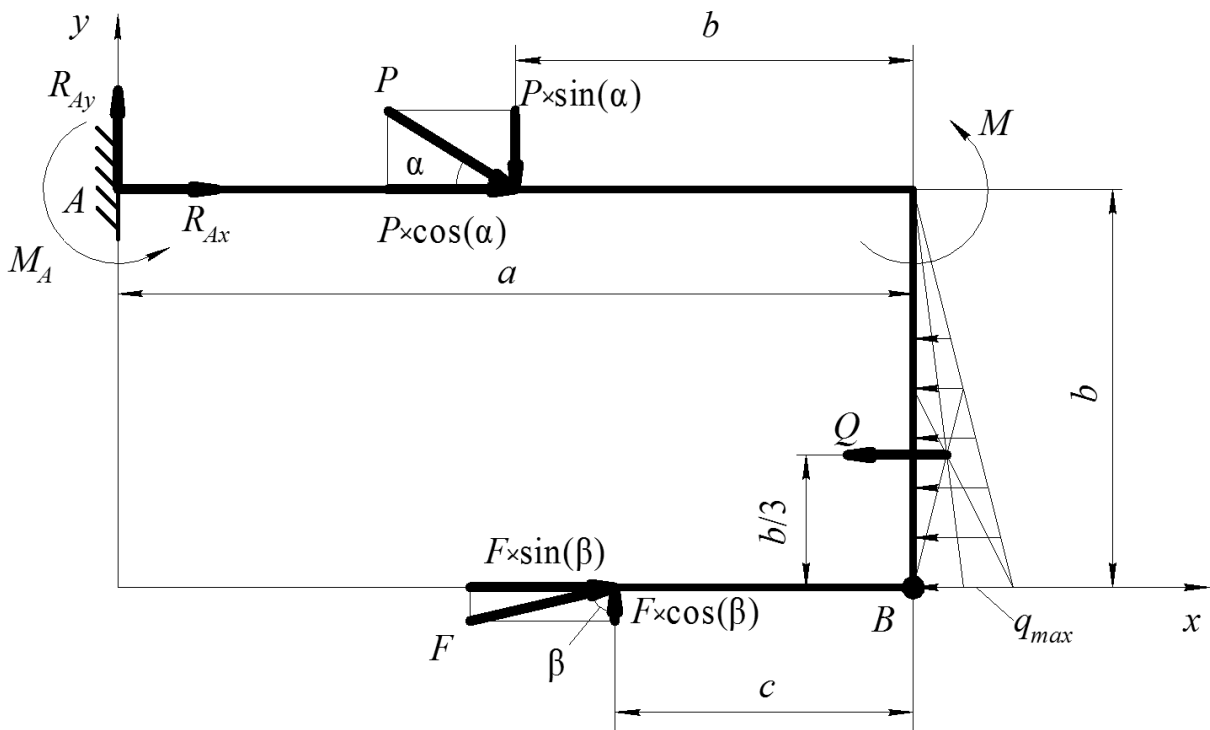


Рисунок 1.4 - Розрахункова схема (ТМ-1, приклад 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - Q = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; M + M_A - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3}\right) + \\ + F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) + F \cdot \sin(\beta) \cdot b = 0. \end{array} \right.$$

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = Q - P \cdot \cos(\alpha) - F \cdot \sin(\beta) = 4 - 3 \cdot 0,866 - 4 \cdot 0,966 = -2,462 \text{ (кН)}; \\ R_{Ay} = P \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) = 3 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,259 = 0,465 \text{ (кН)}; \\ M_A = -M + P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) + Q \cdot \left(b - \frac{b}{3}\right) - F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) - \\ - F \cdot \sin(\beta) \cdot b = -7 + 3 \cdot 0,5 \cdot (8 - 4) + 4 \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) - 4 \cdot 0,259 \cdot (8 - 3) - \\ - 4 \cdot 0,966 \cdot 4 = -10,965 \text{ (кН)}. \end{array} \right.$$

З розрахунків бачимо, що реакції в'язей R_{Ax} та M_A мають знак «-». Це означає, що істинні напрямки цих реакцій в'язей не співпадають з напрямками, позначеними на розрахунковій схемі (рис. 1.4).

Результуючу реакцію R_A в опорі A визначаємо за теоремою Піфагора

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-2,462)^2 + 0,465^2} = 2,505 \text{ (кН)}$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно будь-якої іншої точки на схемі (точки B). Позначимо точку B на розрахунковій схемі ([рис. 1.4](#)). У цьому перевірочному рівнянні зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої точки B проти годинникової стрілки. Підставляємо у це рівняння значення реакцій в'язей із такими знаками «+» або «-», які отримали у ході розрахунків.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(F_i) &= 0; M + M_A - R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot b + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b - \\ &\quad - P \cdot \cos(\alpha) \cdot b + Q \cdot \frac{b}{3} - F \cdot \cos(\beta) \cdot c = \\ &= 7 + (-10,965) - 0,465 \cdot 8 - (-2,462) \cdot 4 + 3 \cdot 0,5 \cdot 4 - \\ &\quad - 3 \cdot 0,866 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{4}{3} - 4 \cdot 0,259 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -2,462$ кН, $R_{Ay} = 0,465$ кН, $M_A = -10,965$ кН·м.

1.2.1 ТМ-1, приклад 2. Визначення реакцій в'язей консольної рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lllll}
 a := 8\text{m} & b := 4\text{m} & c := 3\text{m} & \alpha := 30\text{deg} & \beta := 75\text{deg} \\
 P := 3\text{kN} & F := 4\text{kN} & q_{\max} := 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & M := 7\text{kN}\cdot\text{m} &
 \end{array}$$

- визначення рівнодіючої сили Q

$$Q := \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot b = 4 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.4](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{Ax} + P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - Q = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad M + M_A \cdot m - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3} \right) + F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) + F \cdot \sin(\beta) \cdot b = 0$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$R_{Ax} := Q - F \cdot \sin(\beta) - P \cdot \cos(\alpha) = -2.462 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := P \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) = 0.465 \cdot \text{kN}$$

$$M_A := \frac{2 \cdot Q \cdot b}{3} - M - F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) - F \cdot b \cdot \sin(\beta) = -10.965 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$R_a := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 2.505 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad M + M_A - R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot b + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b - P \cdot \cos(\alpha) \cdot b + Q \cdot \frac{b}{3} - F \cdot \cos(\beta) \cdot c = 0 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом з використанням функцій **Given-Find** та **root** у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом.

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{aligned} a &:= 8\text{m} & b &:= 4\text{m} & c &:= 3\text{m} & \alpha &:= 30\text{deg} & \beta &:= 75\text{deg} \\ P &:= 3\text{kN} & F &:= 4\text{kN} & q_{\max} &:= 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & M &:= 7\text{kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

- визначення рівнодіючої сили Q

$$Q := \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot b = 4 \cdot \text{kN}$$

- задання початкових наближень для невідомих (розмірності мають бути однаковими)

$$R_{ax} := 1 \text{ kN} \quad R_{ay} := 1 \text{ kN} \quad M_A := 1 \text{ kN}$$

Given

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.4](#) (у третьому рівнянні M_A має бути штучно домножено на метри)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{ax} + P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - Q = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{ay} - P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad M + M_A \cdot \text{m} - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3} \right) + F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) + F \cdot \sin(\beta) \cdot b = 0$$

- визначення невідомих за допомогою функції Find

$$\text{Find}(R_{ax}, R_{ay}, M_A) = \begin{pmatrix} -2.462 \\ 0.465 \\ -10.965 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, функція **Find** дозволяє визначати невідомі лише з однаковими розмірностями. Також, виникає необхідність підлаштовувати рівняння рівноваги під особливості роботи функції **Find**, домножуючи M_A на метри.

Розглянемо можливість визначення невідомих за допомогою функції **root**. Для визначення невідомих за допомогою цієї функції необхідно задати рівняння рівноваги як функцію, в якій невідома є аргументом. У записі функції **root** в дужках мають бути представлені через кому – функція, її аргумент і діапазон пошуку кореня функції.

$$K(M_A) := M + M_A - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a - b) - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3} \right) + F \cdot \cos(\beta) \cdot (a - c) + F \cdot \sin(\beta) \cdot$$

$$\text{root}(K(M_A), M_A, -20\text{kN}\cdot\text{m}, -1\text{kN}\cdot\text{m}) = -10.965 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

Як бачимо, результати розрахунків різними методами співпадають.

1.3 ТМ-1, приклад 3. Двоопорна шарнірна рама під дією довільної плоскої системи сил

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно тверду плоску раму закріплено на двох опорах (рис. 1.5). Опора A є шарнірно-нерухомою, опора B – шарнірно-рухома. На раму діє зовнішня зосереджена сила P , спрямована під кутом α до горизонталі, розподілене навантаження змінної інтенсивності з максимальною інтенсивністю q_{max} та момент пари сил M . Визначити опорні реакції в'язей такої конструкції, якщо відомо, що $a = 1,5$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $P = 10$ кН, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $q_{max} = 4$ кН/м, $M = 8$ кН·м.

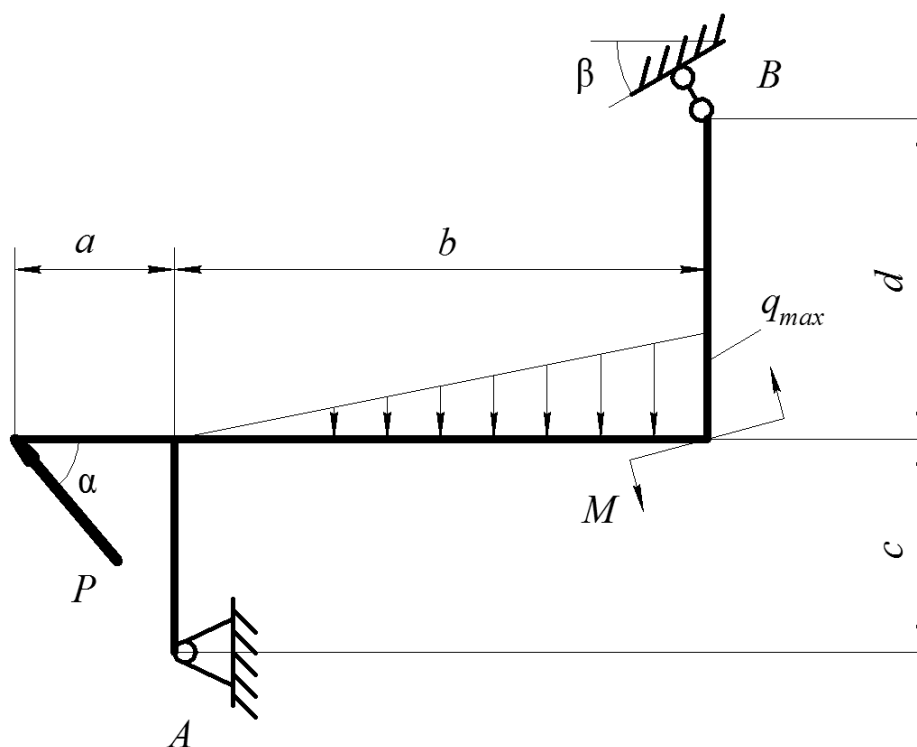


Рисунок 1.5 - Двоопорна шарнірна рама (ТМ-1, приклад 3)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.6)
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;

– спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , R_B у довільних напрямках на схемі, зазначимо, що у рухомому шарнірі B реакцію спрямовано вздовж вісі шарніра (після геометричних міркувань отримаємо кут β між вертикаллю та реакцією R_B);

– замінимо розподілене навантаження q_{max} зосередженою силою Q , що є рівнодіючою цього розподіленого навантаження;

– визначимо силу Q за формулою площі тієї геометричної фігури, яку утворює q_{max} (в даному випадку – прямокутний трикутник)

$$Q = \frac{1}{2} \cdot q_{max} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10 \text{ кН};$$

– позначимо силу Q на схемі у центрі мас фігури, яку утворює q_{max} (в даному випадку у точці перетину медіан прямокутного трикутника), напрямок Q має співпадати з напрямком q_{max} , відстань від q_{max} до Q дорівнює $1/3$ від довжини, на якій розподілене навантаження;

– розкладемо похилу силу P на схемі на її складові

$$P_x = P \cdot \cos(\alpha); \quad P_y = P \cdot \sin(\alpha).$$

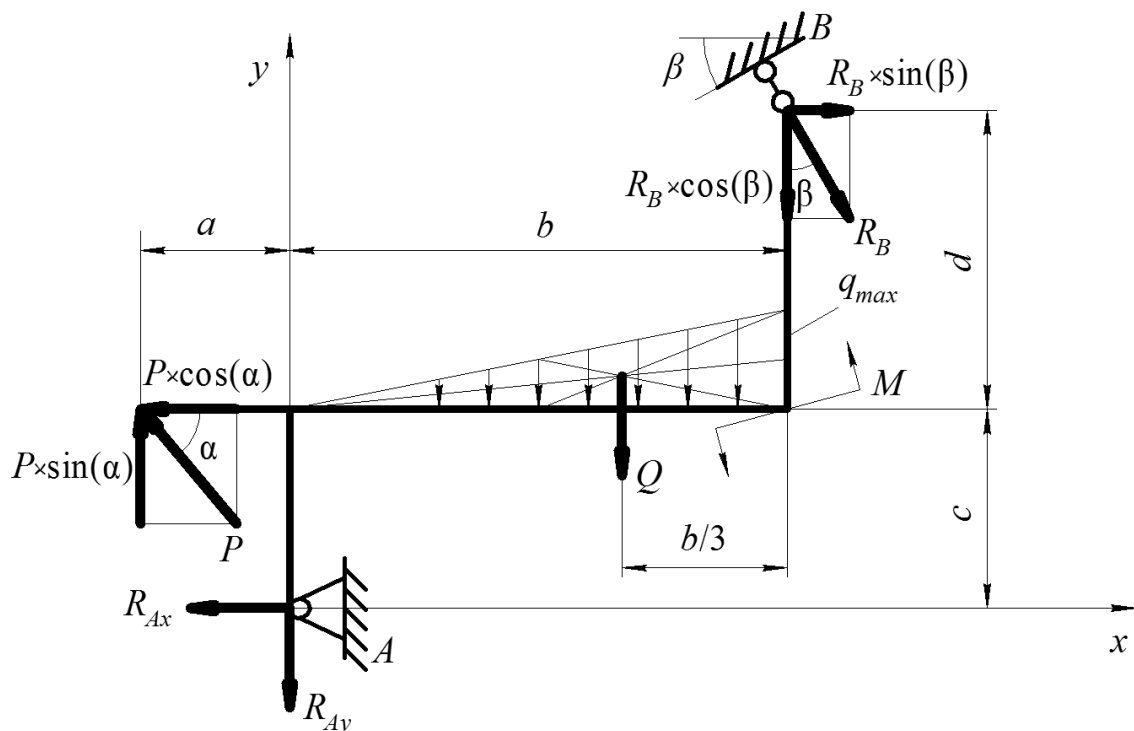


Рисунок 1.6 - Розрахункова схема (ТМ-1, приклад 3)

2. Складемо рівняння рівноваги.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -R_{Ax} - P \cdot \cos(\alpha) + R_B \cdot \sin(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} - Q + P \cdot \sin(\alpha) - R_B \cdot \cos(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot c - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3}\right) + M - \\ -R_B \cdot \cos(\beta) \cdot b - R_B \cdot \sin(\beta) \cdot (c + d) = 0. \end{array} \right.$$

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_B = \frac{M - \frac{2}{3} \cdot Q \cdot b - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot c}{\sin(\beta) \cdot (c + d) + \cos(\beta) \cdot b} = -3,5 \text{ кН}; \\ R_{Ax} = R_B \cdot \sin(\beta) - P \cdot \cos(\alpha) = -8,182 \text{ кН}; \\ R_{Ay} = P \cdot \sin(\alpha) - Q - R_B \cdot \cos(\beta) = 0,699 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

Визначаємо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-8,182)^2 + 0,699^2} = 8,212 \text{ (кН)}.$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; & M + R_{Ay} \cdot b - R_{Ax} \cdot (c + d) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b) - \\ & -P \cdot \cos(\alpha) \cdot d + Q \cdot \frac{b}{3} = 0; \\ 8 + 0,699 \cdot 5 - (-8,182) \cdot (2 + 3) - 10 \cdot 0,766 \cdot (1,5 + 5) - \\ & -10 \cdot 0,643 \cdot 3 + 10 \cdot \frac{5}{3} = 0. \end{aligned}$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -8,182$ кН, $R_{Ay} = 0,699$ кН, $M_A = -3,5$ кН · м.

1.3.1 ТМ-1, приклад 3. Визначення реакцій в'язей двоопорної шарнірної рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{llll}
 a := 1.5\text{m} & b := 5\text{m} & c := 2\text{m} & d := 3\text{m} \\
 P := 10\text{kN} & \alpha := 50\text{deg} & \beta := 30\text{deg} & q_{\max} := 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & M := 8\text{kN}\cdot\text{m}
 \end{array}$$

- визначення рівнодіючої сили Q

$$Q := \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b = 10\text{kN}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.6](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -R_{ax} - P \cdot \cos(\alpha) + R_b \cdot \sin(\beta) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -R_{ay} - Q + P \cdot \sin(\alpha) - R_b \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad -P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot c - Q \cdot \left(b - \frac{b}{3} \right) + M - R_b \cdot \cos(\beta) \cdot b - R_b \cdot \sin(\beta) \cdot (c + d) = 0$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$R_b := \frac{M - \frac{2 \cdot Q \cdot b}{3} - P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + P \cdot c \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \cdot (c + d) + b \cdot \cos(\beta)} = -3.509\text{kN}$$

$$R_{ax} := R_b \cdot \sin(\beta) - P \cdot \cos(\alpha) = -8.182\text{kN}$$

$$R_{ay} := P \cdot \sin(\alpha) - Q - R_b \cdot \cos(\beta) = 0.699\text{kN}$$

$$R_a := \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = 8.212\text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad M + R_{ay} \cdot b - R_{ax} \cdot (c + d) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b) - P \cdot \cos(\alpha) \cdot d + Q \cdot \frac{b}{3} = 1.819 \times 10^{-14} \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

1.4 ТМ-1, приклад 4. Жорстко затиснена рама під дією довільної плоскої системи сил

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно тверду плоску раму закріплено у фундаменті за допомогою жорсткого затиснення A (рис. 1.7). Рама знаходиться під дією зовнішніх навантажень – зосереджених сил P , F , Q , спрямованих під кутами α , β , γ , відповідно, розподіленого навантаження постійної інтенсивності t , розподіленого навантаження змінної інтенсивності з максимальною інтенсивністю q_{max} . Визначити опорні реакції в'язей такої конструкції, якщо відомо, що $a = 6$ м, $b = 2,5$ м, $c = 1$ м, $P = 2$ кН, $\alpha = 70^\circ$, $F = 3$ кН, $\beta = 40^\circ$, $G = 4$ кН, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 25^\circ$, $t = 5$ кН/м, $q_{max} = 6$ кН/м.

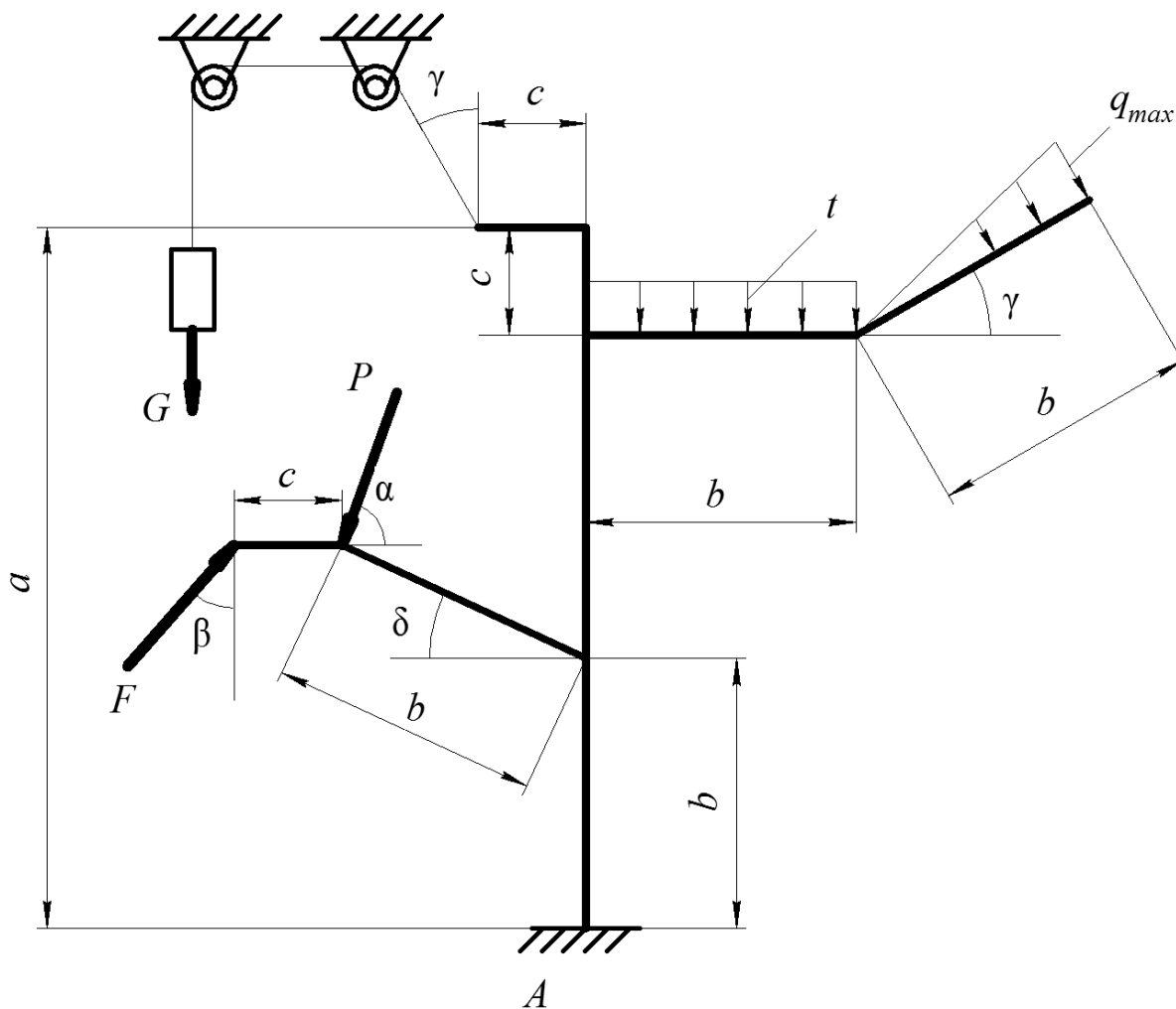


Рисунок 1.7 - Жорстко затиснена у фундаменті рама (ТМ-1, приклад 4)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему ([рис. 1.8](#))

– позначимо вісі координат x та y ;

– відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , M_A відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;

– спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , M_A у довільних напрямках на схемі;

– замінимо розподілені навантаження t та q_{max} зосередженими силами T та Q , що є рівнодіючими цих розподілених навантажень;

– визначимо сили T та Q

$$T = t \cdot b = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ кН}; \quad Q = \frac{1}{2} \cdot q_{max} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ кН};$$

– позначимо сили T та Q на схемі у центрах мас відповідних фігур;

– позначимо на схемі відстань $b/3$ від сили Q до q_{max} та її проекції на вісі координат;

– розкладемо похилі сили P та F на схемі на їхні складові;

$$P_x = P \cdot \cos(\alpha); \quad P_y = P \cdot \sin(\alpha); \quad F_x = F \cdot \sin(\beta); \quad F_y = F \cdot \cos(\beta).$$

– перенесемо силу G вздовж нитки до точки кріплення на рамі, розкладемо силу G на складові

$$G_x = G \cdot \sin(\gamma); \quad G_y = G \cdot \cos(\gamma).$$

2. Складемо рівняння рівноваги.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -R_{Ax} - P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - G \cdot \sin(\gamma) + \\ + Q \cdot \sin(\gamma) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) + G \cdot \cos(\gamma) - T - \\ - Q \cdot \cos(\gamma) = 0;$$

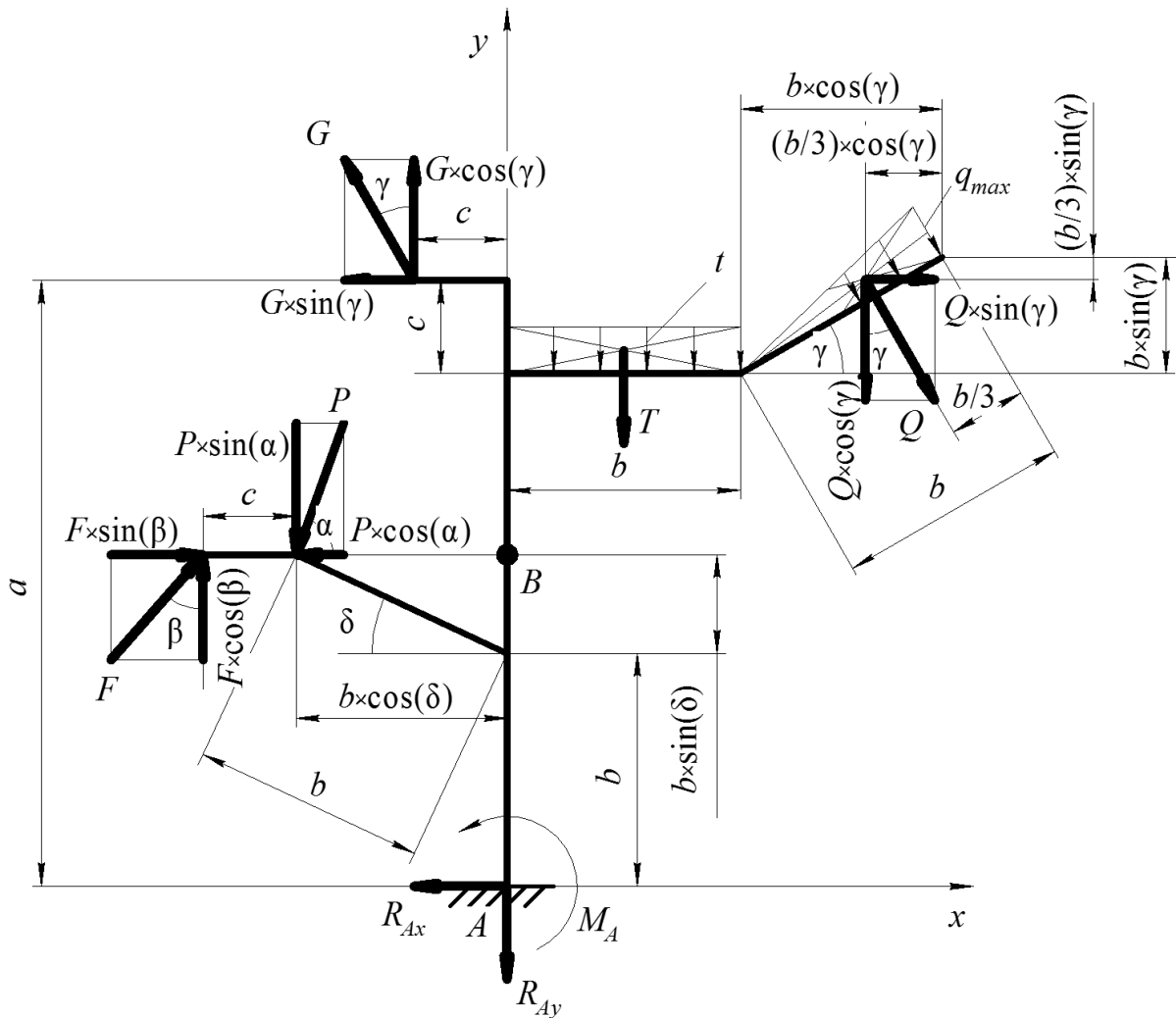


Рисунок 1.8 - Розрахункова схема (ТМ-1, приклад 4)

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; M_A - F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) -$$

$$- F \cdot \sin(\beta) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b \cdot \cos(\delta) +$$

$$+ P \cdot \cos(\alpha) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + G \cdot \sin(\gamma) \cdot a - G \cdot \cos(\gamma) \cdot c -$$

$$- T \cdot \frac{b}{2} - Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2}{3} b \cos(\gamma) \right) -$$

$$- Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(a - c + \frac{2}{3} b \sin(\gamma) \right) = 0.$$

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = -P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - G \cdot \sin(\gamma) + Q \cdot \sin(\gamma) = 2,994 \text{ кН}; \\ R_{Ay} = -P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) + G \cdot \cos(\gamma) - T - Q \cdot \cos(\gamma) = \\ \quad = -15,112 \text{ кН}; \\ M_A = F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) + F \cdot \sin(\beta) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) - \\ \quad - P \cdot \sin(\alpha) \cdot b \cdot \cos(\delta) - P \cdot \cos(\alpha) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) - \\ \quad - G \cdot \sin(\gamma) \cdot a + G \cdot \cos(\gamma) \cdot c + T \cdot \frac{b}{2} + \\ \quad + Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2}{3} b \cos(\gamma)\right) + Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(a - c + \frac{2}{3} b \sin(\gamma)\right) = \\ \quad = 62,249 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

Визначаємо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2,994^2 + (-15,112)^2} = 15,406 \text{ (кН)}.$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(F_i) &= 0; M_A - R_{Ax} \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b \cdot \cos(\delta) - \\ &- F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) + G \cdot \sin(\gamma) \cdot (a - (b + b \cdot \sin(\delta))) - \\ &- G \cdot \cos(\gamma) \cdot c - T \cdot \frac{b}{2} + Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot b \cos(\gamma)\right) - \\ &- Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left[\left(a - c + \frac{2}{3} \cdot b \sin(\gamma)\right) - (b + b \cdot \sin(\delta))\right] = 0; \\ &62,249 - 2,994 \cdot (2,5 + 2,5 \cdot 0,423) + 2 \cdot 0,94 \cdot 2,5 \cdot 0,906 - \\ &- 3 \cdot 0,766 \cdot (1 + 2,5 \cdot 0,906) + 4 \cdot 0,5 \cdot (6 - (2,5 + 2,5 \cdot 0,423)) - \\ &- 4 \cdot 0,866 \cdot 1 - 12,5 \cdot \frac{2,5}{2} + 7,5 \cdot 0,866 \cdot \left(2,5 + \frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot 0,866\right) - \\ &- 7,5 \cdot 0,5 \cdot \left[\left(6 - 1 + \frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot 0,5\right) - (2,5 + 2,5 \cdot 0,423)\right] = 0. \end{aligned}$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = 2,994 \text{ кН}$, $R_{Ay} = -15,112 \text{ кН}$, $M_A = 62,249 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

1.4.1 ТМ-1, приклад 4. Визначення реакцій в'язей жорстко затисненої рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій в'язей аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{llll}
 a := 6\text{m} & b := 2.5\text{m} & c := 1\text{m} & \\
 \alpha := 70\text{deg} & \beta := 40\text{deg} & \gamma := 30\text{deg} & \delta := 25\text{deg} \\
 P := 2\text{kN} & F := 3\text{kN} & G := 4\text{kN} & t := 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_{\max} := 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}
 \end{array}$$

- визначення рівнодіючих сил T та Q

$$T := t \cdot b = 12.5 \cdot \text{kN} \qquad Q := \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot b = 7.5 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 1.8](#)

$$\begin{aligned}
 \sum_i F_{ix} = 0 & \quad -R_{Ax} - P \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) - G \cdot \sin(\gamma) + Q \cdot \sin(\gamma) = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & \quad -R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) + F \cdot \cos(\beta) + G \cdot \cos(\gamma) - T - Q \cdot \cos(\gamma) = 0 \\
 \sum_i M_A(F_i) = 0 & \quad M_A - F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) - F \cdot \sin(\beta) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + \\
 & \quad + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b \cdot \cos(\delta) + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + G \cdot \sin(\gamma) \cdot a - G \cdot \cos(\gamma) \cdot c - \\
 & \quad - T \cdot \frac{b}{2} - Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \cos(\gamma) \right) - Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(a - c + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sin(\gamma) \right) = 0
 \end{aligned}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$R_{Ax} := Q \cdot \sin(\gamma) - G \cdot \sin(\gamma) + F \cdot \sin(\beta) - P \cdot \cos(\alpha) = 2.994 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := G \cdot \cos(\gamma) - T - Q \cdot \cos(\gamma) + F \cdot \cos(\beta) - P \cdot \sin(\alpha) = -15.112 \cdot \text{kN}$$

$$M_A := \frac{T \cdot b}{2} + Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(a - c + \frac{2 \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{3} \right) + Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2 \cdot b \cdot \cos(\gamma)}{3} \right) +$$

$$+ F \cdot \sin(\beta) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) - P \cdot \cos(\alpha) \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) -$$

$$- G \cdot a \cdot \sin(\gamma) + G \cdot c \cdot \cos(\gamma) - P \cdot b \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha) = 62.249 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$R_a := \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = 15.406 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad M_A - R_{ax} \cdot (b + b \cdot \sin(\delta)) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b \cdot \cos(\delta) - F \cdot \cos(\beta) \cdot (c + b \cdot \cos(\delta)) +$$

$$+ G \cdot \sin(\gamma) \cdot [a - (b + b \cdot \sin(\delta))] - G \cdot \cos(\gamma) \cdot c - T \cdot \frac{b}{2} - Q \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \cos(\gamma) \right) -$$

$$- Q \cdot \sin(\gamma) \cdot \left[\left(a - c + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sin(\gamma) \right) - (b + b \cdot \sin(\delta)) \right] = 3.638 \times 10^{-15} \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

1.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-1)

↑ДО ТМ-1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Умова задачі

Для заданої рами та балки визначити реакції в'язей.

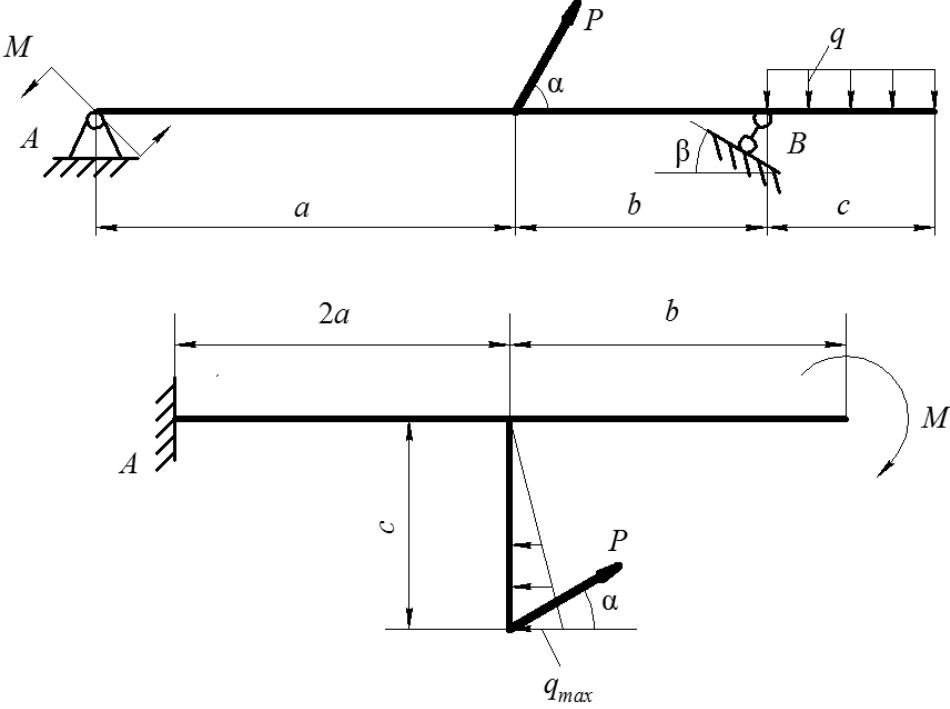
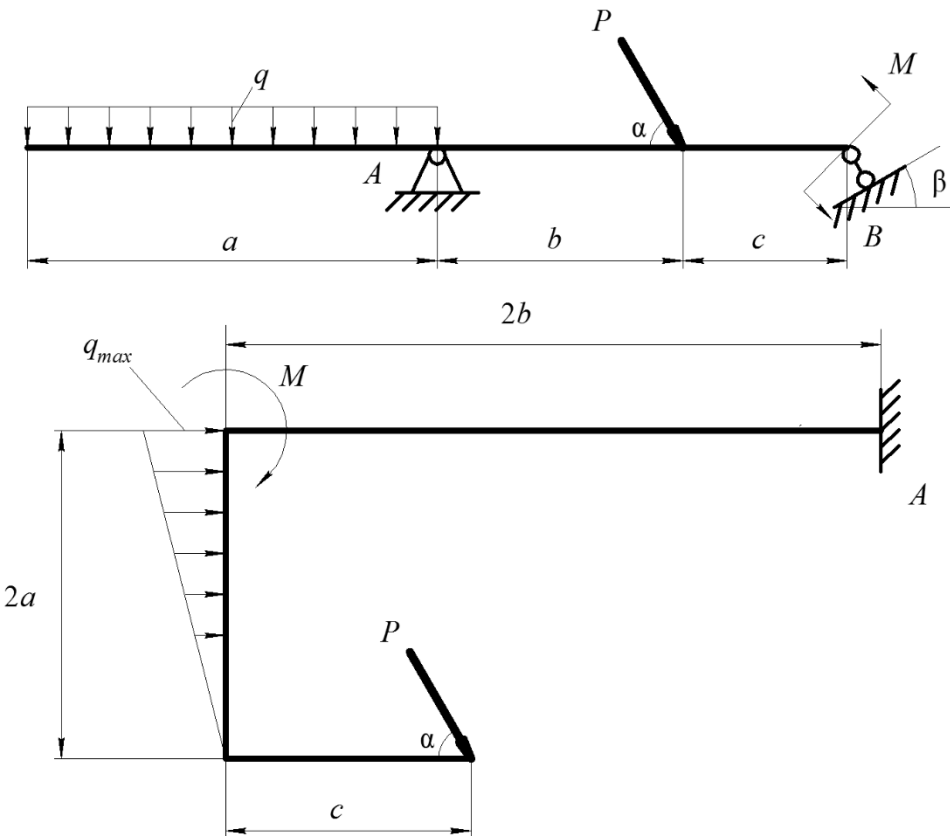
Таблиця 1.1 Вихідні дані для розрахунків і схеми до індивідуальних завдань

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
1	$a = 1 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 2 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 10 \text{ кН}$ $q = 2 \text{ кН/м}$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
2	$a = 2 \text{ м}$ $b = 4 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 20^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 12 \text{ кН}$ $q = 3 \text{ кН/м}$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
3	$a = 3 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 14 \text{ кН}$ $q = 4 \text{ кН/м}$ $M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
4	$a = 4 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 16 \text{ кН}$ $q = 5 \text{ кН/м}$ $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
5	$a = 5 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 18 \text{ кН}$ $q = 6 \text{ кН/м}$ $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
6	$a = 4 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 1 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 20 \text{ кН}$ $q = 7 \text{ кН/м}$ $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
7	$a = 3 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 22 \text{ кН}$ $q = 8 \text{ кН/м}$ $M = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
8	$a = 2 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 7^\circ$ $P = 24 \text{ кН}$ $q = 9 \text{ кН/м}$ $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
9	$a = 1 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $\beta = 45^\circ$ $P = 26 \text{ кН}$ $q = 10 \text{ кН/м}$ $M = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
10	$a = 2 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 28 \text{ кН}$ $q = 12 \text{ кН/м}$ $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
11	$a = 3 \text{ м}$ $b = 4 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 30 \text{ кН}$ $q = 14 \text{ кН/м}$ $M = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
12	$a = 1 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 32 \text{ кН}$ $q = 16 \text{ кН/м}$ $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
13	$a = 1 \text{ м}$ $b = 4 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 45^\circ$ $P = 34 \text{ кН}$ $q = 18 \text{ кН/м}$ $M = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
14	$a = 2 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 36 \text{ кН}$ $q = 20 \text{ кН/м}$ $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
15	$a = 2 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 38 \text{ кН}$ $q = 18 \text{ кН/м}$ $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
16	$a = 2 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 45^\circ$ $P = 40 \text{ кН}$ $q = 16 \text{ кН/м}$ $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
17	$a = 1 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 42 \text{ кН}$ $q = 14 \text{ кН/м}$ $M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

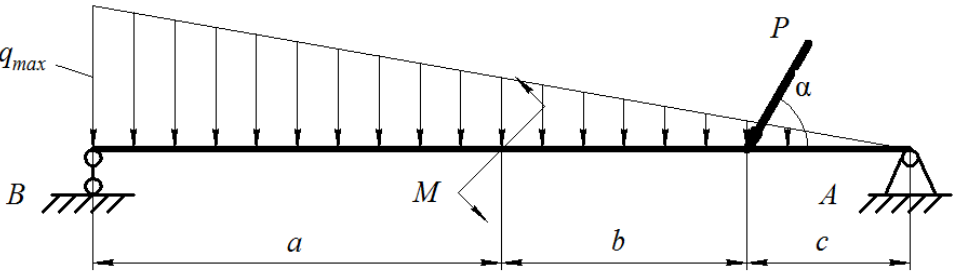
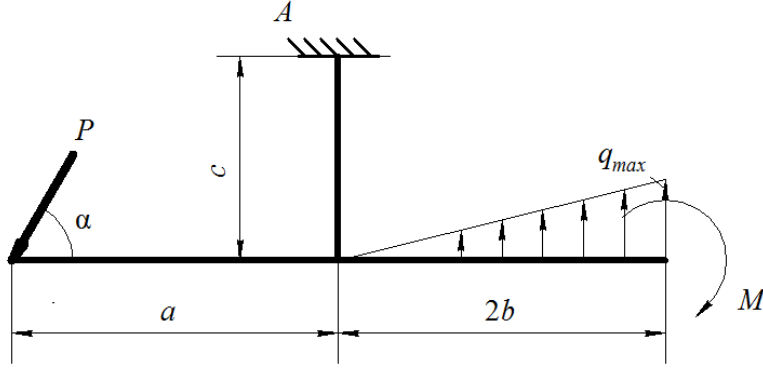
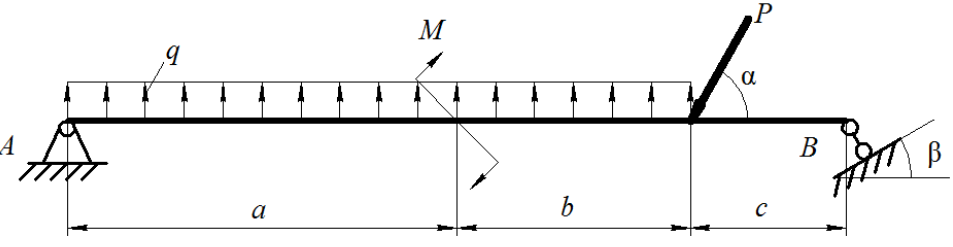
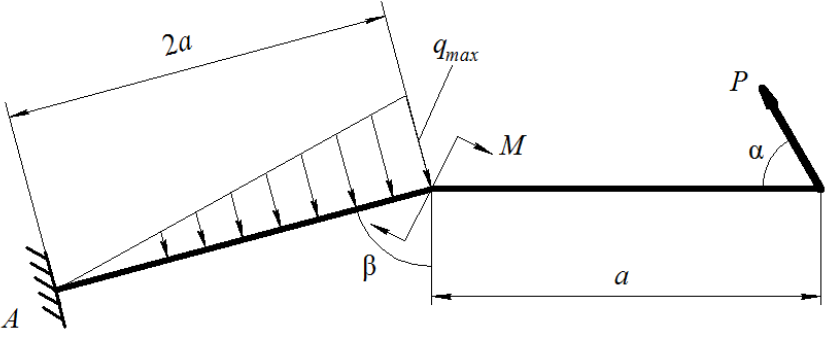
Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
18	$a = 1 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 44 \text{ кН}$ $q = 12 \text{ кН/м}$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
19	$a = 1 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 46 \text{ кН}$ $q = 10 \text{ кН/м}$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
20	$a = 3 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 2 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 48 \text{ кН}$ $q = 9 \text{ кН/м}$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
21	$a = 3 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 45^\circ$ $P = 50 \text{ кН}$ $q = 8 \text{ кН/м}$ $M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
22	$a = 3 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 1 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 52 \text{ кН}$ $q = 7 \text{ кН/м}$ $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
23	$a = 3 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 2 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 54 \text{ кН}$ $q = 6 \text{ кН/м}$ $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
24	$a = 3 \text{ м}$ $b = 5 \text{ м}$ $c = 4 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 56 \text{ кН}$ $q = 5 \text{ кН/м}$ $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
25	$a = 4 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 2 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 58 \text{ кН}$ $q = 4 \text{ кН/м}$ $M = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
26	$a = 4 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 60 \text{ кН}$ $q = 3 \text{ кН/м}$ $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$	
27	$a = 4 \text{ м}$ $b = 1 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 60^\circ$ $P = 62 \text{ кН}$ $q = 2 \text{ кН/м}$ $M = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
28	$a = 4 \text{ м}$ $b = 2 \text{ м}$ $c = 3 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 75^\circ$ $P = 64 \text{ кН}$ $q = 4 \text{ кН/м}$ $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$	 
29	$a = 4 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 2 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 30^\circ$ $P = 66 \text{ кН}$ $q = 6 \text{ кН/м}$ $M = 65 \text{ кН}\cdot\text{м}$	 

Варіант	Вихідні дані	Схеми конструкцій
30	$a = 4 \text{ м}$ $b = 3 \text{ м}$ $c = 5 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $P = 68 \text{ кН}$ $q = 8 \text{ кН/м}$ $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$	

2 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР І ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ (ТМ-2)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Плоска ферма – це така конструкція, яка складається з прямолінійних стрижнів, які розташовані у одній площині та шарнірно поєднані один з одним таким чином, що неможливий їхній відносний рух. Загалом, ферма – жорстка конструкція. Вертикальні стрижні називаються стійками, похилі – розкосами, відстань між вертикальними стрижнями називається панеллю. Точки поєднання стрижнів ферми називаються вузлами, відстань між опорами ферми – прогоном. Стрижні сприймають лише навантаження розтягу та стискання. Навантаження у фермі прикладаються лише у вузлах. В задачах розглянемо ферми різних конструкцій, з різною кількістю та взаємним розташуванням стрижнів, використовуючи методи вирізання вузлів та перерізів (Ріттера).

