

*Надійшла до редколегії 20.04.2005 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. П.І. Піловим*

УДК 622.74

В.Г. САНСИЕВ, канд. техн. наук
(Україна, Днепропетровск, Придніпровская лаборатория, "УкрНИИУглеобогащение")

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО СИТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В задачах течения жидкости по ситовой поверхности основной интерес представляет определение глубины потока или расхода через проницаемую перегородку вдоль направления движения. Подобные задачи исследованы достаточно полно только для заданных зависимостей отвода жидкости (в основном, равномерного) сквозь проницаемую перегородку в направлении потока [1, 2].

Существуют также классические решения, полученные для слоистых течений вязкой жидкости по сплошной поверхности под действием силы тяжести. В этом случае вектор скорости имеет постоянное направление, что позволяет линеаризовать уравнения движения [3, 4].

В работе [5] рассмотрена задача течения вязкой жидкости в наклонном канале прямоугольного сечения со сплошным или проницаемым дном при условии, что глубина потока \tilde{h}_o в начальном сечении значительно меньше длины L рассматриваемого участка потока:

$$\frac{\tilde{h}_o}{L} = \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Здесь под L понимается некоторая характерная длина потока, не превышающая длину, на которой происходит полное просачивание жидкости, но большая той, для которой условие (1) не выполняется. Поэтому, вообще говоря, величина L не нуждается в конкретизации, но может быть привязана к определенным геометрическим или физическим параметрам потока. Порядок величины ε можно оценить на примере: если длина ситовой поверхности составляет 5 м, а глубина потока в загрузочной части равна 0,1 м, то $\varepsilon = 0,1/5 = 0,02$.

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости,

Збезводнювання та сушіння. Водно-шламове господарство

стекающей по наклонной ситовой поверхности, которое описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - g \sin \alpha = \nu \nabla^2 \tilde{u}, \quad (3)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + g \cos \alpha = \nu \nabla^2 \tilde{v}, \quad (4)$$

где \tilde{u} и \tilde{v} – компоненты скорости в направлениях \tilde{x} и \tilde{y} ; \tilde{p} – давление жидкости; ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно;

g – ускорение силы тяжести; α – угол наклона плоскости к горизонту;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$ – оператор Лапласа.

На поверхности сита продольная компонента скорости равна нулю, а нормальная будет зависеть от условий истечения жидкости через отверстия сита. Для случая истечения через малое отверстие в тонкой стенке скорость на

выходе из отверстия определяется по известной формуле $\tilde{v} = \eta \sqrt{2g\tilde{h}_o}$, где η – коэффициент скорости. Для колосникового сита тонкого грохочения с размером щели 0,1...0,2 мм, т.е. для малых чисел Рейнольдса, скорость входа в отверстие сита также определяется гидростатическим давлением и может быть

вычислена по формуле $\tilde{v} = B\tilde{h}_o / \nu$ [6], где B – геометрический параметр сита, составленный из констант, характеризующих ширину щели, высоту колосников и угол расширения щели. Если живое сечение сита равно δ , то усредненное

значение нормальной составляющей скорости у сита составит $\tilde{v} = \delta B\tilde{h}_o / \nu$.

Живое сечение колосниковых сит с шириной щели 0,1...0,2 мм находится в пределах 4,5...10,5% [7]. Таким образом, δ имеет порядок ε , а их отношение $\gamma = \delta / \varepsilon$ является величиной нулевого порядка.

Тогда граничное условие для поверхности раздела жидкость – проницаемая поверхность:

Збезводнювання та сушіння. Водно-шламове господарство

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{v} = -\frac{B \delta \tilde{h}_o}{\nu} \quad \text{при} \quad \tilde{y} = 0. \quad (5)$$

Для равномерного слоистого течения вязкой жидкости слоем постоянной глубины, когда действующие на поток силы тяжести и вязкости уравновешены, существует следующее установившееся решение [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{g}{2\nu} \sin \alpha (2\tilde{h}_o \tilde{y} - \tilde{y}^2), \quad \tilde{V} = 0, \\ \tilde{P} &= P_o - \rho g \cos \alpha (\tilde{y} - \tilde{h}_o), \end{aligned} \quad (6)$$

где P_o – давление на поверхности потока.

