Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Долгов О.М, Колосов Д.Л., Онищенко С.В.

Теоретична механіка

МОДУЛЬ І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ
ПРЕЗЕНТАЦІЯ ЛЕКЦІЙ

для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство

Дніпро - 2023

Рекомендовано до видання навчально-методичним відділом (протокол № 2 від 07.02.2023) за поданням методичної комісії спеціальності 132 Матеріалознавство (протокол № 2 від 08.12.2022).

Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль І. Фізичні основи механіки [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 27 с.

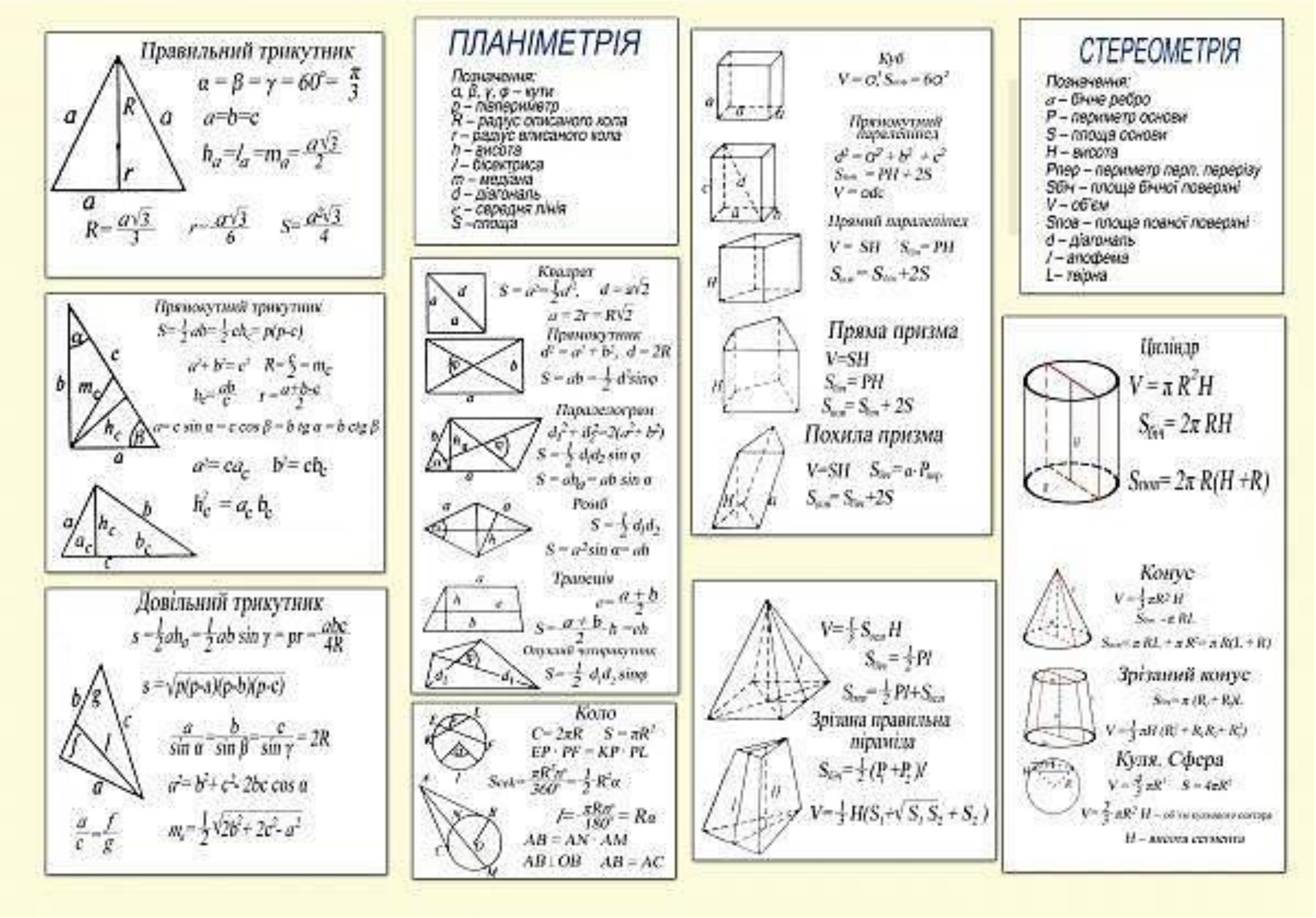
ЗМІСТ

Тема 1

Вступ. Предмет теоретичної механіки. Основи математики у теоретичній механіці.