План теми 2

- 2.1 [ТМ-2, приклад 1. Однопанельна прямокутна ферма](#)
 - 2.1.1 [ТМ-2, приклад 1. Однопанельна прямокутна ферма у MathCADa](#)
- 2.2 [ТМ-2, приклад 2. Двопанельна прямокутна ферма](#)
 - 2.2.1 [ТМ-2, приклад 2. Двопанельна прямокутна ферма у MathCAD](#)
- 2.3 [ТМ-2, приклад 3. Трипанельна трикутна ферма](#)
 - 2.3.1 [ТМ-2, приклад 3. Трипанельна трикутна ферма у MathCAD](#)
- 2.4 [ТМ-2, приклад 4. Двопанельна паралелограмподібна ферма](#)
 - 2.4.1 [ТМ-2, приклад 4. Двопанельна паралелограмподібна ферма у MathCAD](#)
- 2.5 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-2\)](#)

2.1 ТМ-2, приклад 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої однопанельної прямокутної ферми

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Плоску прямокутну ферму навантажено зовнішніми силами P та F (рис. 2.1). Визначити реакції опор та зусилля у стрижнях такої ферми, якщо відомо, що $a = 4$ м, $h = 2$ м, $P = 3$ кН, $F = 7$ кН.

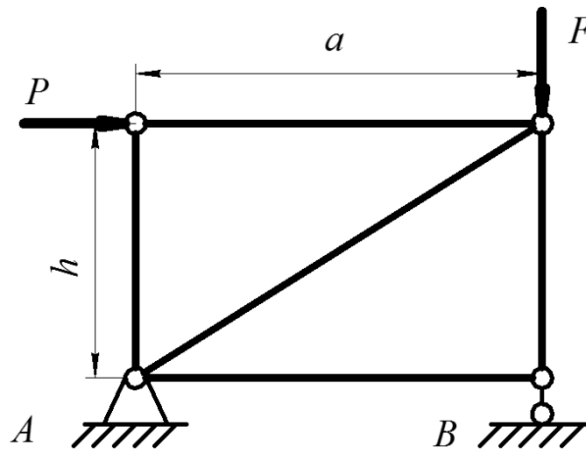


Рисунок 2.1 - Однопанельна прямокутна ферма (ТМ-2, приклад 1)

Порядок розв'язання:

1. Визначимо опорні реакції ферми.
 - складемо розрахункову схему (рис. 2.2);
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B ;
 - складемо рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + P = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} + R_B - F = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -P \cdot h - F \cdot a + R_B \cdot a = 0; \end{array} \right.$$

- визначимо невідомі реакції в'язей

$$\begin{cases} R_{Ax} = -P = -3 \text{ (кН)}; \\ R_B = \frac{P \cdot h + F \cdot a}{a} = \frac{3 \cdot 2 + 7 \cdot 4}{4} = 8,5 \text{ (кН)}; \\ R_{Ay} = -R_B + F = -8,5 + 7 = -1,5 \text{ (кН)}; \end{cases}$$

– визначимо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1,5)^2} = 3,35 \text{ (кН)};$$

– виконаємо перевірку вірності розрахунків

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; \quad -R_{Ay} \cdot a - P \cdot h = -(-1,5) \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 0.$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже реакції в'язей визначено вірно.

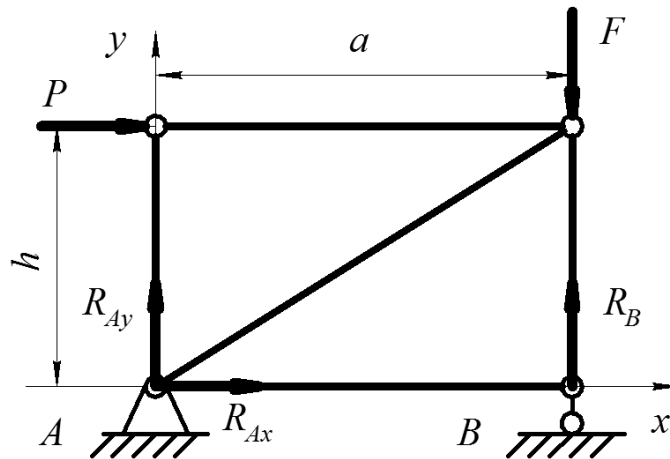


Рисунок 2.2 - Розрахункова схема ферми (ТМ-2, приклад 1)

2. Визначимо зусилля у стрижнях за допомогою методу вирізання вузлів.

Для визначення зусиль у стрижнях ферми позначимо усі стрижні арабськими цифрами з 1 до 5, а вузли ферми (точки, де збігаються стрижні) позначимо заголовними літерами C, D (рис. 2.3).

Метод вирізання вузлів полягає у виокремленні одного вузла ферми та розгляду його рівноваги шляхом складання двох рівнянь (рівнянь проєкцій сил на дві осі координат). Стрижні замінюються відповідними реакціями, які збігаються у розглянутому вузлі та спрямовані вздовж

умовно відкинутих стрижнів. До розглянутого вузла докладаються зовнішні зусилля (якщо вони є). Таким чином, отриманий вузол з прикладеними до нього зовнішніми силами та реакціями відкинутих стрижнів представляє собою плоску збіжну систему сил. Далі складаються рівняння рівноваги (проекцій сил на вісі x та y). З отриманих рівнянь визначаються невідомі реакції стрижнів. Після цього розглядаються і інші вузли, поки не будуть визначені усі реакції стрижнів. Вузли треба розглядати таким чином та у такому порядку, щоби у рівняннях рівноваги було не більше двох невідомих.

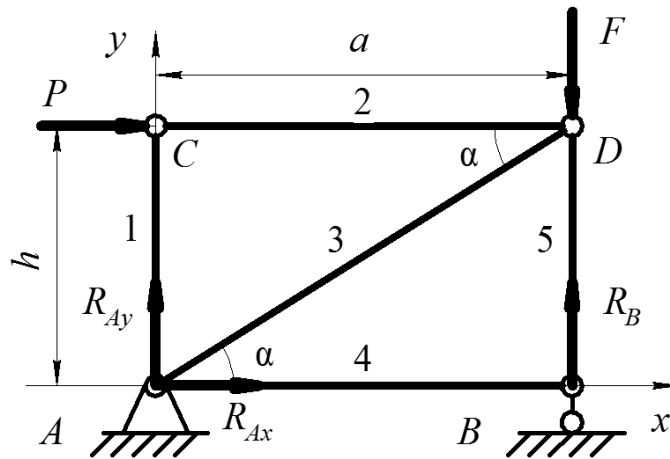


Рисунок 2.3 - Схема позначення вузлів та стрижнів (ТМ-2, приклад 1)

У представленому прикладі (рис. 2.3) є два вузли, в яких збігаються лише два стрижні – B та C . Розрахунки рівноваги вузлів можна почати із будь-якого із них. Оберемо вузол C – у ньому збігаються стрижні 1 та 2, а також прикладено зовнішню силу P . Складемо розрахункову схему вузла C (рис. 2.4, а).

– Відкинемо стрижні 1 та 2, їхню дію замінимо невідомими реакціями S_1 та S_2 ;

– спрямуємо реакції стрижнів S_1 та S_2 від вузла C , вважаючи, що стрижні умовно розтягнуті;

– позначимо вісі координат x та y .

Розглянемо рівновагу вузла C , побудувавши рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; P + S_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_1 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо значення невідомих зусиль у стрижнях, розв'язавши цю систему рівнянь

$$\begin{cases} S_2 = -P = -3 \text{ (кН)}; \\ S_1 = 0. \end{cases}$$

Якщо отримали реакцію стрижня зі знаком «←» – це означає, що стрижень є насправді стиснутим. $S_1 = 0$ означає, що стрижень 1 не є навантаженим.

Переходимо до вузла D . У ньому збігаються три стрижні – 2, 3, 5. Реакція двох із них (S_3 та S_5) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла D (рис. 2.4, б). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 3 спрямовано під невідомим кутом до горизонталі. Позначимо цей кут α та визначимо його із трикутника ADC

$$\angle ADC = \alpha = \arctg\left(\frac{h}{a}\right) = \arctg\left(\frac{2}{4}\right) = 26,57^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_2 - S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -F - S_5 - S_3 \cdot \sin(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$\begin{cases} S_3 = \frac{-S_2}{\cos(\alpha)} = 3,35 \text{ (кН)}; \\ S_5 = -F - S_3 \cdot \sin(\alpha) = -8,5 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Переходимо до вузла A . У ньому збігаються три стрижні – 1, 3, 4. Реакція одного із них (S_4) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла A (рис. 2.4, в). Кут α зобразимо між реакцією S_3 та горизонталлю, базуючись

на властивості внутрішніх нахрест лежачих кутів $\angle ADC$ та $\angle BAD$.

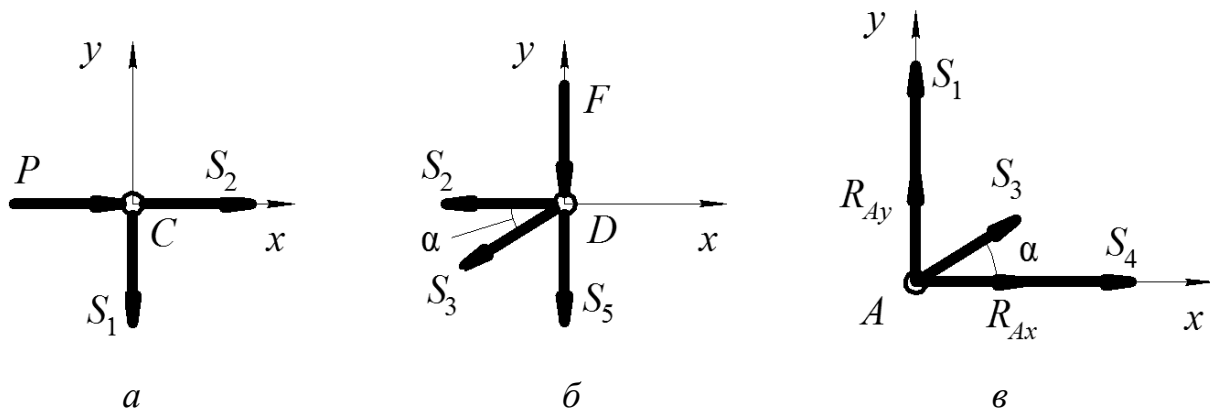
Складемо одне рівняння рівноваги та визначимо невідому S_4

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + S_4 + S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0;$$

$$S_4 = -R_{Ax} - S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0.$$

$S_4 = 0$ означає, що стрижень 4 не є навантаженим.

Таким чином, визначили усі невідомі реакції стрижнів.



a - вузол C;

б - вузол D;

в - вузол A.

Рисунок 2.4 - Розрахункова схема вузлів C, D, A (ТМ-2, приклад 1)

3. Виконаємо перевірку розрахунків зусиль у стрижнях за допомогою методу Ріттера (методу перерізів).

Умовно розріжемо ферму на 2 частини (рис. 2.5). Переріз має проходити не більш ніж через 3 стрижні. Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу однієї із частин (наприклад, лівої), послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці A збігаються сили S_3 та S_4 , у точці D – S_2 та S_3 . Якщо дві невідомі реакції стрижнів паралельні (як S_2 та S_4), треба скласти рівняння проекцій сил на вісь y.

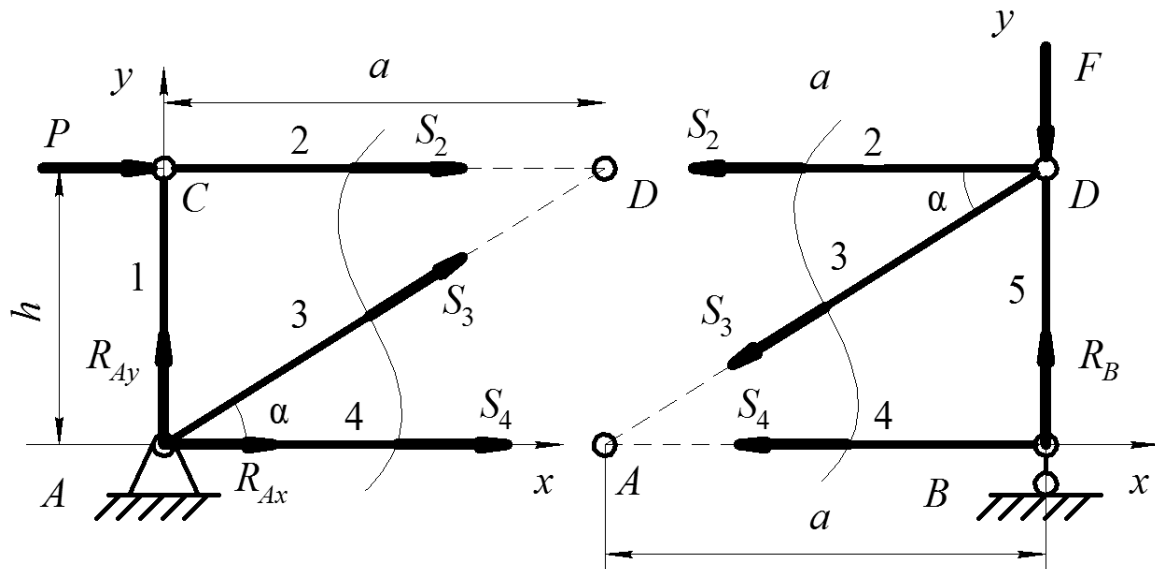


Рисунок 2.5 - Розрахункова схема для методу Ріттера (ТМ-2, приклад 1)

Рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -P \cdot h - S_2 \cdot h = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_D(F_i) = 0; -R_{Ay} \cdot a + R_{Ax} \cdot h + S_4 \cdot h = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} + S_3 \cdot \sin(\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$\begin{aligned} S_2 &= -P = -3 \text{ (кН)}; \\ S_4 &= \frac{R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot h}{h} = \frac{(-1,5) \cdot 4 - (-3) \cdot 2}{2} = 0; \\ S_3 &= \frac{-R_{Ay}}{\sin(\alpha)} = \frac{-(-1,5)}{0,447} = 3,35 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали однакові значення зусиль у стрижнях методами вирізання вузлів та Ріттера, тому розрахунки можна вважати вірними. Підсумуємо, що стрижні 1 та 4 не є навантаженими, стрижні 2 та 5 – стиснуті, стрижень 3 – розтягнутий.

Відповідь: $R_{Ax} = -3$ кН; $R_{Ay} = -1,5$ кН; $R_A = 3,35$ кН; $R_B = 8,5$ кН;
 $S_1 = 0$; $S_2 = -3$ кН; $S_3 = 3,35$ кН; $S_4 = 0$; $S_5 = -8,5$ кН.

2.1.1 ТМ-2, приклад 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

[↑ДО ТМ-2↑](#) [↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Для визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{aligned} a &:= 4\text{m} & P &:= 3\text{kN} \\ h &:= 2\text{m} & F &:= 7\text{kN} \end{aligned}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 2.2](#)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0 & R_{ax} + P &= 0 \\ \sum_i F_{iy} &= 0 & R_{ay} + R_b - F &= 0 \\ \sum_i M_A(F_i) &= 0 & -P \cdot h - F \cdot a + R_b \cdot a &= 0 \end{aligned}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$R_{ax} := -P = -3 \cdot \text{kN}$$

$$R_b := \frac{F \cdot a + P \cdot h}{a} = 8.5 \cdot \text{kN}$$

$$R_{ay} := F - R_b = -1.5 \cdot \text{kN}$$

$$R_a := \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = 3.354 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad -R_{ay} \cdot a - P \cdot h = 0 \text{ J}$$

- методом вирізання вузлів розглянути рівновагу вузлів C, D, A

вузол С

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P + S_2 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S_1 = 0$$

$$S_2 := -P = -3 \text{ kN}$$

$$S_1 := 0$$

вузол D

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{a} \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{h}{a}\right) = 26.565 \text{ deg}$$

$$\cos(\alpha) = 0.894 \quad \sin(\alpha) = 0.447$$

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S_2 - S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -F - S_5 - S_3 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$S_3 := -\frac{S_2}{\cos(\alpha)} = 3.354 \text{ kN}$$

$$S_5 := -F - S_3 \cdot \sin(\alpha) = -8.5 \text{ kN}$$

вузол A

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{Ax} + S_4 + S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$S_4 := -R_{Ax} - S_3 \cdot \cos(\alpha) = 0 \text{ N}$$

- методом Ріттера перевірити правильність виконання розрахунків, виконавши переріз через стрижні 2, 3, 4

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad -P \cdot h - S_2 \cdot h = 0$$

$$S_2 := -P = -3 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_D(F_i) = 0 \quad -R_{Ay} \cdot a + R_{Ax} \cdot h + S_4 \cdot h = 0$$

$$S_4 := \frac{R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot h}{h} = 0 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{Ay} + S_3 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$S_3 := -\frac{R_{Ay}}{\sin(\alpha)} = 3.354 \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, внутрішні сили в стрижнях, розраховані методом вирізання вузлів та методом Ріттера, співпадають. Таким чином, можна вважати, що задачу розв'язано вірно.

2.2 ТМ-2, приклад 2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної прямокутної ферми

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Плоску прямокутну двопанельну ферму навантажено зовнішніми силами P , F та Q (рис. 2.6). Визначити реакції опор та зусилля у стрижнях такої ферми, якщо відомо, що $a = 2$ м, $h = 1$ м, $P = 5$ кН, $F = 4$ кН, $Q = 8$ кН, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

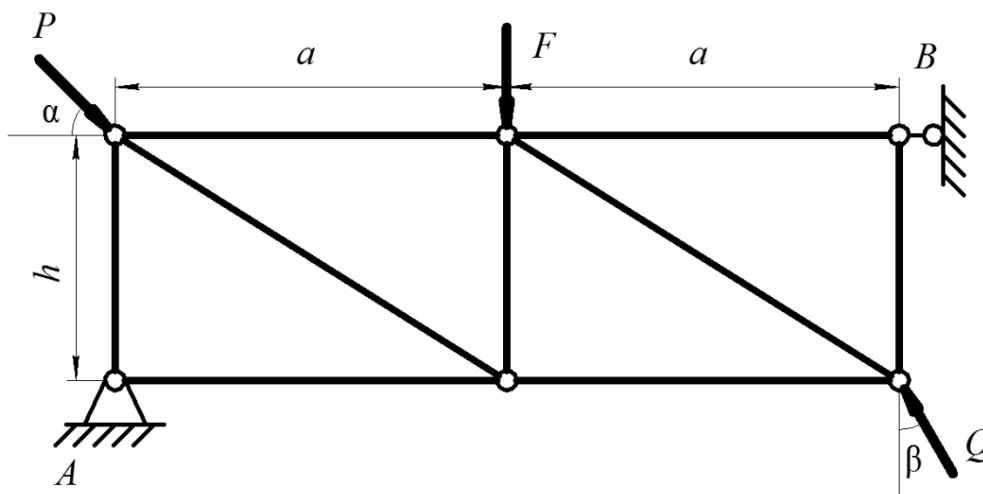


Рисунок 2.6 - Двопанельна прямокутна ферма (ТМ-2, приклад 2)

Порядок розв'язання:

1. Визначимо опорні реакції ферми.
 - складемо розрахункову схему (рис. 2.7);
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B ;
 - складемо рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + P \cdot \cos(\alpha) - R_B - Q \cdot \sin(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) - F + Q \cdot \cos(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -P \cdot \cos(\alpha) \cdot h - F \cdot a + R_B \cdot h + Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a = 0; \end{array} \right.$$

– визначимо невідомі реакції в'язей

$$\begin{cases} R_B = \frac{P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + F \cdot a - Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a}{h} = -16,18 \text{ (кН)}; \\ R_{Ax} = R_B - P \cdot \cos(\alpha) + Q \cdot \sin(\beta) = -15,71 \text{ (кН)}; \\ R_{Ay} = F + P \cdot \sin(\alpha) - Q \cdot \cos(\beta) = 0,61 \text{ (кН)}; \end{cases}$$

– визначимо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-15,71)^2 + 0,61^2} = 15,73 \text{ (кН)};$$

– виконаємо перевірку вірності розрахунків

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; & -R_{Ay} \cdot 2 \cdot a + R_{Ax} \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 2 \cdot a + \\ & + F \cdot a - Q \cdot \sin(\beta) \cdot h = -0,61 \cdot 2 \cdot 2 + (-15,71) \cdot 1 + 5 \cdot 0,71 \cdot 2 \cdot 2 + \\ & + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 0,5 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже реакції в'язей визначено вірно.

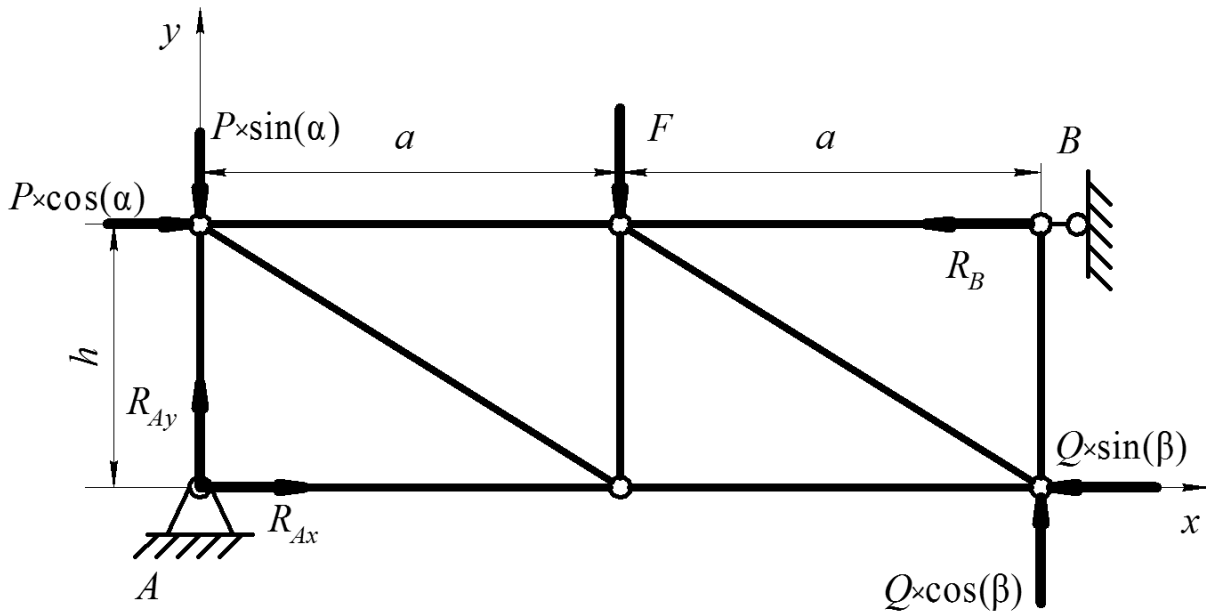


Рисунок 2.7 - Розрахункова схема ферми (ТМ-2, приклад 2)

2. Визначимо зусилля у стрижнях за допомогою методу вирізання вузлів.

Для визначення зусиль у стрижнях ферми позначимо усі стрижні арабськими цифрами з 1 до 9, а вузли ферми (точки, де збігаються стрижні) позначимо заголовними літерами C, D, E, F (рис. 2.8).

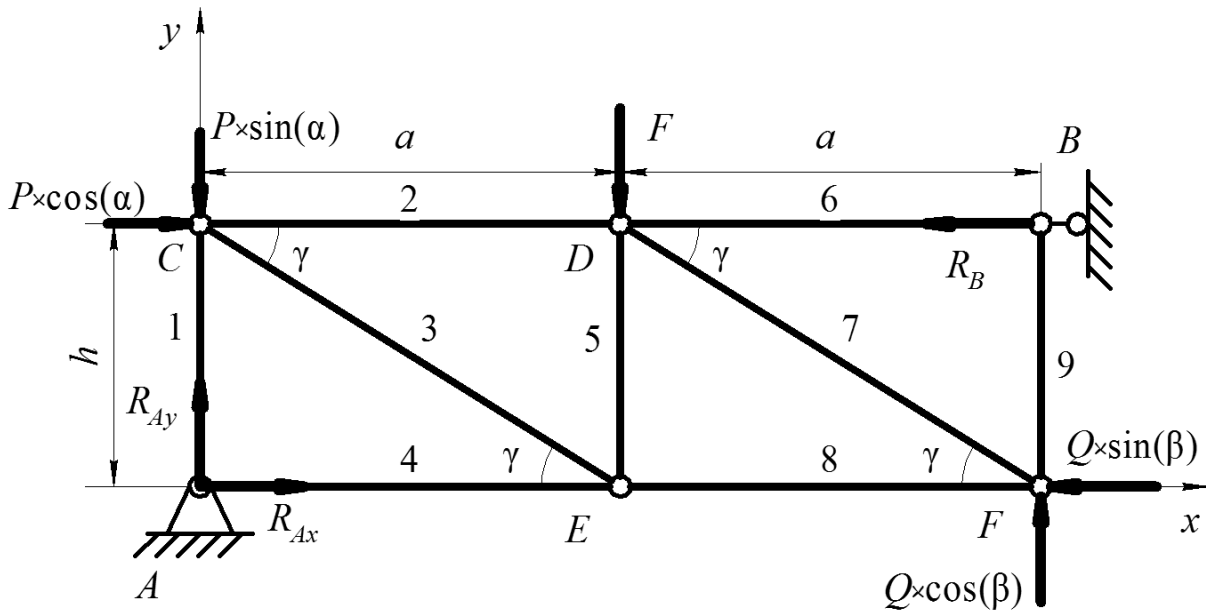


Рисунок 2.8 - Схема позначення вузлів та стрижнів (ТМ-2, приклад 2)

У представленому прикладі (рис. 2.8) є два вузли, в яких збігаються лише два стрижні – A та B . Розрахунки рівноваги вузлів можна почати із будь-якого із них. Оберемо вузол A – у ньому збігаються стрижні 1 та 4, а також прикладено реакції опори A – R_{Ax}, R_{Ay} . Складемо розрахункову схему вузла A (рис. 2.9, а).

– Відкинемо стрижні 1 та 4, їхню дію замінимо невідомими реакціями S_1 та S_4 ;

– спрямуємо реакції стрижнів S_1 та S_4 від вузла A , вважаючи, що стрижні умовно розтягнуті;

– позначимо вісі координат x та y .

Розглянемо рівновагу вузла, побудувавши рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + S_4 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} + S_1 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо значення невідомих зусиль у стрижнях, розв'язавши цю систему рівнянь

$$\begin{cases} S_4 = -R_{Ax} = -(-15,71) = 15,71 \text{ (кН)}; \\ S_1 = -R_{Ay} = -0,61 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Такі результати означають, що стрижень 1 є стиснутим, а стрижень 4 – розтягнутим.

Переходимо до вузла *C*. У ньому збігаються три стрижні – 1, 2, 3. Реакція двох із них (S_2 та S_3) невідома. До вузла прикладено зовнішнє зусилля P під кутом α до горизонталі. Побудуємо розрахункову схему вузла *C* (рис. 2.9, б). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 3 спрямовано під невідомим кутом до горизонталі. Позначимо цей кут γ та визначимо його із трикутника *CED*

$$\angle CED = \gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,57^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; & P \cdot \cos(\alpha) + S_2 + S_3 \cdot \cos(\gamma) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; & -P \cdot \sin(\alpha) - S_1 - S_3 \cdot \sin(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$\begin{cases} S_3 = \frac{-P \cdot \sin(\alpha) - S_1}{\sin(\gamma)} = -6,55 \text{ (кН)}; \\ S_2 = -S_3 \cdot \cos(\gamma) - P \cdot \cos(\alpha) = 2,32 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Отримані результати означають, що стрижень 2 розтягнутий, а стрижень 3 стиснутий.

Переходимо до вузла *E*. У ньому збігаються чотири стрижні – 3, 4, 5, 8. Реакція двох із них (S_5 та S_8) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла *E* (рис. 2.9, в). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Кут γ зобразимо між реакцією S_3 та горизонталлю, базуючись на властивості внутрішніх навхрест лежачих кутів $\angle DCE$ та $\angle CEA$.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_4 - S_3 \cdot \cos(\gamma) + S_8 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_5 + S_3 \cdot \sin(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$\begin{cases} S_8 = S_4 + S_3 \cdot \cos(\gamma) = 9,86 \text{ (кН)}; \\ S_5 = -S_3 \cdot \sin(\gamma) = 2,93 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Отримані результати означають, що стрижні 5 та 8 розтягнуті.

Переходимо до вузла D . У ньому збігаються чотири стрижні – 2, 5, 6, 7. Реакція двох із них (S_6 та S_7) невідома. До вузла прикладено зовнішнє зусилля F . Побудуємо розрахункову схему вузла D (рис. 2.9, з). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Позначимо кут γ між стрижнями 6 та 7.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_2 + S_6 + S_7 \cdot \cos(\gamma) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -F - S_5 - S_7 \cdot \sin(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$\begin{cases} S_7 = \frac{-F - S_5}{\sin(\gamma)} = -15,49 \text{ (кН)}; \\ S_6 = S_2 - S_7 \cdot \cos(\gamma) = 16,18 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Отримані результати означають, що стрижень 7 стиснутий, стрижень 8 – розтягнутий.

Переходимо до вузла F . У ньому збігаються три стрижні – 7, 8, 9. Реакція одного із них (S_9) невідома. До вузла прикладено зовнішнє зусилля Q . Побудуємо розрахункову схему вузла F (рис. 2.9, д). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Позначимо кут γ між стрижнями 7 та 8.

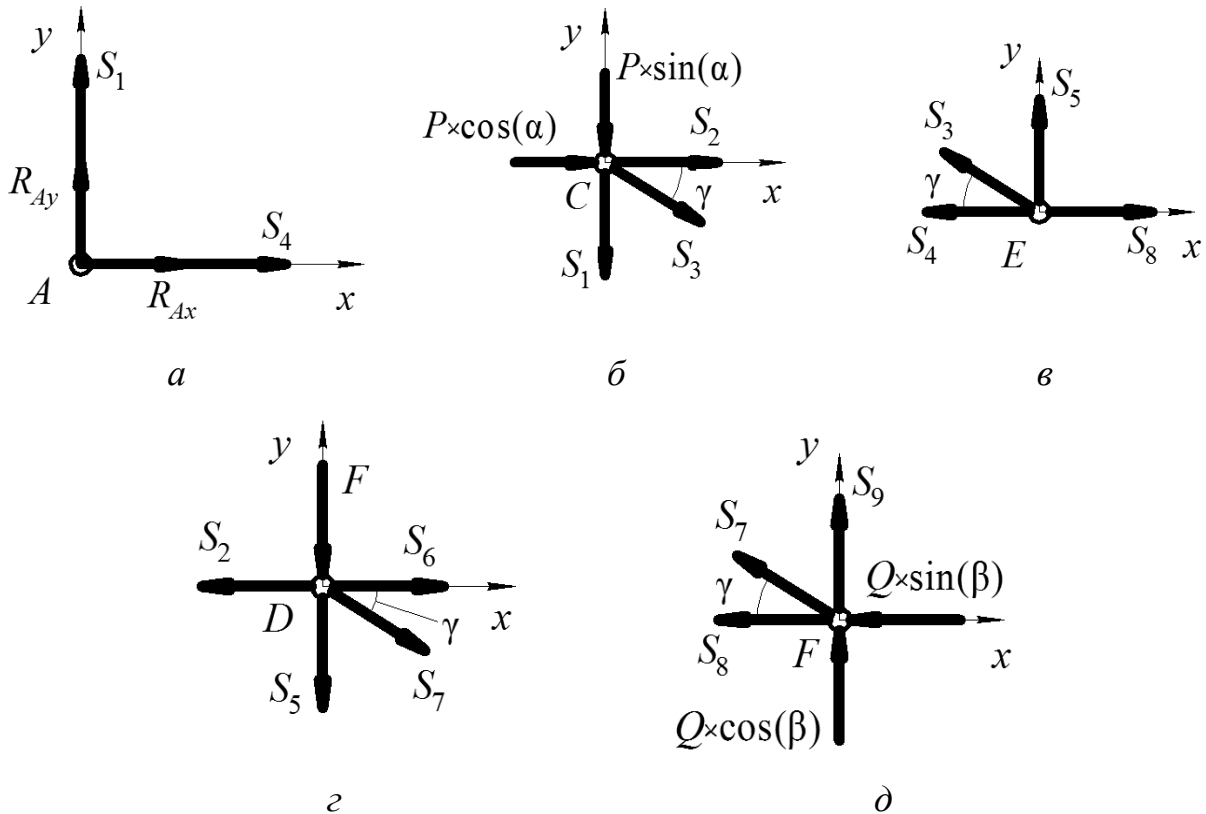
Складемо одне рівняння рівноваги та визначимо невідому S_9

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_9 + Q \cdot \cos(\beta) + S_7 \cdot \sin(\gamma) = 0;$$

$$S_9 = -Q \cdot \cos(\beta) - S_7 \cdot \sin(\gamma) = 0.$$

Це означає, що стрижень 9 не є навантаженим.

Таким чином, визначили усі невідомі зусилля у стрижнях.



a - вузол А;

б - вузол С;

в - вузол Е;

г - вузол D;

д - вузол В.

Рисунок 2.9 - Розрахункові схеми вузлів А, С, Е, D, F ферми (ТМ-2, приклад 2)

3. Виконаємо перевірку розрахунків зусиль у стрижнях за допомогою методу Ріттера (методу перерізів).

Умовно розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 2, 3, 4 (рис. 2.10). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу однієї із частин (наприклад, лівої), послідовно склавши рівняння моментів сил

відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці C збігаються сили S_2 та S_3 , у точці E – S_3 та S_4 . Якщо дві невідомі реакції стрижнів паралельні (як S_2 та S_4), треба скласти рівняння проєкцій сил на вісь y .

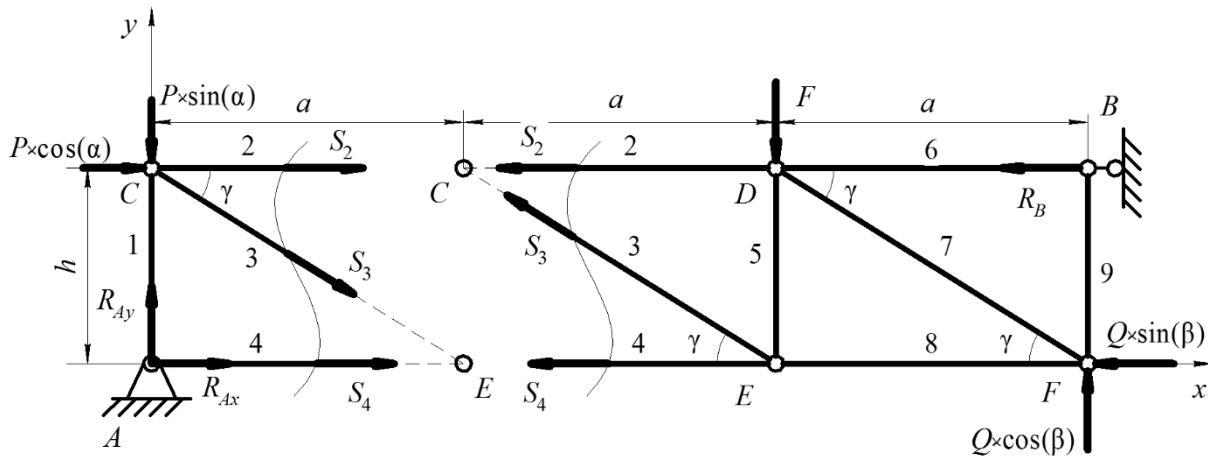


Рисунок 2.10 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 2, 3, 4 (ТМ-2, приклад 2)

Рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_C(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot h + S_4 \cdot h = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_E(F_i) = 0; -R_{Ay} \cdot a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - S_2 \cdot h = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha) + S_3 \cdot \sin(\gamma) = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$\begin{aligned} S_4 &= -R_{Ax} = -(-15,71) = 15,71 \text{ (кН)}; \\ S_2 &= \frac{-R_{Ay} \cdot a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a}{h} = \\ &= \frac{-0,61 \cdot 2 - 5 \cdot 0,71 \cdot 1 + 5 \cdot 0,71 \cdot 2}{1} = 2,32 \text{ (кН)}; \\ S_3 &= -\frac{R_{Ay} - P \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = -\frac{0,61 - 5 \cdot 0,71}{0,45} = -6,55 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 2, 3, 4, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Далі розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 6, 7, 8 (рис. 2.11). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу однієї із частин (наприклад, правої), послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці D збігаються сили S_6 та S_7 , у точці F – S_7 та S_8 . Дві невідомі реакції стрижнів S_6 та S_8 паралельні, тому треба скласти рівняння проекцій сил на вісь y .

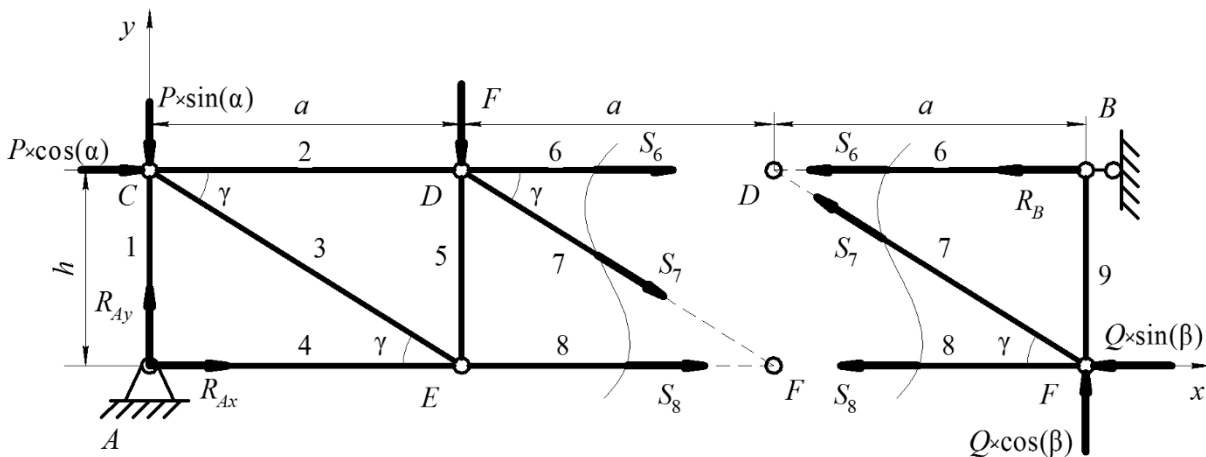


Рисунок 2.11 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 6, 7, 8 (ТМ-2, приклад 2)

Рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_D(F_i) = 0; -S_8 \cdot h - Q \cdot \sin(\beta) \cdot h + Q \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_F(F_i) = 0; S_6 \cdot h + R_B \cdot h = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_7 \cdot \sin(\gamma) + Q \cdot \cos(\beta) = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$S_8 = \frac{Q \cdot \cos(\beta) \cdot a - Q \cdot \sin(\beta) \cdot h}{h} = \frac{8 \cdot 0,87 \cdot 2 - 8 \cdot 0,5 \cdot 1}{1} = 9,86 \text{ (кН)};$$

$$S_6 = -R_B = -(-16,18) = 16,18 \text{ (кН)};$$

$$S_7 = -\frac{Q \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma)} = -\frac{8 \cdot 0,71}{0,45} = -15,49 \text{ (кН)}.$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 6, 7, 8, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Підведемо підсумки. Стрижні 1, 3, 7 – стиснуті, стрижні 2, 4, 5, 6, 8 – розтягнуті, стрижень 9 – не є навантаженим.

Відповідь: $R_{Ax} = -15,72 \text{ кН}$; $R_{Ay} = 0,61 \text{ кН}$; $R_A = 15,73 \text{ кН}$;
 $R_B = -16,18 \text{ кН}$; $S_1 = -0,61 \text{ кН}$; $S_2 = 2,32 \text{ кН}$; $S_3 = -6,55 \text{ кН}$;
 $S_4 = 15,72 \text{ кН}$; $S_5 = 2,93 \text{ кН}$; $S_6 = 16,18 \text{ (кН)}$; $S_7 = -15,49 \text{ (кН)}$;
 $S_8 = 9,86 \text{ (кН)}$; $S_9 = 0$.

