

Пістунов І.М.

Економіко-математичне

моделювання: навч. наоч. посіб. Дніпро
: НТУ «ДП», 2024. 34 с.

В посібнику подано приклад і наведено порядок розрахунків лінійних та квазілінійних моделей, використання програми Statistika для розрахунку моделей на базі нейронних сіток, програми MatLab для побудови моделей нечіткої логіки, подано основи імітаційного моделювання.

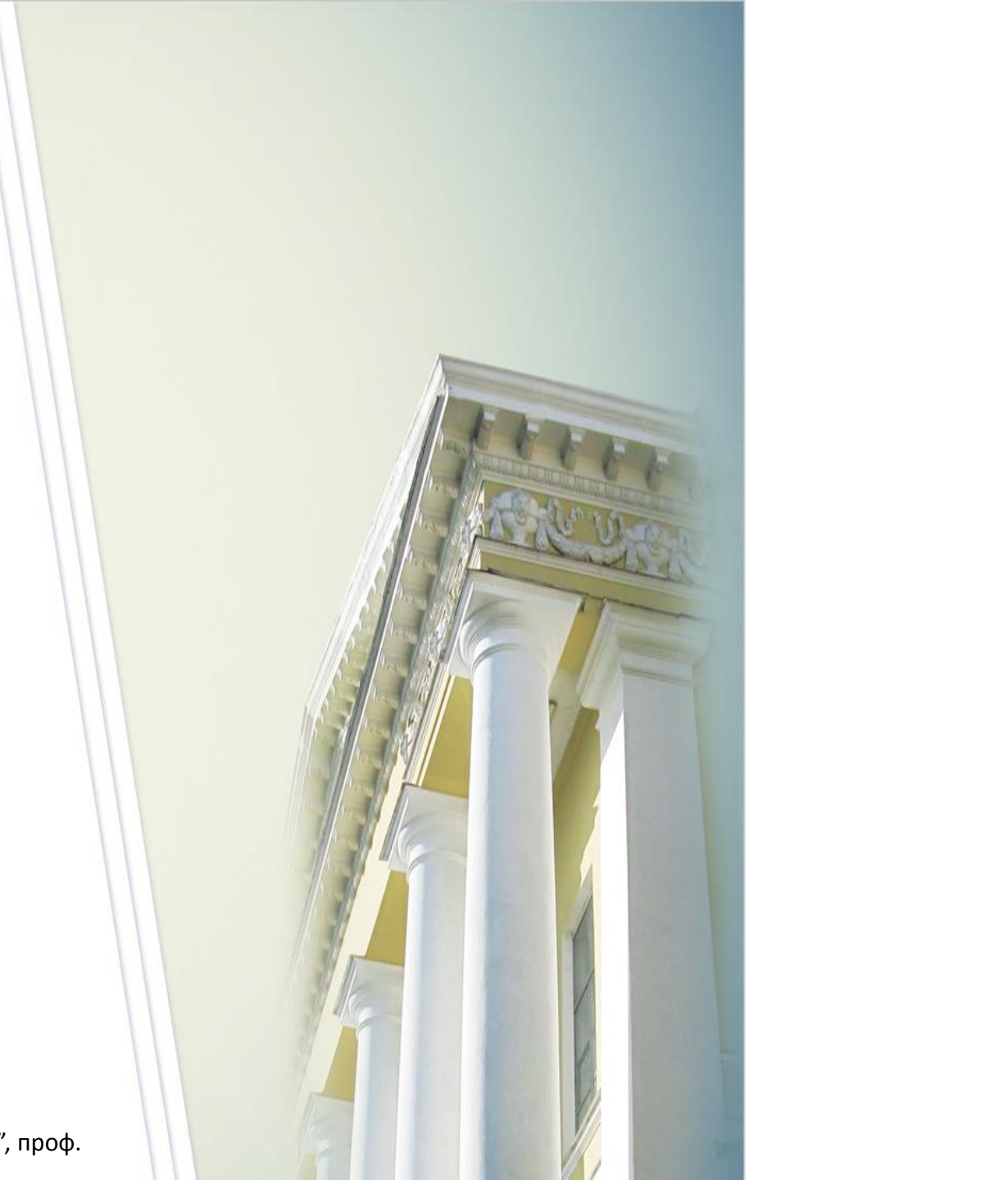
Наведено приклади розрахунків, надано пояснення щодо структури даних.

