Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

Кафедра системного аналізу і управління

С.А. Ус

ЗАДАЧІ ВИБОРУ

Методичні рекомендації
до виконання практичних робіт й індивідуальних завдань
з дисципліни «Теорія прийняття рішень»
студентами спеціальності 124 Системний аналіз

Дніпро
НТУ «ДП»
2022

Ус С.А. Задачі вибору. Методичні рекомендації до виконання практичних робіт й індивідуальних завдань з дисципліни «Теорія прийняття рішень» студентами спеціальності 124 Системний аналіз / С.А. Ус: М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 31 с.

Автор:
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено до видання навчально-методичним відділом (протокол № 7 від 20.07.2022) за поданням методичної комісії спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 4 від 30 червня 2022).

Методичні рекомендації мають на меті допомогти студентам у самостійному засвоєнні нормативної дисципліни «Теорія прийняття рішень» під час виконання практичних робіт та індивідуальних завдань аби мати можливість підготуватися до модульного контролю.

Видання включає тематику практичних робіт, перелік основних теоретичних питань, короткі теоретичні відомості, а також задачі для самостійного розв’язування за змістовим модулем «Задачі вибору». Описано методики обчислень і наведено схеми дослідження в застосуванні до типових задач. Подано методичні поради до виконання практичних завдань, приклади розв’язування задач.

Сформульовано питання для самоконтролю та критерії оцінювання індивідуальних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління, канд. техн. наук, доц. Желдак Т.А.

Зміст

Вступ

Аргументоване прийняття рішень є основою успішної діяльності в будь-якій сфері економіки, науки і виробництва. В умовах збільшення кількості інформації це неможливо зробити, користуючись тільки власним досвідом та інтуїцією. Ось чому актуальним є використання математичних методів дослідження систем різної природи, їх моделювання та прийняття рішень.

Дисципліна «Теорія прийняття рішень» є необхідним елементом сучасної освіти спеціаліста в галузі інформаційних технологій. Вона належить до загальноосвітнього циклу підготовки і спрямована на оволодіння сучасними методами дослідження і прийняття рішень.

Мета вивчення дисципліни це формування компетентностей у сфері моделювання процесу прийняття рішень та обґрунтованого застосування відповідних методів до розв'язування прикладних задач в умовах невизначеності різного типу.

Основні завдання дисципліни:

– розвиток логічного й алгоритмічного мислення студентів;

– засвоєння основних методів прийняття рішень;

– виховання в студентів уміння самостійно застосовувати свої математичні знання й виконувати математичний аналіз прикладних задач.

– стимулювання студентів до систематичної самостійної навчальної роботи.

Під час вивчення дисципліни студенти мають набути таких результатів навчання:

– знати методи розкриття невизначеності в задачах системного аналізу, уміти виявляти ситуаційні типи невизначеності, а також невизначеність у задачах взаємодії, протидії та конфлікту стратегій, знаходити компроміс, розкриваючи концептуальну невизначеність тощо;

– знати і вміти застосовувати методи прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;

– знати й уміти застосовувати методи та алгоритми прийняття рішень в умовах конфлікту, невизначеності й ризику;

– знати й уміти застосовувати методи прийняття рішень в умовах існування багатьох критеріїв;

– уміти розкривати ситуаційну та системну невизначеність, узгоджувати суперечливі цілі в задачах пошуку раціональних компромісів;

– знати й уміти застосовувати методи прийняття рішень в умовах невизначеності, серед яких нечітке математичне моделювання;

– уміти здійснювати опис ситуації та її аналіз, використовуючи бінарні відношення;

– розуміти й застосовувати на практиці методи статистичного моделювання, аналізувати інформаційні ситуації прийняття рішень.

Тематику практичних робіт з дисципліни «Теорія прийняття рішень» подано в табл. 1. Розподіл годин на кожну тему визначено в робочій програмі дисципліни.

Таблиця 1

Тематика практичних робіт

	ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
	Задачі вибору
1	Поняття бінарного відношення. Перевірка властивостей відношень.
2	Визначення найбільших, найменших, максимальних та мінімальних елементів даного відношення. Побудова на основі заданого відношення функції вибору
3	Побудова функції корисності
	Багатокритерійні задачі оптимізації
4	Побудова математичних моделей задач багатокритерійної оптимізації. Визначення множини ефективних рішень у задачах багатокритерійної оптимізації
5	Розв’язування задач багатокритерійної оптимізації методами згортки, послідовної поступки та головного критерію
	Прийняття рішень при нечітких вихідних даних
6	Операції над нечіткими множинами
7	Визначення властивостей нечітких відношень. Побудова строгих відношень переваги на основі заданого відношення
8	Розв’язування задач прийняття рішень за наявності декількох відношень переваги на множині альтернатив
9	Розв’язування задачі досягнення нечітко визначеної мети
10	Розв’язування задачі нечіткого математичного програмування із нечіткими обмеженнями
	Прийняття рішень в умовах невизначенного середовища
11	Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику
12	Прийняття рішень в умовах заданого відношення переваги на множині станів середовища. Критерії прийняття рішень.
13	Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень
14	Прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища. Критерії прийняття рішень.
15	Прийняття рішень в умовах неповної інформації.
16	Прийняття багатоцільових рішень

Мета цих методичних рекомендацій – допомогти студенту опанувати матеріал змістового модуля 1 – Задачі вибору, набути навичок розв’язування таких задач, підготуватися до модульного контролю знань.