2.2.1 ТМ-2, приклад 2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної прямокутної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lll} a := 2\text{m} & \alpha := 45\text{deg} & P := 5\text{kN} \\ h := 1\text{m} & \beta := 30\text{deg} & F := 4\text{kN} \\ & & Q := 8\text{kN} \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 2.7](#)

$$\begin{array}{ll} \sum_i F_{ix} = 0 & R_{ax} + P \cdot \cos(\alpha) - R_b - Q \cdot \sin(\beta) = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 & R_{ay} - P \cdot \sin(\alpha) - F + Q \cdot \cos(\beta) = 0 \\ \sum_i M_A(F_i) = 0 & -P \cdot \cos(\alpha) \cdot h - F \cdot a + R_b \cdot h + Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a = 0 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$\begin{array}{l} R_b := \frac{F \cdot a - 2 \cdot Q \cdot a \cdot \cos(\beta) + P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{h} = -16.177 \cdot \text{kN} \\ R_{ax} := R_b - P \cdot \cos(\alpha) + Q \cdot \sin(\beta) = -15.713 \cdot \text{kN} \\ R_{ay} := F + P \cdot \sin(\alpha) - Q \cdot \cos(\beta) = 0.607 \cdot \text{kN} \\ R_a := \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = 15.725 \cdot \text{kN} \end{array}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad -R_{ay} \cdot 2 \cdot a + R_{ax} \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 2 \cdot a + F \cdot a - Q \cdot \sin(\beta) \cdot h = -1.364 \times 10^{-12} \text{ J}$$

- методом вирізання вузлів розглянути рівновагу вузлів A, C, E, D, F
вузол A

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{ax} + S_4 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{ay} + S_1 = 0$$

$$S_4 := -R_{ax} = 15.713 \cdot \text{kN}$$

$$S_1 := -R_{ay} = -0.607 \cdot \text{kN}$$

вузол *C*

$$\tan(\gamma) = \frac{h}{a} \quad \gamma := \text{atan}\left(\frac{h}{a}\right) = 26.565 \cdot \text{deg}$$

$$\cos(\gamma) = 0.894 \quad \sin(\gamma) = 0.447$$

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P \cdot \cos(\alpha) + S_2 + S_3 \cdot \cos(\gamma) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -P \cdot \sin(\alpha) - S_1 - S_3 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$S_3 := -\frac{S_1 + P \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = -6.548 \cdot \text{kN}$$

$$S_2 := -S_3 \cdot \cos(\gamma) - P \cdot \cos(\alpha) = 2.321 \cdot \text{kN}$$

вузол *E*

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S_4 - S_3 \cdot \cos(\gamma) + S_8 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S_5 + S_3 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$S_8 := S_4 + S_3 \cdot \cos(\gamma) = 9.856 \cdot \text{kN}$$

$$S_5 := -S_3 \cdot \sin(\gamma) = 2.928 \cdot \text{kN}$$

вузол *D*

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S2 + S7 \cdot \cos(\gamma) + S6 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -F - S5 - S7 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$S7 := -\frac{F + S5}{\sin(\gamma)} = -15.492 \cdot \text{kN}$$

$$S6 := S2 - S7 \cdot \cos(\gamma) = 16.177 \cdot \text{kN}$$

вузол F

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S9 + Q \cdot \cos(\beta) + S7 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$S9 := -S7 \cdot \sin(\gamma) - Q \cdot \cos(\beta) = -9.095 \times 10^{-13} \text{ N}$$

- методом Ріттера перевірити правильність виконання розрахунків, виконавши переріз через стрижні 2, 3, 4

$$\sum_i M_C(F_i) = 0 \quad Rax \cdot h + S4 \cdot h = 0$$

$$S4 := -Rax = 15.713 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_E(F_i) = 0 \quad -Ray \cdot a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - S2 \cdot h = 0$$

$$S2 := \frac{Ray \cdot a - P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{h} = 2.321 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad Ray - P \cdot \sin(\alpha) - S3 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$S3 := \frac{Ray - P \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = -6.548 \cdot \text{kN}$$

а також, через стрижні 6, 7, 8

$$\sum_i M_D(F_i) = 0 \quad -S8 \cdot h - Q \cdot \sin(\beta) \cdot h + Q \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0$$

$$\underline{S8} := \frac{Q \cdot a \cdot \cos(\beta) - Q \cdot h \cdot \sin(\beta)}{h} = 9.856 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_F(F_i) = 0 \quad S6 \cdot h + Rb \cdot h = 0$$

$$\underline{S6} := -Rb = 16.177 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S7 \cdot \sin(\gamma) + Q \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\underline{S7} := -\frac{Q \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma)} = -15.492 \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, внутрішні сили в стрижнях, розраховані методом вирізання вузлів та методом Ріттера, співпадають. Таким чином, можна вважати, що задачу розв'язано вірно.

2.3 ТМ-2, приклад 3. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої трипанельної трикутної ферми

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Плоску трикутну трипанельну ферму навантажено зовнішніми силами P , F , Q та T (рис. 2.12). Визначити реакції опор та зусилля у стрижнях такої ферми, якщо відомо, що $a = 3$ м, $h = 2$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН, $Q = 10$ кН, $T = 6$ кН, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 25^\circ$, $\delta = 15^\circ$.

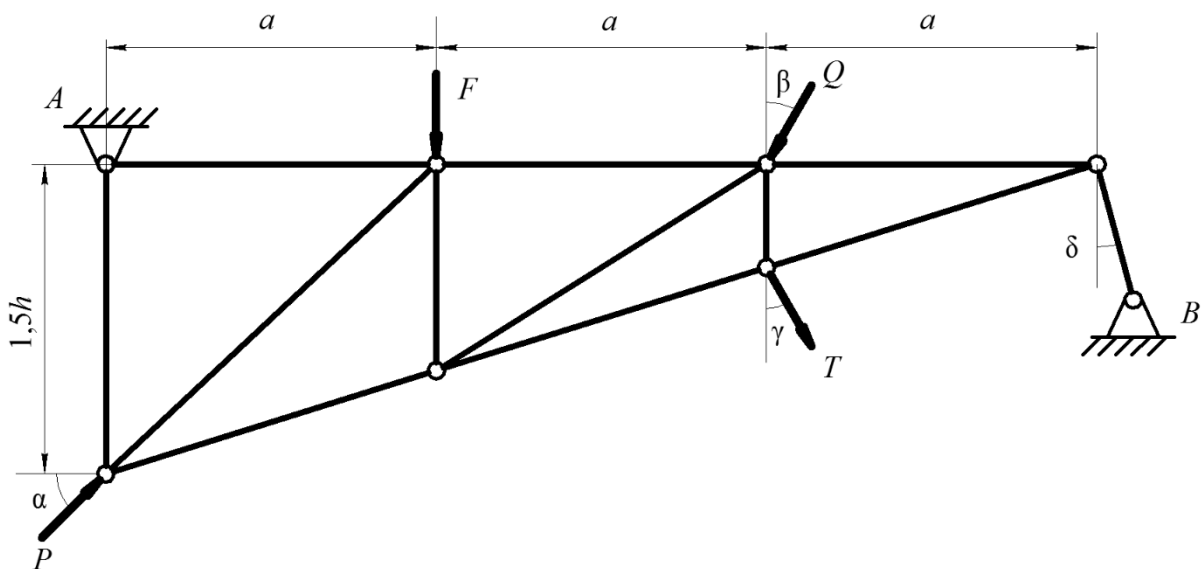


Рисунок 2.12 - Трипанельна трикутна ферма (ТМ-2, приклад 3)

Порядок розв'язання:

1. Визначимо опорні реакції ферми.
 - Складемо розрахункову схему (рис. 2.13);
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B , зазначимо, що опору B приєднано до ферми за допомогою стрижня BH , тому реакцію в'язі B буде спрямовано вздовж цього стрижня;
 - визначимо кут ε між нижнім та верхнім поясом ферми та відстань FG , що є плечем сили $T \cdot \sin(\gamma)$

$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{1,5 \cdot h}{3 \cdot a}\right) = 18,44^\circ;$$

$$FG = a \cdot \tg(\varepsilon) = 1 \text{ (м)}.$$

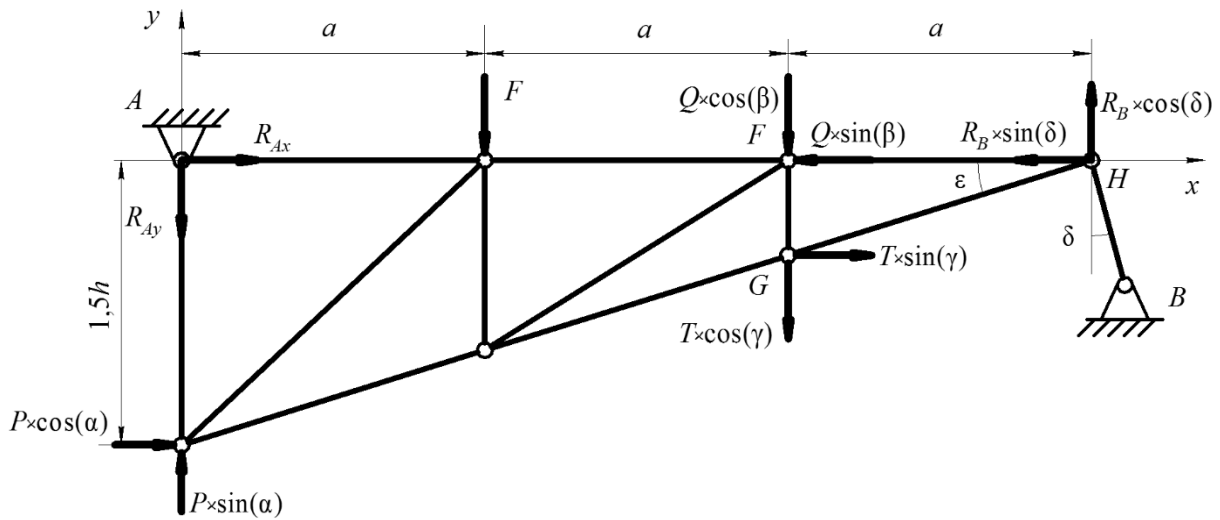


Рисунок 2.13 - Розрахункова схема ферми (ТМ-2, приклад 3)

Складемо рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + P \cdot \cos(\alpha) - R_B \cdot \sin(\delta) - Q \cdot \sin(\beta) + T \cdot \sin(\gamma) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} + P \cdot \sin(\alpha) - F - Q \cdot \cos(\beta) - T \cdot \cos(\gamma) + \\ \quad + R_B \cdot \cos(\delta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5h - F \cdot a - Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2a - T \cdot \cos(\gamma) \cdot 2a + \\ \quad + T \cdot \sin(\gamma) \cdot FG + R_B \cdot \cos(\delta) \cdot 3a = 0; \end{array} \right.$$

– визначимо невідомі реакції в'язей

$$R_B = -\frac{P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5h - F \cdot a - Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2a}{\cos(\delta) \cdot 3a} - \frac{T \cdot \sin(\gamma) \cdot FG - T \cdot \cos(\gamma) \cdot 2a}{\cos(\delta) \cdot 3a} = 9,99 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ax} = -(P \cdot \cos(\alpha) - R_B \cdot \sin(\delta) - Q \cdot \sin(\beta) + T \cdot \sin(\gamma)) = 3,63 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = P \cdot \sin(\alpha) - F - Q \cdot \cos(\beta) - T \cdot \cos(\gamma) + R_B \cdot \cos(\delta) = -6,04 \text{ (кН)};$$

– визначимо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{3,63^2 + (-6,04)^2} = 7,05 \text{ (кН)};$$

– виконаємо перевірку вірності розрахунків

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; R_{Ay} \cdot 3a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3a + F \cdot 2a +$$

$$+ Q \cdot \cos(\beta) \cdot a + T \cdot \cos(\gamma) \cdot a + T \cdot \sin(\gamma) \cdot FG =$$

$$= (-6,04) \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0,71 \cdot 1,5 \cdot 2 - 2 \cdot 0,71 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 +$$

$$+ 10 \cdot 0,87 \cdot 3 + 6 \cdot 0,91 \cdot 3 + 6 \cdot 0,42 \cdot 1 = 0$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже реакції в'язей визначено вірно.

2. Визначимо зусилля у стрижнях за допомогою методу вирізання вузлів.

Для визначення зусиль у стрижнях ферми позначимо усі стрижні арабськими числами з 1 до 11, а вузли ферми (точки, де збігаються стрижні) позначимо заголовними літерами C, D, E, F, G, H (рис. 2.14).

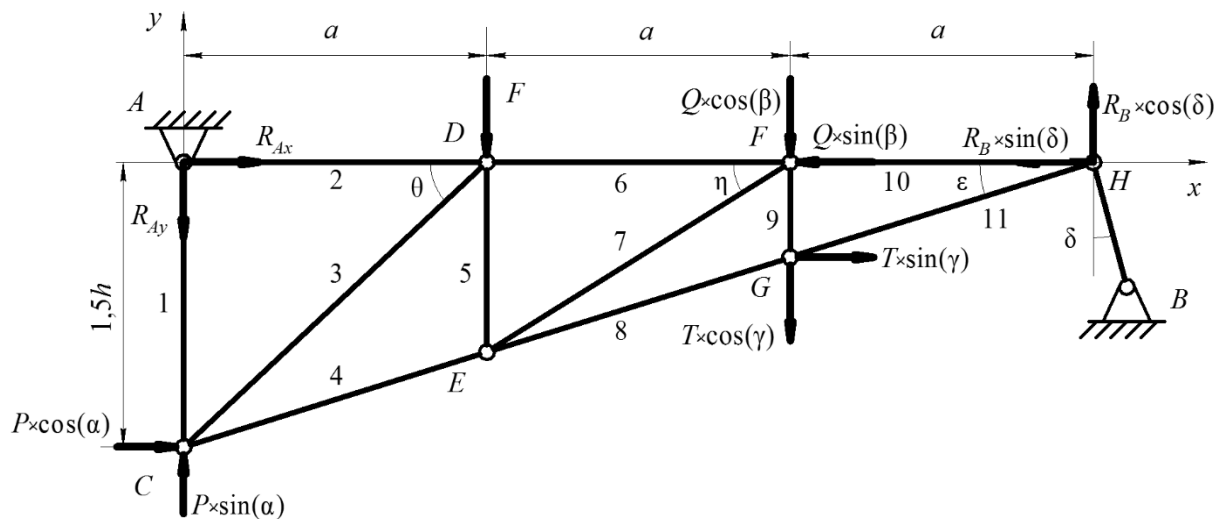


Рисунок 2.14 - Схема позначення вузлів та стрижнів (ТМ-2, приклад 3)

У представленому прикладі (рис. 2.14) є два вузли, в яких збігаються лише два стрижні – A та H . Розрахунки рівноваги вузлів можна почати із будь-якого із них. Оберемо вузол A – у ньому збігаються стрижні 1 та 2, а також прикладено реакції опори A – R_{Ax}, R_{Ay} . Складемо розрахункову схему вузла A (рис. 2.15, а).

– Відкинемо стрижні 1 та 2, їхню дію замінимо невідомими реакціями S_1 та S_2 ;

– спрямуємо реакції стрижнів S_1 та S_2 від вузла A , вважаючи, що стрижні умовно розтягнуті;

– позначимо вісі координат x та y .

Розглянемо рівновагу вузла, побудувавши рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + S_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} - S_1 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо значення невідомих зусиль у стрижнях, розв'язавши цю систему рівнянь

$$\begin{cases} S_1 = -R_{Ay} = 6,04 \text{ (кН)}; \\ S_2 = -R_{Ax} = -3,63 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Отримані результати означають, що стрижень 1 є розтягнутим, а стрижень 2 – стиснутим.

Переходимо до вузла C . У ньому збігаються три стрижні – 1, 3, 4. Реакція двох із них (S_3 та S_4) невідома. До вузла прикладено зовнішнє зусилля P під кутом α до горизонталі. Побудуємо розрахункову схему вузла C (рис. 2.15, б). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 3 спрямовано під невідомим кутом до горизонталі. Позначимо цей кут θ та визначимо його із трикутника ACD . Кут між зусиллям у стрижні 4 та горизонталлю позначимо ε із властивості внутрішніх навхрест лежачих кутів.

$$\angle ACD = \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1,5 \cdot h}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1,5 \cdot 2}{3}\right) = 45^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; P \cdot \cos(\alpha) + S_3 \cdot \cos(\theta) + S_4 \cdot \cos(\varepsilon) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_1 + P \cdot \sin(\alpha) + S_3 \cdot \sin(\theta) + S_4 \cdot \sin(\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях методом підстановки

$$S_3 = \frac{-P \cdot \cos(\alpha) - S_4 \cdot \cos(\epsilon)}{\cos(\theta)} = -14,81 \text{ (кН)};$$

$$S_4 = -\frac{S_1 + P \cdot \sin(\alpha) - \frac{P \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\sin(\epsilon) - \frac{\cos(\epsilon) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = 9,55 \text{ (кН)};$$

Отримані результати означають, що стрижень 3 стиснутий, а стрижень 4 розтягнутий.

Переходимо до вузла *D*. У ньому збігаються чотири стрижні – 2, 3, 5, 6. Реакція двох із них (S_5 та S_6) невідома. До вузла прикладено вертикальне зовнішнє зусилля *F*. Побудуємо розрахункову схему вузла *D* (рис. 2.15, в). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 3 спрямовано під кутом θ до горизонталі.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_2 - S_3 \cdot \cos(\theta) + S_6 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -F - S_5 - S_3 \cdot \sin(\theta) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$S_6 = S_2 + S_3 \cdot \cos(\theta) = -14,1 \text{ (кН)};$$

$$S_5 = -F - S_3 \cdot \sin(\theta) = 7,47 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижень 6 стиснутий, а стрижень 5 розтягнутий.

Переходимо до вузла *E*. У ньому збігаються чотири стрижні – 4, 5, 7, 8. Реакція двох із них (S_7 та S_8) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла *E* (рис. 2.15, з). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 7 спрямовано під невідомим кутом до горизонталі. Позначимо цей кут η та визначимо його із трикутника *DFE*. Кут між зусиллям у стрижні 8 та горизонталлю позначимо ϵ із властивості внутрішніх навхрест лежачих кутів. Визначимо відстань *DE* та кут η

$$DE = 2 \cdot a \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon) = 2 \text{ (м)};$$

$$\eta = \operatorname{arctg}\left(\frac{DE}{a}\right) = 33,69^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_4 \cdot \cos(\varepsilon) + S_7 \cdot \cos(\eta) + S_8 \cdot \cos(\varepsilon) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_5 + S_7 \cdot \sin(\eta) + S_8 \cdot \sin(\varepsilon) - S_4 \cdot \sin(\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях методом підстановки

$$S_8 = \frac{S_4 \cdot \cos(\varepsilon) - S_7 \cdot \cos(\eta)}{\cos(\varepsilon)} = 33,18 \text{ (кН)};$$

$$S_7 = -\frac{S_5}{\sin(\eta) - \frac{\cos(\eta) \cdot \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)}} = -26,94 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижень 7 стиснутий, а стрижень 8 розтягнутий.

Переходимо до вузла F . У ньому збігаються чотири стрижні – 6, 7, 9, 10. Реакція двох із них (S_9 та S_{10}) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла F (рис. 2.15, δ). До вузла прикладено зовнішнє зусилля Q під кутом β до вертикалі. Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 7 спрямовано під кутом η до горизонталі.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_{10} - Q \cdot \sin(\beta) - S_7 \cdot \cos(\eta) - S_6 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -Q \cdot \cos(\beta) - S_7 \cdot \sin(\eta) - S_9 = 0. \end{cases}$$

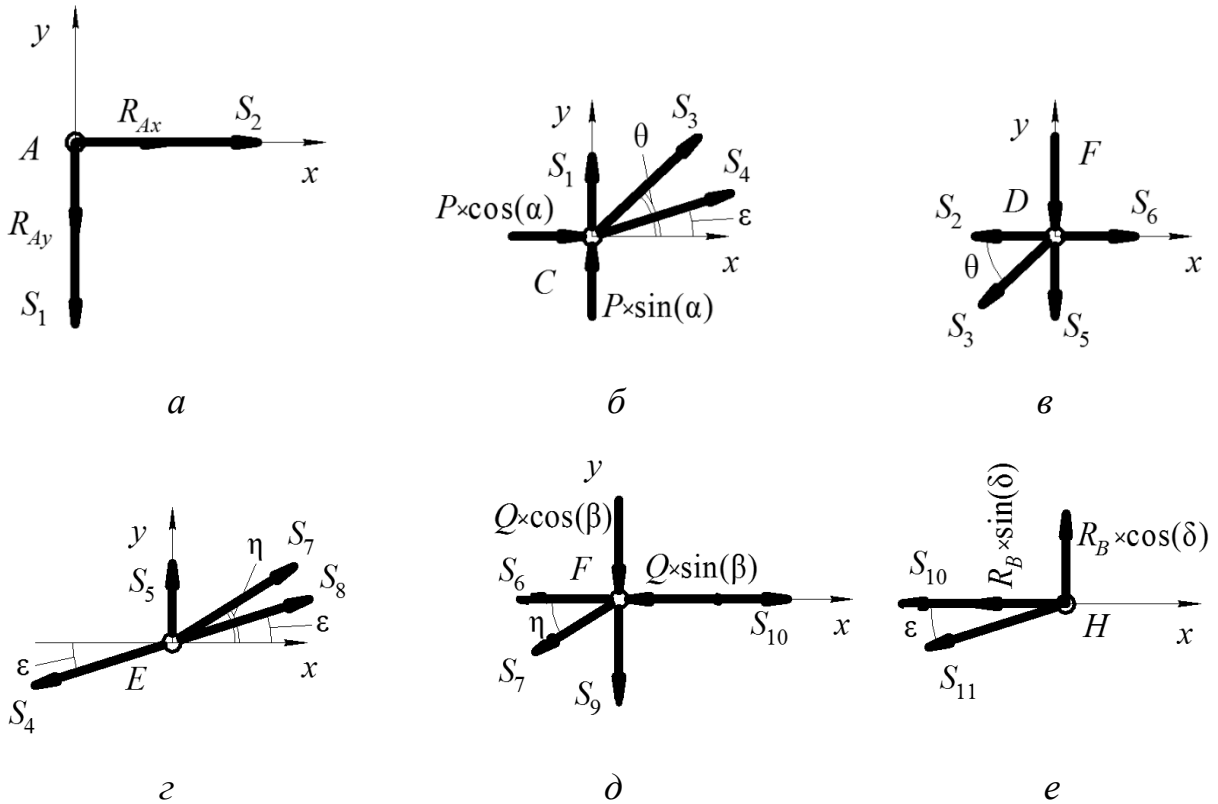
Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$S_{10} = Q \cdot \sin(\beta) + S_7 \cdot \cos(\eta) + S_6 = -31,52 \text{ (кН)};$$

$$S_9 = -Q \cdot \cos(\beta) - S_7 \cdot \sin(\eta) = 6,28 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижень 10 стиснутий, а стрижень 9 розтягнутий.

Переходимо до вузла H . У ньому збігаються три стрижні – 10, 11 та BH . Реакція одного із них (S_{11}) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла H (рис. 2.15, e). Реакцію опори B , яку з'єднано з вузлом H за допомогою стрижня BH , спрямовано під кутом δ до вертикалі. Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижня 11 спрямовано під кутом ε до горизонталі.



a - вузол A ;

b - вузол C ;

v - вузол D ;

z - вузол E ;

d - вузол F ;

e - вузол H .

Рисунок 2.15 - Розрахункові схеми вузлів A, C, D, E, F, H ферми (ТМ-2, приклад 3)

Складемо одне рівняння рівноваги та визначимо невідому S_{11}

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_B \cdot \cos(\delta) - S_{11} \cdot \sin(\epsilon) = 0;$$

$$S_{11} = \frac{R_B \cdot \cos(\delta)}{\sin(\epsilon)} = 30,5 \text{ (кН)}.$$

Це означає, що стрижень 11 є розтягнутим.

Таким чином, визначили усі невідомі зусилля у стрижнях.

3. Виконаємо перевірку розрахунків зусиль у стрижнях за допомогою методу Ріттера (методу перерізів).

Умовно розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 2, 3, 4 (рис. 2.16). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу однієї із частин (наприклад, лівої), послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці *C* збігаються сили S_3 та S_4 , у точці *D* – S_2 та S_3 , у точці *H* – S_2 та S_4 .

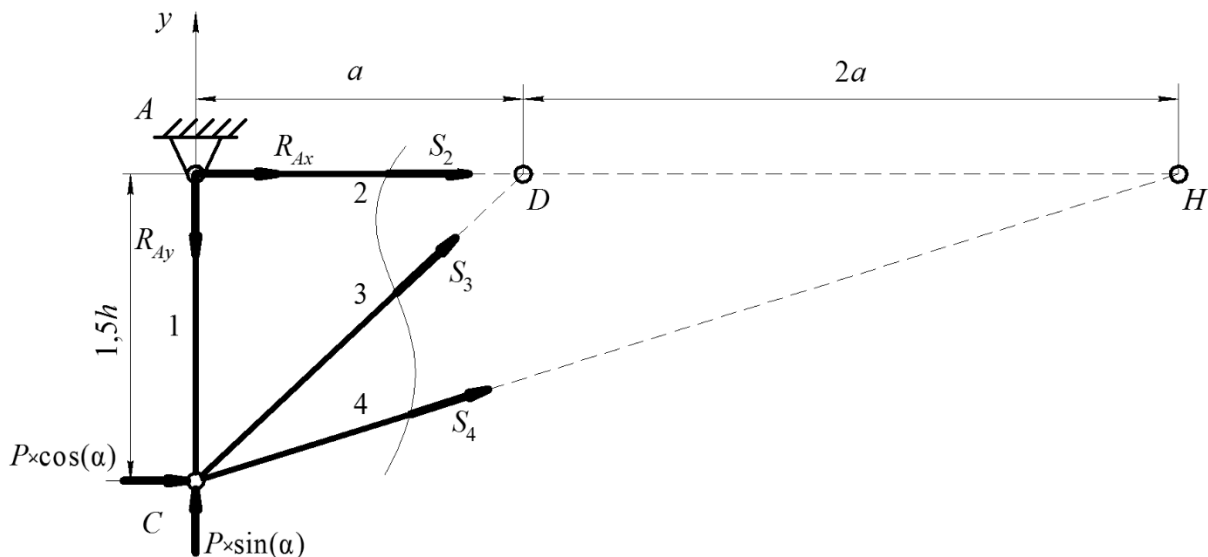


Рисунок 2.16 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 2, 3, 4 (ТМ-2, приклад 3)

Рівняння рівноваги

$$\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = 0; S_4 \cdot \cos(\epsilon) \cdot 1,5 \cdot h - S_4 \cdot \sin(\epsilon) \cdot a + R_{Ay} \cdot a +$$

$$+ P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = 0; -R_{Ax} \cdot h + S_2 \cdot h = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_H(F_i) = 0; S_3 \cdot \cos(\theta) \cdot 1,5 \cdot h - S_3 \cdot \sin(\theta) \cdot 3 \cdot a + R_{Ay} \cdot 3 \cdot a +$$

$$+ P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a = 0.$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$S_2 = -R_{Ax} = -3,63 \text{ (кН)};$$

$$S_3 = \frac{P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h - R_{Ay} \cdot 3 \cdot a}{\cos(\theta) \cdot 1,5 \cdot h - \sin(\theta) \cdot 3 \cdot a} = -14,81 \text{ (кН)};$$

$$S_4 = \frac{P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h - R_{Ay} \cdot a}{\cos(\varepsilon) \cdot 1,5 \cdot h - \sin(\varepsilon) \cdot a} = 9,55 \text{ (кН)}.$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 2, 3, 4, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Далі розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 6, 7, 8 ([рис. 2.17](#)). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу однієї із частин (наприклад, лівої), послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці F збігаються сили S_6 та S_7 , у точці E – S_7 та S_8 , у точці H – S_6 та S_8 .

Рівняння рівноваги

$$\sum_{i=1}^n M_F(F_i) = 0; R_{Ay} \cdot 2a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 2a +$$

$$+ F \cdot a + S_8 \cdot \cos(\varepsilon) \cdot DE - S_8 \cdot \sin(\varepsilon) \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_E(F_i) = 0; -S_6 \cdot DE - R_{Ax} \cdot DE + R_{Ay} \cdot a -$$

$$- P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (1,5 \cdot h - DE) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_H(F_i) = 0; S_7 \cdot \cos(\eta) \cdot DE - S_7 \cdot \sin(\eta) \cdot 2a + F \cdot 2a + R_{Ay} \cdot 3a + \\ + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3a = 0.$$

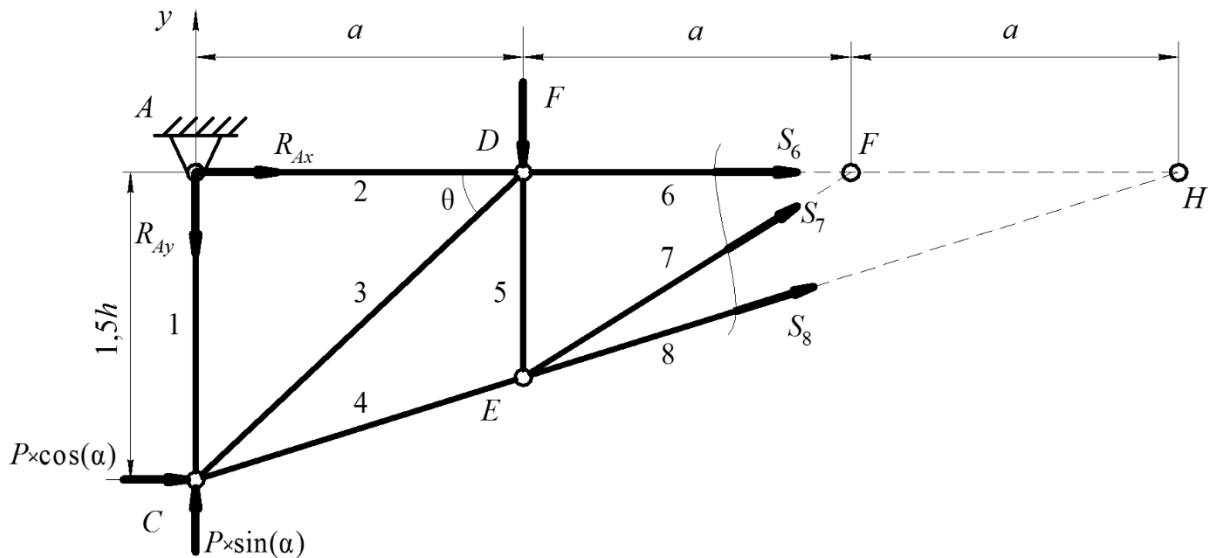


Рисунок 2.17 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 6, 7, 8 (ТМ-2, приклад 3)

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$S_6 = \frac{-R_{Ax} \cdot DE + R_{Ay} \cdot a - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (1,5 \cdot h - DE)}{DE} = \\ = -14,1 \text{ (кН)};$$

$$S_7 = \frac{-F \cdot 2a - R_{Ay} \cdot 3a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3a}{\cos(\eta) \cdot DE - \sin(\eta) \cdot 2a} = \\ = -26,94 \text{ (кН)};$$

$$S_8 = \frac{-R_{Ay} \cdot 2a - P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1,5 \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 2a - F \cdot a}{\cos(\varepsilon) \cdot DE - \sin(\varepsilon) \cdot a} = 33,18 \text{ (кН)}.$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 6, 7, 8, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Підведемо підсумки. Стрижні 2, 3, 6, 7, 10 – стиснуті, стрижні 1, 4, 5, 8, 9, 11 – розтягнуті.

Відповідь: $R_{Ax} = 3,63$ кН; $R_{Ay} = -6,04$ кН; $R_A = 7,05$ кН;
 $R_B = 9,99$ кН; $S_1 = 6,04$ кН; $S_2 = -3,63$ кН; $S_3 = -14,81$ кН; $S_4 = 9,55$ кН;
 $S_5 = 7,47$ кН; $S_6 = -14,1$ кН; $S_7 = -26,94$ кН; $S_8 = 33,18$ кН;
 $S_9 = 6,28$ кН; $S_{10} = -31,52$ кН; $S_{11} = 30,5$ кН.

2.3.1 ТМ-2, приклад 3. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої трипанельної трикутної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lll}
 a := 3\text{m} & P := 2\text{kN} & \alpha := 45\text{deg} \\
 h := 2\text{m} & F := 3\text{kN} & \beta := 30\text{deg} \\
 & Q := 10\text{kN} & \gamma := 25\text{deg} \\
 & T := 6\text{kN} & \delta := 15\text{deg}
 \end{array}$$

- визначення допоміжного кута ε

$$\varepsilon := \text{atan}\left(\frac{1.5 \cdot h}{3 \cdot a}\right) = 18.435\text{deg}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 2.13](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & Ra_x + P \cdot \cos(\alpha) - Rb \cdot \sin(\delta) - Q \cdot \sin(\beta) + T \cdot \sin(\gamma) = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & -Ra_y + P \cdot \sin(\alpha) - F - Q \cdot \cos(\beta) - T \cdot \cos(\gamma) + Rb \cdot \cos(\delta) = 0 \\
 \sum_i M_A(F_i) = 0 & P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - F \cdot a - Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a - T \cdot \cos(\gamma) \cdot 2 \cdot a + \\
 & + T \cdot \sin(\gamma) \cdot a \cdot \tan(\varepsilon) + Rb \cdot \cos(\delta) \cdot 3 \cdot a = 0
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$Rb := \frac{P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - F \cdot a - Q \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a - T \cdot \cos(\gamma) \cdot 2 \cdot a + T \cdot \sin(\gamma) \cdot a \cdot \tan(\varepsilon)}{3 \cdot a \cdot \cos(\delta)} = 9.986 \cdot \text{kN}$$

$$Ra_x := -(P \cdot \cos(\alpha) - Rb \cdot \sin(\delta) - Q \cdot \sin(\beta) + T \cdot \sin(\gamma)) = 3.631 \cdot \text{kN}$$

$$Ra_y := P \cdot \sin(\alpha) - F - Q \cdot \cos(\beta) - T \cdot \cos(\gamma) + Rb \cdot \cos(\delta) = -6.038 \cdot \text{kN}$$

$$Ra := \sqrt{Ra_x^2 + Ra_y^2} = 7.046 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad R_{ay} \cdot 3 \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a + F \cdot 2 \cdot a + \\ + Q \cdot \cos(\beta) \cdot a + T \cdot \cos(\gamma) \cdot a + T \cdot \sin(\gamma) \cdot a \cdot \tan(\varepsilon) = -2.501 \times 10^{-14} \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

- методом вирізання вузлів розглянути рівновагу вузлів A, C, D, E, F, H

вузол A

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{ax} + S2 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -R_{ay} - S1 = 0$$

$$S1 := -R_{ay} = 6.038 \cdot \text{kN}$$

$$S2 := -R_{ax} = -3.631 \cdot \text{kN}$$

вузол C

$$\tan(\theta) = \frac{1.5 \cdot h}{a} \quad \theta := \text{atan}\left(\frac{1.5 \cdot h}{a}\right) = 45 \cdot \text{deg}$$

$$\cos(\theta) = 0.707 \quad \sin(\theta) = 0.707$$

$$S3 := -1 \cdot \text{kN}$$

$$S4 := 1 \cdot \text{kN}$$

Given

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P \cdot \cos(\alpha) + S3 \cdot \cos(\theta) + S4 \cdot \cos(\varepsilon) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S1 + P \cdot \sin(\alpha) + S3 \cdot \sin(\theta) + S4 \cdot \sin(\varepsilon) = 0$$

$$\text{Find}(S3, S4) = \begin{pmatrix} -14.809 \\ 9.547 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

вузол D

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S2 - S3 \cdot \cos(\theta) + S6 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -F - S5 - S3 \cdot \sin(\theta) = 0$$

$$S6 := S2 + S3 \cdot \cos(\theta) = -14.103 \cdot \text{kN}$$

$$S5 := -F - S3 \cdot \sin(\theta) = 7.472 \cdot \text{kN}$$

вузол *E*

$$DE := 2 \cdot a \cdot \tan(\varepsilon) = 2 \text{ m}$$

$$\eta := \text{atan}\left(\frac{DE}{a}\right) = 33.69 \cdot \text{deg}$$

$$S7 := -1 \text{ kN}$$

$$S8 := 1 \text{ kN}$$

Given

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S4 \cdot \cos(\varepsilon) + S7 \cdot \cos(\eta) + S8 \cdot \cos(\varepsilon) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S5 + S7 \cdot \sin(\eta) + S8 \cdot \sin(\varepsilon) - S4 \cdot \sin(\varepsilon) = 0$$

$$\text{Find}(S7, S8) = \begin{pmatrix} -26.939 \\ 33.175 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

вузол *F*

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad S10 - Q \cdot \sin(\beta) - S7 \cdot \cos(\eta) - S6 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -Q \cdot \cos(\beta) - S7 \cdot \sin(\eta) - S9 = 0$$

$$S10 := S6 + Q \cdot \sin(\beta) + S7 \cdot \cos(\eta) = -31.518 \cdot \text{kN}$$

$$S9 := -Q \cdot \cos(\beta) - S7 \cdot \sin(\eta) = 6.283 \cdot \text{kN}$$

вузол *H*

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad Rb \cdot \cos(\delta) - S11 \cdot \sin(\varepsilon) = 0$$

$$S11 := \frac{Rb \cdot \cos(\delta)}{\sin(\varepsilon)} = 30.502 \cdot \text{kN}$$

- методом Ріттера перевірити правильність виконання розрахунків, виконавши переріз через стрижні 2, 3, 4

$$\sum_i M_D(F_i) = 0 \quad S4 \cdot \cos(\varepsilon) \cdot 1.5 \cdot h - S4 \cdot \sin(\varepsilon) \cdot a + Ray \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a = 0$$

$$S4 := \frac{Ray \cdot a - P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + 1.5 \cdot P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{a \cdot \sin(\varepsilon) - 1.5 \cdot h \cdot \cos(\varepsilon)} = 9.547 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_C(F_i) = 0 \quad -Rax \cdot h - S2 \cdot h = 0$$

$$S2 := -Rax = -3.631 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_H(F_i) = 0 \quad S3 \cdot \cos(\theta) \cdot 1.5 \cdot h - S3 \cdot \sin(\theta) \cdot 3 \cdot a + Ray \cdot 3 \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a = 0$$

$$S3 := -\frac{3 \cdot Ray \cdot a - 3 \cdot P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + 1.5 \cdot P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{1.5 \cdot h \cdot \cos(\theta) - 3 \cdot a \cdot \sin(\theta)} = -14.809 \cdot \text{kN}$$

а також, через стрижні 6, 7, 8

$$\sum_i M_F(F_i) = 0 \quad Ray \cdot 2 \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 2 \cdot a + F \cdot a + S8 \cdot \cos(\varepsilon) \cdot DE - S8 \cdot \sin(\varepsilon) \cdot a = 0$$

$$S8 := \frac{-F \cdot a - 2 \cdot Ray \cdot a + 2 \cdot P \cdot a \cdot \sin(\alpha) - 1.5 \cdot P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{DE \cdot \cos(\varepsilon) - a \cdot \sin(\varepsilon)} = 33.175 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_E(F_i) = 0 \quad -S6 \cdot DE - Rax \cdot DE + Ray \cdot a - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (1.5 \cdot h - DE) = 0$$

$$S6 := -\frac{DE \cdot Rax - Ray \cdot a + P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (DE - 1.5 \cdot h)}{DE} = -14.103 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_H(F_i) = 0 \quad S7 \cdot \cos(\eta) \cdot DE - S7 \cdot \sin(\eta) \cdot 2 \cdot a + F \cdot 2 \cdot a + Ray \cdot 3 \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot 1.5 \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a = 0$$

$$S7 := -\frac{2 \cdot F \cdot a + 3 \cdot Ray \cdot a - 3 \cdot P \cdot a \cdot \sin(\alpha) + 1.5 \cdot P \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{DE \cdot \cos(\eta) - 2 \cdot a \cdot \sin(\eta)} = -26.939 \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, внутрішні сили в стрижнях, розраховані методом вирізання вузлів та методом Ріттера, співпадають. Таким чином, можна вважати, що задачу розв'язано вірно.

2.4 ТМ-2, приклад 4. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної паралелограмподібної ферми

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Плоску паралелограмподібну ферму навантажено зовнішніми силами P , F , Q та T (рис. 2.18). Визначити реакції опор та зусилля у стрижнях такої ферми, якщо відомо, що $a = 1,5$ м, $h = 2,5$ м, $P = 4$ кН, $F = 6$ кН, $Q = 12$ кН, $T = 7$ кН, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 25^\circ$, $\delta = 15^\circ$.

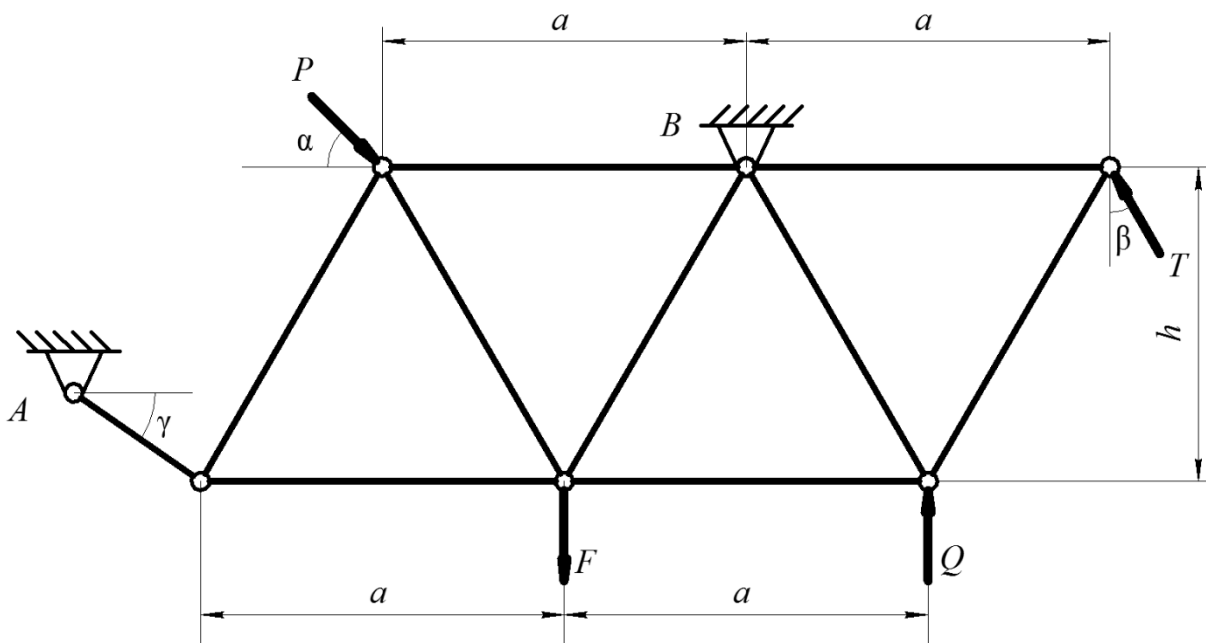


Рисунок 2.18 - Двопанельна паралелограмподібна ферма (ТМ-2, приклад 4)

Порядок розв'язання:

1. Визначимо опорні реакції ферми.
 - складемо розрахункову схему (рис. 2.19);
 - позначимо вісі координат x та y ;
 - відкинемо в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_A , R_{Bx} , R_{By} , зазначимо, що опору A приєднано до ферми за допомогою стрижня AC , тому реакцію в'язі A буде спрямовано вздовж цього стрижня.