В решении (6) использовано граничное условие $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{y} = 0$ при $\tilde{y} = \tilde{h}_o$, показывающее, что на поверхности потока напряжение сдвига обращается в нуль.

Для рассмотрения возмущений в установившемся слоистом течении (6) введем безразмерные величины следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} h &= \tilde{h} / \tilde{h}_o, \quad x = \tilde{x} / L, \quad y = \tilde{y} / \tilde{h}_o, \quad U = \tilde{U} / U_o, \\ u + U &= \tilde{u} / U_o, \quad v = \tilde{v} / \varepsilon U_o, \quad P = \tilde{P} / \rho g \tilde{h}_o \sin \alpha, \\ p + P &= \tilde{p} / \rho g \tilde{h}_o \sin \alpha, \quad U_o = g \tilde{h}_o^2 \cdot \sin \alpha / 2\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки (7) в уравнения (2) – (4) имеем следующие уравнения для безразмерных возмущений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$(u + U) \frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + U' \right) = -\frac{2}{Re} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \cdot Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (9)$$

$$(u + U) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2}{\varepsilon^2 Re} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon \cdot Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (10)$$

Збезводнювання та сушіння. Водно-шламове господарство

где $U = 2y - y^2$; $Re = U_o \tilde{h}_o / \nu$ – число Рейнольдса, а штрихом обозначено дифференцирование по y .

Следуя [8] введем функцию тока $\psi(x, y)$, такую, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v. \quad (11)$$

При подстановке (11) в уравнение (8) последнее обращается в тождество, а при подстановке в (9) и (10), с последующим дифференцированием (9) по y , а (10) по x и вычитанием уравнения (10) из (9), их можно объединить в одно уравнение относительно ψ :

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} = \varepsilon \cdot Re \left[(U + \psi_y) \psi_{xyy} - (U'' + \psi_{yyy}) \psi_x \right] - 2\varepsilon^2 \psi_{xxyy} + \\ + \varepsilon^3 \cdot Re \left[(U + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy} \right] - \varepsilon^4 \psi_{xxxx}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и далее индексами x и y обозначены частные производные по соответствующим переменным.

Как видно, уравнение (12) представляет собой естественное разложение функции тока ψ по малому параметру ε .

Уравнение (12) необходимо дополнить следующими граничными условиями.

Условие на поверхности раздела жидкость – проницаемая поверхность:

$$\psi_y = 0, \quad \psi_x = a Re h \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (13)$$

Здесь обозначено $a = \gamma B / U_o^2$.

На свободной поверхности потока нормальная составляющая скорости жидкости равна скорости поверхности раздела:

$$h_x (U + \psi_y) + \psi_x = 0 \quad \text{при} \quad y = h. \quad (14)$$

Кроме того, на свободной поверхности касательное напряжение обращается в нуль:

Збезводнювання та сушіння. Водно-шламове господарство

$$(U' + \psi_{yy} - \varepsilon^2 \psi_{xx})(1 - \varepsilon^2 h_x^2) - 4\varepsilon^2 \psi_{xy} h_x = 0 \quad \text{при } y = h, \quad (15)$$

а градиент давления в направлении оси x , согласно уравнению (9),

$$p_x = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \psi_{yyy} - \frac{1}{2} Re [\psi_{xy} (\psi_y + U) - \psi_x (\psi_{yy} + U')] + \frac{1}{2} \varepsilon \psi_{xxy}. \quad (16)$$