ЗАДАЧІ ВИБОРУ

Практична робота 1

Тема роботи: Бінарні відношення.

Мета роботи: вивчення властивостей бінарних відношень, операцій над відношеннями, набуття навичок прийняття рішень на основі заданих відношень.

Короткі теоретичні відомості й приклади розв'язування задач

В и з н а ч е н н я 1. *Відношенням* R на множині Ω називається підмножина декартового добутку $\Omega\times\Omega$, тобто $R\subset\Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega\times\Omega$ дає можливість показати, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Задати відношення можна, зробивши перелік пар, які перебувають у ньому, або за допомогою матриці, графа чи розрізів [8].

Коли відношення описують за допомогою матриці, то на перетині i-го рядка й j-го стовпчика ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль – в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R)=\begin{cases}1, & x_i\,R\,x_j,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Операції над відношеннями

В и з н а ч е н н я 2. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1\le R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 $(R_1<R_2)$, коли $R_1\le R_2$ й $R_1\ne R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1\le R_2$, то $a_{ij}(R_1)\le a_{ij}(R_2)$; $i,j=\overline{1,n}$.

В и з н а ч е н н я 3. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді й тільки тоді, коли воно пов'язує лише ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R}=\Omega^2\setminus R, \tag{1}$$

тому в матричному записі маємо таку відповідність: $a_{ij}\left(\overline{R}\right)=1-a_{ij}(R),\ \ i,j=\overline{1,n}$.

В и з н а ч е н н я 4. *Перетином* відношень R_1 та R_2 (записується як $R_1 \bigcap R_2$) називається відношення, визначене як перетин відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \bigcap R_2)=\min\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 5. *Об'єднанням* відношень R_1 та R_2 (позначається як $R_1 \bigcup R_2$) називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2)=\max\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\quad i,j=\overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 6. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x\,R^{-1}y \ \Leftrightarrow\ y\,R\ x. \qquad (2)$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}\left(R^{-1}\right)=a_{ji}(R).$$

П р и к л а д 1. Нехай відношення R на множині $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, задано у вигляді матриці, тобто

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно з визначенням 3 доповнення відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overline{R}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за визначенням 6, отже,

$$R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 7. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (записується як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, що будується за наступним правилом: $x\left(R_1 \cdot R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє такі умови: $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$.

П р и к л а д 2. Нехай множина $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме:

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}, \qquad R_2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Визначити їхню композицію.

Розв'язування

Згідно із визначенням 7 $x\left(R_1 \cdot R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє такі умови: $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$. У матричному запису це означає, що

$$a_{ij}\left(R_1 \cdot R_2\right)=\max_{k=\overline{1,n}}\,\min\left\{a_{ik}\left(R_1\right), a_{kj}\left(R_2\right)\right\}, \tag{3}$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

За таких умов

$$R_1 \cdot R_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 8. Відношення $\left(R_1,\Omega_1\right)$ називається *звуженням* відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subset \Omega$ та $R_1=R\bigcap\Omega_1\times\Omega_1$. Звуження відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

Властивості відношень

В и з н а ч е н н я 9. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\,R\,x$ для будь-якого елемента $x \in \Omega$.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі такі твердження: $x \in R^{+}(x)$ та $x \in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

В и з н а ч е н н я 10. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\,R\,y$ означає, що $x \neq y$ $\forall x \in \Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i = j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель у вершинах, а верхні й нижні розрізи задовольняють такі умови: $x \notin R^{+}(x)$, $x \notin R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

В и з н а ч е н н я 11. Відношення R називається *симетричним*, якщо $R = R^{-1}$ $(x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення теж симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)$ $\forall x \in \Omega$.

Симетричними, наприклад, є відношення рівності.

В и з н а ч е н н я 12. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\ R\ y$ та $y\ R\ x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j. Інакше кажучи, з двох симетричних елементів a_{ij} та a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» і «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов'язкова умова асиметричності.