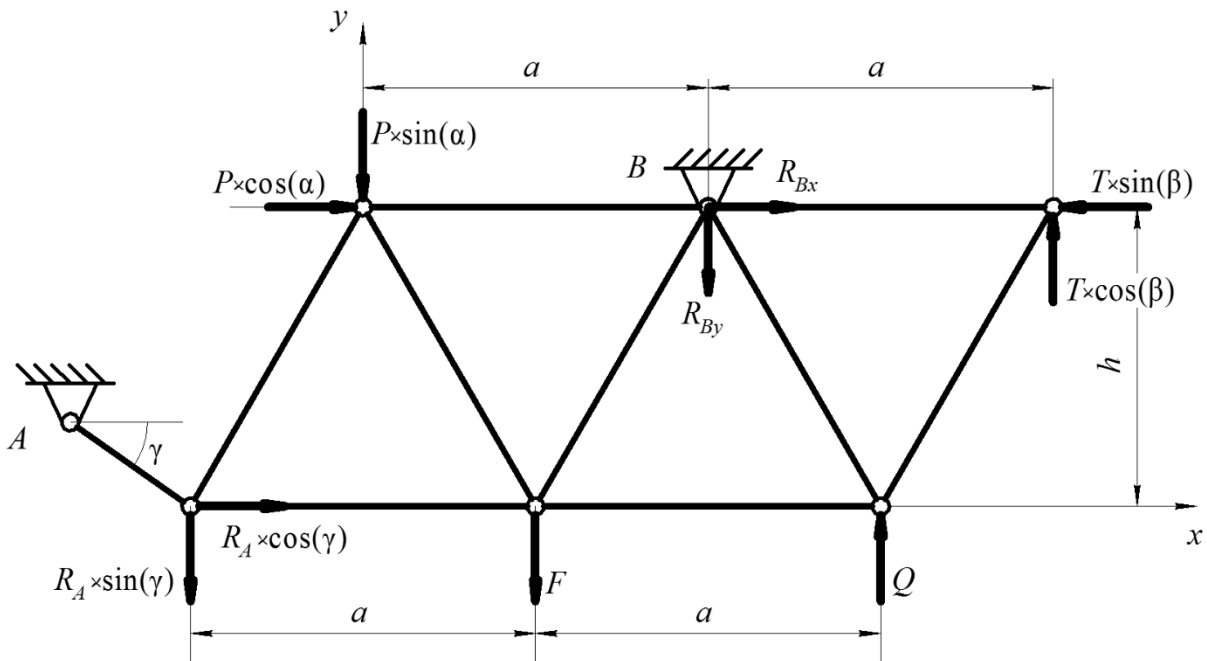


Рисунок 2.19 - Розрахункова схема ферми (ТМ-2, приклад 4)

Складемо рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_A \cdot \cos(\gamma) + P \cdot \cos(\alpha) + R_{Bx} - T \cdot \sin(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_A \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) - F + Q - R_{By} + T \cdot \cos(\beta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; R_A \cdot \sin(\gamma) \cdot 1,5a + R_A \cdot \cos(\gamma) \cdot h + \\ + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + F \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0. \end{array} \right.$$

– визначимо невідомі реакції в'язей

$$R_A = -\frac{P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + F \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a}{\sin(\gamma) \cdot 1,5a + \cos(\gamma) \cdot h} = -8,67 \text{ (кН)};$$

$$R_{Bx} = T \cdot \sin(\beta) - R_A \cdot \cos(\gamma) - P \cdot \cos(\alpha) = 6,84 \text{ (кН)};$$

$$R_{By} = -R_A \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) - F + Q + T \cdot \cos(\beta) = 13,6 \text{ (кН)};$$

– визначимо результуючу реакцію R_A в опорі A

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{6,84^2 + 15,6^2} = 15,22 \text{ (кН)};$$

– виконаємо перевірку вірності розрахунків

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -P \cdot \cos(\alpha) \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} - F \cdot a - R_{By} \cdot 1,5a -$$

$$-R_{Bx} \cdot h + Q \cdot 2a + T \cdot \cos(\beta) \cdot 2,5a + T \cdot \sin(\beta) \cdot h =$$

$$= -4 \cdot 0,71 \cdot 2,5 - 4 \cdot 0,71 \cdot \frac{1,5}{2} - 6 \cdot 1,5 - 13,6 \cdot 1,5 \cdot 1,5 -$$

$$-6,84 \cdot 2,5 + 12 \cdot 2 \cdot 1,5 + 7 \cdot 0,97 \cdot 2,5 \cdot 1,5 + 7 \cdot 0,26 \cdot 2,5 = 0.$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$, отже реакції в'язей визначено вірно.

2. Визначимо зусилля у стрижнях за допомогою методу вирізання вузлів.

Для визначення зусиль у стрижнях ферми позначимо усі стрижні арабськими цифрами з 1 до 9, а вузли ферми (точки, де збігаються стрижні) позначимо заголовними літерами C, D, E, F, G , (рис. 2.20).

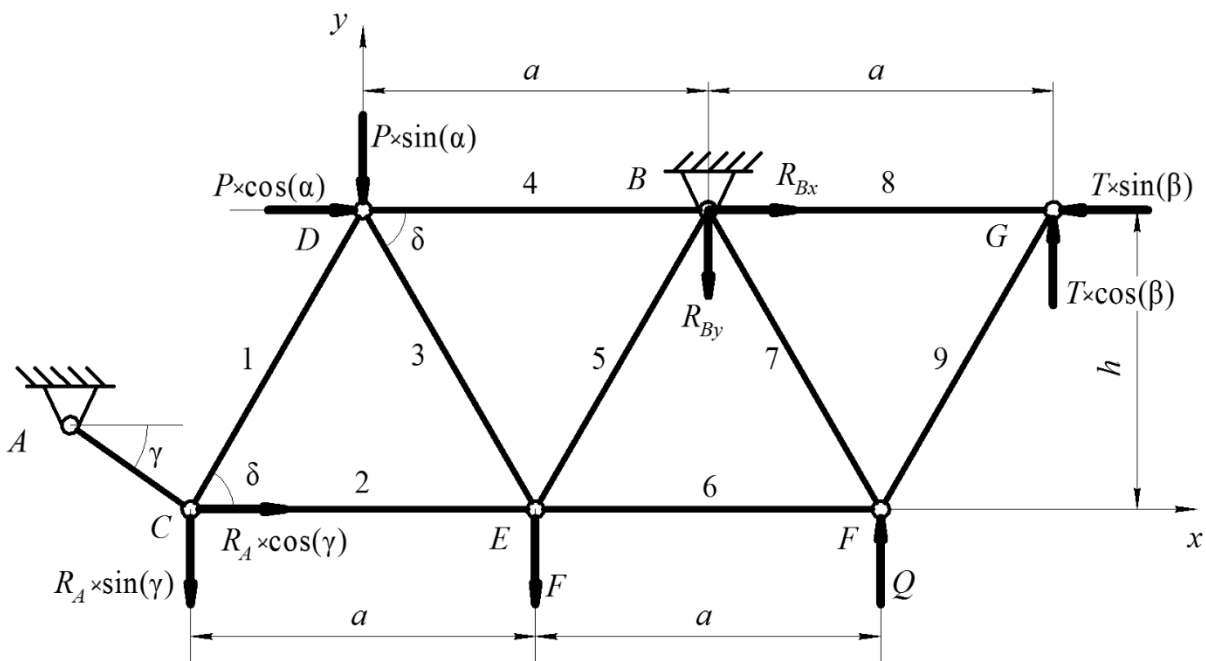


Рисунок 2.20 - Схема позначення вузлів та стрижнів (ТМ-2, приклад 4)

У представленому прикладі (рис. 2.20) є два вузли, в яких збігаються лише два стрижні з невідомими внутрішніми зусиллями – C та G . Розрахунки рівноваги вузлів можна почати із будь-якого із них. Оберемо

вузол C – у ньому збігаються стрижні 1 та 2, а також прикладено реакцію опори $A - R_A$. Складемо розрахункову схему вузла A (рис. 2.21, а).

– Відкинемо стрижні 1 та 2, їхню дію замінимо невідомими реакціями S_1 та S_2 ;

– спрямуємо реакції стрижнів S_1 та S_2 від вузла A , вважаючи, що стрижні умовно розтягнуті;

– позначимо вісі координат x та y .

– визначимо кут δ між силою S_1 та горизонталлю

$$\delta = \arctg\left(\frac{h}{0,5 \cdot a}\right) = 73,3^\circ.$$

Розглянемо рівновагу вузла, побудувавши рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_A \cdot \cos(\gamma) + S_2 + S_1 \cdot \cos(\delta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} \cdot \sin(\gamma) + S_1 \cdot \sin(\delta) = 0. \end{cases}$$

Знаходимо значення невідомих зусиль у стрижнях, розв'язавши цю систему рівнянь

$$\begin{cases} S_1 = \frac{R_{Ay} \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = -3,83 \text{ (кН)}; \\ S_2 = -R_A \cdot \cos(\gamma) - S_1 \cdot \cos(\delta) = 8,96 \text{ (кН)}. \end{cases}$$

Отримані результати означають, що стрижень 2 є розтягнутим, а стрижень 1 – стиснутим.

Переходимо до вузла D . У ньому збігаються три стрижні – 1, 3, 4. Реакція двох із них (S_3 та S_4) невідома. До вузла прикладено зовнішнє зусилля P під кутом α до горизонталі. Побудуємо розрахункову схему вузла D (рис. 2.21, б). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижнів 1 та 3 спрямовано під кутом δ до горизонталі із властивості внутрішніх навхрест лежачих кутів.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; P \cdot \cos(\alpha) + S_3 \cdot \cos(\delta) + S_4 - S_1 \cdot \cos(\delta) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -S_1 \cdot \sin(\delta) - P \cdot \sin(\alpha) - S_3 \cdot \sin(\delta) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$S_3 = -\frac{P \cdot \sin(\alpha) + S_1 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = 0,87 \text{ (кН)};$$

$$S_4 = -P \cdot \cos(\alpha) - S_3 \cdot \cos(\delta) + S_1 \cdot \cos(\delta) = -4,18 \text{ (кН)};$$

Отримані результати означають, що стрижень 4 стиснутий, а стрижень 3 розтягнутий.

Переходимо до вузла *E*. У ньому збігаються чотири стрижні – 2, 3, 5, 6. Реакція двох із них (S_5 та S_6) невідома. До вузла прикладено вертикальне зовнішнє зусилля F . Побудуємо розрахункову схему вузла *D* (рис. 2.21, в). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижнів 3 та 5 спрямовано під кутом δ до горизонталі.

Складемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_2 - S_3 \cdot \cos(\delta) + S_5 \cdot \cos(\delta) + S_6 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -F + S_5 \cdot \sin(\delta) + S_3 \cdot \sin(\delta) = 0. \end{cases}$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях

$$S_5 = \frac{F - S_3 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = 5,39 \text{ (кН)};$$

$$S_6 = S_2 + S_3 \cdot \cos(\delta) - S_5 \cdot \cos(\delta) = 7,66 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижні 5 та 6 розтягнуті.

Переходимо до вузла *B*. У ньому збігаються чотири стрижні – 4, 5, 7, 8. Реакція двох із них (S_7 та S_8) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла *B* (рис. 2.21, з). Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижнів 5 та 7 спрямовано під δ до горизонталі із властивості внутрішніх навхрест лежачих кутів.

Складемо рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_4 - S_5 \cdot \cos(\delta) + S_7 \cdot \cos(\delta) + S_8 + R_{Bx} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -S_5 \cdot \sin(\delta) - R_{By} - S_7 \cdot \sin(\delta) = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі зусилля у стрижнях методом підстановки

$$S_7 = \frac{-R_{By} - S_5 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = -19,59 \text{ (кН)};$$

$$S_8 = S_4 + S_5 \cdot \cos(\delta) - S_7 \cdot \cos(\delta) - R_{Bx} = -3,84 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижні 7 і 8 стиснуті.

Переходимо до вузла F . У ньому збігаються три стрижні – 6, 7, 9.

Реакція одного із них (S_9) невідома. Побудуємо розрахункову схему вузла F (рис. 2.21, δ). До вузла прикладено зовнішнє вертикальне зусилля Q . Спрямуємо реакції усіх стрижнів від вузла. Реакцію стрижнів 7 та 9 спрямовано під кутом δ до горизонталі.

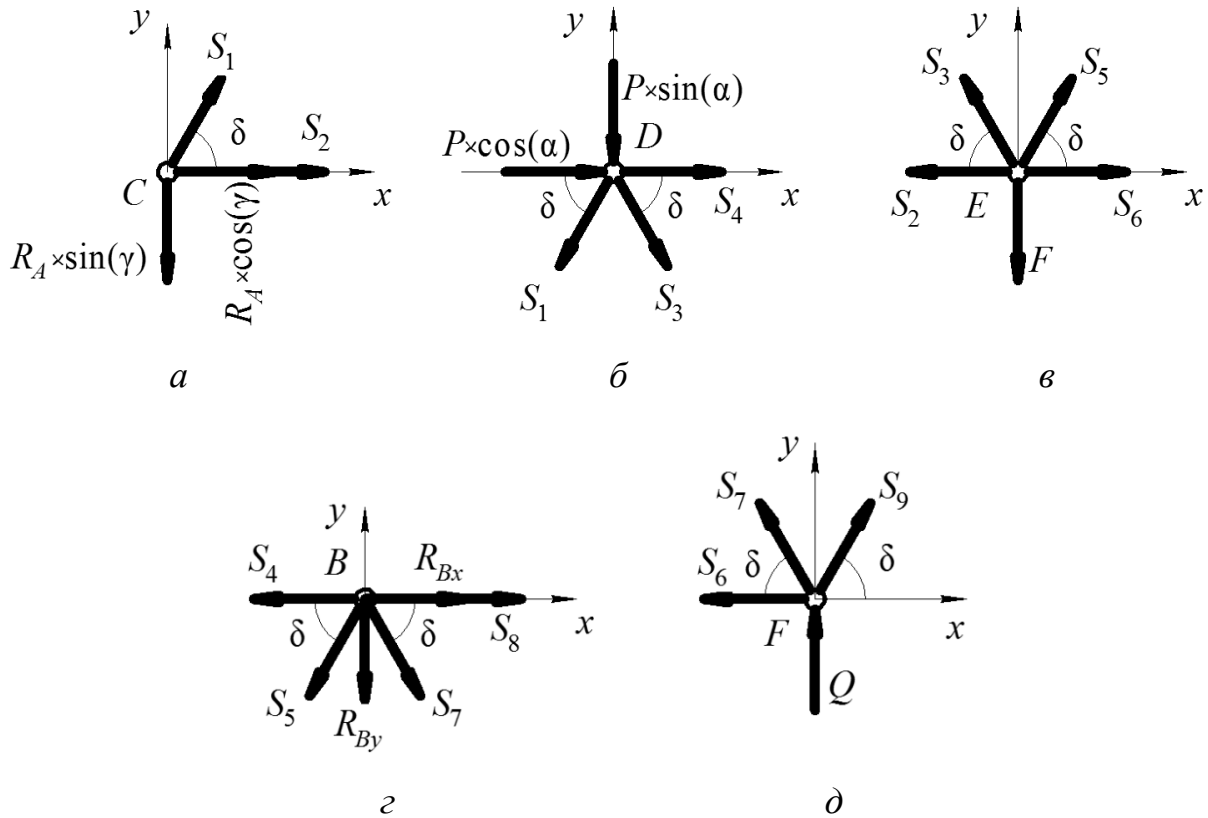
Складемо одне рівняння рівноваги та визначимо невідому S_9

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_7 \cdot \sin(\delta) + S_9 \cdot \sin(\delta) + Q = 0;$$

$$S_9 = -\frac{S_7 \cdot \sin(\delta) + Q}{\sin(\delta)} = 7,06 \text{ (кН)}.$$

Отримані результати означають, що стрижень 9 розтягнутий.

Таким чином, визначили усі невідомі зусилля у стрижнях.



a - вузол *C*;

б - вузол *D*;

в - вузол *E*;

з - вузол *B*;

д - вузол *F*.

Рисунок 2.21 - Розрахункові схеми вузлів *C*, *D*, *E*, *B*, *F* ферми

(ТМ-2, приклад 4)

3. Виконаємо перевірку розрахунків зусиль у стрижнях за допомогою методу Ріттера (методу перерізів).

Умовно розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 2, 3, 4 (рис. 2.22). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу лівої частини ферми, послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці *E* – S_2 та S_3 , у точці *D* – S_3 та S_4 , зусилля S_2 та S_4 – горизонтально спрямовані.

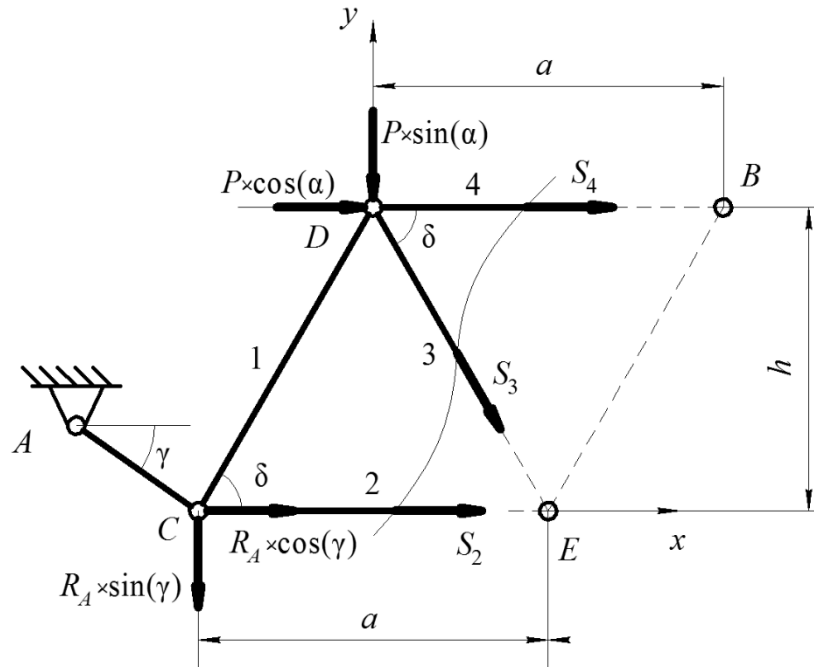


Рисунок 2.22 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 2, 3, 4 (ТМ-2, приклад 4)

Рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_E(F_i) = 0; -S_4 \cdot h - P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} + R_A \cdot \sin(\gamma) \cdot a = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_D(F_i) = 0; S_2 \cdot h + R_A \cdot \cos(\gamma) \cdot h + R_A \cdot \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{2} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_A \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) - S_3 \cdot \sin(\delta) = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$S_2 = -\frac{R_A \cdot \cos(\gamma) \cdot h + R_A \cdot \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{2}}{h} = 8,96 \text{ (кН)};$$

$$S_3 = \frac{-R_A \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\delta)} = 0,87 \text{ (кН)};$$

$$S_4 = \frac{-P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} + R_A \cdot \sin(\gamma) \cdot a}{h} = -4,18 \text{ (кН)}.$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 2, 3, 4, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Далі розріжемо ферму на 2 частини через стрижні 6, 7, 8 (рис. 2.23). Замінімо розрізані стрижні їхніми реакціями. Розглянемо рівновагу правої частини, послідовно склавши рівняння моментів сил відносно точок, де збігаються невідомі реакції двох із трьох стрижнів (точок Ріттера). У точці F збігаються сили S_6 та S_7 , у точці B – S_7 та S_8 , зусилля S_6 та S_8 – горизонтально спрямовані.

Рівняння рівноваги

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_F(F_i) = 0; S_8 \cdot h + T \cdot \sin(\beta) \cdot h + T \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; -S_6 \cdot h + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_7 \cdot \sin(\delta) + Q + T \cdot \cos(\beta) = 0. \end{array} \right.$$

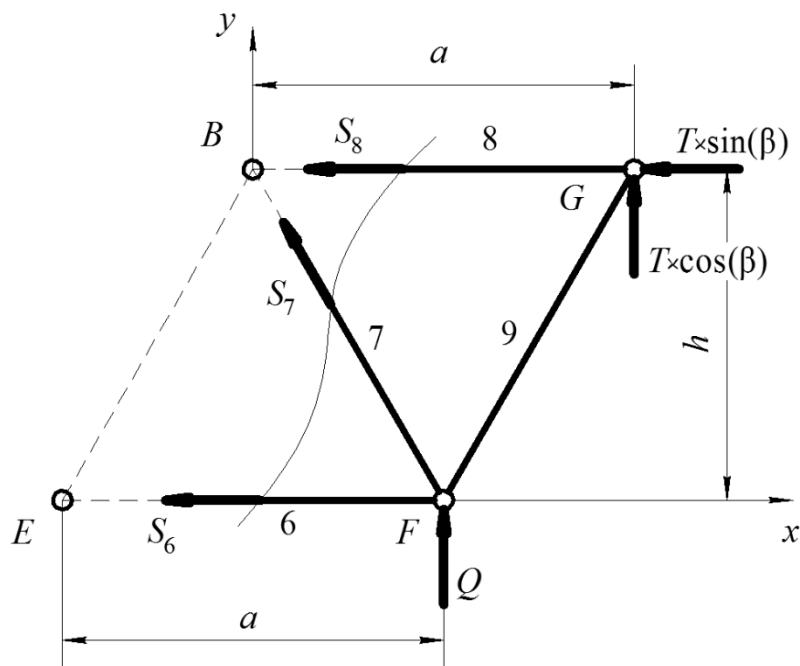


Рисунок 2.23 - Розрахункова схема для методу Ріттера за розгляду перерізу через стрижні 6, 7, 8 (ТМ-2, приклад 4)

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення зусиль у стрижнях

$$S_6 = \frac{Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a}{h} = 7,66 \text{ (кН)};$$

$$S_7 = -\frac{Q + T \cdot \cos(\beta)}{\sin(\delta)} = -19,59 \text{ (кН)};$$

$$S_8 = -\frac{T \cdot \sin(\beta) \cdot h + T \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2}}{h} = -3,84 \text{ (кН)}.$$

Таким чином, значення зусиль у стрижнях 6, 7, 8, розраховані методами вирізання вузлів та Ріттера співпадають, тому розрахунки можна вважати вірними.

Підведемо підсумки. Стрижні 1, 4, 7, 8 – стиснуті, стрижні 2, 2, 5, 6, 9 – розтягнуті.

Відповідь: $R_A = -8,67 \text{ кН}$; $R_{Bx} = 6,84 \text{ кН}$; $R_{By} = 13,6 \text{ кН}$; $R_B = 15,22 \text{ кН}$; $S_1 = -3,83 \text{ кН}$; $S_2 = 8,96 \text{ кН}$; $S_3 = 0,87 \text{ кН}$; $S_4 = -4,18 \text{ кН}$; $S_5 = 5,39 \text{ кН}$; $S_6 = 7,66 \text{ кН}$; $S_7 = -19,59 \text{ кН}$; $S_8 = -3,84 \text{ кН}$; $S_9 = 7,06 \text{ кН}$.

2.4.1 ТМ-2, приклад 4. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої двопанельної паралелограмподібної ферми аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-2↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{aligned} a &:= 1.5\text{m} & P &:= 4\text{kN} & \alpha &:= 45\text{deg} \\ h &:= 2.5\text{m} & F &:= 6\text{kN} & \beta &:= 15\text{deg} \\ & & Q &:= 12\text{kN} & \gamma &:= 25\text{deg} \\ & & T &:= 7\text{kN} & & \end{aligned}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 2.19](#)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0 & \quad Ra \cdot \cos(\gamma) + P \cdot \cos(\alpha) + Rbx - T \cdot \sin(\beta) = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 & \quad -Ra \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) - F + Q - Rby + T \cdot \cos(\beta) = 0 \\ \sum_i M_B(F_i) = 0 & \quad Ra \cdot \sin(\gamma) \cdot 1.5 \cdot a + Ra \cdot \cos(\gamma) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + F \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0 \end{aligned}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей

$$\begin{aligned} Ra &:= \frac{P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + F \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a}{\sin(\gamma) \cdot 1.5 \cdot a + \cos(\gamma) \cdot h} = -8.669 \cdot \text{kN} \\ Rbx &:= T \cdot \sin(\beta) - P \cdot \cos(\alpha) - Ra \cdot \cos(\gamma) = 6.84 \cdot \text{kN} \\ Rby &:= Q - F - Ra \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) + T \cdot \cos(\beta) = 13.597 \cdot \text{kN} \\ Rb &:= \sqrt{Rbx^2 + Rby^2} = 15.22 \cdot \text{kN} \end{aligned}$$

- перевірка правильності розрахунків

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad -P \cdot \cos(\alpha) \cdot h - P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} - F \cdot a - R_{by} \cdot 1.5 \cdot a -$$

$$- R_{bx} \cdot h + Q \cdot 2 \cdot a + T \cdot \cos(\beta) \cdot 2.5 \cdot a + T \cdot \sin(\beta) \cdot h = -5.457 \times 10^{-12} \text{ J}$$

- методом вирізання вузлів розглянути рівновагу вузлів C, D, E, B, F
вузол C

$$\delta := \text{atan}\left(\frac{h}{0.5 \cdot a}\right) = 73.301 \cdot \text{deg}$$

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_a \cdot \cos(\gamma) + S_2 + S_1 \cdot \cos(\delta) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -R_a \cdot \sin(\gamma) + S_1 \cdot \sin(\delta) = 0$$

$$S_1 := \frac{R_a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = -3.825 \cdot \text{kN}$$

$$S_2 := -R_a \cdot \cos(\gamma) - S_1 \cdot \cos(\delta) = 8.956 \cdot \text{kN}$$

вузол D

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P \cdot \cos(\alpha) + S_4 + S_3 \cdot \cos(\delta) - S_1 \cdot \cos(\delta) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -P \cdot \sin(\alpha) - S_1 \cdot \sin(\delta) - S_3 \cdot \sin(\delta) = 0$$

$$S_3 := -\frac{P \cdot \sin(\alpha) + S_1 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = 0.872 \cdot \text{kN}$$

$$S_4 := S_1 \cdot \cos(\delta) - P \cdot \cos(\alpha) - S_3 \cdot \cos(\delta) = -4.178 \cdot \text{kN}$$

вузол E

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S_2 - S_3 \cdot \cos(\delta) + S_5 \cdot \cos(\delta) + S_6 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S_3 \cdot \sin(\delta) + S_5 \cdot \sin(\delta) - F = 0$$

$$S_5 := \frac{F - S_3 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = 5.392 \cdot \text{kN}$$

$$S_6 := S_2 + S_3 \cdot \cos(\delta) - S_5 \cdot \cos(\delta) = 7.657 \cdot \text{kN}$$

вузол B

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -S4 - S5 \cdot \cos(\delta) + S7 \cdot \cos(\delta) + S8 + Rbx = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -S5 \cdot \sin(\delta) - Rby - S7 \cdot \sin(\delta) = 0$$

$$S7 := \frac{-Rby - S5 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = -19.588 \cdot \text{kN}$$

$$S8 := S4 - Rbx + S5 \cdot \cos(\delta) - S7 \cdot \cos(\delta) = -3.84 \cdot \text{kN}$$

вузол F

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S7 \cdot \sin(\delta) + S9 \cdot \sin(\delta) + Q = 0$$

$$S9 := -\frac{Q + S7 \cdot \sin(\delta)}{\sin(\delta)} = 7.059 \cdot \text{kN}$$

- методом Ріттера перевірити правильність виконання розрахунків, виконавши переріз через стрижні 2, 3, 4

$$\sum_i M_E(F_i) = 0 \quad -S4 \cdot h - P \cdot \cos(\alpha) \cdot h + P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} + Ra \cdot \sin(\gamma) \cdot a = 0$$

$$S4 := \frac{\frac{P \cdot a \cdot \sin(\alpha)}{2} - P \cdot h \cdot \cos(\alpha) + Ra \cdot a \cdot \sin(\gamma)}{h} = -4.178 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_D(F_i) = 0 \quad S2 \cdot h + Ra \cdot \cos(\gamma) \cdot h + Ra \cdot \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$S2 := -\frac{\frac{Ra \cdot a \cdot \sin(\gamma)}{2} + Ra \cdot h \cdot \cos(\gamma)}{h} = 8.956 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -Ra \cdot \sin(\gamma) - P \cdot \sin(\alpha) - S3 \cdot \sin(\delta) = 0$$

$$S3 := -\frac{Ra \cdot \sin(\gamma) + P \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\delta)} = 0.872 \cdot \text{kN}$$

а також, через стрижні 6, 7, 8

$$\sum_i M_F(F_i) = 0 \quad S8 \cdot h + T \cdot \sin(\beta) \cdot h + T \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$S8 := \frac{\frac{T \cdot a \cdot \cos(\beta)}{2} + T \cdot h \cdot \sin(\beta)}{h} = -3.84 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i M_B(F_i) = 0 \quad -S6 \cdot h + Q \cdot \frac{a}{2} + T \cdot \cos(\beta) \cdot a = 0$$

$$S6 := \frac{\frac{Q \cdot a}{2} + T \cdot a \cdot \cos(\beta)}{h} = 7.657 \cdot \text{kN}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad S7 \cdot \sin(\delta) + Q + T \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$S7 := -\frac{Q + T \cdot \cos(\beta)}{\sin(\delta)} = -19.588 \cdot \text{kN}$$

Як бачимо, внутрішні сили в стрижнях, розраховані методом вирізання вузлів та методом Ріттера, співпадають. Таким чином, можна вважати, що задачу розв'язано вірно.

2.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-2)

↑ДО ТМ-2↑

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Умова задачі

Для заданої плоскої ферми визначити:

1. Реакції опор
2. Зусилля в стрижнях методом вирізання вузлів та методом Ріттера.

Таблиця 2.1 Вихідні дані для розрахунків і схеми до індивідуальних завдань

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
1	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 20 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
2	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 20 \text{ кН}$ $P_3 = 30 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
3	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 15 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 30 \text{ кН}$	
4	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 20 \text{ кН}$ $P_2 = 15 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
5	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 30 \text{ кН}$ $P_3 = 10 \text{ кН}$	
6	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 40 \text{ кН}$	
7	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 30 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 20 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
8	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 40 \text{ кН}$ $P_3 = 10 \text{ кН}$	
9	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 15 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 50 \text{ кН}$	
10	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 40 \text{ кН}$ $P_2 = 25 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
11	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 15 \text{ кН}$ $P_3 = 20 \text{ кН}$	
12	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 6 \text{ кН}$	
13	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 35 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 10 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
14	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 6 \text{ кН}$ $P_3 = 25 \text{ кН}$	
15	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 35 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 7 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
16	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 25 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
17	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 40 \text{ кН}$ $P_2 = 20 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
18	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 30 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
19	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 20 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 35 \text{ кН}$	
20	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 15 \text{ кН}$ $P_2 = 30 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
21	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 15 \text{ кН}$ $P_3 = 40 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
22	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 30 \text{ кН}$ $P_2 = 10 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
23	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 15 \text{ кН}$ $P_2 = 40 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	
24	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 25 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 15 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
25	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 45 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 10 \text{ кН}$	
26	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 50 \text{ кН}$ $P_3 = 10 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
27	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2,5 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $P_1 = 10 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 60 \text{ кН}$	
28	$a = 2 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $P_1 = 50 \text{ кН}$ $P_2 = 15 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
29	$a = 2 \text{ м}$ $h = 1,5 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $P_1 = 0 \text{ кН}$ $P_2 = 20 \text{ кН}$ $P_3 = 25 \text{ кН}$	
30	$a = 2 \text{ м}$ $h = 2 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $P_1 = 25 \text{ кН}$ $P_2 = 0 \text{ кН}$ $P_3 = 7 \text{ кН}$	

3 РІВНОВАГА СИЛ З УРАХУВАННЯМ ЗЧЕПЛЕННЯ (СИЛ ТЕРТЯ СПОКОЮ) (ТМ-3)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Під час контакту шорстких поверхонь виникає сила тертя, яка залежить від нормальної сили тиску (взаємодії тіл) та коефіцієнта тертя. Під час розгляду рівноваги системи тіл з урахуванням сили тертя між тілами треба враховувати цю силу тертя та взаємного нормального тиску. В рамках цієї задачі розглянемо два типи конструкцій систем тіл – з важелем та штоком, та визначимо реакції опор конструкції та мінімальну силу тиску на гальмівний елемент, необхідну для забезпечення рівноваги системи тіл.

План теми 3

- 3.1 [ТМ-3, приклад 1. Барабан та вертикальний важіль](#)
 - 3.1.1 [ТМ-3, приклад 1. Барабан та вертикальний важіль у Mathcad](#)
- 3.2 [ТМ-3, приклад 2. Барабан та горизонтальний шток](#)
 - 3.2.1 [ТМ-3, приклад 2. Барабан та горизонтальний шток у Mathcad](#)
- 3.3 [ТМ-3, приклад 3. Барабан та горизонтальний важіль](#)
 - 3.3.1 [ТМ-3, приклад 3. Барабан та горизонтальний важіль у Mathcad](#)
- 3.4 [ТМ-3, приклад 4. Барабан та довільно орієнтований шток](#)
 - 3.4.1 [ТМ-3, приклад 4. Барабан та довільно орієнтований шток у Mathcad](#)
- 3.5 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-3\)](#)

3.1 ТМ-3, приклад 1. Визначення реакцій опор у системі трьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та вертикальним важелем

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Систему тіл закріплено на двох шарнірно-нерухомих опорах (рис. 3.1). На важіль 3, який має гальмівну колодку, діє зовнішня горизонтальна зосереджена сила P . До барабана 2 приєднано тіло 1 вагою Q . Визначити опорні реакції в'язей такої системи та мінімальну силу P , необхідну для забезпечення рівноваги системи, якщо відомо, що $a = 2$ м, $b = 3$ м, $e = 0,2$ м, $R = 1$ м, $Q = 15$ кН, $f = 0,3$.

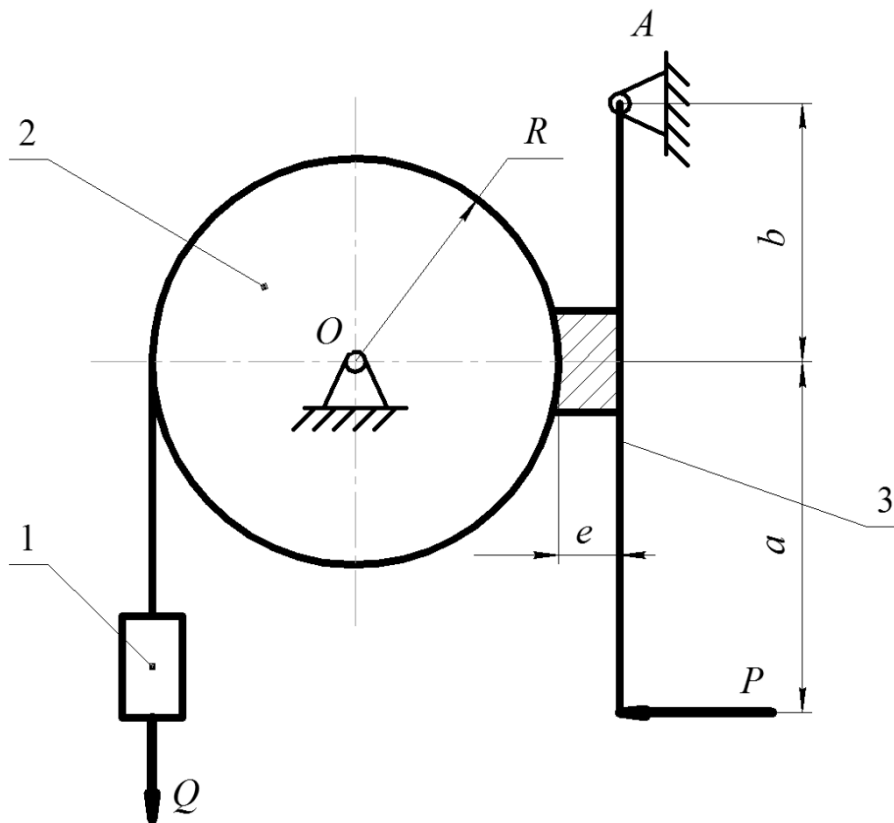


Рисунок 3.1 - Система трьох тіл (ТМ-3, приклад 1)

Порядок розв'язання:

1. Розбиваємо систему трьох тіл на окремі схеми, однак, враховуючи просту схему для окремого тіла 1, її можна об'єднати із схемою тіла 2.
2. Складемо розрахункову схему для барабана 2 з вантажем 1 (рис. 3.2) та для гальмівного важеля (рис. 3.3).

3. На розрахункових схемах позначимо вісі координат x та y ; відкинемо зовнішні в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Ax} , R_{Ay} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей.

4. Контакт барабана з важелем є внутрішнім зв'язком системи. На розрахунковій схемі барабана з вантажем дію важеля замінимо невідомими силами нормального тиску N_1 та тертя F_{mp1} . Сила тиску важеля на барабан N_1 прикладена у точці контакту тіл 2 і 3 та спрямована до центру барабана. Сила тертя F_{mp1} прикладена у точці контакту тіл 2 і 3 та спрямована вздовж дотичної до барабана у напрямку, за якого буде урівноважувати дію вантажа 1.

5. На розрахунковій схемі важеля сили нормального тиску N_2 та тертя F_{mp2} , які замінюють дію барабана, є попарно рівними та протилежно спрямованими своїм еквівалентним силам із схеми барабана відповідно до принципу рівності дії і протидії, тому за модулем $N_1 = N_2$ та $F_{mp1} = F_{mp2}$. Також, сила тертя між барабаном та гальмівною колодкою дорівнює добутку сили нормального тиску та коефіцієнта тертя $F_{mp} = N \cdot f$.

6. Складаємо рівняння рівноваги для схем барабана і важеля.

7. Визначаємо із рівнянь невідомі реакції в'язей та величину сили P , необхідної для рівноваги системи.

8. Перевіряємо результати шляхом складання рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції.

Складаємо рівняння рівноваги для розрахункової схеми барабана з вантажем ([рис. 3.2](#))

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ox} - N_1 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Oy} - F_{mp1} - Q = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0; Q \cdot R - F_{mp1} \cdot R = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$F_{\text{тр}1} = Q = 15 \text{ (кН)};$$

$$N_1 = \frac{F_{\text{тр}1}}{f} = \frac{15}{0,3} = 50 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ox} = N_1 = 50 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = F_{\text{тр}1} + Q = 30 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = \sqrt{50^2 + 30^2} = 58,3 \text{ (кН)}.$$

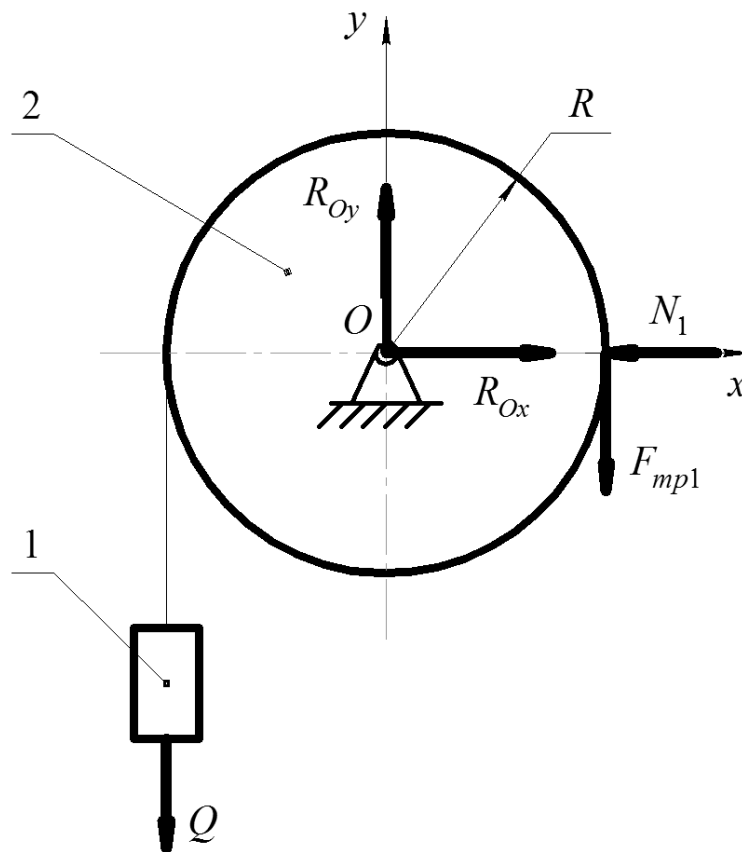


Рисунок 3.2 - Розрахункова схема барабана з вантажем (ТМ-3, приклад 1)

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми важеля
([рис. 3.3](#))

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -R_{Ax} + N_2 - P = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} + F_{\text{тр}2} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; N_2 \cdot b - F_{\text{тр}2} \cdot e - P \cdot (a + b) = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$P = -\frac{F_{\text{тр}2} \cdot e - N_2 \cdot b}{a + b} = 29,4 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = F_{\text{тр}2} = 15 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ax} = N_2 - P = 20,6 \text{ (кН)};$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{20,6^2 + 15^2} = 25,5 \text{ (кН)}.$$

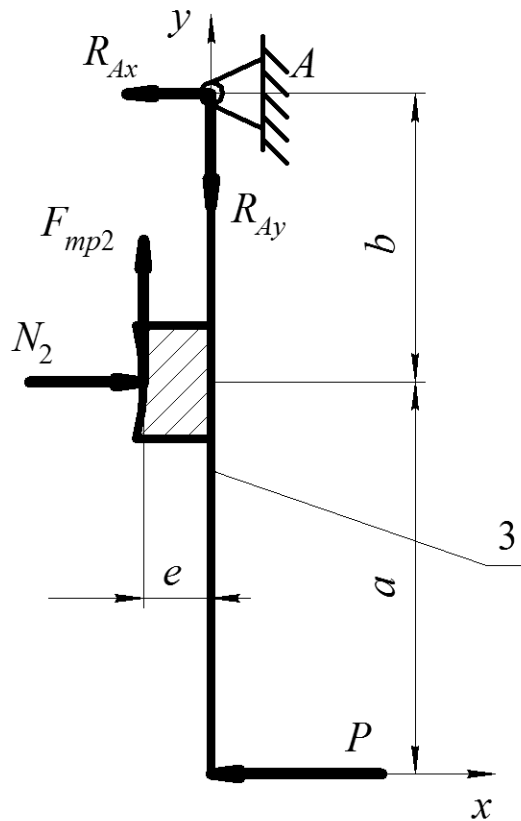


Рисунок 3.3 - Розрахункова схема гальмівного важеля (ТМ-3, приклад 1)

Виконаємо перевірку розрахунків, склавши рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції. Для цього можна обрати довільну точку на схемі, наприклад, точку контакту тіл K (рис. 3.4).

$$\sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0; Q \cdot 2 \cdot R - P \cdot a - R_{Oy} \cdot R + R_{Ax} \cdot b - R_{Ay} \cdot e = 0;$$

$$15 \cdot 2 \cdot 1 - 29,4 \cdot 2 - 30 \cdot 1 + 20,6 \cdot 3 - 15 \cdot 0,2 = 0.$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

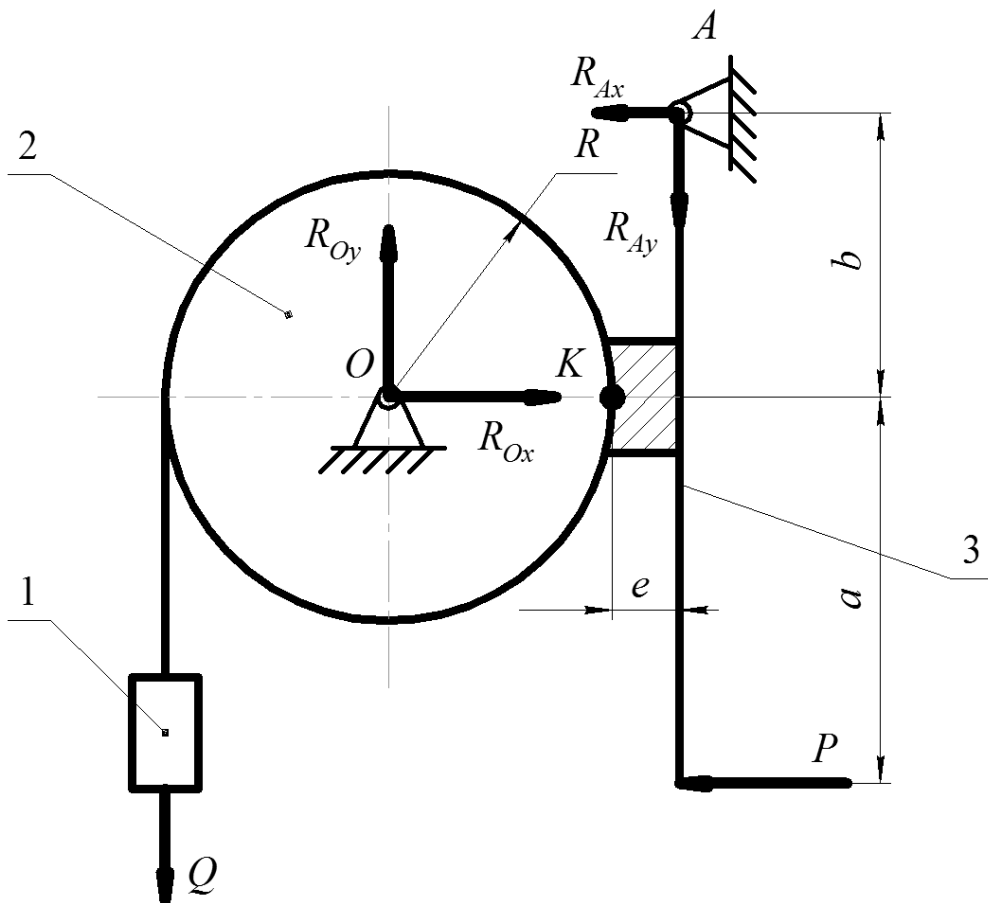


Рисунок 3.4 - Розрахункова схема системи із трьох тіл для виконання перевірки (ТМ-3, приклад 1)

Відповідь: $R_{Ox} = 50$ кН, $R_{Oy} = 30$ кН, $R_O = 58,3$ кН, $R_{Ax} = 20,6$ кН, $R_{Ay} = 15$ кН, $R_A = 25,5$ кН, $P = 29,4$ кН.