Теоретична механіка – розділ механіки, у якому вивчаються закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл. Механічним рухом називається зміна з часом взаємного положення у просторі матеріальних тіл, механічною взаємодією – така взаємодія, в результаті якої змінюється механічний рух або змінюється взаємне положення частин тіла.

У теоретичній механіці використовують безліч формул математики. Нагадаємо застосування деяких понять математики у теоретичній механіці.


Правильний трикутник
Прямокутний трикутник
Довільний трикутник
ПЛАНІМЕТРІЯ
Позначення:
α, β, γ, φ – кути
р – півпериметр
R – радіус описаного кола
r – радіус вписаного кола
h – висота
l – бісектриса
m – медіана
d – діагональ
c – середня лінія
S – площа
Квадрат
Прямокутник
Паралелограм
Ромб
Трапеція
Опуклий чотирикутник
Коло
Куб
Прямокутний паралелепіпед
Прямий паралелепіпед
Пряма призма
Похила призма
Зрізана правильна піраміда
СТЕРЕОМЕТРІЯ
Позначення:
a – бічне ребро
P – периметр основи
S – площа основи
H – висота
Pпер – периметр перп. перерізу
Sбч – площа бічної поверхні
V – об'єм
Sпов – площа повної поверхні
d – діагональ
l – апофема
L – твірна
Циліндр
Конус
Зрізаний конус
Куля. Сфера

ТРИГОНОМЕТРІЯ

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО КУТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

ФОРМУЛИ ПОЛОВИННОГО КУТА

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Тема 1 (продовження)

ФОРМУЛИ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}\qquad \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}\qquad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

$$\cos x=a$$

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z;\quad x\in[-\pi;\pi]$$

$$\sin x=a$$

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z;\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{tg}\,x=b$$

$$x=\mathrm{arctg}\,b+\pi n,\ n\in Z;\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

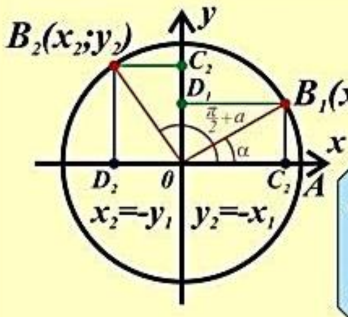
ФОРМУЛИ ПЕРЕХОДУ ДО ТАНГЕНСА ПОЛОВИННОГО КУТА

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

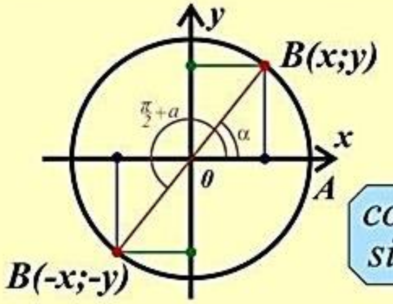
ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Формулами зведення називаються співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2}\pm a, \pi\pm a, \frac{3\pi}{2}\pm a, 2\pi\pm a$ виражаються через значення sina, cosa, tga, ctga

β	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3\pi}{2}-a$	$\frac{3\pi}{2}+a$	$2\pi-a$	$2\pi+a$
sinβ	cosα	cosα	sinα	-sinα	-cosα	-cosα	-sinα	sinα
cosβ	sinα	-sinα	-cosα	-cosα	-sinα	sinα	cosα	cosα
tgβ	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα
ctgβ	tgα	-tgα	-ctgα	ctgα	tgα	-tgα	-ctgα	ctgα



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$



$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

Векторна алгебра.

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \equiv a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}$, де $a_1 = np_{OX}\bar{a}$, $a_2 = np_{OY}\bar{a}$, $a_3 = np_{OZ}\bar{a}$.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$(\cdot)A(x_A, y_A, z_A)$, $(\cdot)B(x_B, y_B, z_B)$. Тоді $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Орт вектора $\bar{a}$ – вектор $\bar{l}_{\bar{a}}$ одиничної довжини, що співпадає з $\bar{a}$ за напрямом,

$$\bar{l}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Скалярний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b}$ або $(\bar{a}, \bar{b})$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ – кут між векторами.

Формула для обчислення в ортонормованому базисі: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \qquad np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \bar{a} \cdot \bar{l}_{\bar{b}}$$

Векторний добуток векторів $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

$\bar{a}\times\bar{b}$ або $[\bar{a}, \bar{b}]$.

$\bar{a}\times\bar{b}$ є вектор:

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{a}$ и $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi-$ кут між векторами.