В и з н а ч е н н я 13. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути правильними одночасно тоді й тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

В и з н а ч е н н я 14. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (тобто, коли з тверджень $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає, що $x\,R\,y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Зауважимо, що ця умова ($R^2 \leq R$) дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення тоді, коли відношення задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

В и з н а ч е н н я 15. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x\,R\,z_1,\ z_1\,R\,z_2,\ \ldots,\ z_{k-1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

П р и к л а д 3. Визначити властивості такого відношення:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Задане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (бо серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад, елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{13} = a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки транзитивності відношення помножимо його на себе, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2 \not\subset R$, отже, вихідне відношення не є транзитивним.

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Як задати відношення за допомогою розрізів?

6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.

7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?

8. Які математичні операції виконують над відношеннями?

9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?

10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?

11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від'ємно транзитивними?

12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?

13. Які властивості характерні для відношення переваги?

Відповіді на питання передбачають формулювання відповідних визначень, опис особливостей застосування операцій, наведення прикладів.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перевірити властивості записаних нижче відношень.

$$а)\ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Користуючись умовами завдання 2, *а*, *б*, побудувати відношення строгої переваги, еквівалентності, байдужості.

Практична робота 2

Тема роботи: прийняття рішень на основі бінарних відношень.

Мета роботи: вивчення методів прийняття рішень на основі бінарних відношень переваги. Визначення максимальних, мінімальних, найкращих та найгірших елементів на основі заданого відношення, набуття навичок прийняття рішень, базуючись на заданих відношеннях переваги.

Короткі теоретичні відомості й приклади розв'язування задач

Елемент x^* множини X будемо називати *найкращим* з огляду на відношення *R*, якщо $x^* R x$ справедливе для всякого елемента $x \in X$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* з огляду на відношення *R*, якщо $x R x_*$ для всіх елементів $x \in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не повне.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^S на множині *X*, коли для абиякого елемента $x \in X$ має місце твердження, що $x_{\max} R^S x$ або елемент $x_{\max}$ непорівнянний з *x*.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних з огляду на відношення *R* елементів множини *X* позначається як $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* відносно R^S на множині *X*, якщо для всіх елементів $x \in X$ буде справедливим одне з тверджень: $x R^S x_{\min}$ або *x* непорівняний з $x_{\min}$. Отже, не існує елемента $x \in X$ який був би гіршим за $x_{\min}$ і немає жодного елемента *x*, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

Множина мінімальних з огляду на відношення *R* елементів множини *X* позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, а протилежна ситуація не буде справедливою.

П р и к л а д . Визначимо максимальні, мінімальні, найбільші та найменші елементи відношення *R*, заданого на такій множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, якщо

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Із вигляду матриці робимо висновок, що відношення не має найкращих елементів (оскільки жодному елементу не відповідає рядок, який містить тільки одиниці), найгіршим елементом є x_1, оскільки він гірший від будь-якого іншого елемента (відповідний йому стовпець містить лише одиниці).

Для визначення максимальних і мінімальних елементів побудуємо строге відношення, відповідне заданому, тобто

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи вигляд матриці, робимо висновок, що максимальними будуть елементи x_2 та x_3 (відповідні стовпці містять тільки нулі), мінімальним – елемент x_1 (відповідний стовпець складається лише з нулів).

Отже, вихідне відношення не має найкращих елементів, містить один найгірший (він же мінімальний) елемент і два максимальні елементи.

Функцією вибору $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

Множину $C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з множини X.

Зауважимо, що в цьому визначенні немає ніяких апріорних обмежень на функції вибору, зокрема не виключена можливість порожнього вибору, тобто ситуації, коли $C(X) = \varnothing$. Таку ситуацію називають *відмовою від вибору*. Її прикладом може бути випадок, коли покупець іде з магазину, нічого не купивши.

В окремому випадку, зокрема, коли відоме відношення строгої переваги R на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = \max{}_R X.$$

П р и к л а д 2.15. Нехай на такій множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, матрицею задано відношення переваги R, а саме:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідну цьому відношенню функцію вибору.

Розв'язування

Побудуємо відношення строгої переваги, що відповідає заданому відношенню за такою формулою: $R^S = R \setminus R^{-1}$, а саме:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер задамо функцію вибору за таким правилом: $C(X) = \max_R X$. Для цього розглянемо всі можливі підмножини заданої множини $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і визначимо максимальні елементи стосовно звуження відношення R на відповідні підмножини.