3.1.1 ТМ-3, приклад 1. Визначення реакцій опор у системі трьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та важелем аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор аналітичним методом у системі трьох тіл з урахуванням сил тертя у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{ll} a := 2\text{m} & R_1 := 1\text{m} \\ b := 3\text{m} & Q := 15\text{kN} \\ e := 0.2\text{m} & f := 0.3 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми барабана, орієнтуючись на [рисунок 3.2](#)

$$\begin{array}{ll} \sum_i F_{ix} = 0 & R_{Ox} - N_1 = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 & R_{Oy} - F_{\text{тп1}} - Q = 0 \\ \sum_i M_O(F_i) = 0 & Q \cdot R - F_{\text{тп1}} \cdot R = 0 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми барабана

$$\begin{array}{ll} F_{\text{тп1}} := Q = 15 \cdot \text{kN} & N_1 := \frac{F_{\text{тп1}}}{f} = 50 \cdot \text{kN} \\ R_{Ox} := N_1 = 50 \cdot \text{kN} & R_{Oy} := Q + F_{\text{тп1}} = 30 \cdot \text{kN} \\ R_O := \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 58.31 \cdot \text{kN} \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми важеля, орієнтуючись на [рисунок 3.3](#)

$$F_{\text{тп}2} := F_{\text{тп}1}$$

$$N_2 := N_1$$

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -R_{Ax} + N_2 - P = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -R_{Ay} + F_{\text{тп}2} = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad N_2 \cdot b - F_{\text{тп}2} \cdot e - P \cdot (a + b) = 0$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми важеля та значення сили P

$$P := -\frac{F_{\text{тп}2} \cdot e - N_2 \cdot b}{a + b} = 29.4 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := F_{\text{тп}2} = 15 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ax} := N_2 - P = 20.6 \cdot \text{kN}$$

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 25.483 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків шляхом складання рівняння рівноваги на загальній схемі конструкції

$$\sum_i M_K(F_i) = 0 \quad Q \cdot 2 \cdot R - P \cdot a - R_{oy} \cdot R + R_{ax} \cdot b - R_{ay} \cdot e = 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

3.2 ТМ-3, приклад 2. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним штоком

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Систему тіл закріплено на трьох шарнірно-нерухомих опорах (рис. 3.5). На горизонтальний шток 4 діє зовнішня зосереджена сила P , спрямована під кутом α до горизонталі. До барабана 3 на ідеальних нитках підвішено тіла 1 і 2 з вагою Q_1 і Q_2 відповідно. Визначити опорні реакції в'язей такої системи та мінімальну силу P , необхідну для забезпечення рівноваги системи, якщо відомо, що $a = 0,5$ м, $b = 1$ м, $c = 1,5$ м, $R = 4$ м, $r = 2,5$ м, $Q_1 = 2$ кН, $Q_2 = 4$ кН, $f = 0,15$, $\alpha = 45^\circ$.

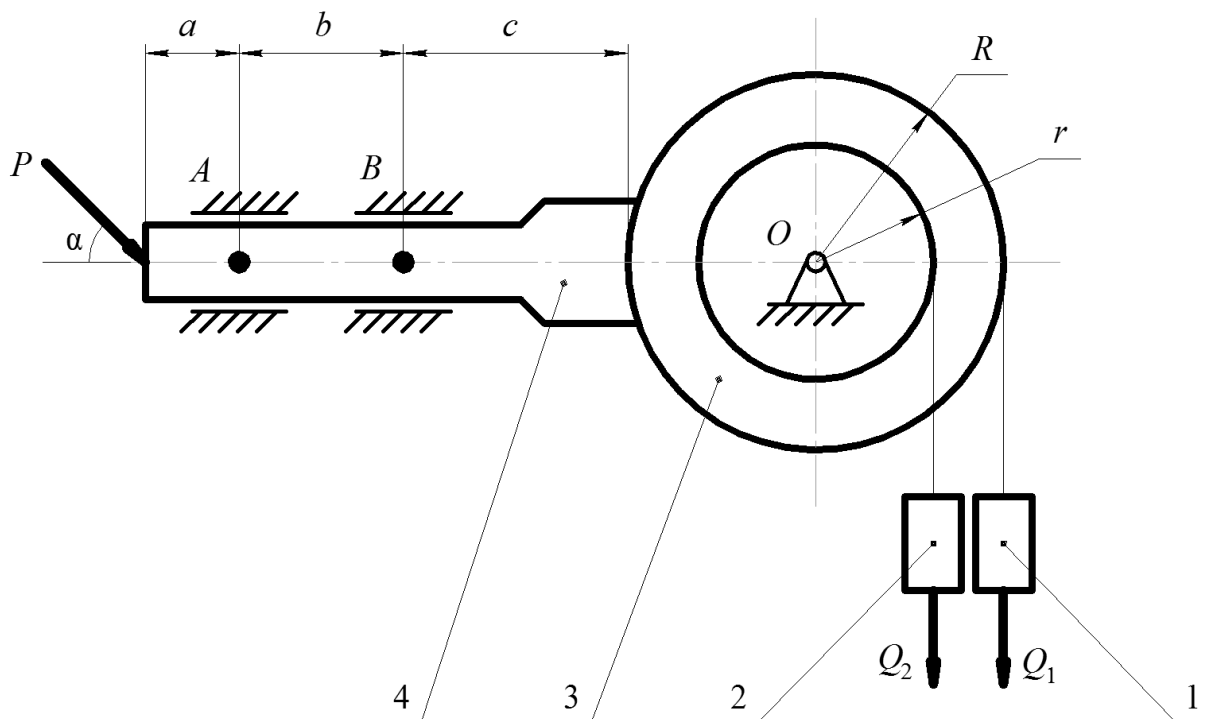


Рисунок 3.5 - Система чотирьох тіл (ТМ-3, приклад 2)

Порядок розв'язання:

1. Розбиваємо систему чотирьох тіл на окремі схеми, однак, враховуючи прості схеми для окремих тіл 1 чи 2, їх можна об'єднати зі схемою тіла 3.

2. Складемо розрахункову схему для барабана 3 з вантажами 1 і 2 (рис. 3.6) та для гальмівного штока (рис. 3.7).

3. На розрахункових схемах позначимо вісі координат x та y ; відкинемо зовнішні в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ox} , R_{Oy} , R_A , R_B відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей.

4. Контакт барабана зі штоком є внутрішнім зв'язком системи. На розрахунковій схемі барабана з вантажами дію важеля замінимо невідомими силами нормального тиску N_1 та тертя F_{mp1} . Сила тиску важеля на барабан N_1 прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована до центру барабана. Сила тертя F_{mp1} прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована вздовж дотичної до барабана у напрямку, за якого буде урівноважувати дію вантажів 1 і 2.

5. На розрахунковій схемі штока сили нормального тиску N_2 та тертя F_{mp2} , які замінюють дію барабана, є попарно рівними та протилежно спрямованими своїм еквівалентним силам зі схеми барабана відповідно до принципу рівності дії і протидії, тому за модулем $N_1 = N_2$ та $F_{mp1} = F_{mp2}$. Також, сила тертя між барабаном та гальмівним штоком дорівнює добутку сили нормального тиску та коефіцієнта тертя $F_{mp} = N \cdot f$.

6. Складаємо рівняння рівноваги для схем барабана і штока.

7. Визначаємо із рівнянь невідомі реакції в'язей та величину сили P , необхідної для рівноваги системи.

8. Перевіряємо результати шляхом складання рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції.

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми барабана з вантажем (рис. 3.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -R_{Ox} + N_1 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Oy} - F_{\text{тр}1} - Q_1 - Q_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0; -Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r + F_{\text{тр}1} \cdot R = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$F_{\text{тр}1} = \frac{Q_1 \cdot R + Q_2 \cdot r}{R} = 4,5 \text{ (кН)};$$

$$N_1 = \frac{F_{\text{тр}1}}{f} = \frac{4,5}{0,15} = 30 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ox} = N_1 = 30 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = F_{\text{тр}1} + Q_1 + Q_2 = 10,5 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = \sqrt{30^2 + 10,5^2} = 31,78 \text{ (кН)}.$$

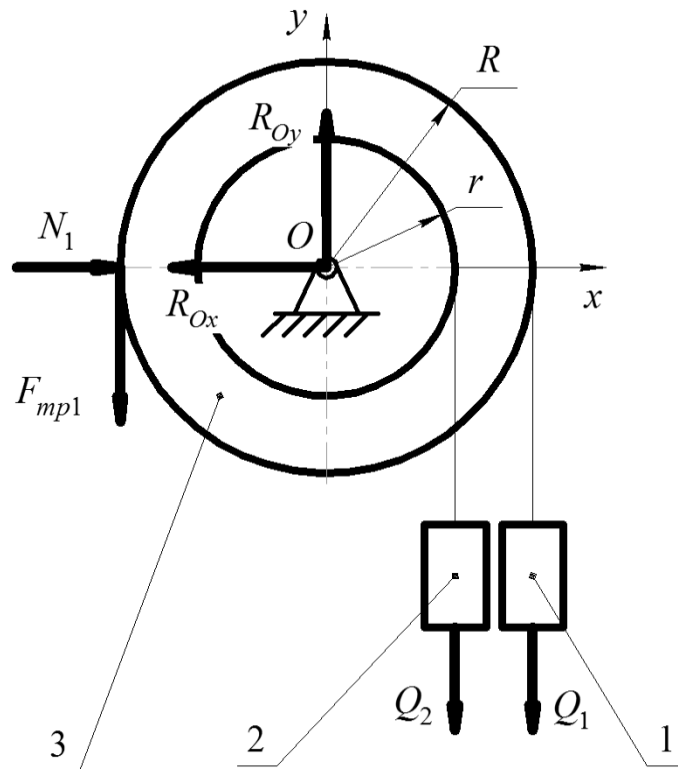


Рисунок 3.6 - Розрахункова схема барабана з вантажем і горизонтальним гальмівним штоком (ТМ-3, приклад 2)

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми штока (рис. 3.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; P \cdot \cos(\alpha) - N_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_A - R_B + F_{\text{тр}2} - P \cdot \sin(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - R_B \cdot b + F_{\text{тр}2} \cdot (b + c) = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$P = \frac{N_2}{\cos(\alpha)} = 42,42 \text{ (кН);}$$

$$R_B = \frac{F_{\text{тр}2} \cdot (b + c) + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a}{b} = 26,25 \text{ (кН);}$$

$$R_A = F_{\text{тр}2} - R_B - P \cdot \sin(\alpha) = -51,75 \text{ (кН);}$$

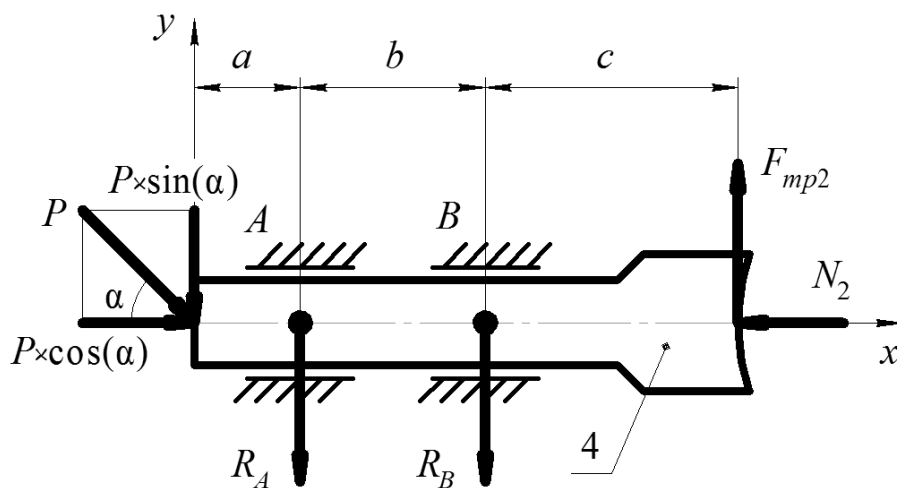


Рисунок 3.7 - Розрахункова схема горизонтального гальмівного штока (ТМ-3, приклад 2)

Виконаємо перевірку розрахунків, склавши рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції. Для цього оберемо довільну точку на схемі, наприклад, точку контакту тіл К (рис. 3.8).

$$\sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0; P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b + c) + R_A \cdot (b + c) + R_B \cdot c +$$

$$+ R_{Oy} \cdot R - Q_2 \cdot (R + r) - Q_1 \cdot 2R = 0;$$

$$42,42 \cdot 0,707 \cdot (0,5 + 1 + 1,5) + (-51,75) \cdot (1 + 1,5) + 26,25 \cdot 1,5 +$$

$$+ 10,5 \cdot 4 - 4 \cdot (4 + 2,5) - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 0$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

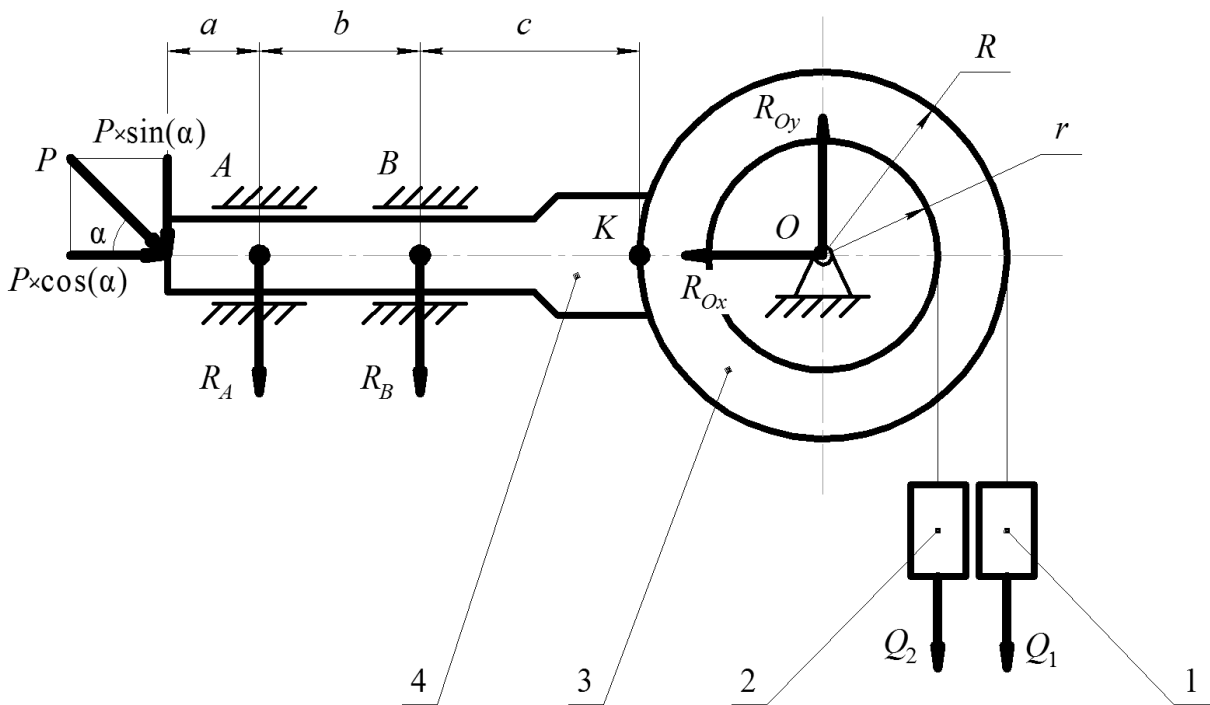


Рисунок 3.8 - Розрахункова схема системи із чотирьох тіл для виконання перевірки (ТМ-3, приклад 2)

Відповідь: $R_{Ox} = 30$ кН, $R_{Oy} = 10,5$ кН, $R_O = 31,78$ кН,
 $R_A = -51,75$ кН, $R_B = 26,25$ кН, $P = 42,42$ кН.

3.2.1 ТМ-3, приклад 2. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним штоком аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор аналітичним методом у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lll}
 a := 0.5\text{m} & R := 4\text{m} & Q_1 := 2\text{kN} \\
 b := 1\text{m} & r := 2.5\text{m} & Q_2 := 4\text{kN} \\
 c := 1.5\text{m} & & f := 0.15 \\
 & & \alpha := 45\text{deg}
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми барабана, орієнтуючись на [рисунок 3.6](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & -R_{Ox} + N_1 = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & R_{Oy} - F_{\text{тп1}} - Q_1 - Q_2 = 0 \\
 \sum_i M_O(F_i) = 0 & -Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r + F_{\text{тп1}} \cdot R = 0
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми барабана

$$\begin{array}{ll}
 F_{\text{тп1}} := \frac{Q_1 \cdot R + Q_2 \cdot r}{R} = 4.5 \cdot \text{kN} & N_1 := \frac{F_{\text{тп1}}}{f} = 30 \cdot \text{kN} \\
 R_{Ox} := N_1 = 30 \cdot \text{kN} & R_{Oy} := F_{\text{тп1}} + Q_1 + Q_2 = 10.5 \cdot \text{kN} \\
 R_O := \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 31.784 \cdot \text{kN}
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми штока, орієнтуючись на [рисунок 3.7](#)

$$F_{\text{тп}2} := F_{\text{тп}1}$$

$$N_2 := N_1$$

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0 & \quad P \cdot \cos(\alpha) - N_2 = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 & \quad -R_A - R_B + F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) = 0 \\ \sum_i M_A(F_i) = 0 & \quad P \cdot \sin(\alpha) \cdot a - R_B \cdot b + F_{\text{тп}2} \cdot (b + c) = 0 \end{aligned}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми штока та значення сили P

$$P := \frac{N_2}{\cos(\alpha)} = 42.426 \cdot \text{kN}$$

$$R_B := \frac{F_{\text{тп}2} \cdot (b + c) + P \cdot a \cdot \sin(\alpha)}{b} = 26.25 \cdot \text{kN}$$

$$R_A := F_{\text{тп}2} - R_B - P \cdot \sin(\alpha) = -51.75 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків шляхом складання рівняння рівноваги на загальній схемі конструкції

$$\sum_i M_K(F_i) = 0 \quad P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b + c) + R_A \cdot (b + c) + R_B \cdot c + R_{Oy} \cdot R - Q_2 \cdot (R + r) - Q_1 \cdot 2 \cdot R = -1.455 \times 10^{-11} \text{ J}$$

3.3 ТМ-3, приклад 3. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним важелем

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Систему тіл закріплено на двох шарнірно-нерухомих опорах (рис. 3.9). На важіль 4 діє зовнішня зосереджена сила P , спрямована під кутом α до вертикалі. До барабана 3 на ідеальних нитках підвішено тіла 1 і 2 з вагою Q_1 і Q_2 відповідно. Визначити опорні реакції в'язей такої системи та мінімальну силу P , необхідну для забезпечення рівноваги системи, якщо відомо, що $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 1$ м, $R = 2$ м, $r = 1,25$ м, $Q_1 = 3$ кН, $Q_2 = 5$ кН, $f = 0,25$, $\alpha = 45^\circ$.

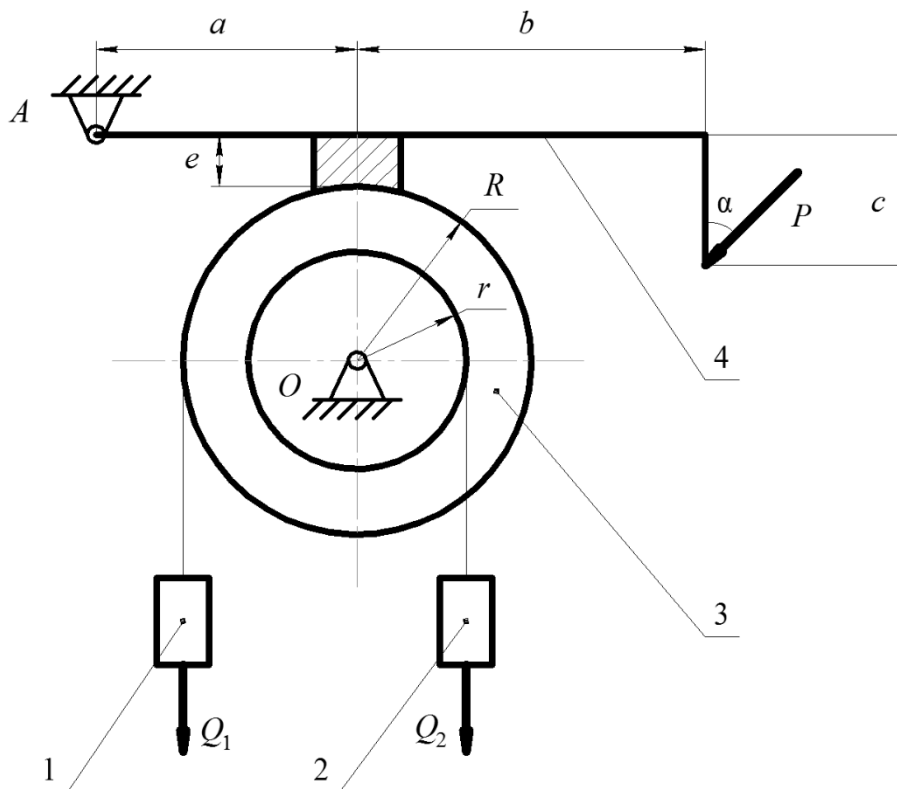


Рисунок 3.9 - Система чотирьох тіл (ТМ-3, приклад 3)

Порядок розв'язання:

1. Розбиваємо систему чотирьох тіл на окремі схеми. Врахуємо простоту схем для окремих тіл 1 чи 2. Їх можна об'єднати зі схемою тіла 3.

2. Складемо розрахункову схему для барабана 3 з вантажами 1 і 2 (рис. 3.10) та для гальмівного важеля (рис. 3.11).

3. На розрахункових схемах позначимо вісі координат x та y ; відкинемо зовнішні в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Ax} , R_{Ay} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей.

4. Контакт барабана з важелем є внутрішнім зв'язком системи. На розрахунковій схемі барабана з вантажем дію важеля замінимо невідомими силами нормального тиску N_1 та тертя F_{mp1} . Сила тиску важеля на барабан N_1 прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована до центру барабана. Сила тертя F_{mp1} прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована вздовж дотичної до барабана у напрямку, за якого буде урівноважувати дію вантажів 1 і 2.

5. На розрахунковій схемі важеля сили нормального тиску N_2 та тертя F_{mp2} , які замінюють дію барабана, є попарно рівними та протилежно спрямованими своїм еквівалентним силам із схеми барабана відповідно до принципу рівності дії і протидії, тому за модулем $N_1 = N_2$ та $F_{mp1} = F_{mp2}$. Також, сила тертя між барабаном та гальмівною колодкою дорівнює добутку сили нормального тиску та коефіцієнта тертя $F_{mp} = N \cdot f$.

6. Складаємо рівняння рівноваги для схем барабана і важеля.

7. Визначаємо із рівнянь невідомі реакції в'язей та величину сили P , необхідної для рівноваги системи.

8. Перевіряємо результати шляхом складання рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції.

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми барабана з вантажем (рис. 3.10)

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ox} - F_{mp1} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -N_1 + R_{Oy} - Q_1 - Q_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0; Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r + F_{\text{тр}1} \cdot R = 0.$$

Визначимо невідомі

$$F_{\text{тр}1} = -\frac{Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r}{R} = 0,125 \text{ (кН)};$$

$$N_1 = \frac{F_{\text{тр}1}}{f} = \frac{0,125}{0,3} = 0,5 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ox} = F_{\text{тр}1} = 0,125 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = N_1 + Q_1 + Q_2 = 8,5 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = \sqrt{0,125^2 + 8,5^2} = 8,501 \text{ (кН)}.$$

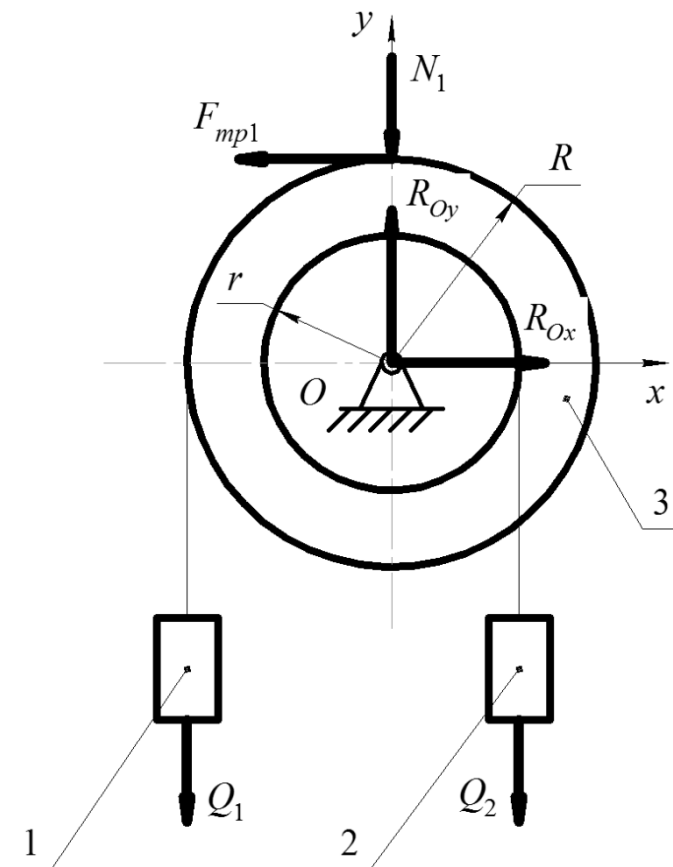


Рисунок 3.10 - Розрахункова схема барабана з вантажем і горизонтальним гальмівним важелем (ТМ-3, приклад 3)

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми важеля (рис. 3.11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -R_{Ax} + F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_{Ay} + N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; N_2 \cdot a + F_{\text{тп}2} \cdot e - P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot c = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$P = \frac{F_{\text{тп}2} \cdot e + N_2 \cdot a}{(a + b) \cdot \cos(\alpha) + c \cdot \sin(\alpha)} = 0,243 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0,328 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ax} = F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) = -0,047 \text{ (кН)};$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-0,047)^2 + 0,328^2} = 0,331 \text{ (кН)}.$$

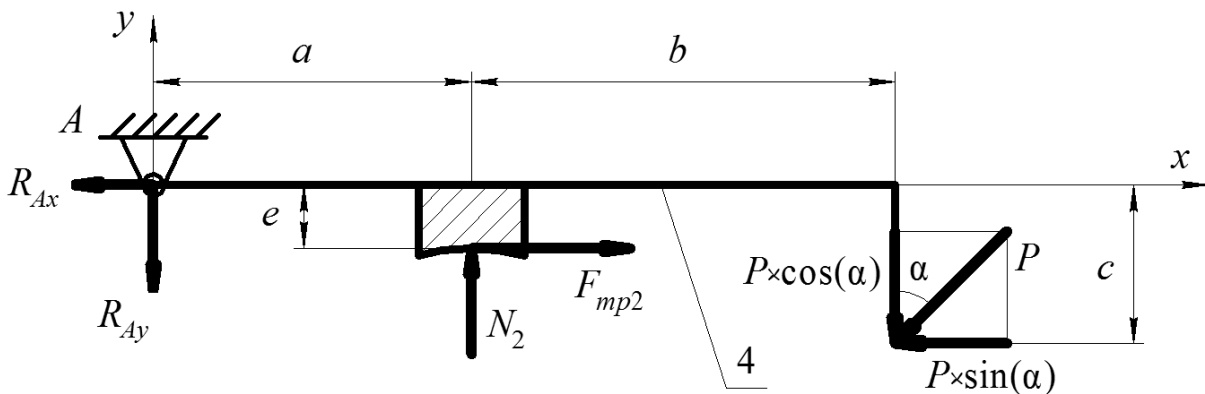


Рисунок 3.11 - Розрахункова схема горизонтального гальмівного важеля (ТМ-3, приклад 3)

Виконаємо перевірку розрахунків, склавши рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції. Для цього оберемо довільну точку на схемі, наприклад, точку контакту тіл К (рис. 3.12).

$$\sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0; R_{Ay} \cdot a + R_{Ax} \cdot e - P \cdot \cos(\alpha) \cdot b - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (c - e) +$$

$$+ R_{Ox} \cdot R + Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r = 0;$$

$$0,328 \cdot 2 + (-0,047) \cdot 0,25 - 0,243 \cdot 0,707 \cdot 3 - 0,243 \cdot 0,707 \cdot (1 - 0,25) +$$

$$+ 0,125 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1,25 = 0;$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

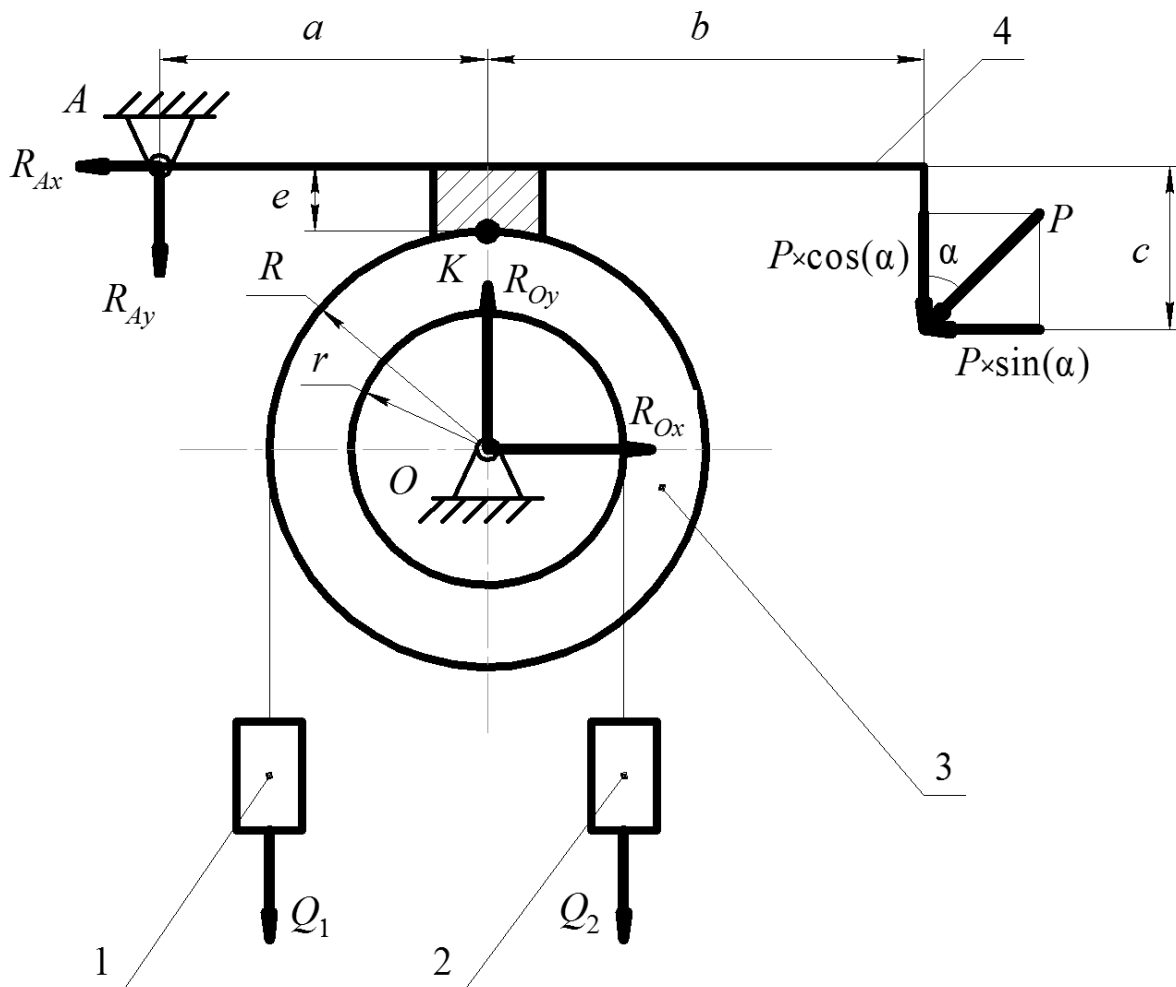


Рисунок 3.12 - Розрахункова схема системи із чотирьох тіл для виконання перевірки (ТМ-3, приклад 3)

Відповідь: $R_{Ox} = 0,125$ кН, $R_{Oy} = 8,5$ кН, $R_O = 8,501$ кН,

$R_{Ax} = -0,047$ кН, $R_{Ay} = 0,328$ кН, $R_A = 0,331$ кН, $P = 0,243$ кН.

3.3.1 ТМ-3, приклад 3. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та горизонтальним важелем аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор аналітичним методом у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{ll}
 a := 2\text{m} & R := 2\text{m} \\
 b := 3\text{m} & r := 1.25\text{m} \\
 c := 1\text{m} & Q_1 := 3\text{kN} \\
 e := 0.25\text{m} & Q_2 := 5\text{kN} \\
 \alpha := 45\text{deg} & f := 0.3
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми барабана, орієнтуючись на [рисунок 3.10](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & R_{Ox} - F_{\text{тп1}} = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & -N_1 + R_{Oy} - Q_1 - Q_2 = 0 \\
 \sum_i M_O(F_i) = 0 & Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r + F_{\text{тп1}} \cdot R = 0
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми барабана

$$\begin{array}{ll}
 F_{\text{тп1}} := -\frac{Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r}{R} = 0.125 \cdot \text{kN} & N_1 := \frac{F_{\text{тп1}}}{f} = 0.417 \cdot \text{kN} \\
 R_{Ox} := F_{\text{тп1}} = 0.125 \cdot \text{kN} & R_{Oy} := N_1 + Q_1 + Q_2 = 8.417 \cdot \text{kN} \\
 R_O := \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 8.418 \cdot \text{kN}
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми важеля, орієнтуючись на [рисунок 3.11](#)

$$F_{\text{тп}2} := F_{\text{тп}1}$$

$$N_2 := N_1$$

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -R_{Ax} + F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad -R_{Ay} + N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0 \quad N_2 \cdot a + F_{\text{тп}2} \cdot e - P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - P \cdot \sin(\alpha) \cdot c = 0$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми важеля та значення сили P

$$P := \frac{F_{\text{тп}2} \cdot e + N_2 \cdot a}{\cos(\alpha) \cdot (a + b) + c \cdot \sin(\alpha)} = 0.204 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0.273 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ax} := F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) = -0.019 \cdot \text{kN}$$

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 0.273 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків шляхом складання рівняння рівноваги на загальній схемі конструкції

$$\sum_i M_K(F_i) = 0 \quad R_{Ay} \cdot a + R_{Ax} \cdot e - P \cdot \cos(\alpha) \cdot b - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (c - e) + R_{Ox} \cdot R + Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r = 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

3.4 ТМ-3, приклад 4. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та довільно орієнтованим штоком

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Систему тіл закріплено на трьох шарнірно-нерухомих опорах (рис. 3.13). На шток 4 діє зовнішня зосереджена сила P , спрямована під кутом α до осі штока. До барабана 3 на ідеальних нитках підвішено тіла 1 і 2 з вагою Q_1 і Q_2 відповідно. Визначити опорні реакції в'язей такої системи та мінімальну силу P , необхідну для забезпечення рівноваги системи, якщо відомо, що $a = 1$ м, $b = 0,5$ м, $c = 0,25$ м, $R = 3$ м, $r = 2$ м, $Q_1 = 8$ кН, $Q_2 = 6$ кН, $f = 0,35$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

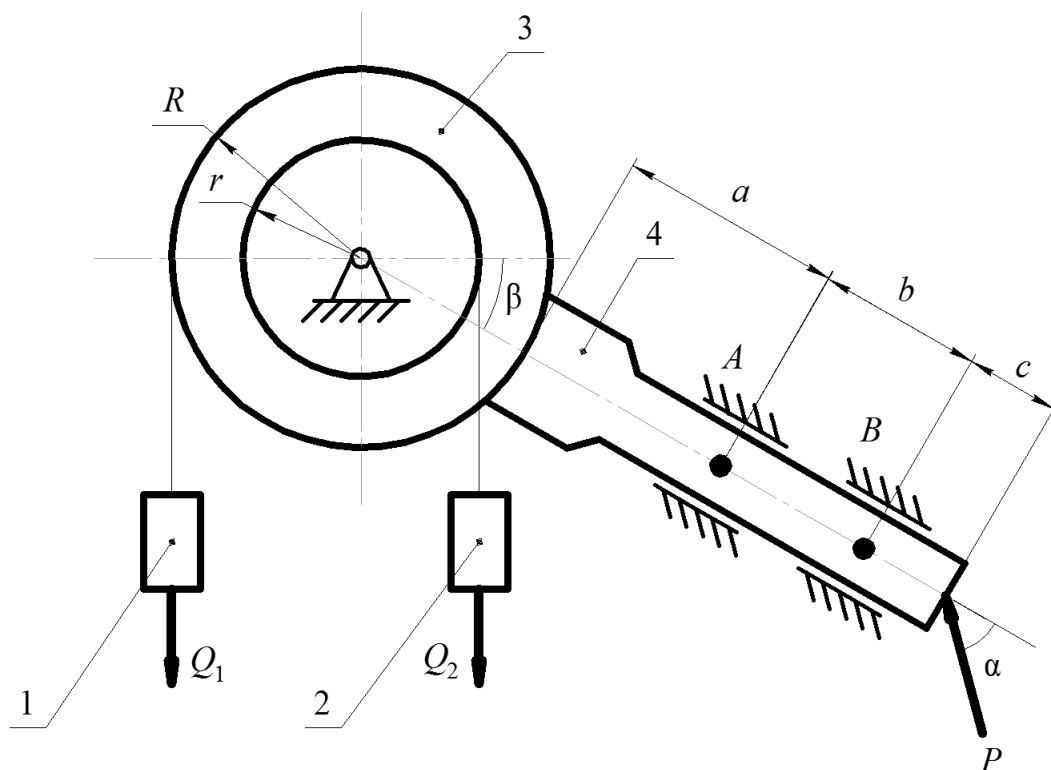


Рисунок 3.13 - Система чотирьох тіл (ТМ-3, приклад 4)

Порядок розв'язання:

1. Розбиваємо систему чотирьох тіл на окремі схеми. Врахуємо прості схеми для окремих тіл 1 чи 2. Об'єднаємо їх зі схемою тіла 3.

2. Складемо розрахункову схему для барабана 3 з вантажами 1 і 2 (рис. 3.14) та для гальмівного штока (рис. 3.15).

3. На розрахункових схемах позначимо вісі координат x та y ; відкинемо зовнішні в'язі, замінимо їхню дію реакціями R_{Ox} , R_{Oy} , R_A , R_B відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей.

4. Контакт барабана зі штоком є внутрішнім зв'язком системи. На розрахунковій схемі барабана з вантажами дію важеля замінимо невідомими силами нормального тиску N_1 та тертя F_{mp1} . Сила тиску важеля на барабан N_1 прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована до центру барабана. Сила тертя F_{mp1} прикладена у точці контакту тіл 3 і 4 та спрямована вздовж дотичної до барабана у напрямку, за якого буде урівноважувати дію вантажів 1 і 2.

5. На розрахунковій схемі штока сили нормального тиску N_2 та тертя F_{mp2} , які замінюють дію барабана, є попарно рівними та протилежно спрямованими своїм еквівалентним силам зі схеми барабана відповідно до принципу рівності дії і протидії, тому за модулем $N_1 = N_2$ та $F_{mp1} = F_{mp2}$. Також, сила тертя між барабаном та гальмівним штоком дорівнює добутку сили нормального тиску та коефіцієнта тертя $F_{mp} = N \cdot f$.

6. Складаємо рівняння рівноваги для схем барабана і штока.

7. Визначаємо із рівнянь невідомі реакції в'язей та величину сили P , необхідної для рівноваги системи.

8. Перевіряємо результати шляхом складання рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції.

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми барабана з вантажем (рис. 3.14)

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ox} - N_1 \cdot \cos(\beta) - F_{mp1} \cdot \sin(\beta) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Oy} - Q_1 - Q_2 + N_1 \cdot \sin(\beta) - F_{mp1} \cdot \cos(\beta) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0; Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r - F_{\text{тр}1} \cdot R = 0.$$

Визначимо невідомі

$$F_{\text{тр}1} = \frac{Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r}{R} = 4 \text{ (кН)};$$

$$N_1 = \frac{F_{\text{тр}1}}{f} = \frac{4}{0,35} = 11,43 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ox} = N_1 \cdot \cos(\beta) + F_{\text{тр}1} \cdot \sin(\beta) = 11,9 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = Q_1 + Q_2 - N_1 \cdot \sin(\beta) + F_{\text{тр}1} \cdot \cos(\beta) = 11,75 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = \sqrt{11,9^2 + 11,75^2} = 16,72 \text{ (кН)}.$$

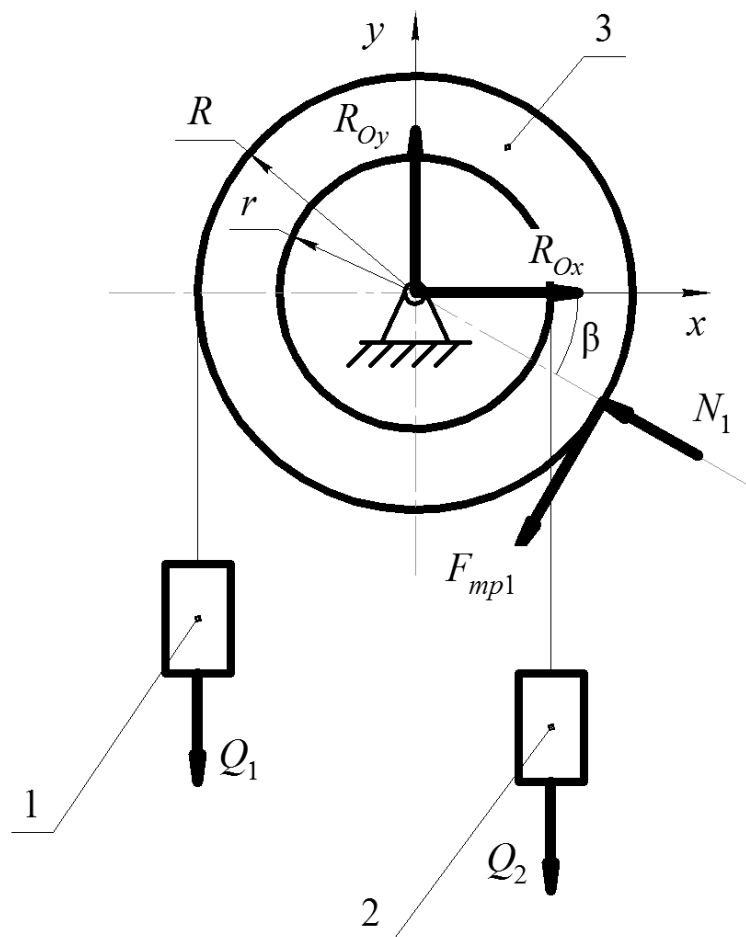


Рисунок 3.14 - Розрахункова схема барабана з вантажем і горизонтальним гальмівним штоком (ТМ-3, приклад 4)

Складемо рівняння рівноваги для розрахункової схеми штока (рис. 3.15)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -R_A - R_B + F_{\text{тр}2} + P \cdot \sin(\alpha) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; -R_B \cdot b - F_{\text{тр}2} \cdot a + P \cdot \sin(\alpha) \cdot (b + c) = 0. \end{array} \right.$$

Визначимо невідомі

$$P = \frac{N_2}{\cos(\alpha)} = 16,16 \text{ (кН)};$$

$$R_B = -\frac{F_{\text{тр}2} \cdot a - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (b + c)}{b} = 9,143 \text{ (кН)};$$

$$R_A = F_{\text{тр}2} - R_B + P \cdot \sin(\alpha) = 6,29 \text{ (кН)}.$$

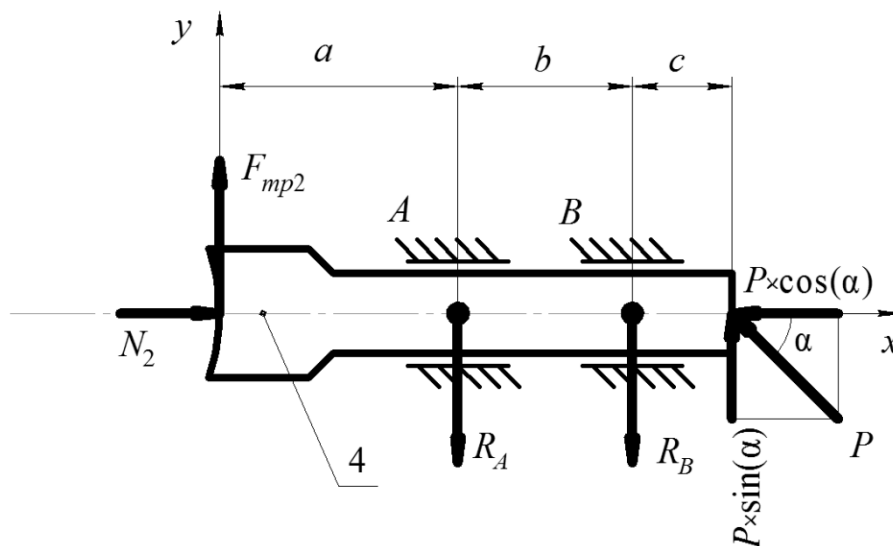


Рисунок 3.15 - Розрахункова схема горизонтального гальмівного штока (ТМ-3, приклад 4)

Виконаємо перевірку розрахунків, склавши рівняння моментів сил на загальній схемі усієї конструкції. Для цього оберемо довільну точку на схемі, наприклад, точку контакту тіл К (рис. 3.16).

$$\sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0; P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b + c) - R_B \cdot (a + b) - R_A \cdot a -$$

$$- R_{Oy} \cdot R \cdot \cos(\beta) - R_{Ox} \cdot R \cdot \sin(\beta) +$$

$$+ Q_1 \cdot (R + R \cdot \cos(\beta)) + Q_2 \cdot (R \cdot \cos(\beta) - r) = 0;$$

$$16,16 \cdot 0,707 \cdot (1 + 0,5 + 0,25) - 9,14 \cdot (1 + 0,5) - 6,29 \cdot 1 -$$

$$- 11,75 \cdot 3 \cdot 0,866 - 11,9 \cdot 3 \cdot 0,5 +$$

$$+ 8 \cdot (3 + 3 \cdot 0,866) + 6 \cdot (3 \cdot 0,866 - 2) = 0;$$

У перевірці отримали тотожність $0 = 0$. Отже, за результатами перевірки бачимо, що задачу розв'язано вірно.