Для описания безразмерного изменения возмущенной поверхности потока определим разложение по степеням малого параметра ε зависимостей (12), (13), (15) и (16) для использования их в уравнении (14) поверхности потока. Разложение по степеням ε для возмущенного решения задачи [8]:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \\ p &= \varepsilon^{-1} p_{-1} + p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим разложение (17) в предыдущие уравнения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Для порядка ε^0 имеем:

$$\psi_{0yyyy} = 0, \quad (18)$$

$$\psi_{0y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (19)$$

$$\psi_{0x} = a Re h \quad \text{при } y = 0, \quad (20)$$

$$\psi_{0yy} = 2(y-1) \quad \text{при } y = h, \quad (21)$$

$$\psi_{0yyy} = 0 \quad \text{при } y = h. \quad (22)$$

Последнее условие вытекает из (16).

Для порядка ε^1 :

$$\psi_{1yyyy} = Re [(U + \psi_{0y}) \psi_{0xyy} - (U'' + \psi_{0yyy}) \psi_{0x}], \quad (23)$$

$$\text{при} \quad (24)$$

Збезводнювання та сушіння. Водно-шламове господарство

$$\Psi_{1yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = h, \quad (25)$$

$$\Psi_{1yyy} = 2 Re y^3 h_x \quad \text{при} \quad y = h. \quad (26)$$

Інтегруючи послідовально рівняння (18) з використанням граничних умов (19)–(22), отримуємо рішення задачі нулевого порядку:

$$\Psi_0 = (h-1)y^2 + Re a \int_0^x h(x) dx. \quad (27)$$

Рішення (27) дає:

$$\Psi_{0y} = 2y(h-1), \quad (28)$$

$$\Psi_{0x} = h_x y^2 + Re ah, \quad (29)$$

$$\Psi_{0xyy} = 2h_x, \quad (30)$$

$$\Psi_{0yyy} = 0. \quad (31)$$

Тоді, після підстановки отриманих рішень в рівняння (23), воно приймає вигляд:

$$\Psi_{1yyyy} = 2 Re (2 y h h_x + Re ah). \quad (32)$$

Інтегруючи послідовально це рівняння з урахуванням умов (24)–(26), маємо:

$$\Psi_{1yyy} = 2 Re [h h_x y^2 + Re ah (y-h)], \quad (33)$$

$$\Psi_{1yy} = Re \left[\frac{2}{3} h h_x (y^3 - h^3) + Re ah (y-h)^2 \right], \quad (34)$$

$$\Psi_{1y} = Re \left[\frac{2}{3} h h_x y \left(\frac{y^3}{4} - h^3 \right) + Re a h y \left(\frac{y^2}{3} - y h + h^2 \right) \right], \quad (35)$$

$$\psi_1 = Re \left[\frac{1}{3} h h_x y^2 \left(\frac{y^3}{10} - h^3 \right) + Re a h y^2 \left(\frac{y^2}{12} - \frac{h y}{3} + \frac{h^2}{2} \right) \right] + C, \quad (36)$$

где C – постоянная интегрирования.

Тогда

$$\psi_{1x} = Re \left[\frac{1}{30} y^5 (h_x^2 + h_{xx} h) - \frac{1}{3} y^2 (4 h_x^2 h^3 + h_{xx} h^4) + a Re \left(\frac{1}{12} y^4 h_x - \frac{2}{3} y^3 h_x h + \frac{3}{2} y^2 h_x h^2 \right) \right], \quad (37)$$

а для поверхности потока ($y = h$)

$$\psi_{1x} = Re h^4 \left(-\frac{13}{10} h h_x^2 - \frac{3}{10} h^2 h_{xx} + \frac{11}{12} a Re h_x \right). \quad (38)$$

Подставив полученные решения для Ψ_{0y} , Ψ_{1y} , Ψ_{0x} и Ψ_{1x} в уравнение (14) и, положив $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + O(\varepsilon^2)$, имеем уравнение свободной поверхности потока:

$$2h^2 h_x + a Re h + \varepsilon Re \left(-\frac{9}{5} h^5 h_x^2 - \frac{3}{10} h^6 h_{xx} + \frac{5}{4} Re a h^4 h_x \right) = O(\varepsilon^2). \quad (39)$$