Розглянемо спочатку одноелементні підмножини. Вибір із одного елемента буде тим самим елементом, тому

$$C(\{x_1\}) = \max_R \{x_1\} = x_1;$$

$$C(\{x_2\}) = \max_R \{x_2\} = x_2;$$

$$C(\{x_3\}) = \max_R \{x_3\} = x_3;$$

$$C(\{x_4\}) = \max_R \{x_4\} = x_4.$$

Далі розглянемо двоелементні підмножини. Звуження заданого відношення на множину $\{x_1, x_2\}$ дає можливість зробити висновок, що елемент x_1 більш переважний, ніж x_2, тому максимальним елементом для цієї множини буде x_1, і тоді

$$C(\{x_1, x_2\}) = \max_R \{x_1, x_2\} = x_1.$$

Аналогічно для інших двоелементних множин:

$$C(\{x_1, x_3\}) = \max_R \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\}; \quad C(\{x_1, x_4\}) = \max_R \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_4\};$$

$$C(\{x_2, x_3\}) = \max_R \{x_2, x_3\} = \{x_3\}; \quad C(\{x_2, x_4\}) = \max_R \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\};$$

$$C(\{x_3, x_4\}) = \max_R \{x_3, x_4\} = \{x_4\}.$$

І так само

$$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \max_R \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_3\};$$

$$C(\{x_1,x_2,x_4\}) = \max_R \{x_1,x_2,x_4\} = \{x_1,x_4\};$$

$$C(\{x_1,x_3,x_4\}) = \max_R \{x_1,x_3,x_4\} = \{x_1,x_4\};$$

$$C(\{x_2,x_3,x_4\}) = \max_R \{x_2,x_3,x_4\} = \{x_4\};$$

$$C(X) = C(\{x_1,x_2,x_3,x_4\}) = \max_R \{x_1,x_2,x_3,x_4\} = \{x_1,x_4\}.$$

Отже, функцію вибору задано.

Зауважимо, що існують також інші способи задання функцій вибору.

Отже, стосовно відношення переваги можна побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відповідне їй відношення переваги.

П р и к л а д 2.16. Функцію вибору задано таким чином:

$C(\{x_1\}) = x_1$; $C(\{x_2\}) = x_2$; $C(\{x_3\}) = x_3$;

$C(\{x_1,x_2\}) = x_1$; $C(\{x_1,x_3\}) = \{x_1,x_3\}$; $C(\{x_2,x_3\}) = \{x_2\}$;

$C(\{x_1,x_2,x_3\}) = \{x_1,x_3\}$.

Як бачимо, дві останні умови суперечать одна одній, тому відношення побудувати неможливо.

П р и к л а д 2.17. Функцію вибору задано таким чином:

$C(\{x_1\}) = x_1$; $C(\{x_2\}) = x_2$; $C(\{x_3\}) = x_3$;

$C(\{x_1,x_2\}) = x_1$; $C(\{x_1,x_3\}) == \{x_1,x_3\}$; $C(\{x_2,x_3\}) = \{x_3\}$;

$C(\{x_1,x_2,x_3\}) = \{x_1,x_3\}$.

Відповідним заданій функції буде таке відношення строгої переваги:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.
2. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) стосовно заданого відношення переваги?
3. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Яка сфера їхнього використання?
4. Дайте визначення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.
5. Як на базі заданого відношення нестрогої переваги побудувати відповідні йому відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності?
6. Що означає властивість зовнішньої та внутрішньої стійкості множини?
7. Дайте визначення функції вибору.
8. Як можна побудувати функцію вибору на основі заданого відношення переваги?
9. Чи для кожної функції вибору існує відповідне їй відношення переваги?
10. За якими властивостями класифікують функції вибору?
11. Наведіть приклади умов, за якими класифікують функції вибору.

Відповідь на кожне питання передбачає формулювання визначення, опис особливостей його застосування, і потрібних алгоритмів побудови, наведення прикладів.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Знайти найбільший, найменший, максимальний і мінімальний елементи (якщо такі існують) для поданих нижче відношень, що задані на такій множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б)* $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Побудувати функцію вибору на основі заданого відношення переваги.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б)* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Побудувати відношення переваги, відповідне записаній нижче функції вибору (якщо це можливо).

а) $C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{b\}, C(\{a,c\})=\{a\},$
$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{c,b\};$

б) $C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{a\}, C(\{a,c\})=\{a\},$
$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{a\}.$

Практична робота 3

Тема роботи: Побудова функції корисності.

Мета роботи: вивчення поняття функції корисності й методів її побудови на основі заданих відношень переваги.

Короткі теоретичні відомості й приклади розв'язування задач

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна керуватися деякою кількісною мірою їхніх властивостей, значення якої слугує критерієм такого вибору. Правила (процедури) прийняття рішень на основі такої міри побудовано за допомогою теорії корисності, розробленої Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном. Математичною базою цієї теорії виступає система аксіом, у яких стверджується існування деякої міри цінності, що дозволяє впорядкувати альтернативи (результати рішень). Така міра називається *функцією корисності*, або *корисністю* результатів.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах:

1. Результат (альтернатива) x_i є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ – значення корисності альтернатив x_i і x_j відповідно.

2. Якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$ (транзитивність).

3. Якщо x_1, x_2 – деякі альтернативи, то $u(x_1,\ x_2) = u(x_1) + u(x_2)$ (адитивність).