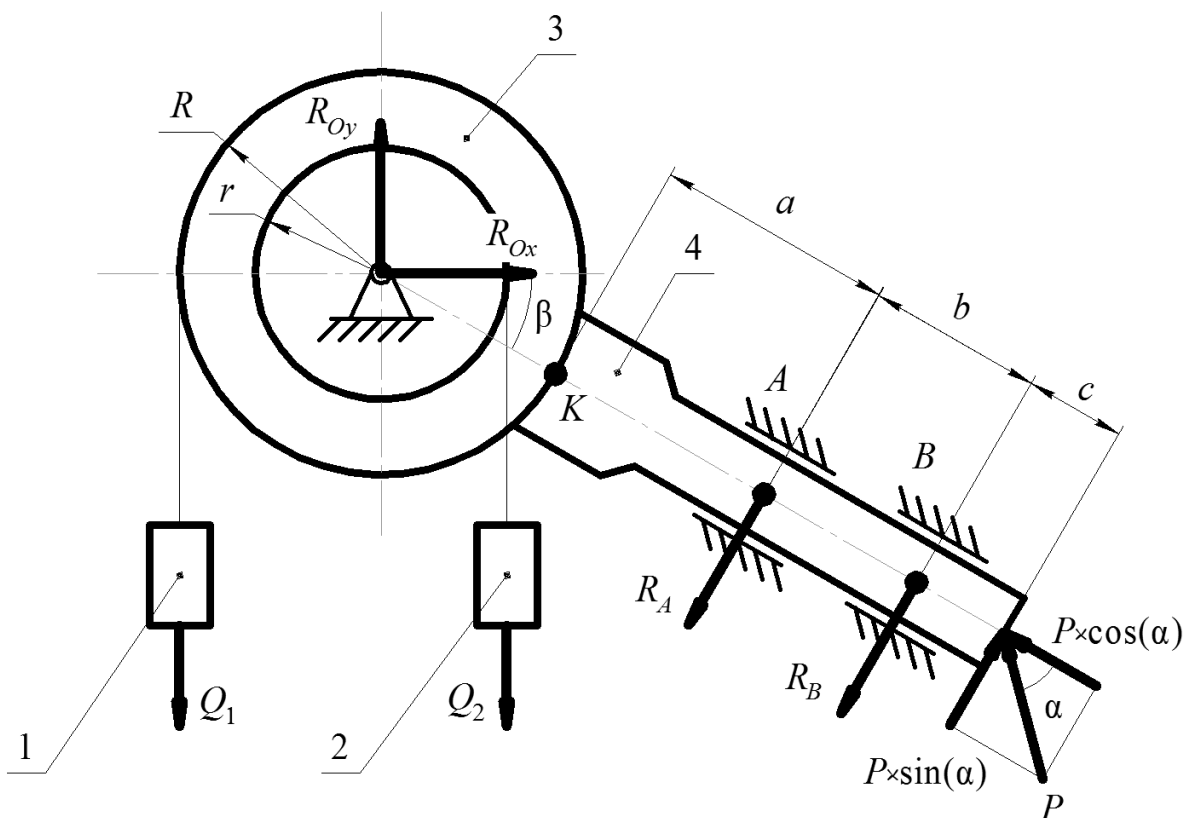


Рисунок 3.16 - Розрахункова схема системи із чотирьох тіл для виконання перевірки (ТМ-3, приклад 4)

Відповідь: $R_{Ox} = 11,9$ кН, $R_{Oy} = 11,75$ кН, $R_O = 16,72$ кН,
 $R_A = 6,29$ кН, $R_B = 9,14$ кН, $P = 16,16$ кН.

3.4.1 ТМ-3, приклад 4. Визначення реакцій опор у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя між барабаном та довільно орієнтованим штоком аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-3↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор аналітичним методом у системі чотирьох тіл з урахуванням сил тертя у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lll}
 a := 1\text{m} & R := 3\text{m} & \alpha := 45\text{deg} \\
 b := 0.5\text{m} & r := 2\text{m} & \beta := 30\text{deg} \\
 c := 0.25\text{m} & Q_1 := 8\text{kN} & \\
 f := 0.35 & Q_2 := 6\text{kN} &
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми барабана, орієнтуючись на [рисунок 3.14](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & R_{Ox} - N_1 \cdot \cos(\beta) - F_{\text{тп1}} \cdot \sin(\beta) = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & R_{Oy} - Q_1 - Q_2 + N_1 \cdot \sin(\beta) - F_{\text{тп1}} \cdot \cos(\beta) = 0 \\
 \sum_i M_A(F_i) = 0 & Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r - F_{\text{тп1}} \cdot R = 0
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми барабана

$$\begin{array}{l}
 F_{\text{тп1}} := \frac{Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r}{R} = 4 \cdot \text{kN} \quad N_1 := \frac{F_{\text{тп1}}}{f} = 11.429 \cdot \text{kN} \\
 R_{Ox} := N_1 \cdot \cos(\beta) + F_{\text{тп1}} \cdot \sin(\beta) = 11.897 \cdot \text{kN} \\
 R_{Oy} := Q_1 + Q_2 - N_1 \cdot \sin(\beta) + F_{\text{тп1}} \cdot \cos(\beta) = 11.75 \cdot \text{kN} \\
 R_O := \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 16.721 \cdot \text{kN}
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги для схеми штока, орієнтуючись на [рисунок 3.15](#)

$$F_{\text{тп}2} := F_{\text{тп}1}$$

$$N_2 := N_1$$

$$\sum_i F_{ix} = 0$$

$$N_2 - P \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0$$

$$-R_A - R_B + F_{\text{тп}2} + P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0$$

$$-R_B \cdot b - F_{\text{тп}2} \cdot a + P \cdot \sin(\alpha) \cdot (b + c) = 0$$

- визначення невідомих реакцій в'язей для схеми важеля та значення сили P

$$P := \frac{N_2}{\cos(\alpha)} = 16.162 \cdot \text{kN}$$

$$R_B := -\frac{a \cdot F_{\text{тп}2} - P \cdot \sin(\alpha) \cdot (b + c)}{b} = 9.143 \cdot \text{kN}$$

$$R_A := F_{\text{тп}2} - R_B + P \cdot \sin(\alpha) = 6.286 \cdot \text{kN}$$

- перевірка правильності розрахунків шляхом складання рівняння рівноваги на загальній схемі конструкції

$$\sum_i M_K(F_i) = 0 \quad P \cdot \sin(\alpha) \cdot (a + b + c) - R_B \cdot (a + b) - R_A \cdot a - R_{Oy} \cdot R \cdot \cos(\beta) - \\ - R_{Ox} \cdot R \cdot \sin(\beta) + Q_1 \cdot (R + R \cdot \cos(\beta)) + Q_2 \cdot (R \cdot \cos(\beta) - r) = 4.547 \times 10^{-15} \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

3.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-3)

↑ДО ТМ-3↑

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Умова задачі

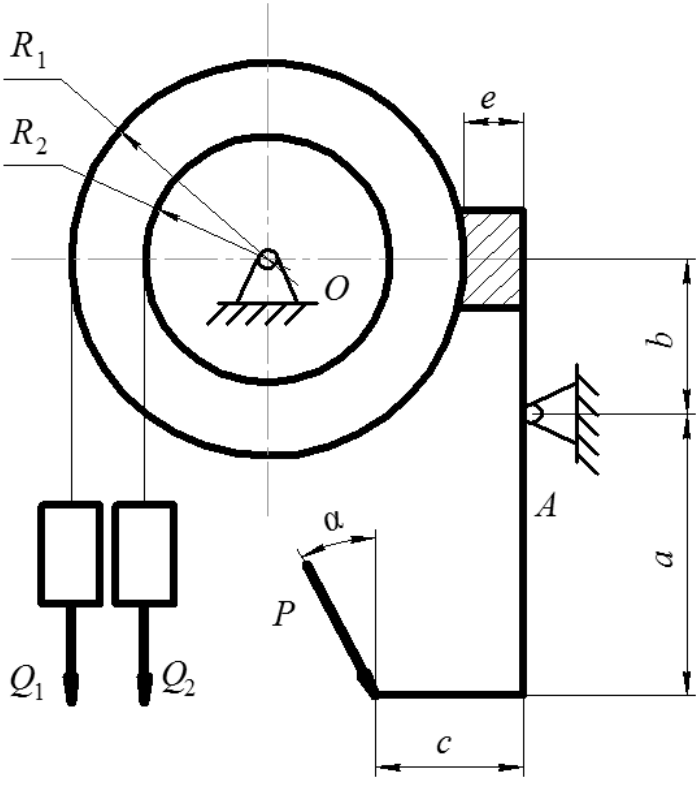
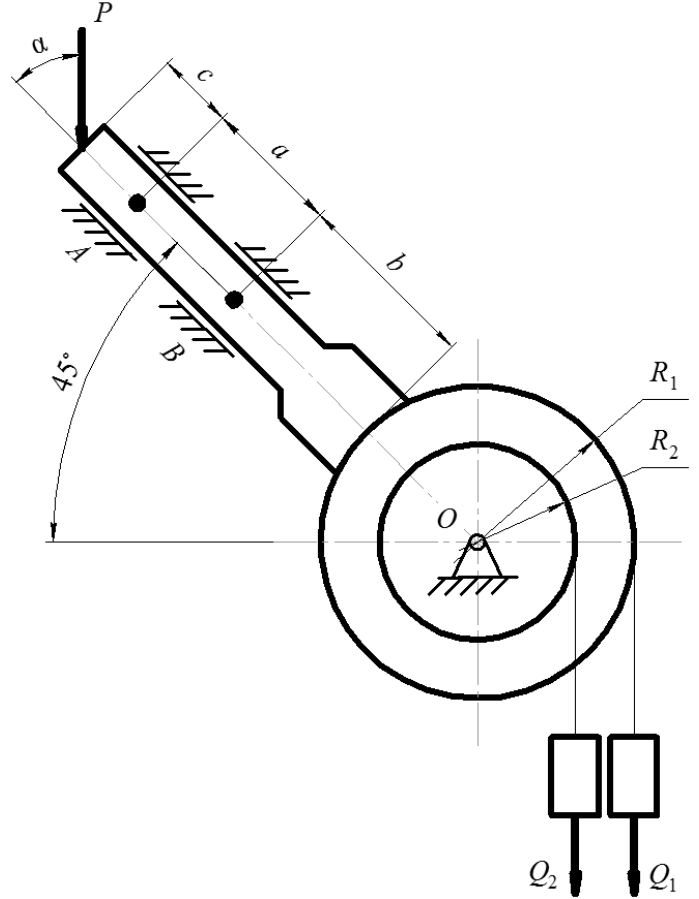
Визначити силу P та реакції опор системи, що знаходиться у спокої.

Таблиця 3.1 Вихідні дані для розрахунків і схеми до індивідуальних завдань

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
1	$a = 0,4 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $Q_1 = 0,9 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 1$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
2	$a = 0,2 \text{ м}$ $b = 1,1 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 1,2 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,15$	
3	$a = 0,1 \text{ м}$ $b = 1,4 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $e = 0,1 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $Q_1 = 1,3 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,2$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
4	$a = 0,3 \text{ м}$ $b = 1,7 \text{ м}$ $c = 0,25 \text{ м}$ $e = 0,05 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $Q_1 = 1,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,25$	
5	$a = 0,6 \text{ м}$ $b = 1,9 \text{ м}$ $c = 0,45 \text{ м}$ $e = 0,85 \text{ м}$ $\alpha = 85^\circ$ $Q_1 = 1,4 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,2 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,3$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
6	$a = 0,8 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,5 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $Q_1 = 1,6 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,1$	
7	$a = 0,7 \text{ м}$ $b = 1,0 \text{ м}$ $c = 0,25 \text{ м}$ $e = 0,1 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 1,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,15$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
8	$a = 0,7 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,3 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 2,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,2$	
9	$a = 0,6 \text{ м}$ $b = 1,5 \text{ м}$ $c = 0,35 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $Q_1 = 0,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 2,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,25$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
10	$a = 0,3 \text{ м}$ $b = 1,3 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $e = 0,1 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $Q_1 = 1,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,3$	
11	$a = 0,8 \text{ м}$ $b = 1,1 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $e = 0,6 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 1,4 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,15$	

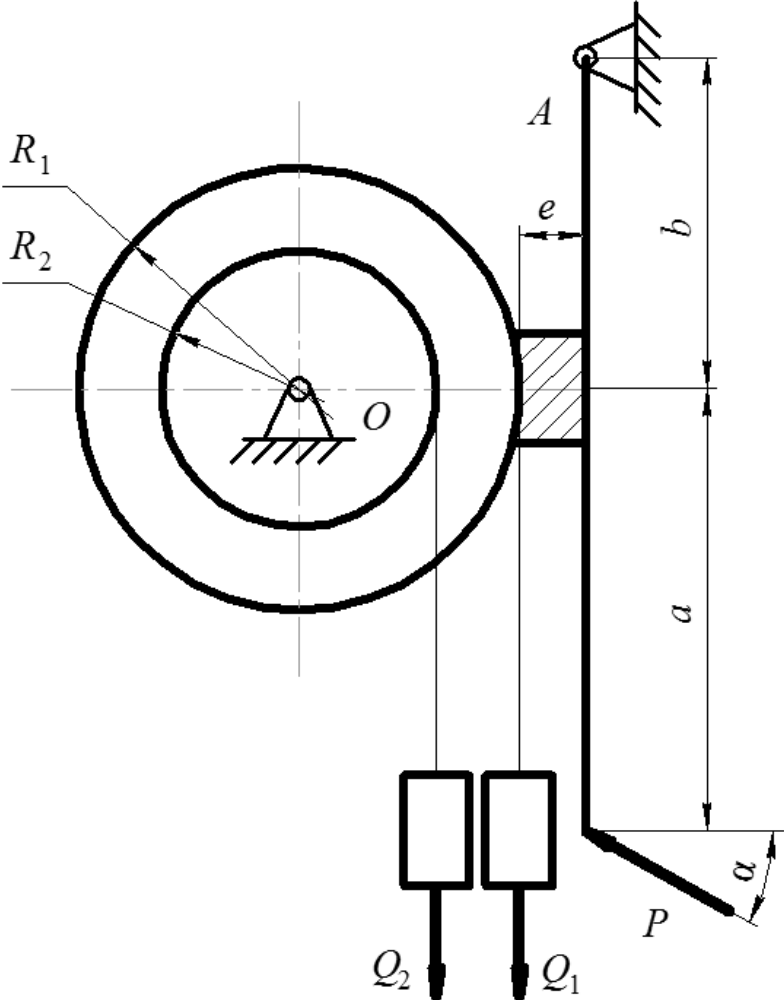
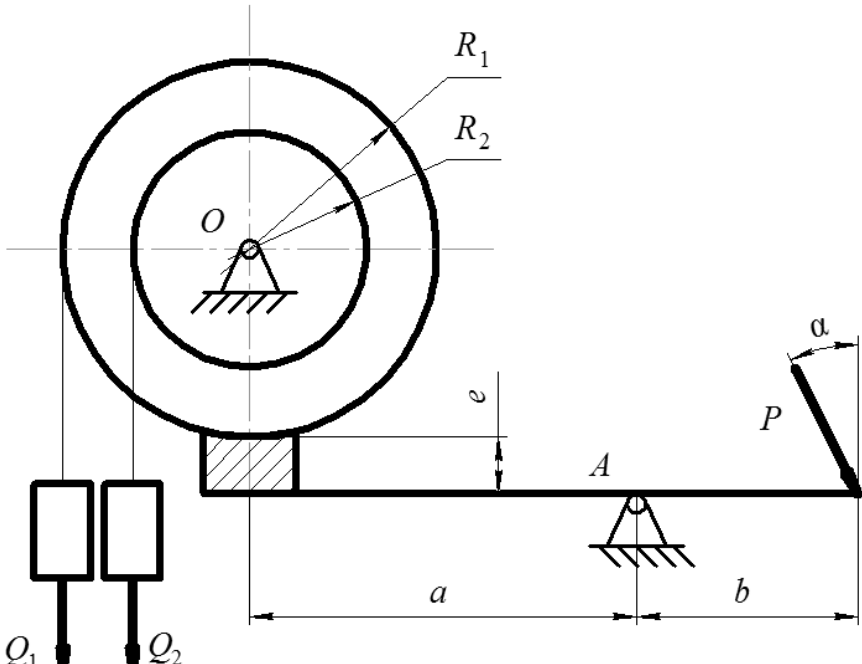
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
12	$a = 0,4 \text{ м}$ $b = 1,5 \text{ м}$ $c = 0,8 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 25^\circ$ $Q_1 = 1,6 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,2$	
13	$a = 0,5 \text{ м}$ $b = 1,3 \text{ м}$ $c = 0,7 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 1,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,2 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,25$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
14	$a = 0,7 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $Q_1 = 2,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,3$	
15	$a = 0,9 \text{ м}$ $b = 1,1 \text{ м}$ $c = 0,3 \text{ м}$ $e = 0,1 \text{ м}$ $\alpha = 55^\circ$ $Q_1 = 0,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,1$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
16	$a = 0,4 \text{ м}$ $b = 1,4 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 45^\circ$ $Q_1 = 1,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,15$	
17	$a = 0,9 \text{ м}$ $b = 1,0 \text{ м}$ $c = 0,25 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 85^\circ$ $Q_1 = 1,2 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,1$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
18	$a = 0,8 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,8 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 35^\circ$ $Q_1 = 1,2 \text{ кН}$ $Q_2 = 2,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,2$	
19	$a = 0,6 \text{ м}$ $b = 1,5 \text{ м}$ $c = 0,7 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 25^\circ$ $Q_1 = 1,4 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,25$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
20	$a = 0,5 \text{ м}$ $b = 1,0 \text{ м}$ $c = 0,9 \text{ м}$ $e = 0,5 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $Q_1 = 1,6 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,3$	
21	$a = 0,3 \text{ м}$ $b = 1,3 \text{ м}$ $c = 0,35 \text{ м}$ $e = 0,6 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ$ $Q_1 = 1,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,1$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
22	$a = 0,9 \text{ м}$ $b = 1,4 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 60^\circ$ $Q_1 = 2,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,15$	
23	$a = 0,7 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,5 \text{ м}$ $e = 0,1 \text{ м}$ $\alpha = 75^\circ$ $Q_1 = 0,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,2 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,2$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
24	$a = 0,9 \text{ м}$ $b = 1,1 \text{ м}$ $c = 0,8 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 80^\circ$ $Q_1 = 1,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,4 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,25$	
25	$a = 0,5 \text{ м}$ $b = 1,5 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 35^\circ$ $Q_1 = 1,2 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,3$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
26	$a = 0,8 \text{ м}$ $b = 1,4 \text{ м}$ $c = 0,7 \text{ м}$ $e = 0,6 \text{ м}$ $\alpha = 15^\circ$ $Q_1 = 1,4 \text{ кН}$ $Q_2 = 1,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,1$	
27	$a = 0,6 \text{ м}$ $b = 1,3 \text{ м}$ $c = 0,5 \text{ м}$ $e = 0,4 \text{ м}$ $\alpha = 25^\circ$ $Q_1 = 1,6 \text{ кН}$ $Q_2 = 2,0 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,15$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
28	$a = 0,3 \text{ м}$ $b = 1,7 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $e = 0,5 \text{ м}$ $\alpha = 65^\circ$ $Q_1 = 1,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,1 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,4 \text{ м}$ $f = 0,2$	
29	$a = 0,4 \text{ м}$ $b = 1,2 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $e = 0,3 \text{ м}$ $\alpha = 70^\circ$ $Q_1 = 2,0 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,6 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,6 \text{ м}$ $f = 0,25$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
30	$a = 0,6 \text{ м}$ $b = 1,1 \text{ м}$ $c = 0,8 \text{ м}$ $e = 0,2 \text{ м}$ $\alpha = 80^\circ$ $Q_1 = 0,8 \text{ кН}$ $Q_2 = 0,8 \text{ кН}$ $R_1 = 1 \text{ м}$ $R_2 = 0,8 \text{ м}$ $f = 0,3$	

4 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ПРОСТОРОВІЙ ДОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ СИЛ (ТМ-4)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Просторова довільна система сил – це така система, де силові фактори діють у тривимірному просторі. В рамках цієї теми розглянемо 2 типи конструкцій – просторова рама і вал. В задачах розглянемо наступні типи в'язей – сферичний шарнір, підп'ятник, шарнірно-нерухома циліндрична опора та шарнірно закріплений стрижень.

План теми 4

- 4.1 [ТМ-4, приклад 1. Просторова рама](#)
 - 4.1.1 [ТМ-4, приклад 1. Просторова рама у MathCAD](#)
- 4.2 [ТМ-4, приклад 2. Просторовий горизонтально орієнтований вал](#)
 - 4.2.1 [ТМ-4, приклад 2. Просторовий горизонтально орієнтований вал у MathCAD](#)
- 4.3 [ТМ-4, приклад 3. Просторова довільно орієнтована плита](#)
 - 4.3.1 [ТМ-4, приклад 3. Просторова довільно орієнтована плита у MathCAD](#)
- 4.4 [ТМ-4, приклад 4. Просторовий вертикально орієнтований вал](#)
 - 4.4.1 [ТМ-4, приклад 4. Просторовий вертикально орієнтований вал у MathCAD](#)
- 4.5 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-4\)](#)

4.1 ТМ-4, приклад 1. Визначення реакцій опор просторової рами

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Дві прямокутні плити жорстко з'єднані між собою під прямим кутом і закріплені у точці A сферичним шарніром, у точці B циліндричним шарніром (підшипником), та у точці C за допомогою невагомго стрижня CD . Габаритні розміри плит вказані на [рисунку 4.1](#). Плити знаходяться у площинах xOz та yOz .

Вагою кожної плити можна знехтувати. До однієї із плит прикладено зовнішній момент пари сил M . Зосереджену силу P прикладено у площині yOz під кутом α до вісі y , силу F прикладено у площині xOz під кутом β до вісі x .

Визначити реакції в'язей A , B та CD конструкції, якщо $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $P = 10$ кН, $\alpha = 45^\circ$, $F = 20$ кН, $\beta = 75^\circ$, $M = 5$ кН·м.

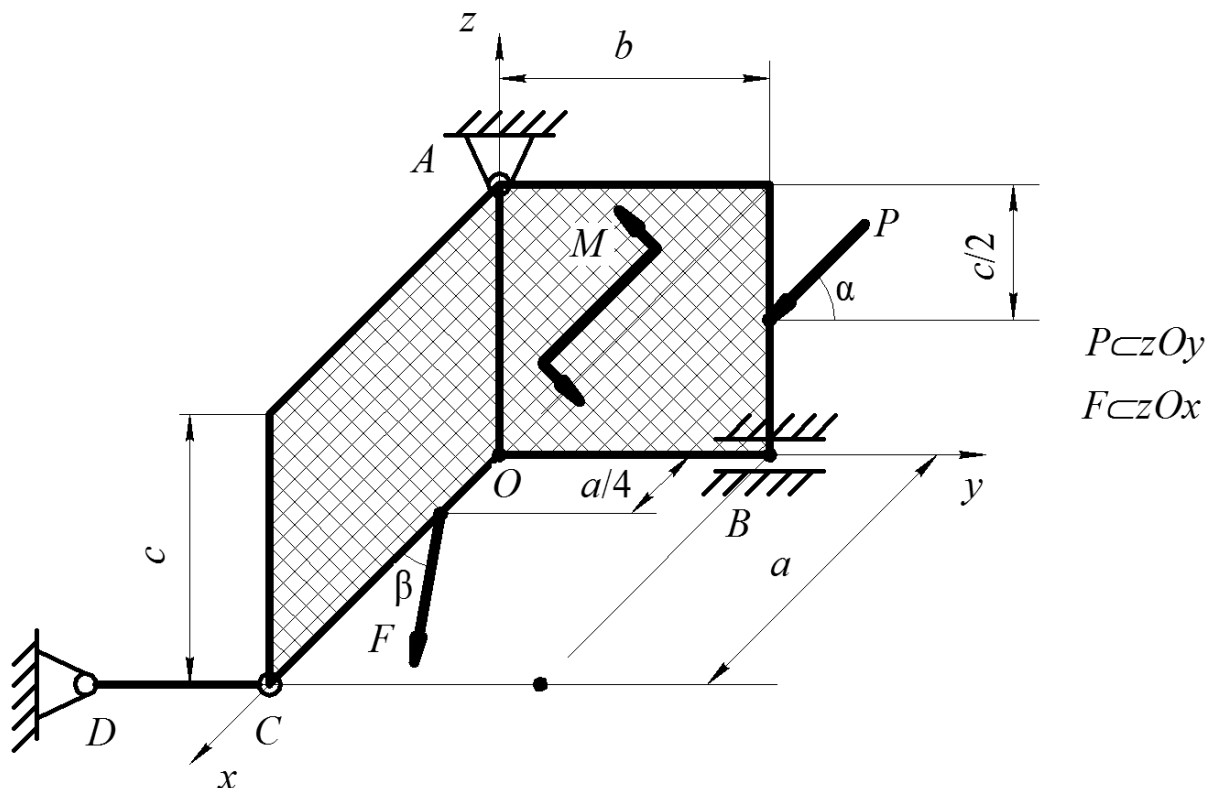


Рисунок 4.1 – Просторова рама (ТМ-4, приклад 1)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему ([рис. 4.2](#))

- позначимо вісі координат x , y , z , u , v та w ;
- відкинемо в'язі A , B та CD , замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;
- зазначимо, що сферичний шарнір A має три взаємно перпендикулярні реакції R_{Ax} , R_{Ay} та R_{Az} , які не дозволяють конструкції рухатись у напрямках вздовж осей x , y та z відповідно, циліндричний шарнір B має дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Bx} та R_{Bz} , які створюють опору руху конструкції у напрямках вздовж осей x та z відповідно, а стержень CD має одну реакцію, спрямовану вздовж вісі стержня, що не дозволяє конструкції рухатись лише у напрямку вісі y , проте разом опори A , B та CD забезпечують рівновагу конструкції зварених плит;
- спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD} у довільних напрямках на схемі;
- розкладемо згідно з теоремою Варіньона похилі сили P та F на схемі на їхні складові, що є проекціями на вісі координат x , y та z (косинусна складова буде та, до якої прилягає кут α чи β)

$$P_y = P \cdot \cos(\alpha); P_z = P \cdot \sin(\alpha); F_x = F \cdot \cos(\beta); F_z = F \cdot \sin(\beta).$$

2. Складемо шість рівнянь рівноваги для визначення шести невідомих (R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD}). Перше, друге та третє рівняння – суми проекцій сил на вісі x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Четверте, п'яте та шосте рівняння – це рівняння моментів сил відносно осей x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + R_{Bx} + F \cdot \cos(\beta) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} + R_{CD} - P \cdot \cos(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; R_{Az} + R_{Bz} - F \cdot \sin(\beta) - P \cdot \sin(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; R_{Bz} \cdot b - R_{Ay} \cdot c - P \cdot \sin(\alpha) \cdot b + P \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{c}{2} + M = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot c + F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{4} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0; R_{CD} \cdot a - R_{Bx} \cdot b = 0.$$

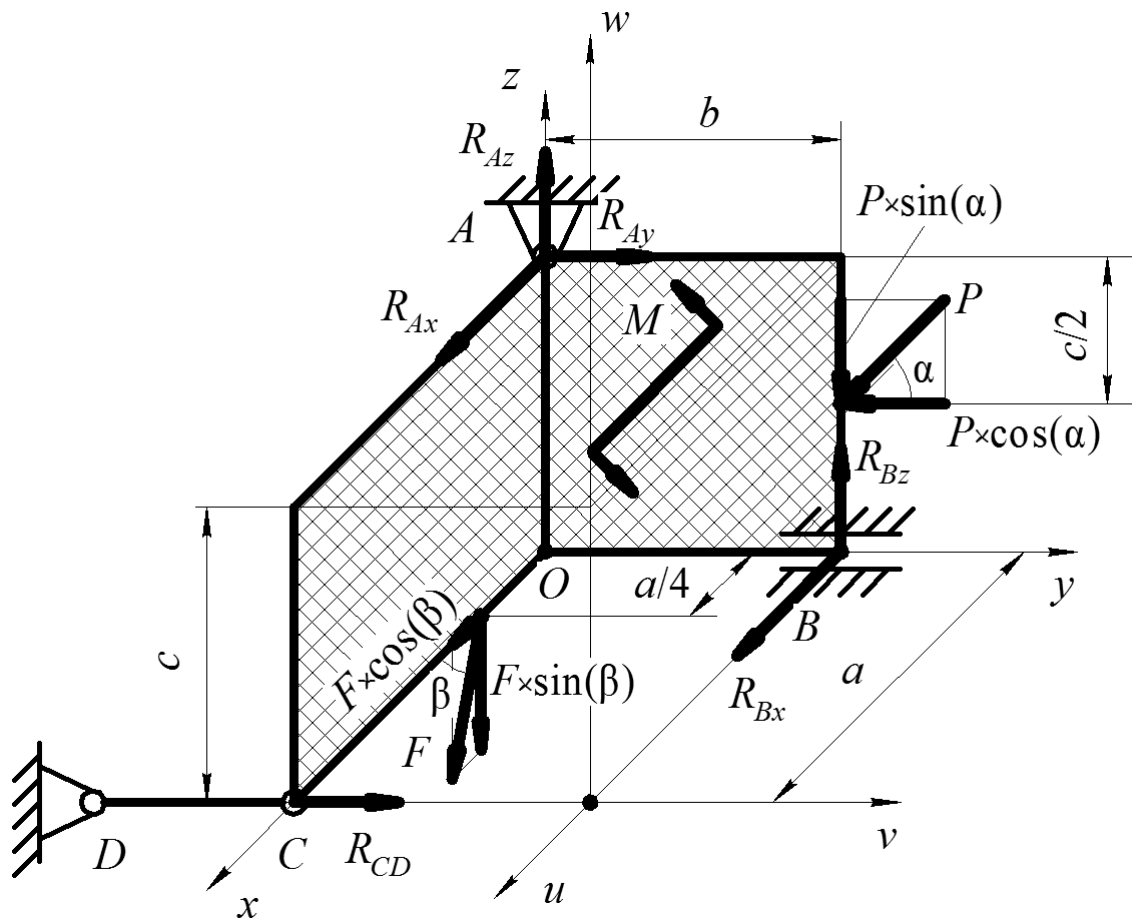


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема просторової рами (ТМ-4, приклад 1)

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей). Почати розрахунки треба з рівнянь, де найменша кількість невідомих

$$R_{Ax} = \frac{F \cdot \sin(\beta) \cdot a}{4 \cdot c} = -7,24 \text{ (кН)};$$

$$R_{Bx} = -R_{Ax} - F \cdot \cos(\beta) = 2,07 \text{ (кН)};$$

$$R_{CD} = \frac{R_{Bx} \cdot b}{a} = 3,45 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = P \cdot \cos(\alpha) - R_{CD} = 3,62 \text{ (кН)};$$

$$R_{Bz} = \frac{R_{Ay} \cdot c + P \cdot \sin(\alpha) \cdot b - P \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{c}{2} - M}{b} = 6,11 \text{ (кН)};$$

$$R_{Az} = F \cdot \sin(\beta) + P \cdot \sin(\alpha) - R_{Bz} = 20,28 \text{ (кН)}.$$

Визначимо результуючі реакції R_A та R_B в опорах A і B

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{(-7,24)^2 + 3,62^2 + 20,28^2} = 21,84 \text{ (кН)};$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{2,07^2 + 6,11^2} = 6,45 \text{ (кН)}.$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно трьох додаткових осей u , v та w на схемі (рис. 4.2). У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n M_u(F_i) = 0; -R_{Az} \cdot b - R_{Ay} \cdot c + P \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{c}{2} + F \cdot \sin(\beta) \cdot b + M = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_v(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot c + R_{Az} \cdot a - F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{3a}{4} + \\ + R_{Bz} \cdot a - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_w(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot b - R_{Ay} \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot a + F \cdot \cos(\beta) \cdot b = 0;$$

В усіх трьох рівняннях перевірки отримали тотожність $0 = 0$. Отже, бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -7,24$ (кН); $R_{Ay} = 3,62$ (кН); $R_{Az} = 20,28$ (кН),
 $R_A = 21,84$ (кН); $R_{Bx} = 2,07$ (кН); $R_{Bz} = 6,11$ (кН); $R_B = 6,45$ (кН);
 $R_{CD} = 3,45$ (кН);

4.1.1 ТМ-4, приклад 1. Визначення реакцій опор просторової рами аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор просторової рами аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$a := 3\text{m} \quad b := 5\text{m} \quad c := 2\text{m} \quad P := 10\text{kN} \quad F := 20\text{kN}$$

$$\alpha := 45\text{deg} \quad \beta := 75\text{deg} \quad M := 5\text{kN}\cdot\text{m}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 4.2](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{Ax} + R_{Bx} + F \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{Ay} + R_{CD} - P \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = 0 \quad R_{Az} + R_{Bz} - F \cdot \sin(\beta) - P \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum_i M_x(F_i) = 0 \quad R_{Bz} \cdot b - R_{Ay} \cdot c - P \cdot \sin(\alpha) \cdot b + P \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{c}{2} + M = 0$$

$$\sum_i M_y(F_i) = 0 \quad R_{Ax} \cdot c + F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{4} = 0$$

$$\sum_i M_z(F_i) = 0 \quad R_{CD} \cdot a - R_{Bx} \cdot b = 0$$

- визначення невідомих реакцій опор (в'язей) у зазначеному порядку

$$R_{Ax} := -\frac{F \cdot a \cdot \sin(\beta)}{4 \cdot c} = -7.244 \text{ kN}$$

$$R_{Bx} := -R_{Ax} - F \cdot \cos(\beta) = 2.068 \text{ kN}$$

$$R_{CD} := \frac{R_{Bx} \cdot b}{a} = 3.447 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} := P \cdot \cos(\alpha) - R_{CD} = 3.624 \text{ kN}$$

$$R_{Bz} := \frac{M - R_{Ay} \cdot c - P \cdot b \cdot \sin(\alpha) + \frac{P \cdot c \cdot \cos(\alpha)}{2}}{b} = 6.107 \text{ kN}$$

$$R_{Az} := F \cdot \sin(\beta) - R_{Bz} + P \cdot \sin(\alpha) = 20.283 \text{ kN}$$

- розрахунок результуючих реакцій опор (в'язей)

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 21.841 \text{ kN}$$

$$R_B := \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2} = 6.447 \text{ kN}$$

- складання рівнянь моментів сил для перевірки правильності розрахунків

$$\sum_i M_u(F_i) = 0 \quad -R_{Az} \cdot b - R_{Ay} \cdot c + P \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{c}{2} + F \cdot \sin(\beta) \cdot b + M = -0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum_i M_v(F_i) = 0 \quad R_{Ax} \cdot c + R_{Az} \cdot a - F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{3 \cdot a}{4} + R_{Bz} \cdot a - P \cdot \sin(\alpha) \cdot a = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum_i M_w(F_i) = 0 \quad R_{Ax} \cdot b - R_{Ay} \cdot a + P \cdot \cos(\alpha) \cdot a + F \cdot \cos(\beta) \cdot b = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

4.2 ТМ-4, приклад 2. Визначення реакцій опор просторового горизонтально орієнтованого вала

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно жорсткий горизонтально орієнтований вал закріплений у точках O і A циліндричними шарнірами (підшипниками). Габаритні розміри вала вказані на [рисунок 4.3](#). Вісь x лежить на осі вала.

Власною вагою вала можна знехтувати. До однієї із ділянок вала прикладено зовнішній момент пари сил M у площині, паралельній yOz . Зосереджену силу P прикладено до вала паралельно вісі Oz , силу F прикладено паралельно вісі Oy , вага вантажів Q і T спрямована паралельно вісі Oz .

Визначити реакції в'язей O та A конструкції, якщо $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 1,5$ м, $d = 3$ м, $e = 0,75$ м, $R_1 = 0,25$ м, $R_2 = 0,5$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН, $Q = 8$ кН, $T = 6$ кН, $M = 5$ кН·м.

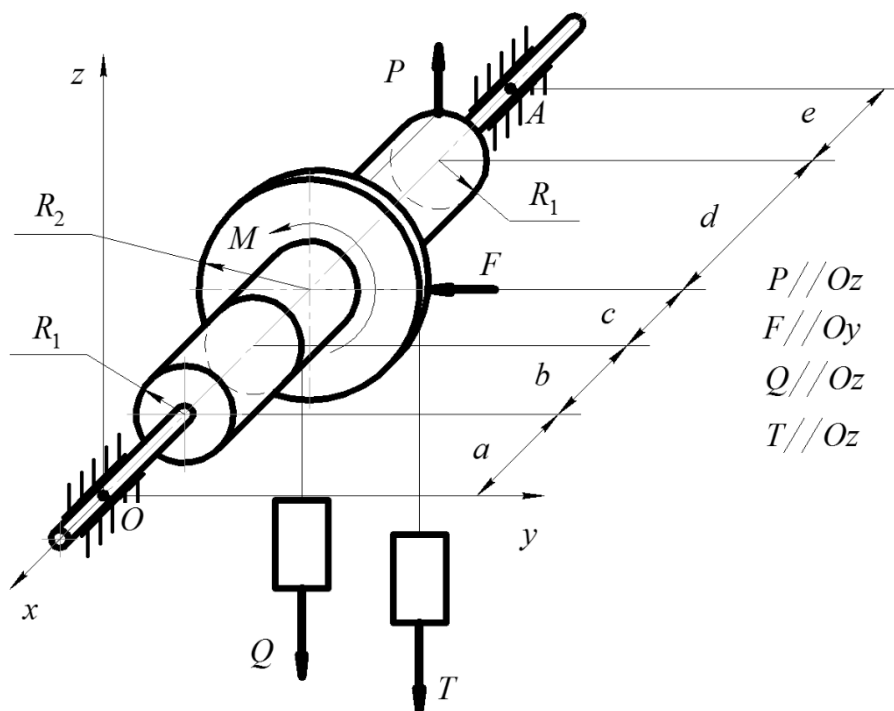


Рисунок 4.3 – Горизонтальний вал (ТМ-4, приклад 2)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему ([рис. 4.4](#))

- позначимо вісі координат x , y , z , u та v ;
- відкинемо в'язі O та A , замінимо їхню дію реакціями R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;
- зазначимо, що циліндричні шарніри O та A мають у просторі по дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az} , які не дозволяють конструкції рухатись у напрямках вздовж осей y та z відповідно, проте рівновагу вала забезпечують опори O та A разом із збалансованою дією на вал моментів сил від ваги вантажів Q та T і момента пари сил M ;
- спрямуємо реакції R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az} у довільних напрямках на схемі.

2. Складемо шість рівнянь рівноваги для визначення невідомих (R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az}). Перше, друге та третє рівняння – суми проєкцій сил на вісі x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Як видно із [рисунка 4.4](#), відсутні сили, що паралельні вісі x . Це робить перше рівняння непотрібним для розрахунків. Четверте, п'яте та шосте рівняння – це рівняння моментів сил відносно осей x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути вал відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі). Після складання рівняння моментів сил відносно вісі x видно, що в ньому відсутні невідомі, проте це рівняння дає змогу запевнитись, що вал дійсно збалансований.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad 0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_{Oy} + R_{Ay} - F = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad R_{Oz} + R_{Az} + P - Q - T = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; \quad M - Q \cdot R_1 - T \cdot R_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; R_{Az} \cdot (a + b + c + d + e) + P \cdot (a + b + c + d) -$$

$$-T \cdot (a + b + c) - Q \cdot (a + b) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0; -R_{Ay} \cdot (a + b + c + d + e) + F \cdot (a + b + c) = 0.$$

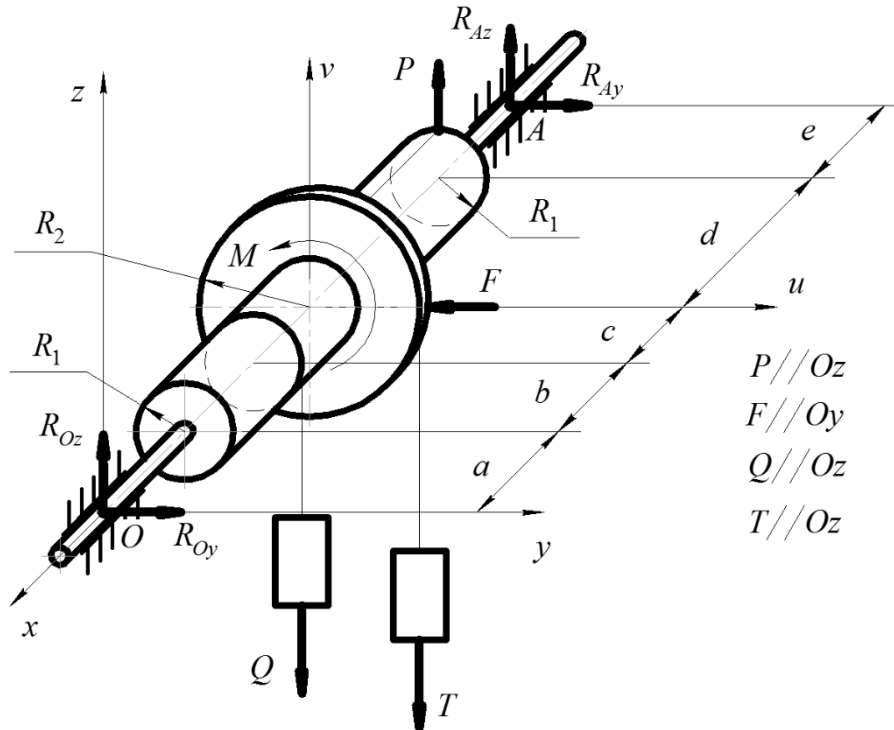


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема горизонтально орієнтованого у просторі вала (ТМ-4, приклад 2)

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей). Почати розрахунки треба з рівнянь, де найменша кількість невідомих

$$R_{Ay} = \frac{F \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d + e} = 1,636 \text{ (кН)};$$

$$R_{Az} = \frac{Q \cdot (a + b) - P \cdot (a + b + c + d) + T \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d + e} = 4,364 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = F - R_{Ay} = 1,364 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oz} = Q - P - R_{Az} + T = 7,636 \text{ (кН)};$$

Визначимо результуючі реакції R_A та R_O в опорах А і О

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{1,636^2 + 4,364^2} = 4,66 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = \sqrt{1,364^2 + 7,636^2} = 7,757 \text{ (кН)}.$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно двох додаткових осей u та v на схемі (рис. 4.4). У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути вал відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n M_u(F_i) = 0; R_{Oy} \cdot (a + b + c) - R_{Ay} \cdot (d + e) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_v(F_i) = 0; -R_{Oz} \cdot (a + b + c) + Q \cdot c + R_{Az} \cdot (d + e) = 0.$$

В двох рівняннях перевірки отримали тотожність $0 = 0$. Отже, бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ay} = 1,636$ (кН); $R_{Az} = 4,364$ (кН); $R_{Oy} = 1,364$ (кН); $R_{Oz} = 7,636$ (кН); $R_A = 4,66$ (кН); $R_B = 7,757$ (кН).