Для решения этого уравнения положим $h = h_0 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)$. После подстановки этого разложения в уравнение (39) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε , имеем:

для ε^0 :

$$2h_0 h_{0x} + a Re = 0, \quad (40)$$

для ε^1 :

$$2h_0 h_{1x} + 2h_{0x} h_1 - \frac{9}{5} Re h_0^4 h_{0x}^2 - \frac{3}{10} Re h_0^5 h_{0xx} + \frac{5}{4} a Re^2 h_0^3 h_{0x} = 0. \quad (41)$$

Решая уравнение (40) при начальном условии

$$\text{при} \quad (42)$$

получим:

$$h_0 = (1 - a Re x)^{\frac{1}{2}}. \quad (43)$$

После подстановки этого решения в уравнение (41), имеем:

$$h_{1x} - \frac{1}{2} a Re \varphi^{-1} h_1 - \frac{1}{2} a^2 Re^3 \varphi^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (44)$$

где обозначено $\varphi \equiv \varphi(x) = 1 - a Re x$.

Начальное условие для уравнения (44):

$$h_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (45)$$

Тогда уравнение (44) будет иметь своим решением функцию

$$h_1 = \frac{1}{4} a Re^2 \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{3}{2}} \right), \quad (46)$$

а общее решение для глубины потока по длине ситовой поверхности.

$$h = \varphi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \varepsilon a Re^2 \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{3}{2}} \right). \quad (47)$$

На рис.1 приведены профили свободных поверхностей потоков для $Re = 1$ при разных параметрах a и кривые влияния коэффициентов h_1 при $\varepsilon = 0,02$, а на рис. 2 зависимости $h_1(x)$.

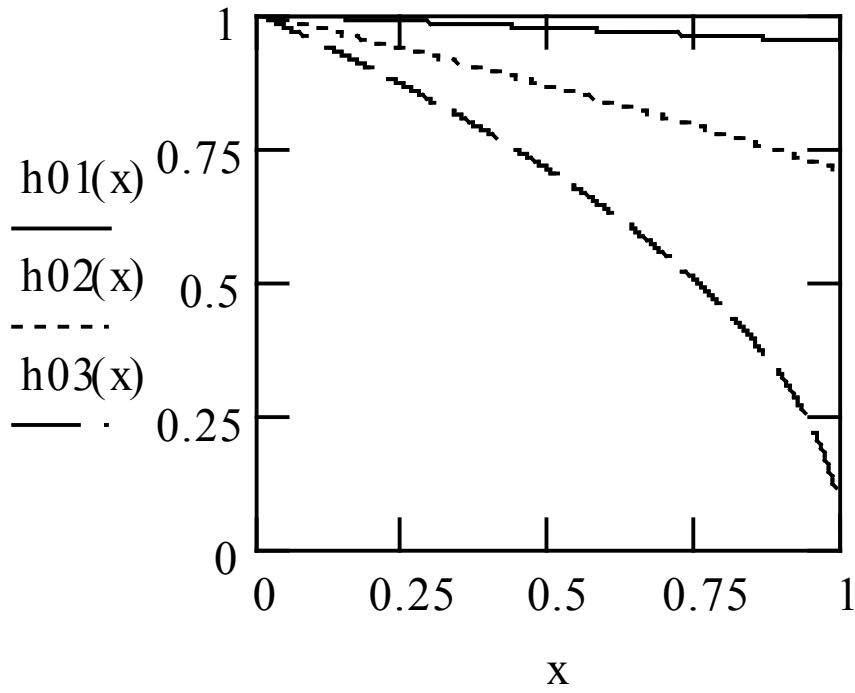


Рис. 1. Профили свободной поверхности при $Re = 1$:
 h_{01} соответствует $a = 0,1$; $h_{02} - a = 0,5$; $h_{03} - a = 1$