Аналогічно, коли є n результатів $x_1, x_2, \dots\ x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U\left(x_1, x_2, \dots x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} u_s\left(x\right).$$

Іншими словами, корисність кількох результатів, досягнених одночасно, дорівнює сумі значень їхньої корисності.

Застосовуючи поняття функції корисності (цільової функції) $f(x)$, можна визначити такі відношення на множині альтернатив X:

– відношення слабкої (нестрогої) переваги «не гірше», яке позначається символом $\geq$,

– відношення рівноцінності, позначене символом $\sim$,

– відношення строгої переваги, що позначається символом $>$.

В и з н а ч е н н я. Стосовно двох альтернатив x_1, x_2 можна стверджувати таке:

$x_1 \geq x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) > f(x_2)$.

У порівнянні значень цільових функцій стосовно різних альтернатив беруться символи $\geq$ або $<$ залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Методику визначення корисності можливих результатів показано в літературі [1].

Розглянемо кілька варіантів застосування цієї методики в різних ситуаціях.

I. Наявні тільки два результати.

У цьому разі методика обчислення корисності така:

1. Встановлюємо, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Припустимо, що $x_1 > x_2$, тобто альтернатива x_1 краща, ніж альтернатива x_2.

2. Потім визначаємо таку ймовірність α, коли досягнення результату x_1 буде еквівалентним результату x_2, отриманому з імовірністю 1.

3. Оцінюємо співвідношення між значеннями корисності результатів x_1 і x_2.

Для цього припустимо, що корисність $u(x_2) = 1$,

тоді $\alpha u(x_1) = u(x_2)$; $u(x_1) = 1/\alpha$.

II. Існує n можливих альтернатив $x_1, x_2, \dots x_n$, між якими встановлено такі переваги: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

У цьому випадку методика визначення корисності така:

1. Визначаємо величину α_1 із умови, що $\alpha_1 u(x_1) = u(x_2)$.

2. Виконуємо аналогічні дії стосовно альтернатив $x_2, x_3, \dots$, тобто

$$\alpha_2 u(x_2) = u(x_3);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1}) = u(x_n).$$

3. Вважаючи, що корисність найменш переважного результату дорівнює 1, знаходимо значення корисності для інших результатів, а саме:

$$u(x_n) = 1;$$

$$u(x_{n-1}) = 1/\alpha_{n-1};$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u(x_1) = \frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1}.$$

III. Наявні якісні критерії. За таких умов маємо інформацію про переваги між окремими альтернативами та їхніми групами. Тоді можна застосовувати методику, побудовану на алгоритмі, запропонованому Р. Акофом і Р. Черчменом.

Припустимо, що існує n альтернатив, а саме: x_1, x_2, … x_n. Методика визначення корисності передбачає такі етапи:

1. Упорядковують усі альтернативи в порядку зменшення переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їхню перевагу над окремими результатами $x_1, x_2, \dots x_n$ (табл. 2).

Таблиця 2

1	x_1 або $x_2 + x_3 + \dots + x_n$	$n + 1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}$	$n + 2$	x_2 або $x_3 + x_4 + \dots + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + \dots + x_{n-2}$	$n + 3$	x_2 або $x_3 + x_4 + \dots + x_{n-3}$
…	…	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + \dots + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Інформацію про переваги результатів зазвичай отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремим результам, а саме: $u_0(x_1)$, $u_0(x_2)$, ... , $u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення з табл. 2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

У протилежному випадку проводять корекцію корисності так, аби наведене співвідношення було правильним.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції триває до тих пір, поки не утвориться така система оцінок: $u^*(x_1)$, $u^*(x_2)$, … $u^*(x_n)$, що задовольнятиме всі перелічені в таблиці співвідношення. Корекцію належить проводити таким чином, щоб змінювати мінімальну кількість оцінок результатів.

Приклад 2.18. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів, а саме:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;
3) $x_1 > x_2 + x_3 + x_5$;
4) $x_1 > x_2 + x_3$;
5) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$;
6) $x_2 > x_3 + x_4$;
7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно оцінити корисність результатів, аби задовольнити всі перелічені вище нерівності.

Для розв'язування цієї задачі підставляємо початкові оцінки в нерівність 7, тобто

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5.$$

Як бачимо, нерівність 7 не є правильною.

Змінимо корисність результату x_3, а саме: $u_1(x_3) = 3$. Тепер нерівність 7 є правильною. Далі перевіримо нерівність 6, тобто

$$u_0(x_2) = 4 < u_1(x_3) + u_0(x_4) = 4{,}5.$$

Ця нерівність також не є правильною.

Отже, задамо нове значення корисності результату x_2, а саме: $u_1(x_2) = 5$, тоді нерівності 6 і 5 будуть праввильними.

Розглянемо тепер нерівність 4, а саме:

$$u_0(x_1) = 7 < u_1(x_2) + u_1(x_3) = 8.$$

Вона не виконується, тому встановимо, що $u_1(x_1) = 8{,}5$. Тепер нерівності 3, 2, 1 будуть виконуватись.