4.2.1 ТМ-4, приклад 2. Визначення реакцій опор просторового горизонтально орієнтованого вала аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор просторової конструкції аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$a := 1\text{m} \quad b := 2\text{m} \quad c := 1.5\text{m} \quad d := 3\text{m} \quad e := 0.75\text{m} \quad R_1 := 0.25\text{m} \quad R_2 := 0.5\text{m}$$

$$P := 2\text{kN} \quad F := 3\text{kN} \quad Q := 8\text{kN} \quad T := 6\text{kN} \quad M := 5\text{kN}\cdot\text{m}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 4.4](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad 0 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{Oy} + R_{Ay} - F = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = 0 \quad R_{Oz} + R_{Az} + P - Q - T = 0$$

$$\sum_i M_x(F_i) = 0 \quad M - Q \cdot R_1 - T \cdot R_2 = 0$$

$$\sum_i M_y(F_i) = 0 \quad R_{Az} \cdot (a + b + c + d + e) + P \cdot (a + b + c + d) - T \cdot (a + b + c) - Q \cdot (a + b) = 0$$

$$\sum_i M_z(F_i) = 0 \quad -R_{Ay} \cdot (a + b + c + d + e) + F \cdot (a + b + c) = 0$$

- визначення невідомих реакцій опор (в'язей) у зазначеному порядку

$$R_{Ay} := \frac{F \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d + e} = 1.636 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Az} := \frac{Q \cdot (a + b) - P \cdot (a + b + c + d) + T \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d + e} = 4.364 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Oy} := F - R_{Ay} = 1.364 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Oz} := Q - P - R_{Az} + T = 7.636 \cdot \text{kN}$$

- розрахунок результуючих реакцій опор (в'язей)

$$R_A := \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 4.66 \cdot \text{kN}$$

$$R_O := \sqrt{R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = 7.757 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь моментів сил для перевірки правильності розрахунків

$$\sum_i M_v(F_i) = 0 \quad R_{Oy} \cdot (a + b + c) - R_{Ay} \cdot (d + e) = 9.095 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\sum_i M_u(F_i) = 0 \quad -R_{Oz} \cdot (a + b + c) + Q \cdot c + R_{Az} \cdot (d + e) + P \cdot d = 3.638 \times 10^{-12} \text{ J}$$

4.3 ТМ-4, приклад 3. Визначення реакцій опор просторової довільно орієнтованої плити

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Прямокутна абсолютно жорстка плита вагою G закріплена у точці A сферичним шарніром, у точці B циліндричним шарніром (підшипником), та у точці C за допомогою невагомому стрижня CD . Габаритні розміри плити вказані на [рисунку 4.5](#). Плита розташована під кутом α до площини xOy .

До плити прикладено зовнішній момент пари сил M . Зосереджену силу P прикладено паралельно вісі Az , силу F прикладено у площині xAz під кутом β до вісі x , рівномірно розподілену силу q прикладено до верхньої грані плити у площині, паралельній yAz .

Визначити реакції в'язей A , B та CD конструкції, якщо $a = 4$ м, $b = 9$ м, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $P = 12$ кН, $F = 15$ кН, $G = 20$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 3$ кН/м.

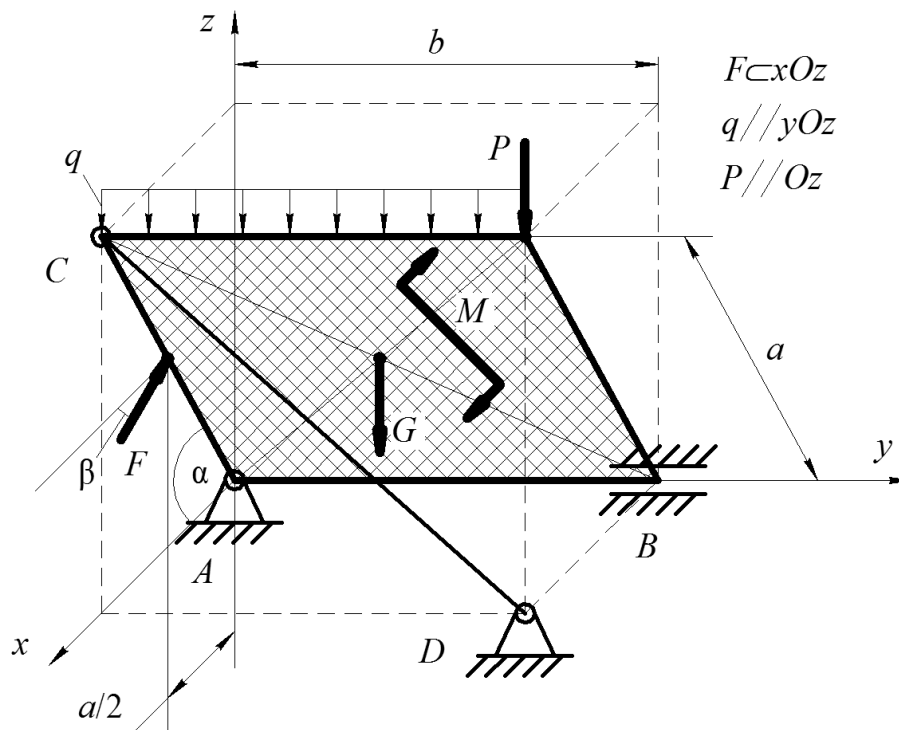


Рисунок 4.5 – Плита довільно орієнтована у просторі (ТМ-4, приклад 3)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему ([рис. 4.6](#))

- позначимо вісі координат x , y , z , u , v та w ;
- позначимо і визначимо кут γ між стрижнем CD і віссю v

$$\tan(\gamma) = \frac{CE}{ED} = \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{b}; \quad \gamma = \text{atan}\left(\frac{a \cdot \sin(\alpha)}{b}\right) = 21,05^\circ.$$

– відкинемо в'язі A , B та CD , замінимо їхню дію реакціями R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;

– зазначимо, що сферичний шарнір A має три взаємно перпендикулярні реакції R_{Ax} , R_{Ay} та R_{Az} , які не дозволяють конструкції рухатись у напрямках вздовж осей x , y та z відповідно, циліндричний шарнір B має дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Bx} та R_{Bz} , які створюють опор руху конструкції у напрямках вздовж осей x та z відповідно, а стержень CD має одну реакцію, спрямовану вздовж вісі стержня, що не дозволяє конструкції рухатись лише у напрямку вісі стержня, проте разом опори A , B та CD забезпечують рівновагу конструкції зварених плит;

– спрямуємо реакції R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD} у довільних напрямках на схемі;

– розкладемо згідно з теоремою Варіньона похилі сили F та R_{CD} на схемі на їхні складові, що є проекціями на вісі координат x , y та z (косинусна складова буде та, до якої прилягає кут β чи γ)

$$F_x = F \cdot \cos(\beta); \quad F_z = F \cdot \sin(\beta); \quad R_{CDy} = R_{CD} \cdot \cos(\gamma); \quad R_{CDz} = R_{CD} \cdot \sin(\gamma).$$

2. Складемо шість рівнянь рівноваги для визначення шести невідомих (R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{Bz} , та R_{CD}). Перше, друге та третє рівняння – суми проекцій сил на вісі x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Четверте, п'яте та шосте рівняння – це рівняння моментів сил відносно осей x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути плиту відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + R_{Bx} - F \cdot \cos(\beta) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - R_{CD} \cdot \cos(\gamma) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; R_{Az} + R_{Bz} + F \cdot \sin(\beta) - P - q \cdot b - G + R_{CD} \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; R_{Bz} \cdot b - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - G \cdot \frac{b}{2} +$$

$$+ R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \sin(\alpha) - M \cdot \sin(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; -R_{CD} \cdot \sin(\gamma) \cdot a \cdot \cos(\alpha) + q \cdot b \cdot a \cdot \cos(\alpha) +$$

$$+ G \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) + P \cdot a \cdot \cos(\alpha) -$$

$$- F \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0; -R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \cos(\alpha) - R_{Bx} \cdot b + M \cdot \cos(\alpha) = 0.$$

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей). Почати розрахунки треба з рівнянь, де найменша кількість невідомих

$$R_{CD} = \frac{\left[\begin{array}{l} 2 \cdot q \cdot b \cdot \cos(\alpha) + G \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot P \cdot \cos(\alpha) - \\ - F \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{array} \right]}{2 \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)} = 96,08 \text{ (кН)};$$

$$R_{Bx} = \frac{M \cdot \cos(\alpha) - R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \cos(\alpha)}{b} = -19,48 \text{ (кН)};$$

$$R_{Bz} = \frac{\left[\begin{array}{l} q \cdot b^2 + G \cdot b + 2M \cdot \sin(\alpha) + \\ + 2P \cdot b - 2R_{CD} \cdot a \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right]}{2b} = 1,76 \text{ (кН)};$$

$$R_{Az} = G + P - R_{Bz} - R_{CD} \cdot \sin(\gamma) - F \cdot \sin(\beta) + q \cdot b = 18,85 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = R_{CD} \cdot \cos(\gamma) = 89,66 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ax} = F \cdot \cos(\beta) - R_{Bx} = 33,97 \text{ (кН)}.$$

Визначимо результуючі реакції R_A та R_B в опорах A і B

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{33,97^2 + 89,66^2 + 18,85^2} = 97,72 \text{ (кН)};$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{(-19,48)^2 + 1,76^2} = 19,56 \text{ (кН)}.$$

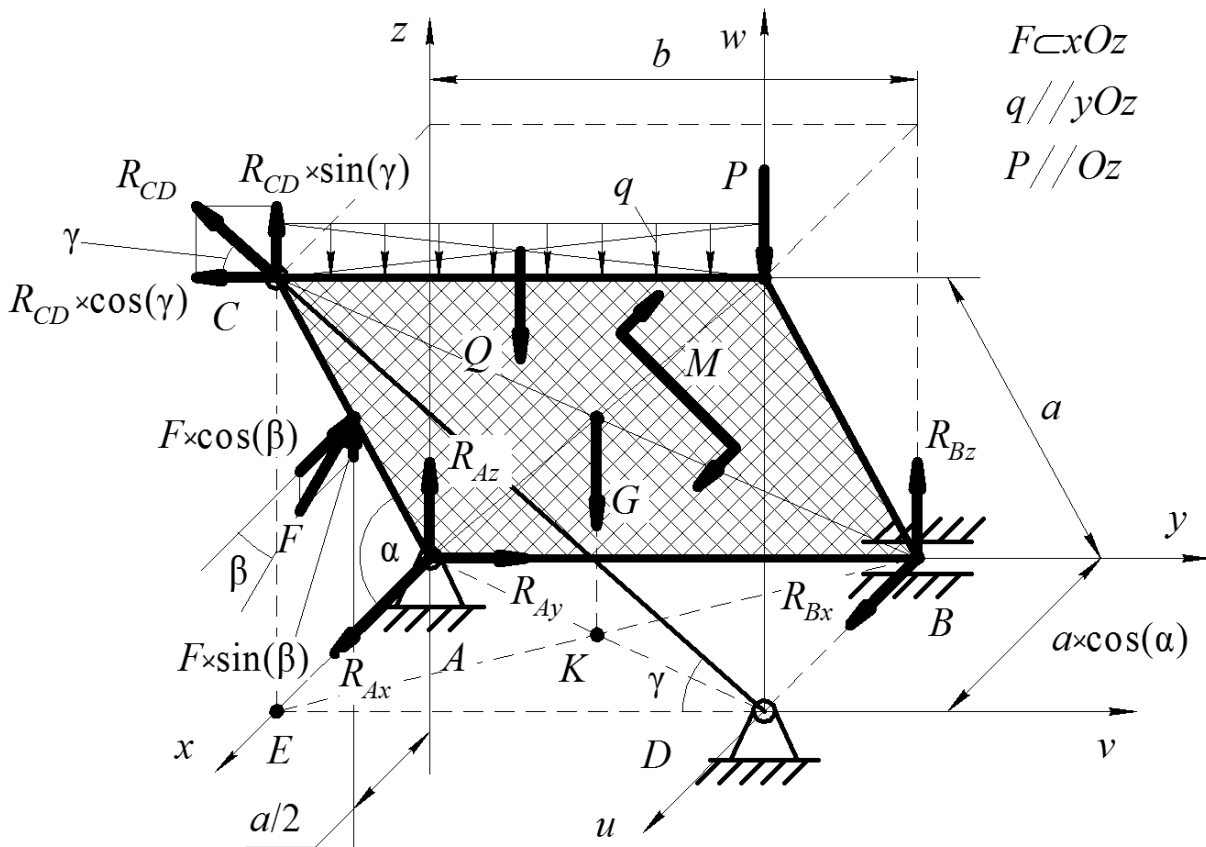


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема довільно орієнтованої у просторі плити (ТМ-4, приклад 3)

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно трьох додаткових осей u , v та w на схемі (рис. 4.6). У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути конструкцію відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n M_u(F_i) = 0; -R_{Az} \cdot b - F \cdot \sin(\beta) \cdot b - R_{CD} \cdot \sin(\gamma) \cdot b + \\ + R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \sin(\alpha) + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + G \cdot \frac{b}{2} - M \cdot \sin(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_v(F_i) = 0; R_{Az} \cdot a \cdot \cos(\alpha) + R_{Bz} \cdot a \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) - \\ - F \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) - G \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_w(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot b - R_{Ay} \cdot a \cdot \cos(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) \cdot b + M \cdot \cos(\alpha) = 0.$$

В усіх трьох рівняннях перевірки отримали тотожність $0 = 0$. Отже, бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = 33,97$ (кН); $R_{Ay} = 89,66$ (кН); $R_{Az} = 18,85$ (кН),
 $R_A = 97,72$ (кН); $R_{Bx} = -19,48$ (кН); $R_{Bz} = 1,76$ (кН); $R_B = 19,56$ (кН);
 $R_{CD} = 96,08$ (кН).

4.3.1 ТМ-4, приклад 3. Визначення реакцій опор просторової довільно орієнтованої плити аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор просторової конструкції аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$a := 4\text{m} \quad b := 9\text{m} \quad \alpha := 60\text{deg} \quad \beta := 15\text{deg}$$

$$P := 12\text{kN} \quad F := 15\text{kN} \quad G := 20\text{kN} \quad M := 8\text{kN}\cdot\text{m} \quad q := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- визначення кута γ між стрижнем CD і віссю v

$$\tan(\gamma) = \frac{CE}{ED} = \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{b} \quad \gamma := \text{atan}\left(\frac{a \cdot \sin(\alpha)}{b}\right) = 21.052 \cdot \text{deg}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 4.6](#)

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad R_{Ax} + R_{Bx} - F \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad R_{Ay} - R_{CD} \cdot \cos(\gamma) = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = 0 \quad R_{Az} + R_{Bz} + F \cdot \sin(\beta) - P - q \cdot b - G + R_{CD} \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$\sum_i M_x(F_i) = 0 \quad R_{Bz} \cdot b - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - G \cdot \frac{b}{2} + R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \sin(\alpha) - M \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum_i M_y(F_i) = 0 \quad -R_{CD} \cdot \sin(\gamma) \cdot a \cdot \cos(\alpha) + q \cdot b \cdot a \cdot \cos(\alpha) + G \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) +$$

$$+ P \cdot a \cdot \cos(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum_i M_z(F_i) = 0 \quad -R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \cos(\alpha) - R_{Bx} \cdot b + M \cdot \cos(\alpha) = 0$$

- визначення невідомих реакцій опор (в'язей) у зазначеному порядку

$$R_{CD} := \frac{G \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot P \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot b \cdot q \cdot \cos(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{2 \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)} = 96.075 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Bx} := \frac{M \cdot \cos(\alpha) - R_{CD} \cdot a \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{b} = -19.481 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Bz} := \frac{b^2 \cdot q + G \cdot b + 2 \cdot M \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot P \cdot b - 2 \cdot R_{CD} \cdot a \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot b} = 1.759 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Az} := G + P - R_{Bz} - R_{CD} \cdot \sin(\gamma) - F \cdot \sin(\beta) + b \cdot q = 18.848 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := R_{CD} \cdot \cos(\gamma) = 89.663 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ax} := F \cdot \cos(\beta) - R_{Bx} = 33.969 \cdot \text{kN}$$

- розрахунок результуючих реакцій опор (в'язей)

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 97.717 \cdot \text{kN}$$

$$R_B := \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2} = 19.56 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь моментів сил для перевірки правильності розрахунків

$$\begin{aligned} \sum_i M_u(F_i) = 0 & \quad -R_{Az} \cdot b - F \cdot \sin(\beta) \cdot b - R_{CD} \cdot \sin(\gamma) \cdot b + R_{CD} \cdot \cos(\gamma) \cdot a \cdot \sin(\alpha) + \\ & \quad + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + G \cdot \frac{b}{2} - M \cdot \sin(\alpha) = 3.092 \times 10^{-14} \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_v(F_i) = 0 & \quad R_{Az} \cdot a \cdot \cos(\alpha) + R_{Bz} \cdot a \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) - \\ & \quad - F \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) - G \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) = -1.819 \times 10^{-14} \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\sum_i M_w(F_i) = 0 \quad R_{Ax} \cdot b - R_{Ay} \cdot a \cdot \cos(\alpha) - F \cdot \cos(\beta) \cdot b + M \cdot \cos(\alpha) = 1.546 \times 10^{-14} \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

4.4 ТМ-4, приклад 4. Визначення реакцій опор просторового вертикально орієнтованого вала

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Абсолютно жорсткий вертикально орієнтований вал закріплений у точці O підп'ятником і точці A циліндричним шарніром (підшипником). Габаритні розміри вала вказані на [рисунку 4.7](#). Вісь z лежить на осі вала.

Власною вагою вала можна знехтувати. До однієї із ділянок вала прикладено зовнішній момент пари сил M у площині, паралельній xOy . Зосереджену силу P прикладено до вала у площині yOz під кутом α до осі y , силу F прикладено паралельно вісі Ox , силу Q прикладено паралельно вісі Oz , силу T прикладено у площині, паралельній xOz під кутом β до осі x .

Визначити реакції в'язей O та A конструкції, якщо $a = 3$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 1,5$ м, $R_1 = 1,4$ м, $R_2 = 2$ м, $R_3 = 1,6$ м, $P = 5$ кН, $F = 6$ кН, $Q = 2$ кН, $T = 3$ кН, $M = 6$ кН·м, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

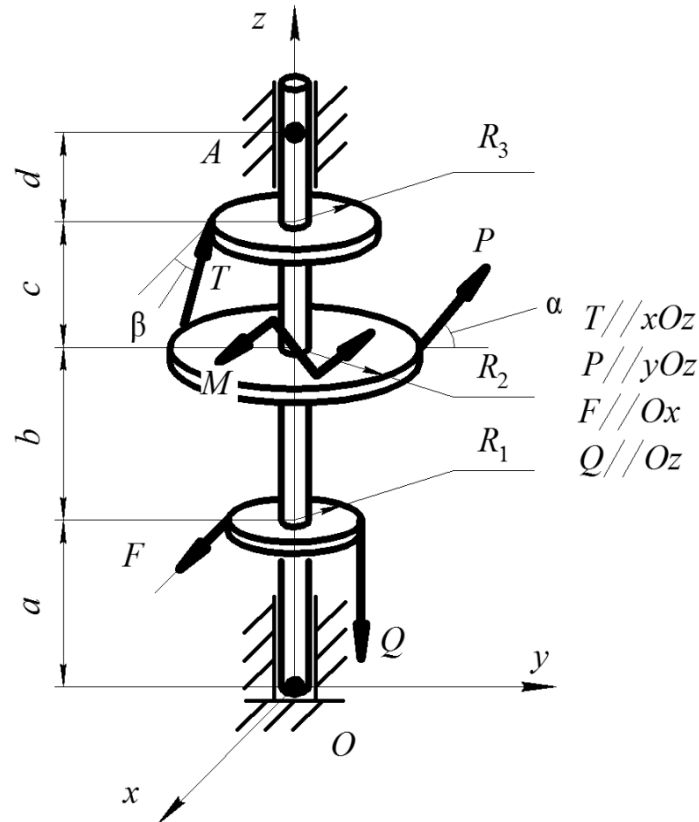


Рисунок 4.7 – Вертикально орієнтований у просторі вал (ТМ-4, приклад 4)

Порядок розв'язання:

1. Складемо розрахункову схему ([рис. 4.8](#))

- позначимо вісі координат x , y , z , u та v ;
- відкинемо в'язі O та A , замінимо їхню дію реакціями R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az} відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей;
- зазначимо, що циліндричний шарнір A має у просторі дві взаємно перпендикулярні реакції R_{Ay} та R_{Az} , які не дозволяють конструкції рухатись у напрямках вздовж осей y та z відповідно, та підп'ятник O , який має у просторі три взаємно перпендикулярні реакції R_{Ox} , R_{Oy} та R_{Oz} , проте рівновагу вертикально орієнтованого вала забезпечують опори O та A разом із збалансованою дією на вал моментів сил від силових факторів відносно вісі z ;
- спрямуємо реакції R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az} у довільних напрямках на схемі.

2. Складемо шість рівнянь рівноваги для визначення невідомих (R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} , R_{Ay} та R_{Az}). Перше, друге та третє рівняння – суми проєкцій сил на вісі x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті сили, які за напрямком співпадають з віссю. Четверте, п'яте та шосте рівняння – це рівняння моментів сил відносно осей x , y та z . У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути вал відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі). Після складання рівняння моментів сил відносно вісі z видно, що в ньому відсутні невідомі, проте це рівняння дає змогу запевнитись, що вал дійсно збалансований.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ox} + F - T \cdot \cos(\beta) + R_{Ax} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Oy} + R_{Ay} + P \cdot \cos(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; R_{Oz} - Q + T \cdot \sin(\beta) + P \cdot \sin(\alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; -R_{Ay}(a + b + c + d) - T \cdot \sin(\beta) \cdot R_3 + P \cdot \sin(\alpha) \cdot R_2 -$$

$$-P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - Q \cdot R_1 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; R_{Ax} \cdot (a + b + c + d) - T \cdot \cos(\beta) \cdot (a + b + c) + F \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0; F \cdot R_1 - T \cdot \cos(\beta) \cdot R_3 - M = 0.$$

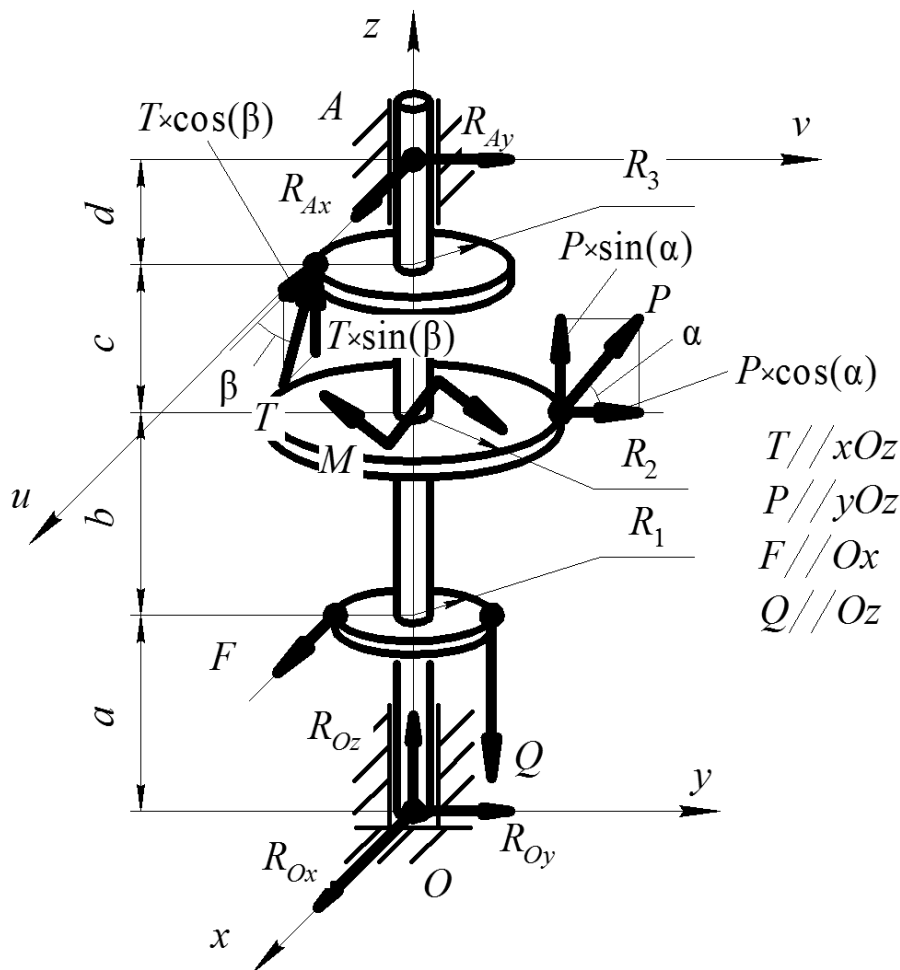


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема вертикально орієнтованого у просторі вала (ТМ-4, приклад 4)

3. Визначимо невідомі реакції опор (в'язей). Почати розрахунки треба з рівнянь, де найменша кількість невідомих

$$R_{Ax} = -\frac{F \cdot a - T \cdot \cos(\beta) \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d} = -0,63 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ay} = -\frac{\left[Q \cdot R_1 + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - \right. \\ \left. - P \cdot \sin(\alpha) \cdot R_2 + T \cdot \sin(\beta) \cdot R_3 \right]}{a + b + c + d} = -1,96 \text{ (кН)};$$

$$R_{Ox} = T \cdot \cos(\beta) - R_{Ax} - F = -3,87 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oy} = -R_{Ay} - P \cdot \cos(\alpha) = -1,26 \text{ (кН)};$$

$$R_{Oz} = Q - T \cdot \sin(\beta) - P \cdot \sin(\alpha) = -4,43 \text{ (кН)}$$

Визначимо результуючі реакції R_A та R_O в опорах A і O

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-0,63)^2 + (-1,96)^2} = 2,06 \text{ (кН)};$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = \sqrt{(-3,87)^2 + (-1,26)^2 + (-4,43)^2} = 6,01 \text{ (кН)}.$$

4. Виконаємо перевірку отриманого рішення, склавши рівняння моментів сил відносно двох додаткових осей u та v на схемі (рис. 4.8). У цих рівняннях зі знаком «+» будуть ті моменти сил, які намагаються повернути вал відносно розглянутої вісі координат проти годинникової стрілки (якщо дивитись назустріч напрямку вісі).

$$\sum_{i=1}^n M_v(F_i) = 0; -R_{Ox} \cdot (a + b + c + d) - \\ -F \cdot (b + c + d) + T \cdot \cos(\beta) \cdot d = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_u(F_i) = 0; R_{Oy} \cdot (a + b + c + d) - Q \cdot R_1 + P \cdot \sin(\alpha) \cdot R_2 + \\ + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (c + d) - T \cdot \sin(\beta) \cdot R_3 = 0.$$

В двох рівняннях перевірки отримали тотожність $0 = 0$. Отже, бачимо, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -0,63$ (кН); $R_{Ay} = -1,96$ (кН); $R_{Ox} = -3,87$ (кН); $R_{Oy} = -1,26$ (кН); $R_{Oz} = -4,43$ (кН); $R_A = 2,06$ (кН); $R_B = 6,01$ (кН).

4.4.1 ТМ-4, приклад 4. Визначення реакцій опор просторового вертикально орієнтованого вала аналітичним методом з використанням пакету Mathcad

↑ДО ТМ-4↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення реакцій опор просторової конструкції аналітичним методом у прикладному пакеті Mathcad можна скористатись наступним алгоритмом

- задання вихідних даних з одиницями вимірювання

$$\begin{array}{lllllll}
 a := 3\text{m} & b := 3\text{m} & c := 2\text{m} & d := 1.5\text{m} & R_1 := 1.4\text{m} & R_2 := 2\text{m} & R_3 := 1.6\text{m} \\
 P := 5\text{kN} & F := 6\text{kN} & Q := 2\text{kN} & T := 3\text{kN} & M := 6\text{kN}\cdot\text{m} & \alpha := 50\text{deg} & \beta := 60\text{deg}
 \end{array}$$

- складання рівнянь рівноваги, орієнтуючись на [рисунок 4.8](#)

$$\begin{array}{ll}
 \sum_i F_{ix} = 0 & R_{Ox} + F - T \cdot \cos(\beta) + R_{Ax} = 0 \\
 \sum_i F_{iy} = 0 & R_{Oy} + R_{Ay} + P \cdot \cos(\alpha) = 0 \\
 \sum_i F_{iz} = 0 & R_{Oz} - Q + T \cdot \sin(\beta) + P \cdot \sin(\alpha) = 0 \\
 \sum_i M_x(F_i) = 0 & -R_{Ay} \cdot (a + b + c + d) - T \cdot \sin(\beta) \cdot R_3 + \\
 & + P \cdot \sin(\alpha) \cdot R_2 - P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - Q \cdot R_1 = 0 \\
 \sum_i M_y(F_i) = 0 & R_{Ax} \cdot (a + b + c + d) - T \cdot \cos(\beta) \cdot (a + b + c) + F \cdot a = 0 \\
 \sum_i M_z(F_i) = 0 & F \cdot R_1 - T \cdot \cos(\beta) \cdot R_3 - M = 0 \text{ J}
 \end{array}$$

- визначення невідомих реакцій опор (в'язей) у зазначеному порядку

$$R_{Ax} := -\frac{F \cdot a - T \cdot \cos(\beta) \cdot (a + b + c)}{a + b + c + d} = -0.632 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ay} := -\frac{Q \cdot R_1 + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (a + b) - P \cdot R_2 \cdot \sin(\alpha) + R_3 \cdot T \cdot \sin(\beta)}{a + b + c + d} = -1.956 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Ox} := T \cdot \cos(\beta) - R_{Ax} - F = -3.868 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Oy} := -R_{Ay} - P \cdot \cos(\alpha) = -1.258 \cdot \text{kN}$$

$$R_{Oz} := Q - P \cdot \sin(\alpha) - T \cdot \sin(\beta) = -4.428 \cdot \text{kN}$$

- розрахунок результуючих реакцій опор (в'язей)

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 2.055 \cdot \text{kN}$$

$$R_O := \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = 6.013 \cdot \text{kN}$$

- складання рівнянь моментів сил для перевірки правильності розрахунків

$$\sum_i M_z(F_i) = 0 \quad -M + F \cdot R_1 - T \cdot \cos(\beta) \cdot R_3 = -4.547 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\sum_i M_v(F_i) = 0 \quad -R_{Ox} \cdot (a + b + c + d) - F \cdot (b + c + d) + T \cdot \cos(\beta) \cdot d = 4.547 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\sum_i M_u(F_i) = 0 \quad R_{Oy} \cdot (a + b + c + d) - Q \cdot R_1 + P \cdot \sin(\alpha) \cdot R_2 + P \cdot \cos(\alpha) \cdot (c + d) - T \cdot \sin(\beta) \cdot R_3 = 0 \text{ J}$$

4.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-4)

↑ДО ТМ-4↑

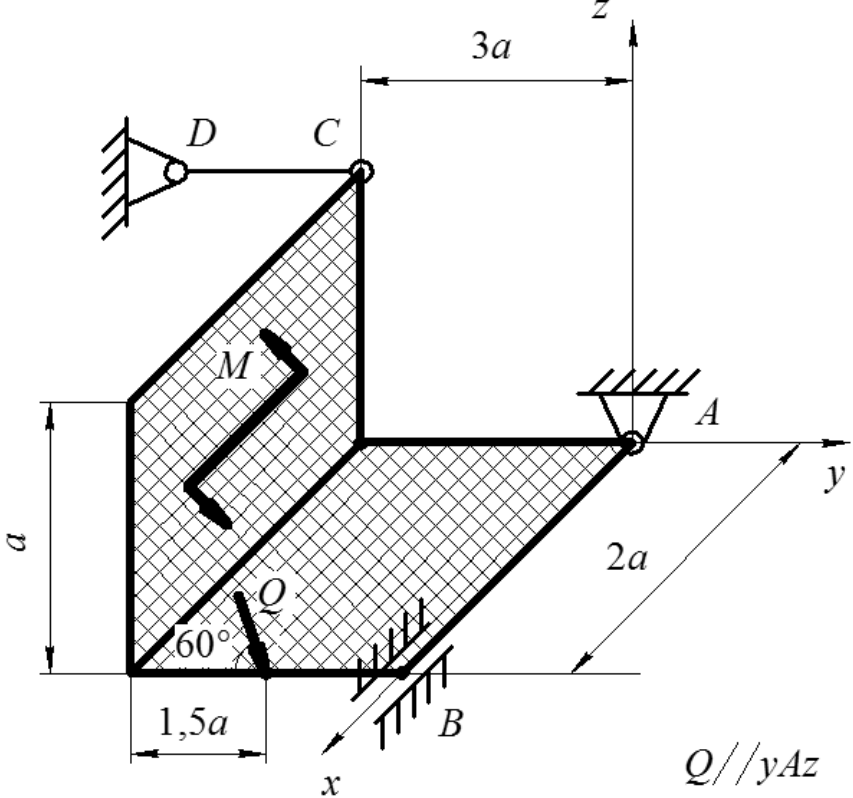
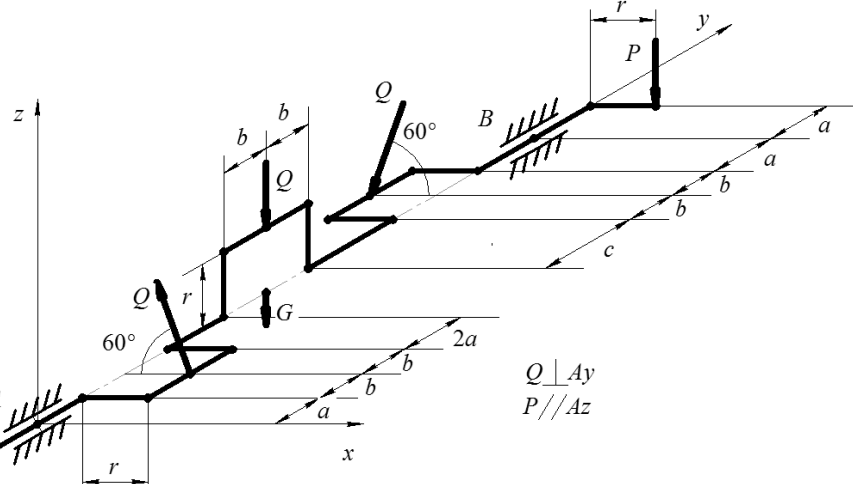
↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Умова задачі

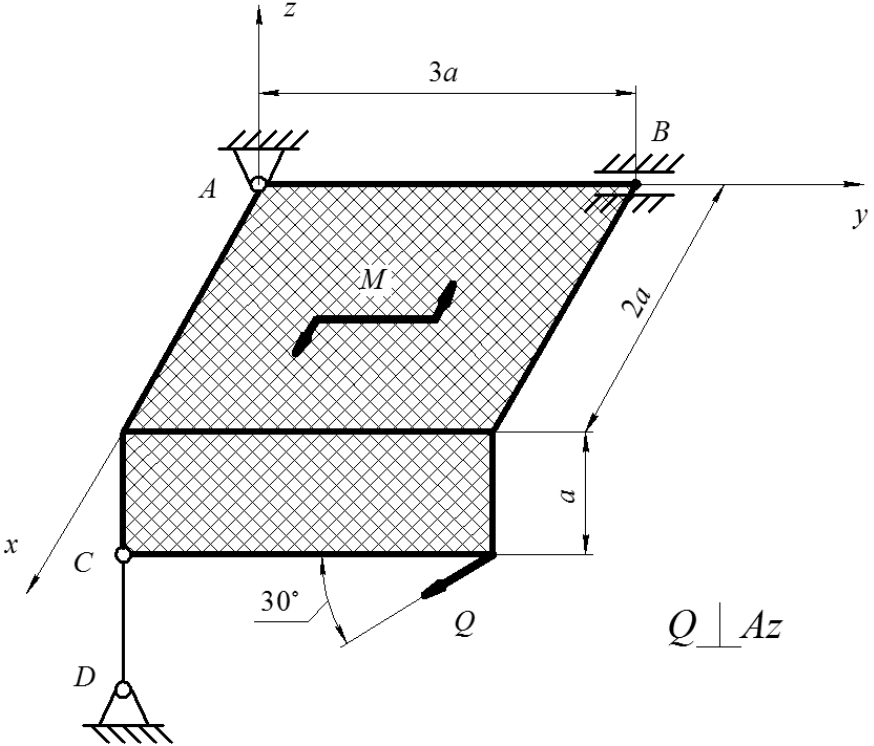
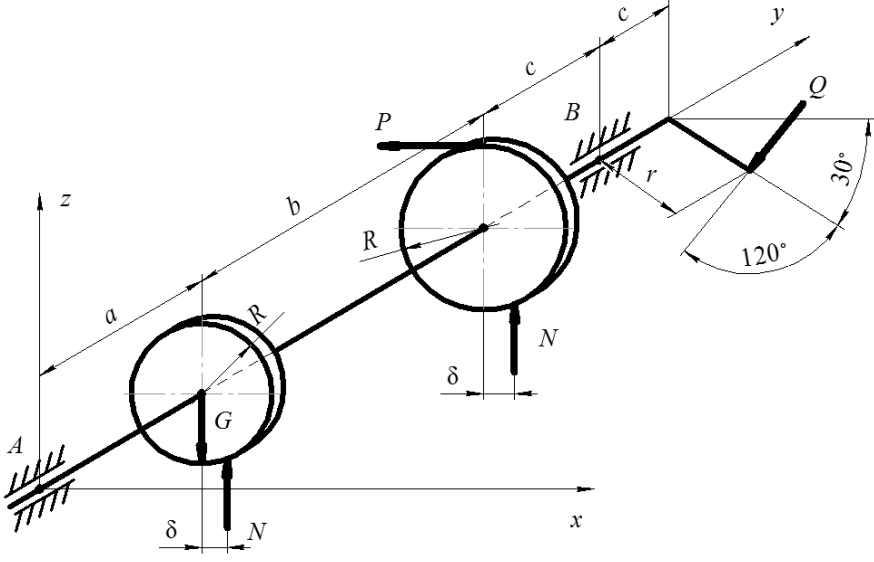
Знайти реакції опор заданої конструкції.