3) $\bar{a}, \bar{b}, (\bar{a}\times\bar{b})$ утворюють праву трійку, и $(\bar{a}\times\bar{b})=-(\bar{b}\times\bar{a})$.

Формула для обчислення в ортонормованому базісі: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Геометричне значення: $|\bar{a}\times\bar{b}|=S$, де $S-$ площа паралелограму, побудованого на

векторах, і, відповідно, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Фізична інтерпретація: $\overline{OA}\times\bar{F}=\bar{m}$, де

$\bar{F}-$сила, прикладена у $(\cdot)\ A$, $\bar{m}=(m_1, m_2, m_3)-$момент сили відносно $(\cdot)\ O$,

і, відповідно, m_1, m_2, m_3- моменти сили відносно осей OX, OY, OZ.

Змішаний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \bar{c} = (c_1, c_2, c_3).$

Визначення: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$

Формула для обчислення в ортонорованому базісі: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

Геометричне значення: $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = V$, де V – об'єм паралелепіпеду, побудованого на векторах, і, відповідно, $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|.$

Умови колінеарності, ортогональності та компланарності векторів.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \lambda \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \times \bar{b} = 0$$

$$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$$

Таблиця похідних

1. $C' = 0$

2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, $\quad \left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{u'}{C}$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Де $u = u(x), v = v(x)$ – функції,

$m, \ n, \ C = const$ – константи

$x' = 1, \quad (C \cdot x)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

$$\left(arctg\ x\right)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(arctg\ u\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

$$\left(arcctg\ x\right)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(arcctg\ u\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n\cdot u'}{u^{n+1}}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m\cdot\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt[m]{u}\right)' = \frac{u'}{m\cdot\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
$\left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \frac{n}{m}\cdot\sqrt[m]{x^{n-m}}$		$\left(\sqrt[m]{u^n}\right)' = \frac{n\cdot u'}{m}\cdot\sqrt[m]{u^{n-m}}$	

Тема 1 (продовження)

Таблиця інтегралів

n, a – числа, $U = U(x)$ – диференційована функція, C – константа.

$$\int dU = U + C$$

$$\int U^n \cdot dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{при} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C$$

$$\int a^U \cdot dU = \frac{a^U}{\ln a} + C$$

$$\int e^U \cdot dU = e^U + C$$

$$\int \sin U \cdot dU = -\cos U + C$$

$$\int \cos U \cdot dU = \sin U + C$$

$$\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + C$$

$$\int \frac{dU}{\cos^2 U} = tgU + C$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \ln\left|tg\left(\frac{U}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dU}{U^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{U}{a} + C = -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{U}{a} + C_1$$

$$\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{U-a}{U+a}\right| + C = -\frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{U+a}{U-a}\right| + C$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\frac{U}{a} + C = -\arccos\frac{U}{a} + C_1$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + C$$

Якщо $\int f(x)\cdot dx = F(x)+C$, то $F'(x) = f(x)$.

Якщо $\int f(x)\cdot dx = F(x)+C$, то $\int f(U)\cdot dU = F(U)+C$, $\int f(\xi)\cdot d\xi = F(\xi)+C$ і т.д.

$$\int \alpha\cdot f(x)\cdot dx = \alpha\cdot\int f(x)\cdot dx; \qquad \int (f(x)\pm g(x))\cdot dx = \int f(x)\cdot dx \pm \int g(x)\cdot dx$$

Відомо, що $d\,g(x) = g'(x)\cdot dx$. Тоді:

1) $dx = d(x+b)$, $dx = \frac{1}{a}\cdot d(a\cdot x+b)$ для $\forall a\neq 0$ і $\forall b$.

2) $g'(x)\cdot dx = d\,g(x)$;

3) якщо $\int f(x)\cdot dx = F(x)$, тоді $f(x)\cdot dx = dF(x)$.

Інтегрування за частинами: $\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU$

Формула Ньютона – Лейбниця.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Фізичні основи механіки. Закони ньютона

Основні поняття

Примітка: визначення і поняття, наведені у цьому розділі, будуть розглядатимуться докладніше у розділах Статика і Динаміка.

Сила — фізична величина, що характеризує ступінь взаємодії тіл. Якщо на певне тіло діють інші тіла, то ця дія (взаємодія) проявляється в збереженні стану відносної рівноваги тіла, у зміні форми та розмірів тіла (тіло деформується), або/та у зміні швидкості тіла (тіло рухається з прискоренням). У першому випадку маємо *статичний прояв сили*, у другому — *динамічний*. Виходячи з цього можливі два способи визначення сили: за деформацією тіла (наприклад, пружини) і за прискоренням, отриманим тілом.