Перевіряємо ще раз нерівності 6 і 7, після застосування змінених значень корисності альтернатив, а саме:

$$5 > 3 + 1{,}5,$$
$$3 > 1{,}5 + 1.$$

Отже, обидві нерівності виконуються.

Тепер випишемо остаточні оцінки корисності результатів, тобто

$$u_1(x_1) = 8{,}5;\ u_1(x_2) = 5;\ u_1(x_3) = 3;\ u_1(x_4) = 1{,}5;\ u_1(x_5) = 1.$$

Зауважимо, що описану методику визначення корисності альтернатив можна застосовувати, коли кількість результатів обмежена, а саме, $n < 6$ або 7.

Тоді ж, коли $n > 7$, використовують модифікований спосіб корекції оцінок.

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5 – 7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад, x_1. Потім приписують початкові значення корисності всім альтернативам, причому корисність спільного результату x_1 має бути однаковою у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності окремо до кожної з підмножин, враховуючи таке обмеження: $u(x_1) = \text{const}$. Унаслідок цього отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин $u(x_1)$.

Після того, як відповідно до описаної методики функцію корисності всіх альтернатив встановлено, формулюють правило вибору найкращої з них в умовах визначеності, а саме: знайти таку альтернативу x_0, щоб $f(x_0) = \max f(x)$.

Контрольні питання

1. Що являє собою функція корисності?
2. Яким чином визначають корисність альтернатив на основі заданих переваг?
3. Сформулюйте алгоритм побудови функції корисності на множині альтернатив, коли наявні якісні критерії.

Відповідь на кожне питання передбачає формулювання визначення, опис особливостей його застосування, наведення прикладів.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 3$; $u_0(x_4) = 2$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4$;

$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_5$;

$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5$;

$x_2 \ge x_3 + x_4$;

$x_3 \le x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів.

2. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 10$; $u_0(x_2) = 7$; $u_0(x_3) = 5$; $u_0(x_4) = 2$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4$;

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

$x_2 \le x_3 + x_4 + x_5$;

$x_2 \ge x_3 + x_4$;

$x_3 \le x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів

Індивідуальне завдання до теми «Задачі вибору»

Тема роботи: Розв’язування задач вибору.

Мета роботи: набуття навичок прийняття рішень у задачах вибору на основі заданих відношень переваги.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал ([1], розділи 1,2).

2. Сформулювати змістову постановку задачі вибору. Описати елементи задачі: множину альтернатив, відношення переваги, параметри і т. ін.

3. Записати бінарне відношення, яке відповідає цій задачі.

3. Виконати завдання відповідно до варіанта. Номер варіанта індивідуального завдання відповідає номеру студента в списку академічної групи.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен включати такі елементи:

– постановку індивідуального завдання;

– змістову постановку задачі, опис її за допомогою бінарного відношення;

– розв’язування задач індивідуального завдання, подання до них необхідних пояснень;

– лістинг програми (за наявності) та результати її роботи;

– аналіз отриманих результатів.

Критерії оцінювання

При оцінюванні індивідуального завдання враховується правильність його виконання (50 %), пояснення стосовно обраних методів та правил обчислення, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання виконаного завдання на перевірку (10 %). Самостійно написана програма для обчислення збільшує підсумкову оцінку студента з дисципліни.

Таблиця 3

Варіанти індивідуальних завдань

№ варіанта	Завдання 1	Завдання 2	Завдання 3	Завдання 4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9
10	10	10	10	10
11	11	11	6	1
12	12	12	7	2
13	13	13	8	3
14	14	14	9	4
15	15	15	10	5
16	16	16	1	6
17	17	17	2	7
18	18	18	3	8
19	19	19	4	9
20	20	20	5	10
21	21	21	9	3
22	22	22	10	4
23	23	1	1	5
24	24	2	2	6
25	25	3	3	7
26	26	4	4	8
27	27	5	5	9
28	28	6	6	10
29	29	7	7	1
30	30	8	8	2

Варіанти завдань

Завдання 1

Перевірити, чи буде наведене відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним. Відшукати найбільший, найменший, максимальний та мінімальний за даним відношенням елементи, якщо такі існують, і побудувати обернене й додаткове відношення. Для визначення властивостей відношення рекомендовано написати програму. Вона оцінюється окремо, додаванням балів до підсумкової оцінки з дисципліни.

1. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 2. $R=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$. 3. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

4. $R=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$. 5. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 6. $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

7. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$. 8. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$. 9. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

10. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 11. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 12. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

13. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$. 14. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 15. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$.

16. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. 17. $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 18. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$.

19. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 20. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 21. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

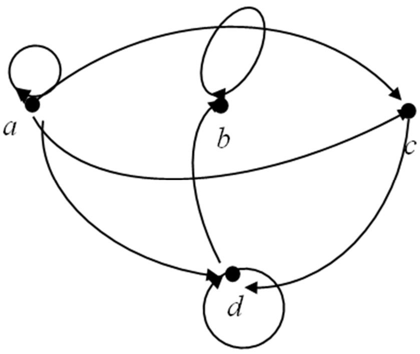
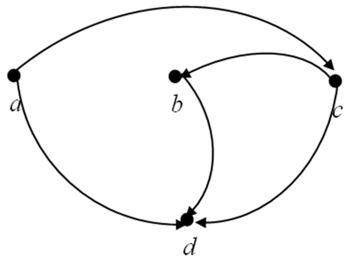
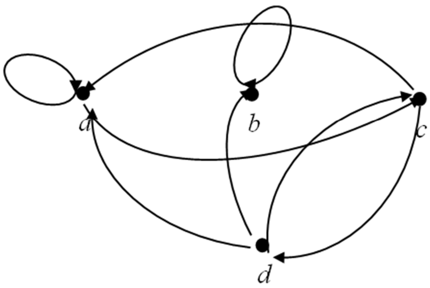
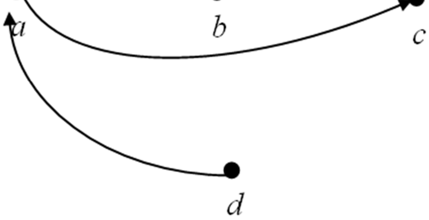
22. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. 23. $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 24. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}$.

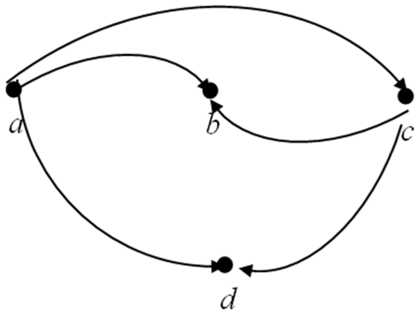
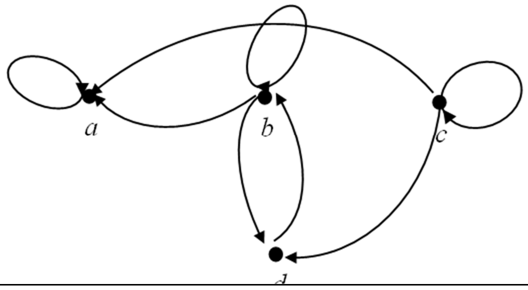
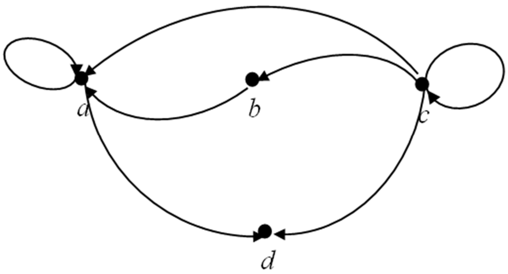
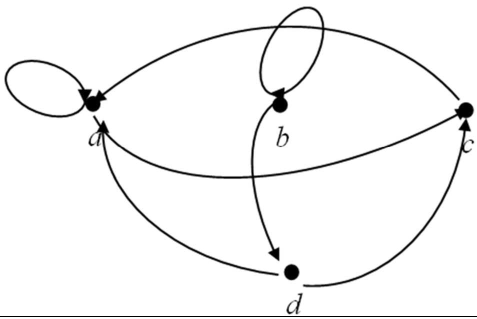
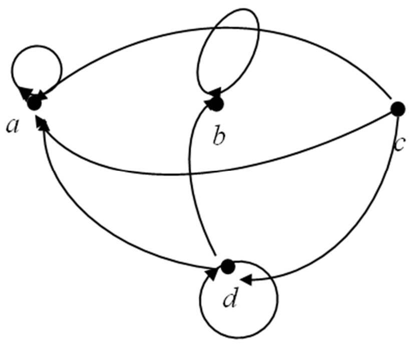
25. $R=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\end{pmatrix}$. 26. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 27. $R=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$.

28. $R=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$. 29. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 30. $R=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$.

Завдання 2

На основі заданого відношення побудувати функцію вибору.

1	$R =$	**2**	
3	$R =$	**4**	
5		**6**	$R =$
7	$R =$	**8**	$R =$
9		**10**	$R =$

<table>
<tr><td>11</td><td>$R =$</td><td>12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13</td><td>
</td><td>14</td><td>$R =$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$R =$</td><td>16</td><td>$R =$</td></tr>
<tr><td>17</td><td>
</td><td>18</td><td>$R =$</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$R =$</td><td>20</td><td>
</td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td><td>22</td><td>$R =$</td></tr>
</table>

Завдання 3

Побудувати функцію корисності на такій множині альтернатив: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, якщо задано наведені нижче співвідношення.

1. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

2. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

3. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

4. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

5. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
$x_2 \geq x_3 + x_4,$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5,$
$x_3 \leq x_4 + x_5.$

6. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

7. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

8. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \leq x_2 + x_3;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \leq x_4 + x_5.$

9. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \leq x_3 + x_4;$
$x_3 \leq x_4 + x_5.$

10. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

Завдання 4

На основі заданої функції вибору поновити (якщо можливо) бінарне відношення.

1. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{a\}, C(\{a, c\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{a, b\}$.

2. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{b\}, C(\{a, c\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{c, b\}$.

3. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{b\}$, $C(\{a, c\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{b\}$.

4. $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(b) = \{b\}$, $C(\{c\}) = \{c\}$, $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $C(\{a, c\}) = \{a, c\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{a, c, b\}$.

5. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{a, b\}, C(\{a, c\}) = \{a\}, C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{a, b\}$.

6. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{a\}, C(\{a, c\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{c\}, C(\{a, b, c\}) = \{a\}$.

7. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{a\}, C(\{a, c\}) = \{a, c\}, C(\{b, c\}) = \{c\}, C(\{a, b, c\}) = \{c\}$.

8. $C(\{a\}) = \{a\}, C(b) = \{b\}, C(\{c\}) = \{c\}, C(\{a, b\}) = \{b\}, C(\{a, c\}) = \{c\}$, $C(\{b, c\}) = \{c\}, C(\{a, b, c\}) = \{a, b\}$.

9. $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(b) = \{b\}$, $C(\{c\}) = \{c\}$, $C(\{a, b\}) = \{b\}$, $C(\{a, c\}) = \{c\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}, C(\{a, b, c\}) = \{b\}$.

10. $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(b) = \{b\}$, $C(\{c\}) = \{c\}$, $C(\{a, b\}) = \{a\}$, $C(\{a, c\}) = \{a, c\}, C(\{b, c\}) = \{c\}, C(\{a, b, c\}) = \{a, c\}$.

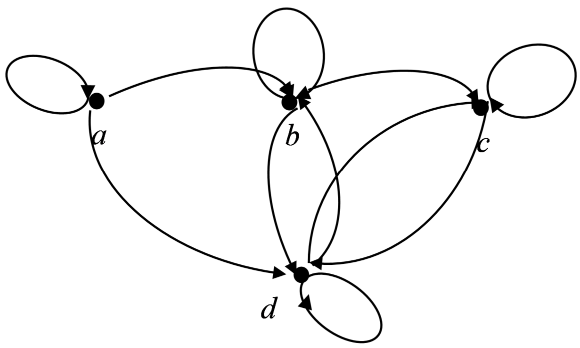
Рекомендована література

1. Ус С. А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – 2-ге вид. випр. – Дніпро : НТУ «ДП», 2018. – 302 с.
2. Коряшкіна Л.С. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина І. Дослідження операцій: навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2020. – 182 с.
3. Гнатієнко Г. М. Експертні технології прийняття рішень : монографія / Г. М. Гнатієнко, В. Є. Снитюк. – Київ : Маклаут, 2008. – 444 с.

Відповіді до задач для самостійного розв'язування

Практична робота 1

1. *а*) *б*)



в)

2. *а*) рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, не є антирефлексивним, симетричним, асиметричним; *б*) рефлексивне, транзитивне, не є антирефлексивним, симетричним, асиметричним, антисиметричним, транзитивним.

3. *а*)

б) ; ; .

Практична робота 2

1. *а*) найбільшого немає, найменший , максимальні і мінімальний *б*) найбільший , найменшого немає, найменший , максимальні мінімальні .
2. *а*) ,

, ,

б)

,

,

, .

3. *а*) відношення побудувати неможливо; *б*) .

Практична робота 3

1. Один з можливих варіантів розв'язку: після підстановки заданих значень функції корисності в нерівність: $x_2 \geq x_3 + x_4$ виходить, що $4 \geq 5$, отже, необхідно змінити значення $u(x_2)$. Задамо, що $u(x_2) = 6$. Тоді з нерівності: $x_1 \geq x_2 + x_3 + x_5$ випливає, що $7 \geq 10$, отже, змінюємо $u(x_1)$. Задаємо, що $u(x_1) = 11$. Відповідь: $u(x_1) = 11$; $u(x_2) = 6$; $u(x_3) = 3$; $u(x_4) = 2$; $u(x_5) = 1$.

Світлана Альбертівна **Ус**

Задачі вибору

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт
й індивідуальних завдань
з дисципліни «Теорія прийняття рішень»
студентами спеціальності 124 Системний аналіз

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 14.09.2022. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 1,9
Обл.-вид. арк. 2,2. Тираж 50 пр. Зам. №

НТУ «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького,19