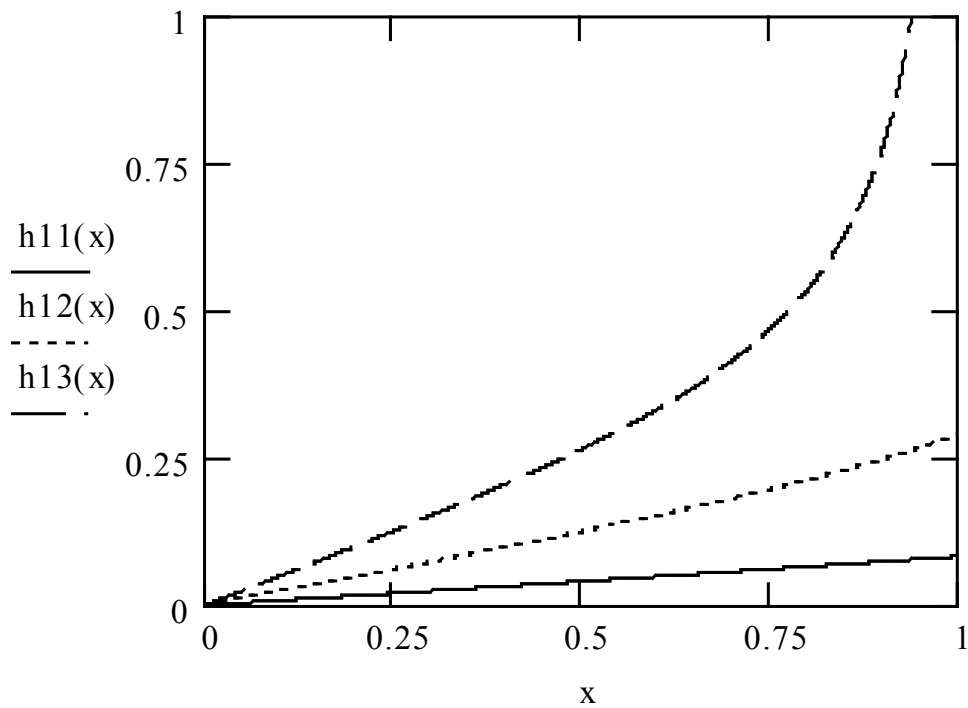


Рис. 2. Зависимости $h_1(x)$ для $Re = 1$: h_{11} соответствует
 $a = 0,4$; $h_{12} - a = 0,7$; $h_{13} - a = 1$

Подстановка решения (46) в выражения (28), (29), (35) и (37) позволяет получить зависимости для нормальной составляющей скорости и возмущения параболического профиля вдоль направления потока:

$$\begin{aligned} \psi_x = & a Re \left(\varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} y^2 \varphi^{-\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \varepsilon a^2 Re^3 \left[\frac{1}{4} \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{1}{8} y^2 \left(\varphi^{-\frac{3}{2}} - 5\varphi^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{24} y^4 \varphi^{-\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\psi_y = 2y \left(\varphi^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \varepsilon a Re^2 y \left(\frac{1}{2} \varphi^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{6} \varphi^{\frac{3}{2}} - y\varphi + \frac{1}{3} y^2 \varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} y^3 \right). \quad (49)$$

На рис. 3 и 4 показано изменение ψ_x и ψ_y вдоль течения на разных глубинах потока для $a = 1$, $Re = 1$.