Сила є векторною величиною — крім числа, що позначає більшу чи меншу дію, вона характеризується ще й точкою прикладання та напрямком дії. Властивості вектора сили можуть залежати від прийнятої моделі тіл. Так, в механіці абсолютно твердого тіла дія сили не залежить від точки прикладання. В цьому розділі механіки сила є ковзним вектором. Сили вивчаються в розділах механіки, які називаються динамікою і статикою. Динаміка вивчає питання, пов'язані з рухом тіл під впливом сил, а в статиці розглядаються умови рівноваги нерухомих тіл.

Сили в механіці — вага, сила пружності, сила тертя, сила тяжіння, сила реакції опори, сила Архімеда та інші зумовлені двома фундаментальними взаємодіями — гравітаційними та електромагнітними. Проте, запис коректних формул для обчислення цих сил (особливо на основі законів електромагнетизму) є надзвичайно складною математичною задачею.

Вага — сила, з якою тіло, внаслідок притягання до Землі, діє на опору або розтягує підвіс. Якщо опора (підвіс) нерухома або рухається рівномірно і прямолінійно відносно Землі, то вага дорівнює силі тяжіння. Вплив обертання Землі на вагу тіла є несуттєвим.

Сила пружності — сила, що виникає всередині речовини при деформації твердого тіла, і яка намагається відновити початкові форму та/або розміри тіла (протидіє деформації).

Сила реакції — сила пружності, що діє на тіло з боку опори або підвісу. Якщо тіло знаходиться на нерухомій опорі, то сила реакції чисельно дорівнює вазі тіла. Якщо опора є похилою, то сила реакції — рівнодійна сил пружності (сила нормальної реакції) і сили тертя спокою, з якою площина діє на тіло.

Сила тертя — сила, що виникає між стичними поверхнями різних тіл, або між частинами одного і того ж суцільного тіла (рідина, газ). Іноді у поняття тертя включають і силу опору середовища (при русі тіл в рідинах і газах).

Сила опору середовища — сила, що діє на тіло, яке рухається в рідині або газі і обумовлюється дією сили в'язкості і сили лобового опору. Сумарну силу, яка діє на тіло, часто означають як силу опору середовища. Вона залежить від швидкості руху тіл, їх форми і розмірів. Проєкція сили опору середовища на напрям переміщення — величина від'ємна.

Сила Архімеда — сила, з якою діє рідина або газ на занурене в неї тіло.

Сила інерції — сила, що діє на тіло при розгляді руху в неінерційних системах відліку.

Сила Коріоліса — одна з сил інерції, що існує в системі відліку, що обертається, і виявляється при русі в напрямі під кутом до осі обертання.

Якщо робота, що здійснюються силами, залежить тільки від початкового і кінцевого положень тіла і не залежить від траєкторії його переміщення, то такі сили називають консервативними, або потенціальними силами. При дії консервативних сил виконується закон збереження механічної енергії. Робота консервативних сил по любій замкнутій траєкторії дорівнює 0. Системи в яких діють тільки консервативні сили називають консервативними.

Якщо робота, що здійснюється силою, залежить від траєкторії переміщення тіла, то така сила називається дисипативною. Системи в яких діють дисипативні сили називають неконсервативними.

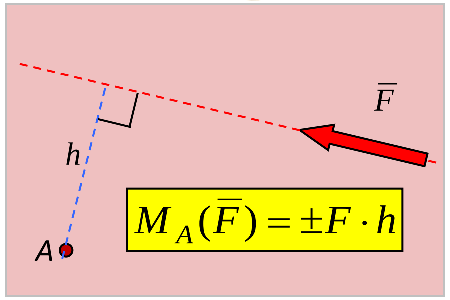
Рівнодійна — **сила**, еквівалентна всім **силам**, що існують та діють на тіло.

Оскільки сили – векторні величини, для них справедливі всі дії, що розглядаються у векторній алгебрі: проектування, складання, розкладання.

Проекція сили на вісь – це взята з відповідним знаком довжина відрізку, розташованого між проекціями початку і кінця вектору сили на цю вісь.