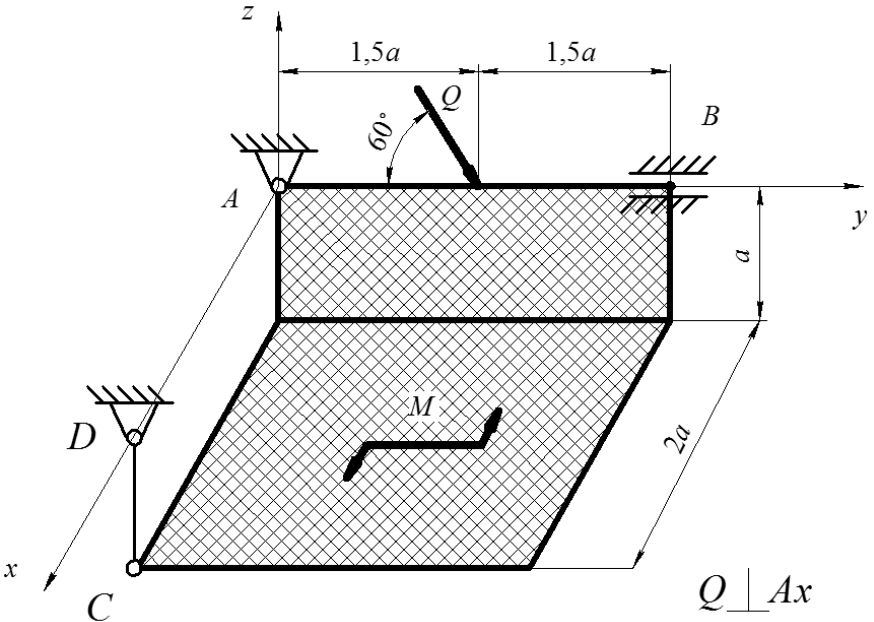
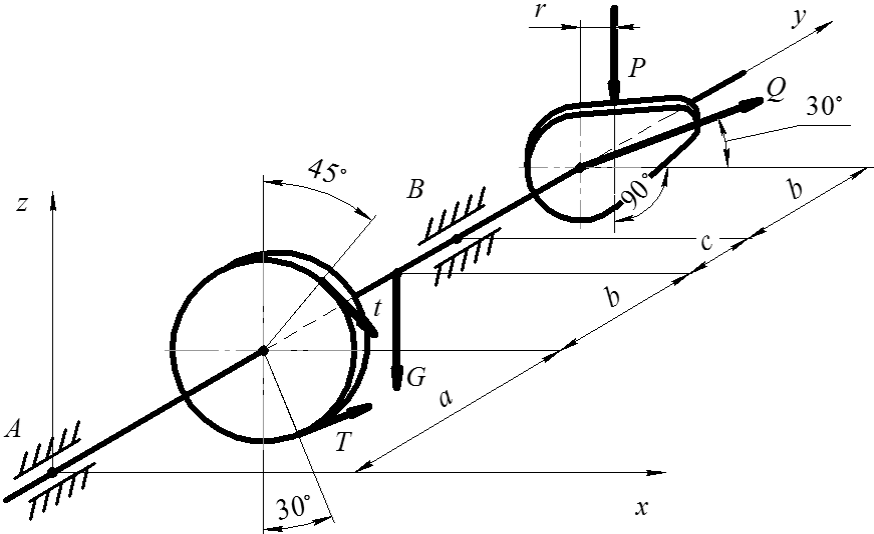
Таблиця 4.1 Вихідні дані для розрахунків і схеми до індивідуальних завдань

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
1	$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 2 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 20 \text{ кН}$ $a = 0,2 \text{ м}$ $b = 0,3 \text{ м}$ $c = 0,1 \text{ м}$ $R = 0,15 \text{ м}$ $r = 0,5 \text{ м}$	<p> $P // Ax$ $CD \perp Ay$ </p>

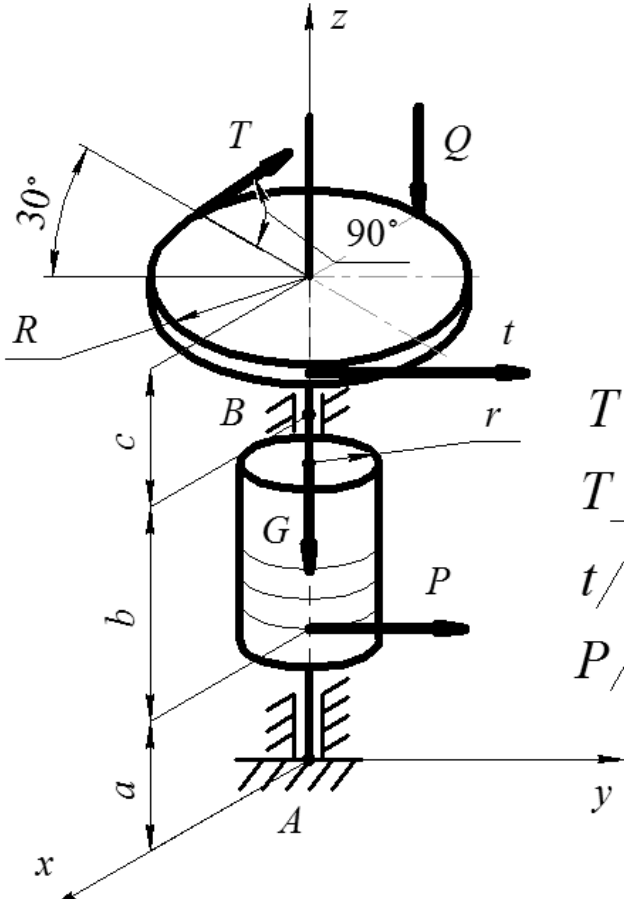
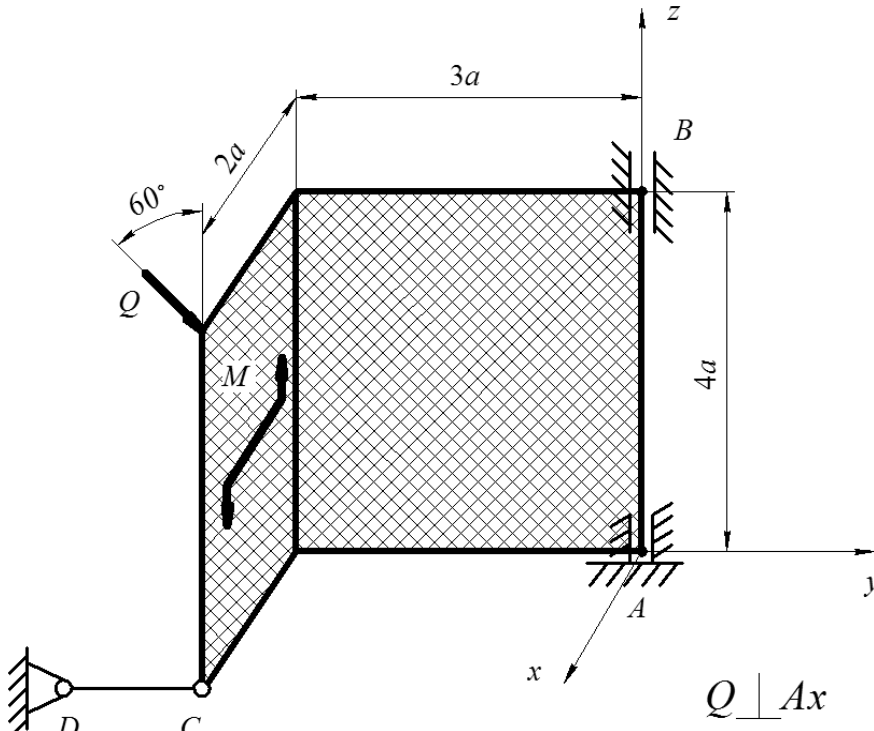
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
2	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 3 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q // yAz$</p>
3	$M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 6 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 4 \text{ кН}$ $a = 0,15 \text{ м}$ $b = 0,15 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0,15 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q \perp Ay$ $P // Az$</p>

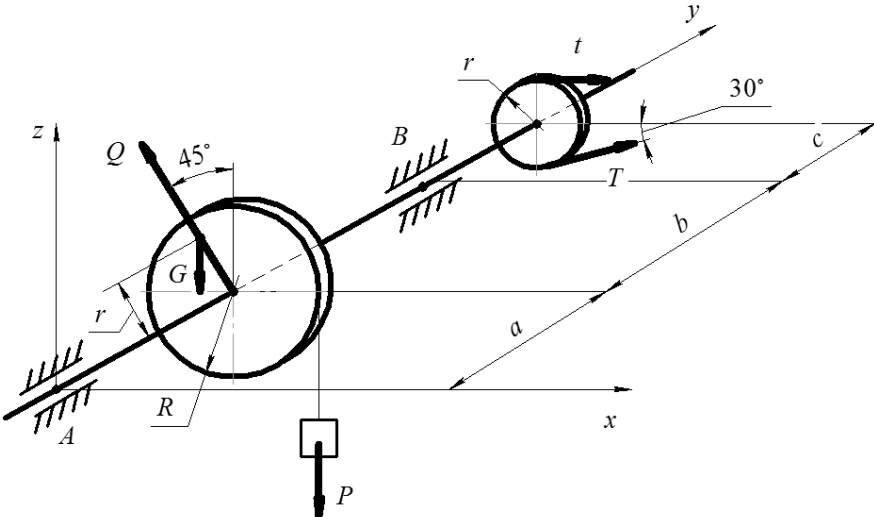
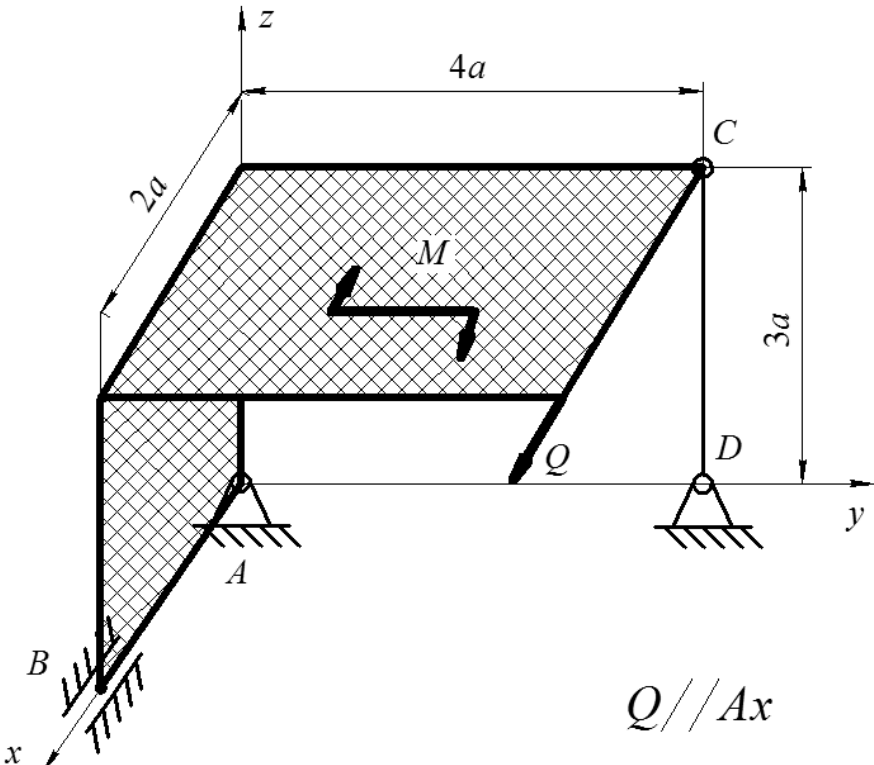
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
4	$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 5 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,5 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	
5	$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 3 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 2 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,2 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $R = 0,15 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	

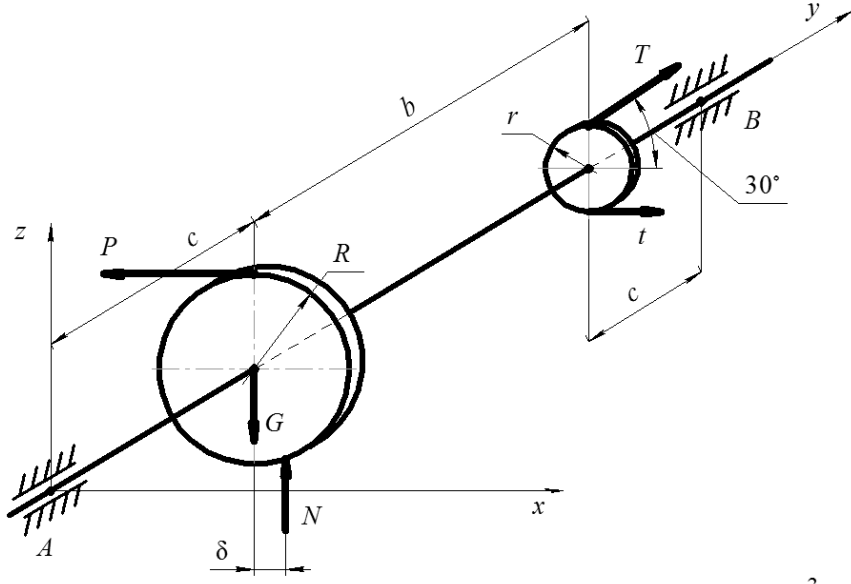
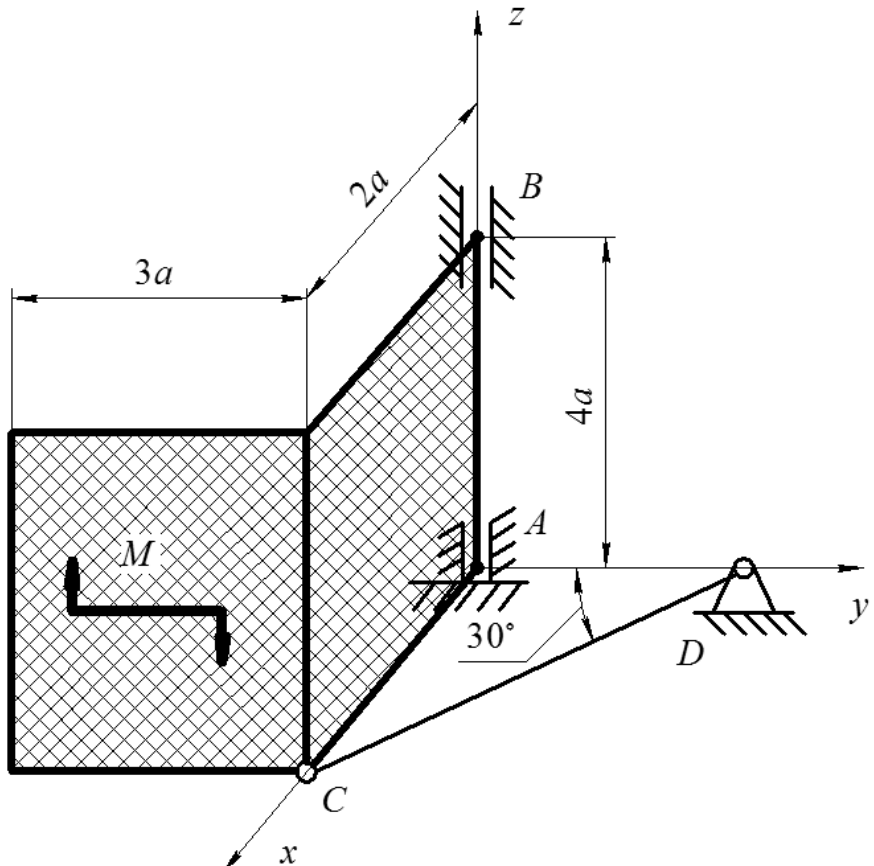
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
6	$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 4 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,6 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q \perp Az$</p>
7	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 5 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 3 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,4 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,15 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$N=G$ $N // Az$ $P // Ax$ $Q \perp Ay$ $\delta = 5 \times 10^{-3} R$</p>

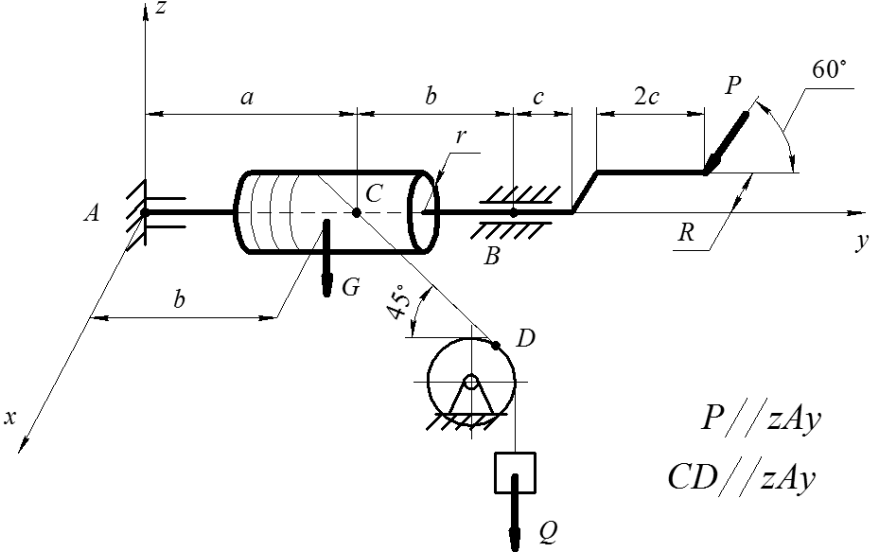
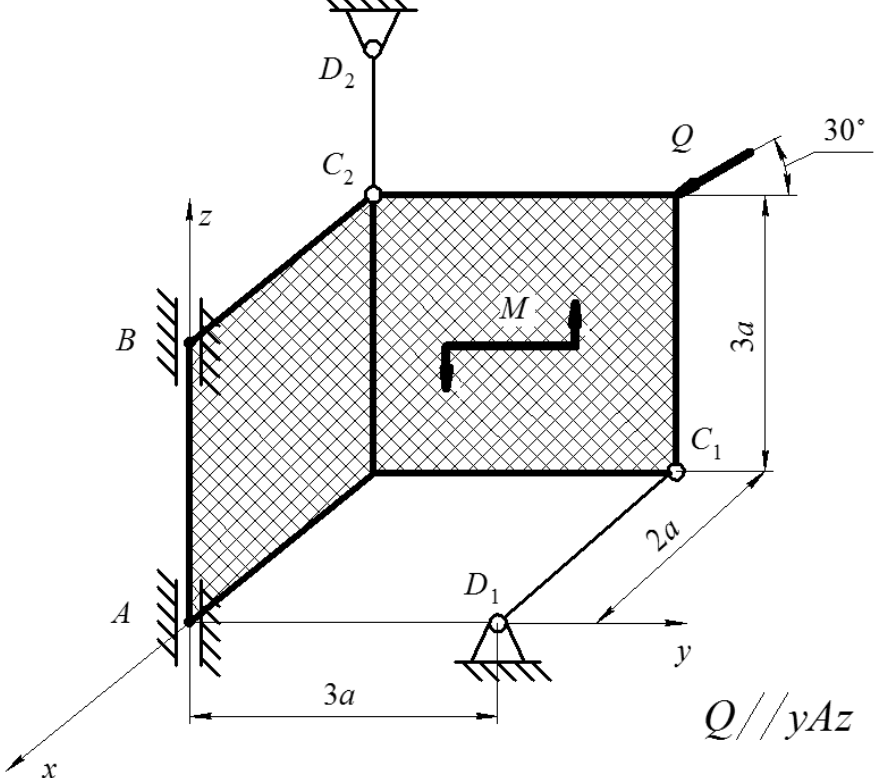
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
8	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 2 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q \perp Ax$</p>
9	$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 1 \text{ кН}$ $T = 4 \text{ кН}$ $G = 2 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0,3 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$T = 2t \quad T \text{ ma } t \perp Ay \quad P \perp Ay \quad Q \perp Ay$</p>

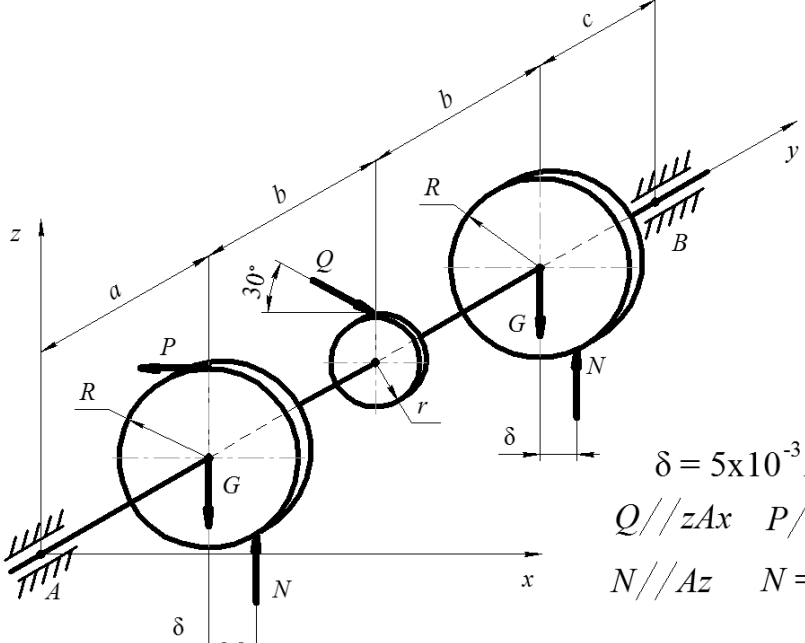
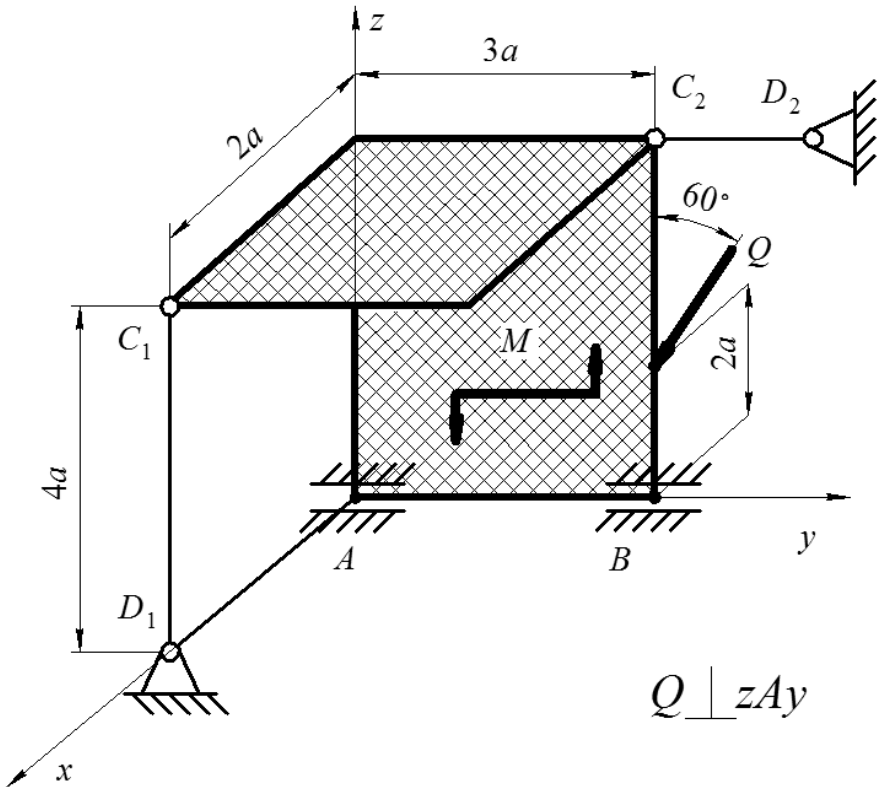
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
10	$M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,5 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	
11	$M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 3 \text{ кН}$ $G = 1 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,1 \text{ м}$ $c = 0,05 \text{ м}$ $R = 0,18 \text{ м}$ $r = 0,06 \text{ м}$	<p style="text-align: center;">$T = 2t \quad P // Az \quad T \text{ ма } t \perp Ay$</p>

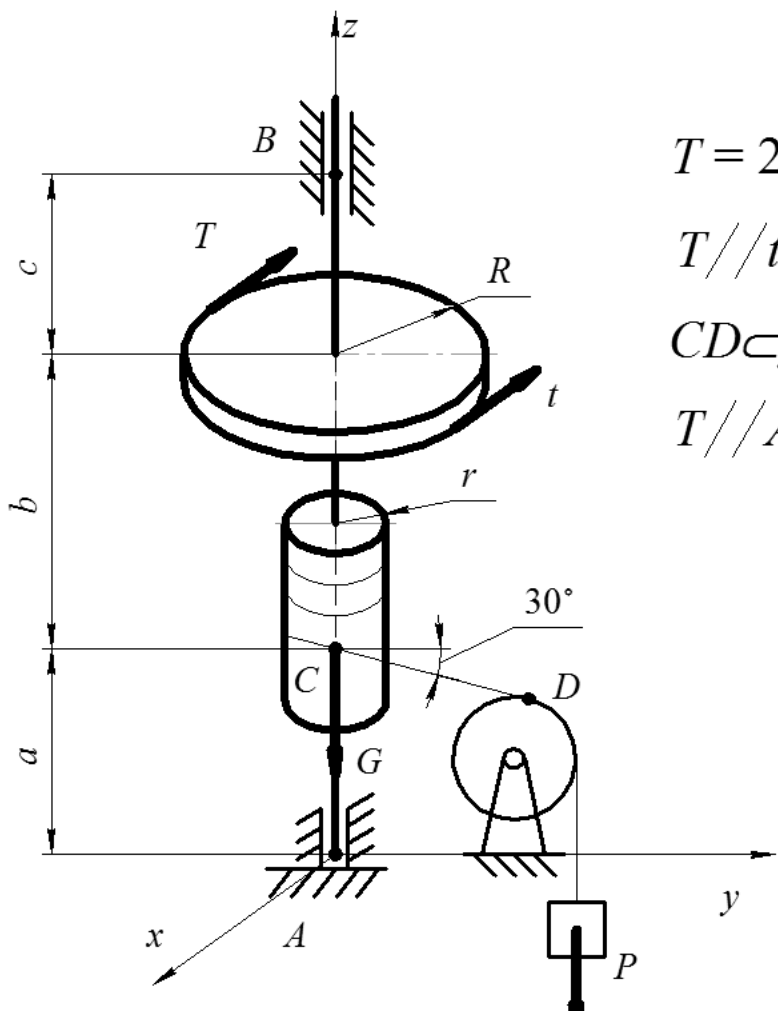
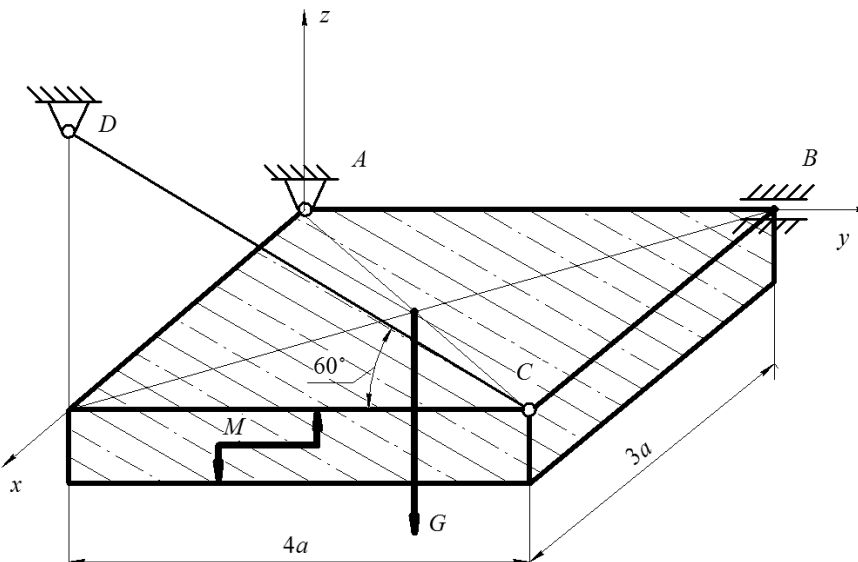
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
12	$M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 4 \text{ кН}$ $T = 6 \text{ кН}$ $G = 3 \text{ кН}$ $a = 0,2 \text{ м}$ $b = 0,4 \text{ м}$ $c = 0,15 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;"> $T = 2t$ $T \perp Az$ $t // Ay$ $P // Ay$ </p>
13	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 5 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q \perp Ax$</p>

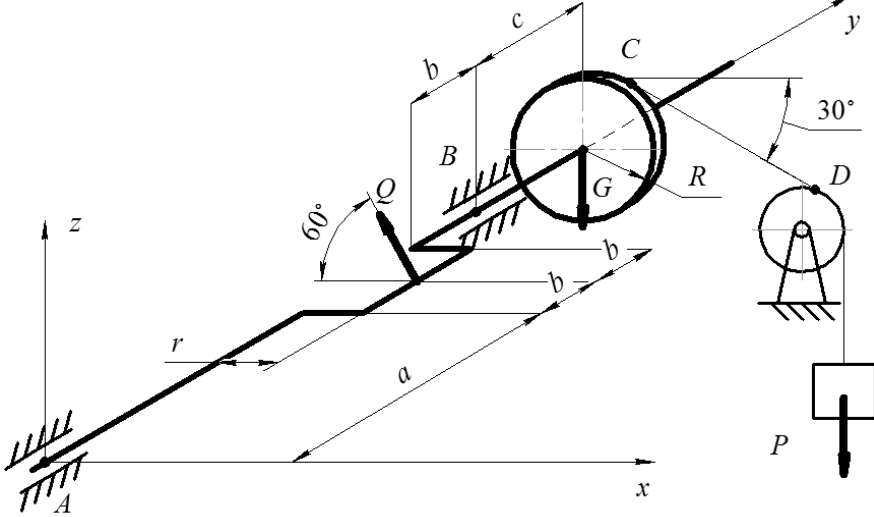
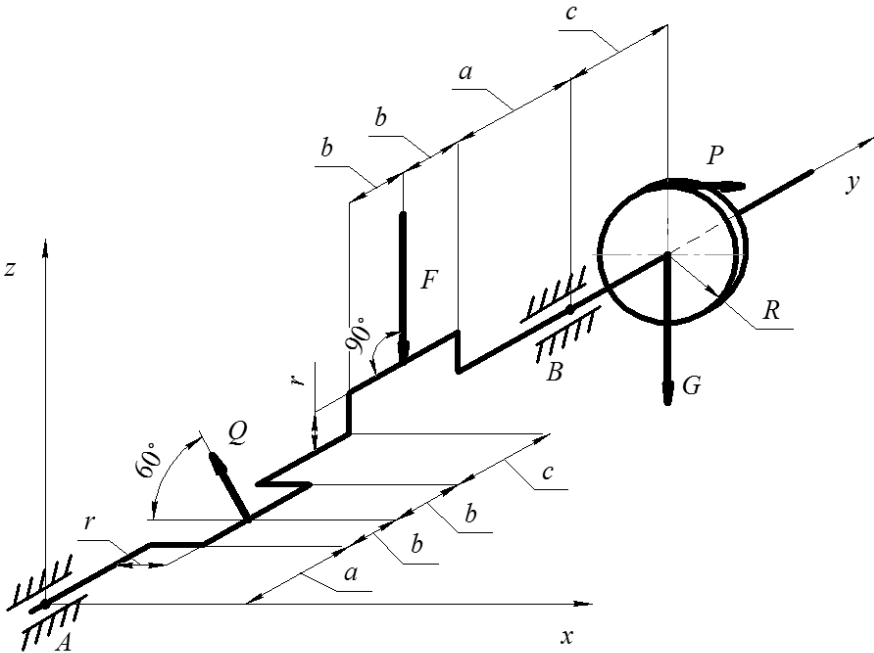
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
14	$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 1 \text{ кН}$ $T = 4 \text{ кН}$ $G = 2 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,4 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$T = 2t \quad T \perp Ay \quad t // Ax \quad Q \perp Ay \quad P // Az$</p>
15	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 2 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$Q // Ax$</p>

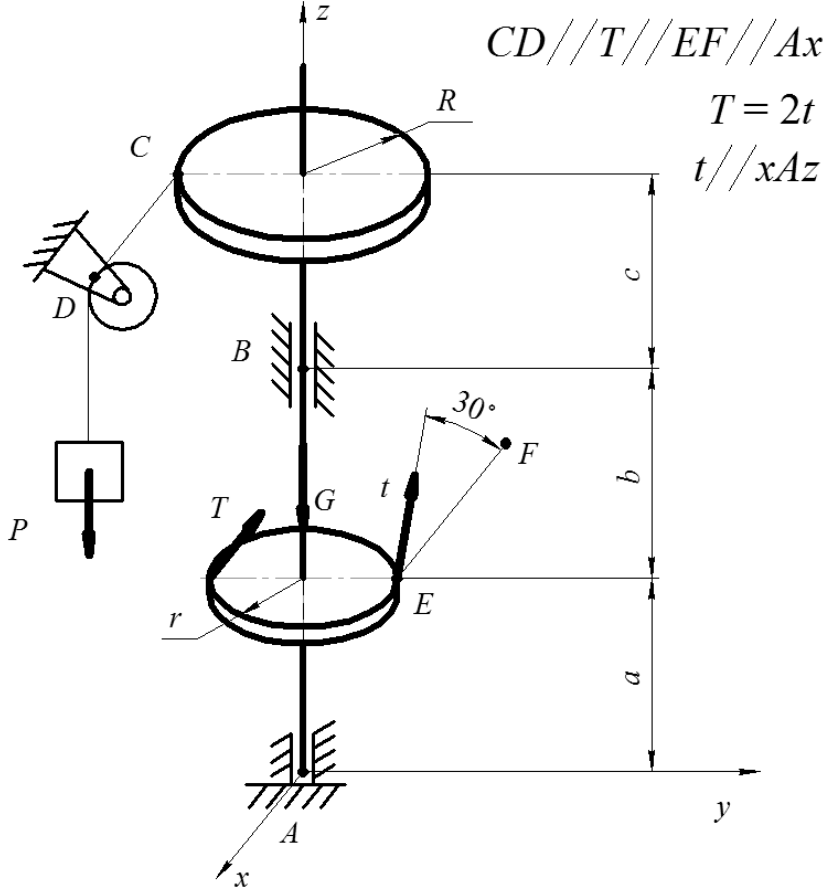
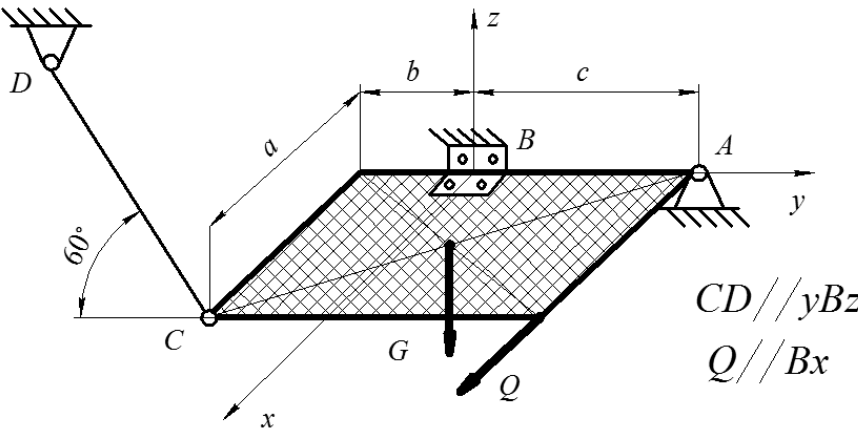
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
16	$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 2 \text{ кН}$ $G = 1 \text{ кН}$ $a = 0,2 \text{ м}$ $b = 0,3 \text{ м}$ $c = 0,15 \text{ м}$ $R = 0,15 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$\delta = 5 \times 10^{-3} R$</p> <p>$T = 2t \quad T \perp Ay \quad P \text{ ma } t // Ax \quad N // Az \quad N = 2G$</p>
17	$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	

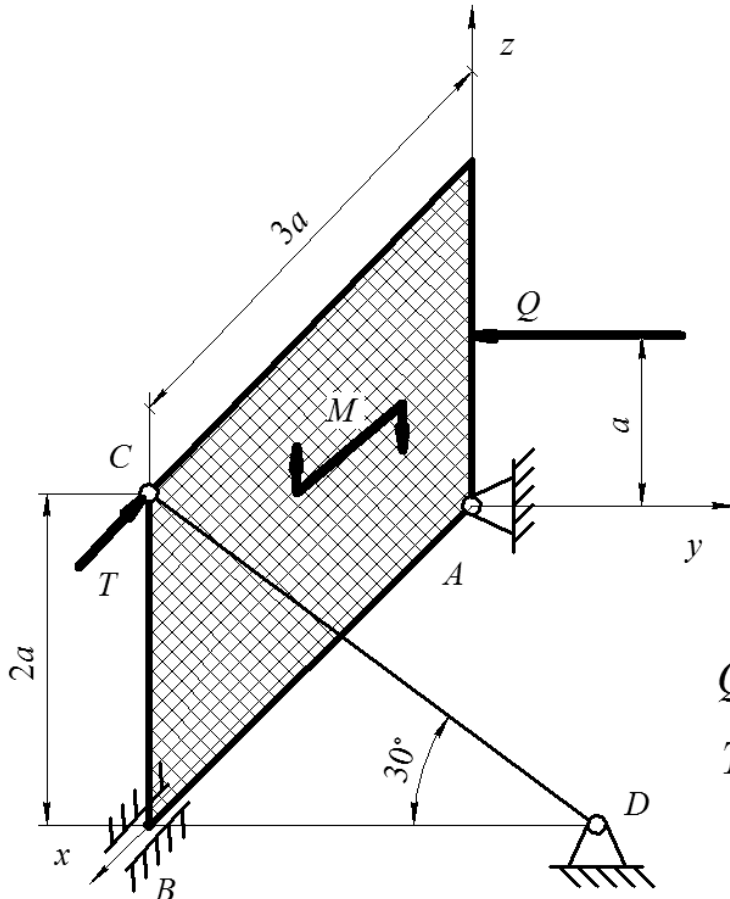
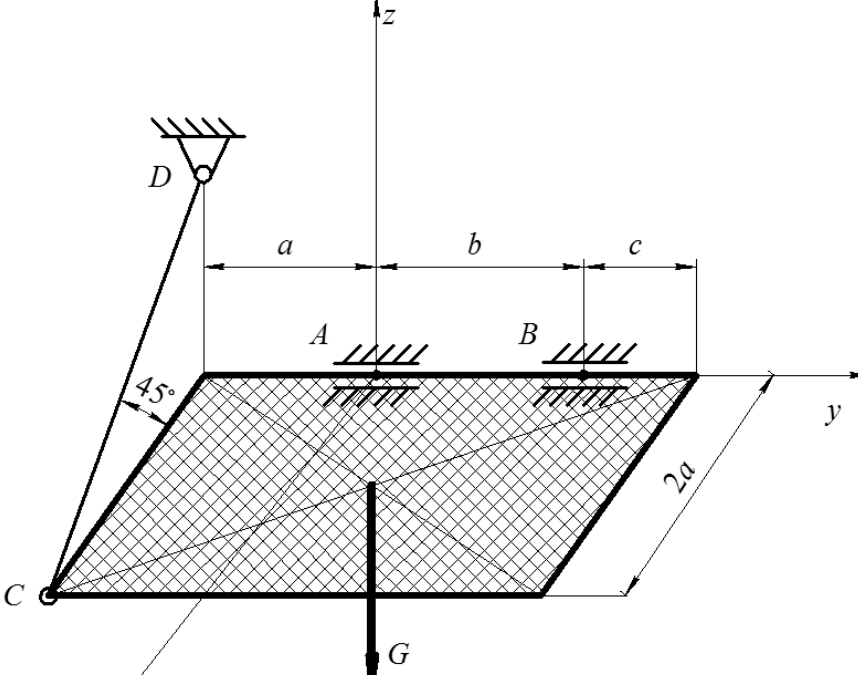
Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
18	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 4 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 1 \text{ кН}$ $a = 0,25 \text{ м}$ $b = 0,2 \text{ м}$ $c = 0,08 \text{ м}$ $R = 0,15 \text{ м}$ $r = 0,5 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$P // zAy$ $CD // zAy$</p>
19	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 3 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q // yAz$</p>

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
20	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 10 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 5 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0,3 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,25 \text{ м}$ $r = 0,15 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;"> $\delta = 5 \times 10^{-3} R$ $Q // zAx \quad P // Ax$ $N // Az \quad N = G$ </p>
21	$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 5 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;">$Q \perp zAy$</p>

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
22	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 2 \text{ кН}$ $G = 1 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,9 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,3 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;"> $T = 2t$ $T // t$ $CD \subset yAz$ $T // Ax$ </p>
23	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 3 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0 \text{ м}$ $c = 0 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
24	$M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 3 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 2 \text{ кН}$ $a = 0,6 \text{ м}$ $b = 0,2 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,05 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$Q \perp Ay \quad CD \perp Ay$</p>
25	$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 2 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 1 \text{ кН}$ $a = 0,15 \text{ м}$ $b = 0,1 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0,2 \text{ м}$ $r = 0,05 \text{ м}$	 <p style="text-align: center;">$Q \perp Ay \quad P // Ax \quad F // Az \quad F = 2Q$</p>

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
26	$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 4 \text{ кН}$ $G = 3 \text{ кН}$ $a = 0,15 \text{ м}$ $b = 0,2 \text{ м}$ $c = 0,15 \text{ м}$ $R = 0,15 \text{ м}$ $r = 0,1 \text{ м}$	 <p>The diagram shows a vertical shaft fixed at point A. A ring of radius R is attached at a distance c from A. A ring of radius r is attached at a distance a from A. A force T is applied to the top ring at point C. A force t is applied to the bottom ring at point E, making a 30-degree angle with the vertical. A force P is applied to a pulley system connected to the top ring. A moment M is applied to the shaft at point G. A force Q is applied to the shaft at point B. The coordinate system has z as the vertical axis, y as the horizontal axis, and x as the axis along the shaft.</p> <p>$CD // T // EF // Ax$ $T = 2t$ $t // xAz$</p>
27	$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 6 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 2 \text{ кН}$ $a = 0,6 \text{ м}$ $b = 0,4 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p>The diagram shows a rectangular plate with a hatched surface. Point C is at the bottom-left corner, and point A is at the bottom-right corner. A force Q is applied at point G, which is at a distance a from C and b from A. A force T is applied at point D, which is at a distance c from A. A moment M is applied at point D. The plate is supported at point B. The coordinate system has z as the vertical axis, y as the horizontal axis, and x as the axis along the plate.</p> <p>$CD // yBz$ $Q // Bx$</p>

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
28	$M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 8 \text{ кН}$ $T = 4 \text{ кН}$ $G = 0 \text{ кН}$ $a = 0,2 \text{ м}$ $b = 0,5 \text{ м}$ $c = 0,6 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	 <p style="text-align: right;"> $Q // Ay$ $T // Ax$ </p>
29	$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 0 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 6 \text{ кН}$ $a = 0,4 \text{ м}$ $b = 0,4 \text{ м}$ $c = 0,2 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	

Варіант	Вихідні дані	Схема конструкції
30	$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ $Q = 10 \text{ кН}$ $T = 0 \text{ кН}$ $G = 4 \text{ кН}$ $a = 0,3 \text{ м}$ $b = 0,8 \text{ м}$ $c = 0,4 \text{ м}$ $R = 0 \text{ м}$ $r = 0 \text{ м}$	

ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до Положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти».

Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

Шкали

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок мобільних студентів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90...100	відмінно / Excellent
74...89	добре / Good
60...73	задовільно / Satisfactory
0...59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

Засоби та процедури

Зміст засобів діагностики спрямовано на контроль рівня сформованості знань, умінь, комунікації, автономності та відповідальності студента за вимогами НРК до 6-го кваліфікаційного рівня під час демонстрації регламентованих робочою програмою результатів навчання.

Студент на контрольних заходах має виконувати завдання, орієнтовані виключно на демонстрацію дисциплінарних результатів навчання (розділ 2).

Засоби діагностики, що надаються студентам на контрольних заходах у вигляді завдань для поточного та підсумкового контролю, формуються шляхом конкретизації вихідних даних та способу демонстрації дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики (контрольні завдання) для поточного та підсумкового контролю дисципліни затверджуються кафедрою.

Види засобів діагностики та процедур оцінювання для поточного та підсумкового контролю дисципліни подано нижче.

Засоби діагностики та процедури оцінювання

ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ			ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ	
навчальн е заняття	засоби діагностики	процедури	засоби діагностики	процедури
лекції	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдання під час лекцій	комплексна контрольна робота (ККР)	визначення середньозваженого результату поточних контролів;
практичні	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдань під час практичних занять		виконання ККР під час екзамену за бажанням студента
	або індивідуальне завдання	виконання завдань під час самостійної роботи		

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих завдань. Практичні заняття оцінюються якістю виконання контрольного або індивідуального завдання.

Якщо зміст певного виду занять підпорядковано декільком складовим, то інтегральне значення оцінки може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюються викладачем.

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі студента шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен студент під час екзамену має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Кількість конкретизованих завдань ККР повинна відповідати відведеному часу на виконання. Кількість варіантів ККР має забезпечити індивідуалізацію завдання.

Значення оцінки за виконання ККР визначається середньою оцінкою складових (конкретизованих завдань) і є остаточним.

Інтегральне значення оцінки виконання ККР може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюється кафедрою для кожної складової опису кваліфікаційного рівня НРК.

Критерії

Реальні результати навчання студента ідентифікуються та вимірюються відносно очікуваних під час контрольних заходів за допомогою критеріїв, що описують дії студента для демонстрації досягнення результатів навчання.

Для оцінювання виконання контрольних завдань під час поточного контролю лекційних і практичних занять в якості критерію використовується коефіцієнт засвоєння, що автоматично адаптує показник оцінки до рейтингової шкали:

$$O_i = 100 a/m,$$

де a – число правильних відповідей або виконаних суттєвих операцій відповідно до еталону рішення; m – загальна кількість запитань або суттєвих операцій еталону.

Індивідуальні завдання та комплексні контрольні роботи оцінюються експертно за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою.

Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
Знання		
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
Уміння/навички		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
Комунікація		
<ul style="list-style-type: none"> ♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово 	<p>Вільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. <p>Комунікаційна стратегія:</p> <ul style="list-style-type: none"> - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції 	95-100
	<p>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами.</p> <p>Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами.</p> <p>Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</p>	90-94

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
<i>Відповідальність і автономія</i>		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<p>♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах;</p> <p>♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти;</p> <p>♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп;</p> <p>♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії</p>	<p>самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію;</p> <ul style="list-style-type: none"> - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; <p>2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; <p>3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - використання професійно-орієнтованих навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; <p>4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації 	
	<p>Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)</p>	<p>90-94</p>

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

Рекомендована література

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

1. Теоретична механіка [Текст] : підруч. Для студ. вищ. Навч. Закл. / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с. ISBN 966-575-184-0
2. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач: навч. Посібник для студ. вищих навч. Закл. / О. С. Апостолюк [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2007. – 400 с. ISBN 966-575-059-3
3. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. Посіб. Для студ. вищ. Навч. Закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. Технічний ун-т, Львівський держ. Ун-т безпеки життєдіяльності. – Вид. 2-е, допов., переробл. – Луцьк : Надстир'я, 2007. – 504 с. – Бібліогр.: с. 500-501. ISBN 978-966-517-585-8

Онищенко Сергій Валерійович
Колосов Дмитро Леонідович

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ В СЕРЕДОВИЩІ МАТНСАД.

Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство»

Видається в авторській редакції

Підписано до видання 09.09.2022
Електронний ресурс Авт. арк. 8,2

Розроблено і видано в
Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.