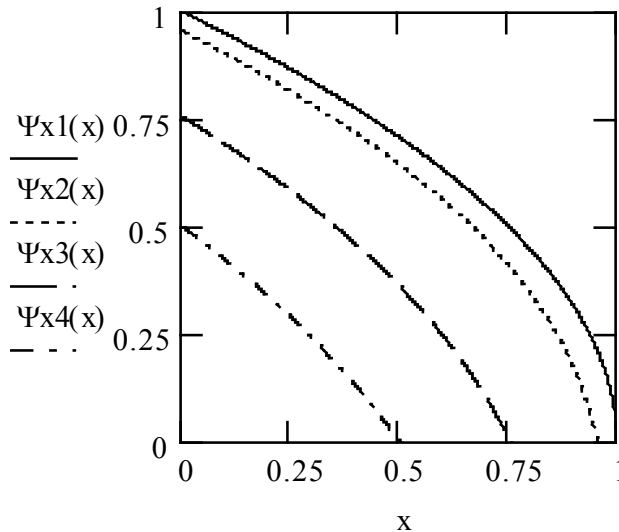


Рис. 3. Изменение функции тока ψ_x вдоль течения для $a = 1$, $Re = 1$ для глубин потока: $\psi_{x1} - y/h = 0$; $\psi_{x2} - y/h = 0,3$; $\psi_{x3} - y/h = 0,7$; $\psi_{x4} - y/h = 1$.

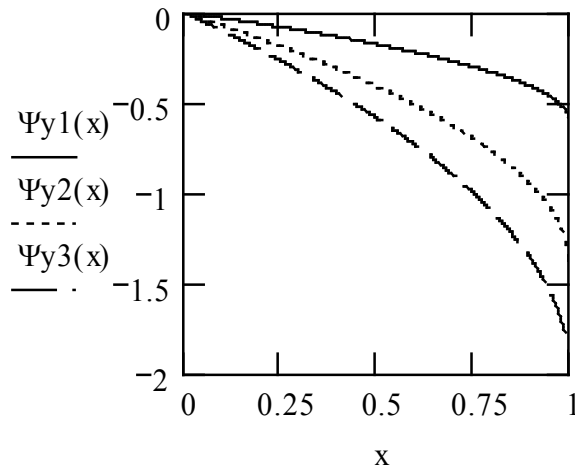


Рис. 4. Зависимость $\psi_y(x)$: $\psi_{y1} - y/h = 1$; $\psi_{y2} - y/h = 0,7$;
 $\psi_{y3} - y/h = 0,3$.

Таким образом, на основании принятого условия (1) уравнения движения жидкости (2)–(4) приведены к виду (12), содержащему малый параметр. Так как каждая последующая производная функции ψ пропорциональна числу Re , то решение (12) будет сходящимся при $\varepsilon Re \ll 1$. Это условие соответствует "медленным" течениям, например, течению высококонцентрированной суспензии. В результате дальнейших преобразований уравнение (12) заменено уравнениями (18) и (23), решения которых использованы в уравнении свободной поверхности (14).

Применение метода малого параметра позволяет получить решения для свободной поверхности, составляющих скоростей и давлений с любой степенью точности. В настоящей работе точность решений ограничена величинами первого порядка малости. В случае если условие (1) удовлетворяется не очень хорошо, то следует воспользоваться более полными разложениями (17).

Список литературы

1. **Петров Г.А.** Гидравлика переменной массы (Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути). – Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. – 224 с.
2. **Ерошенко В.М., Зайчик Л.И.** Гидродинамика и теплообмен на проницаемых поверхностях. – М.: Наука, 1984. – 275 с.
3. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
4. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
5. **Сансиев В.Г.** Стационарный поток вязкой жидкости с медленно меняющейся глубиной // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн.зб. – 2000. – Вип. 9(50). – С. 14–21.
6. **Сансиев В.Г.** Течение жидкости через щель колосникового сита тонкого грохочения // Обогащение полезных ископаемых: Наук.-техн. сб. – 2004. – Вып. 20(61). – С. 88–94.
7. **ГОСТ 9074–71.** Сетка щелевая колосниковообразная из проволоки фасонного сечения. – М.: Госкомстандарт, 1971.
8. **Найфе А.** Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.