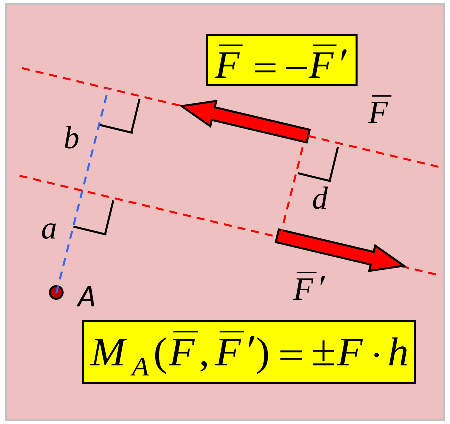
Маса — основна фізична величина, яка вважається однією з фундаментальних характеристик матерії, що визначає її інерційні, енергетичні та гравітаційні властивості.

- **Момент сили відносно точки на площині** – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на плече, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «–» (мінус) в протилежному випадку.



- **Плече сили** – довжина перпендикуляра, проведеного з точки на лінію дії сили.

- **Пара сил** – сукупність двох паралельних одна одній сил, рівних за величиною та спрямованих у протилежні сторони. Пара сил не може бути спрощена (не може бути замінена однією силою) і є новою силовою характеристикою механічної взаємодії.

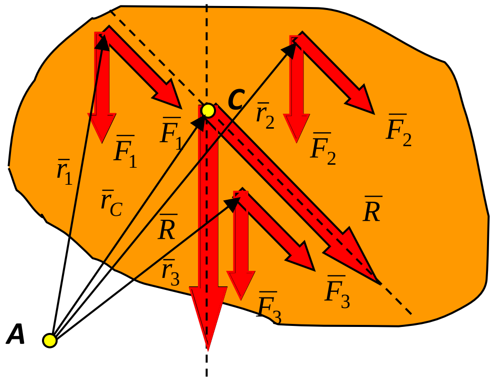


- **Момент пари сил на площині** (теорема про момент пари сил) не залежить від вибору центру приведення (полюса) і дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари, взятим зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією пари сил відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «–» (мінус) в протилежному випадку.

- **Плече пари сил** – довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки на лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили цієї пари.

❖ **Складання паралельних сил.**

Дві паралельні і спрямовані в один бік сили приводяться до однієї сили – рівнодіючої, прикладеної в точці, що ділить пряму на відстані, обернено пропорційні величинам сил. Послідовно складаючи попарно паралельні сили приходимо також до однієї сили – рівнодіючої ***R***:



Центр паралельних сил – точка прикладання рівнодіючої, яка не змінює свого положення за одночасного повороту всіх сил на однаковий кут.

З поняття центру паралельних сил випливає визначення центру ваги:

❖ **Центр ваги** – центр прикладання рівнодіючої сил тяжіння (ваги) матеріального тіла.

При визначенні положення центру тяжіння тіла застосовуються гіпотези:

1. Лінії дії сил тяжіння, прикладені до окремих частинок тіла, паралельні (розглянуті тіла мають розміри багато менші за радіус Землі і тоді кутом між лініями дії сил тяжіння частинок тіл можна знехтувати);
2. Прискорення вільного падіння ***g*** **= const** (висота розглянутих тіл набагато менше радіусу Землі та зміною величини прискорення вільного падіння за висотою тіла можна знехтувати);
3. – однорідні.

Положення центру ваги визначається за формулою:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}$$

Проекції отриманого співвідношення для радіуса-вектора центру ваги на координатні вісі дають аналітичні формули визначення його координат:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

❖ **Визначення положення центру тяжіння однорідних тіл.** *Виділимо елементарний об'єм* ***dV = dxdydz***. Сила тяжіння такого об'єму дорівнює ***dG =γdV***, де ***γ = const*** - об'ємна вага. Якщо замінити підсумовування дискретних сил тяжіння ΔG_i безперервним розподілом, це призведе до отримання інтегральних виразів за об'ємом тіла для визначення координат центрів тяжіння, наприклад, координати x_C:

$$x_C = \frac{\int_G x\,dG}{\int_G dG} = \frac{\iiint x\gamma\,dxdydz}{\iiint \gamma\,dxdydz} = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV}$$

Для всіх трьох координат отримаємо подібні вирази :

$$x_C = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV} \qquad y_C = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV} \qquad z_C = \frac{\int_V z\,dV}{\int_V dV}$$

В окремому випадку плоского тіла (постійної товщини ***H = const***), ***dV = Hdxdy = HdS***:

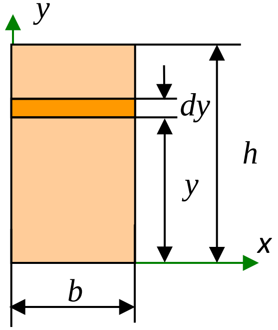
$$x_C = \frac{\iint xH\,dxdy}{\iint H\,dxdy} = \frac{\int_S x\,dS}{\int_S dS} \qquad x_C = \frac{\int_S x\,dS}{\int_S dS} \qquad y_C = \frac{\int_S y\,dS}{\int_S dS}$$

Для лінійного тіла (постійного поперечного перерізу ***S = const***, вісь – плоска крива) ***dV = SdL***:

$$x_C = \frac{\int xS\,dL}{\int S\,dL} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL} \qquad x_C = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL} \qquad y_C = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}$$

Визначення положення центру тяжіння найпростіших плоских тіл:

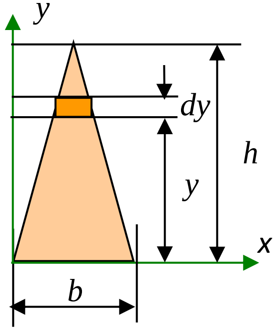
❖**Прямокутник :** ***dS = bdy***



$$y_C = \frac{\int_S y\,dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h yb\,dy}{\int_0^h b\,dy} = \frac{b\int_0^h y\,dy}{b\int_0^h dy} = \frac{b\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

❖ **Трикутник:**

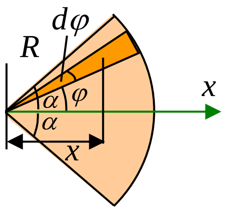
$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h}b; \quad dS = b_y dy = \frac{h-y}{h}b\,dy$$



$$y_C = \frac{\int_S y\,dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y\frac{h-y}{h}b\,dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h}b\,dy} = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h (hy-y^2)\,dy}{\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\,dy} = \frac{\frac{b}{h}\left.\left(h\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^h}{\frac{b}{h}\left.\left(hy-\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

❖ **Круговий сектор :**

$$dS = \frac{1}{2}R(R\,d\varphi) = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

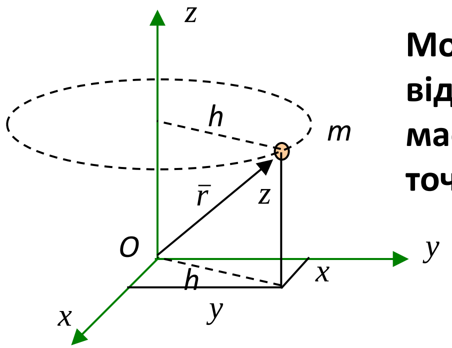


$$x_C = \frac{\int_S x\,dS}{\int_S dS} = \frac{2\int_0^\alpha \frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{R^2}{2}d\varphi}{2\int_0^\alpha \frac{R^2}{2}d\varphi} = \frac{\frac{2}{3}R^3\left.\sin\varphi\right|_0^\alpha}{R^2\left.\varphi\right|_0^\alpha} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

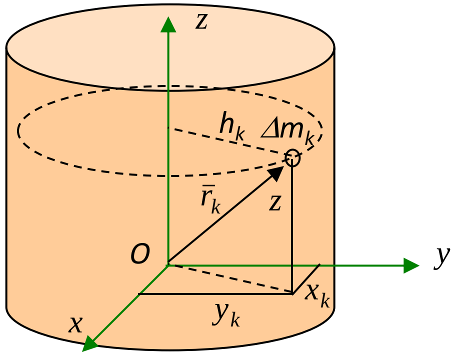
❖ **Елементи теорії моментів інерції.** При обертальному русі твердого тіла мірою інерції (опір зміни руху) є момент інерції відносно вісі обертання. Розглянемо основні поняття визначення та способи обчислення моментів інерції.

1. Момент інерції матеріальної точки відносно вісі:

$$I_z = mh^2 = m(x^2+y^2)$$



Момент інерції матеріальної точки відносно вісі дорівнює добуту маси точки на квадрат відстані точки до вісі.



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент інерції твердого тіла відносно вісі дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат відстані цієї точки до вісі.

За переходу від дискретної малої маси до нескінченно малої маси точки границя такої суми визначається інтегралом.

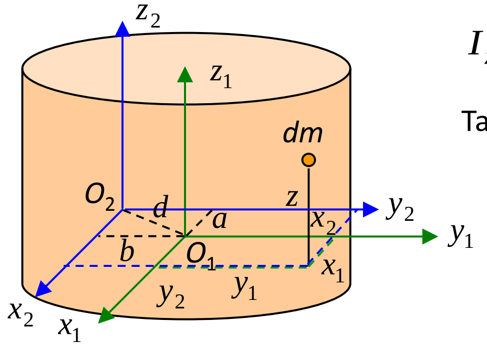
$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2+y^2)dm$$ - **осьовий момент інерції твердого тіла.**

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2+y^2+z^2)dm$$ - **полярний момент інерції твердого тіла.**

Крім осьового моменту інерції твердого тіла існують інші види моментів інерції:

$$I_{xy} = \int xydm$$ - **відцентровий момент інерції твердого тіла**

3. Теорема про моменти інерції твердого тіла відносно паралельних вісей – формула переходу до паралельних вісей:



$$I_{z2} = \int(x_2^2+y_2^2)dm = \int((x_1+a)^2+(y_1+b)^2)dm = \boxed{\int(x_1^2+y_1^2)dm} + 2a\boxed{\int x_1 dm} + 2b\boxed{\int y_1 dm} + \boxed{(a^2+b^2)}\boxed{\int dm}.$$

I_{z1} Момент інерції відносно вихідної вісі

S_{y1} S_{x1} Статичні моменти інерції відносно вихідних осей

d^2 Відстань між осями z_1 и z_2

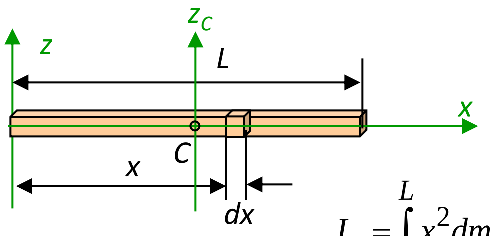
M Маса тіла

Таким чином: $$I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2M.$$

Якщо вісь z_1 проходить через центр мас, то статичні моменти дорівнюють нулю:

$$I_{z2} = I_{zC} + d^2M.$$

4. Момент інерції однорідного стрижня постійного перерізу відносно вісі :



Виділимо елементарний об'єм $\boldsymbol{dV = Adx}$ на відстані $\boldsymbol{x}$:

Елементарна маса: $dm = \rho A dx$

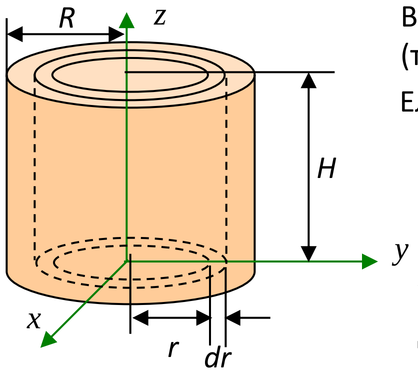
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{ML^2}{3}}$$

Для обчислення моменту інерції відносно центральної вісі (що проходить через центр тяжіння) достатньо змінити розташування вісі та задати межі інтегрування **(-*L*/2, *L*/2)**. Тут продемонструємо формулу переходу до паралельних осей:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \quad \Rightarrow \quad \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \boxed{\frac{ML^2}{12}}.$$

5. Момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно вісі симетрії



Виділимо елементарний об'єм $\boldsymbol{dV = 2\pi r dr H}$ (тонкий циліндр радіусу $\boldsymbol{r}$):

Елементарна маса: $dm = \rho 2\pi r dr H$

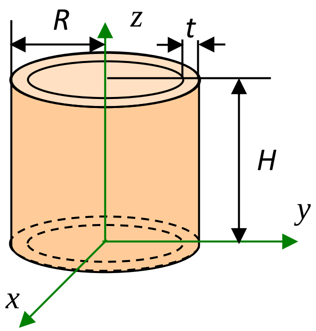
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = \rho 2\pi H \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

Тут використано формулу об'єму циліндра $\boldsymbol{V = \pi R^2 H}$.
Для обчислення моменту інерції порожнистого (товстого) циліндра достатньо задати границі інтегрування від $\boldsymbol{R_1}$ до $\boldsymbol{R_2}$ ($\boldsymbol{R_2 > R_1}$):

$$I_z = \rho 2\pi H \left.\frac{r^4}{4}\right|_{R1}^{R2} = \rho 2\pi H \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \boxed{\frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}}.$$

Оскільки висота циліндрів в результаті не входить у формули моментів інерції, то вони залишаються справедливими для суцільного диска і обода колеса (тонкого кільця).

6. Момент інерції тонкого циліндра відносно вісі симетрії (*t* << *R*):



В силу малості товщини циліндра вважаємо, що всі точки знаходяться на однаковій відстані $\boldsymbol{R}$ до вісі та інтегрування не потрібно. Об'єм $\boldsymbol{V = 2\pi R t H}$. (тонкий циліндр радіуса $\boldsymbol{R}$ із товщиною стінки $\boldsymbol{t}$)

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = \boxed{MR^2}.$$

Те ж саме можна отримати з використанням формули для товстостінного циліндра, враховуючи малість $\boldsymbol{t}$:

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2)}{2} = \frac{M(2R^2 - \boxed{2Rt + t^2})}{2}. \quad << 2R^2.$$

Закони Ньютона

Існують методологічно різні способи формулювання класичної механіки, тобто вибору її фундаментальних постулатів, на основі яких виводяться закони-наслідки і рівняння руху. Надання законам Ньютона статусу аксіом, що спираються на емпіричний матеріал, — тільки один з таких способів («ньютонова механіка»).

Ньютон у своїй книзі «Математичні начала натуральної філософії» сформулював **перший закон механіки таким чином:**

всяке тіло продовжує зберігати стан спокою або рівномірний і прямолінійний рух, допоки цей стан не змінять сили, прикладені до нього.

З сучасної точки зору, таке формулювання незадовільне. По-перше, термін «тіло» слід замінити терміном «матеріальна точка», оскільки тіло кінцевих розмірів за відсутності зовнішніх сил може здійснювати й обертальний рух. По-друге, і це головне, Ньютон у своїй праці спирався на існування абсолютної нерухомої системи відліку, тобто абсолютного простору і часу, а ці уявлення сучасна фізика відкидає. З іншого боку, в довільній (наприклад, такій, що обертається) системі відліку закон інерції неправильний, тому ньютонівське формулювання було замінене постулатом існування інерційних систем відліку.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки):
в інерційній системі відліку прискорення матеріальної точки зі сталою масою прямо пропорційне рівнодійній всіх сил, що діють на неї, і обернено пропорційне її масі.

Це фактично означає, що чим більша за абсолютним значенням сила буде прикладена до тіла, тим більшим буде його прискорення. Маса характеризує інерційні властивості об'єкта.

Третій закон Ньютона: закон дії та протидії:

Сили, що виникають при взаємодії двох тіл, є рівними за модулем і протилежними за напрямом.

Система одиниць (фізичних величин) — сукупність одиниць певної системи фізичних величин.

Основна (**фізиична**) **величинаа** — **фізична величина**, що прийнята за незалежну від інших **величин** певної **системи**.

Міжнародна система одиниць (СІ) — система одиниць фізичних величин, сучасний варіант метричної системи.

Щодо класичної механіки, основними **величинами вважаються одиниця маси (кг маси), одиниця довжини (м),** одиниця часу (сек). З другого закону Ньютона – одиниця сили – ньютон (н) – сила, що прикладена до матеріальної точки масою один кілограм, надає їй прискорення 1 $\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.

Система СГС — основними величинами вважаються одиниця маси (г маси), одиниця довжини (см), одиниця часу (сек). З другого закону Ньютона – одиниця сили – дина (дин).

Технічна система МКГСС — основними величинами вважаються одиниця сили (кгс), одиниця довжини (м), одиниця часу (сек). З другого закону Ньютона – одиниця маси – $\frac{\text{кгс}\cdot\text{м}}{\text{сек}^2}$.

Скорочені позначення метричних одиниць

Скорочення, яке стоїть перед одиницею виміру, показує, на скільки слід помножити дану одиницю.

Скорочення	Позначення	Одиниця множиться на
мікро-	μ	0,000001
мілі-	м	0,001
санти-	с	0,01
деци-	д	0,1
кіло-	к	1000
мега-	М	1 000 000

1 см = 10 мм	1 см² = 100 мм²	1 см³ = 1000 мм³
1 дм = 10 см	1 дм² = 100 см²	1 дм³ = 1000 см³
1 м = 10 дм	1 м² = 100 дм²	1 м³ = 1000 м³
	1 а = 100 м²	
	1 га = 100 а	
	1 км² = 100 га	

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Теоретична механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2002. - 512 с. - ISBN 966-575-184-0
2. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач : навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О. С. Апостолюк [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2007. - 400 с. - ISBN 966-575-059-3
3. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. технічний ун-т, Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності. - Вид. 2-е, допов., переробл. - Луцьк : Надстир'я, 2007. - 504 с. - Бібліогр.: с. 500-501. - ISBN 978-966-517-585-8