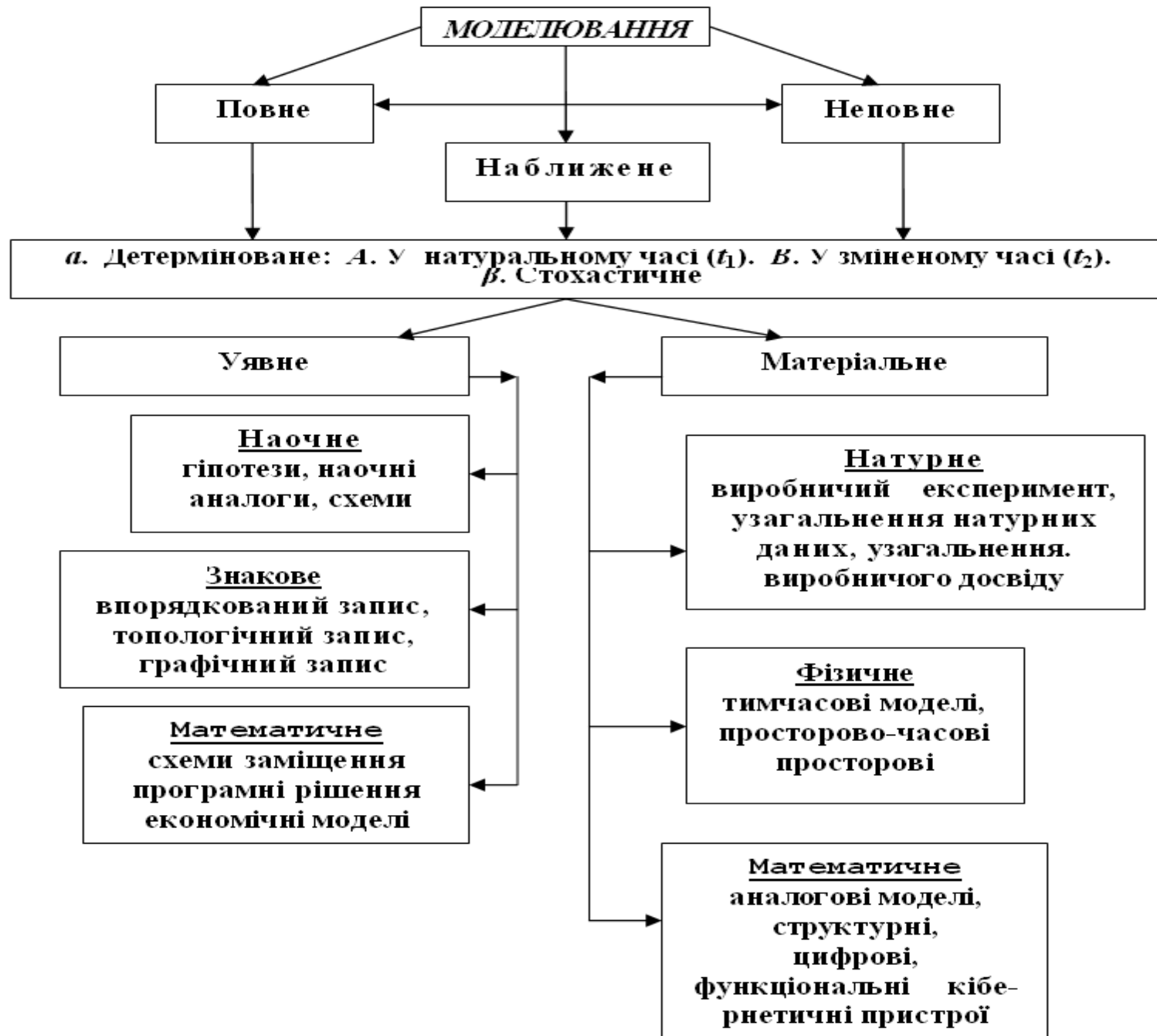
Призначено для студентів спеціальності 051 «Економіка»

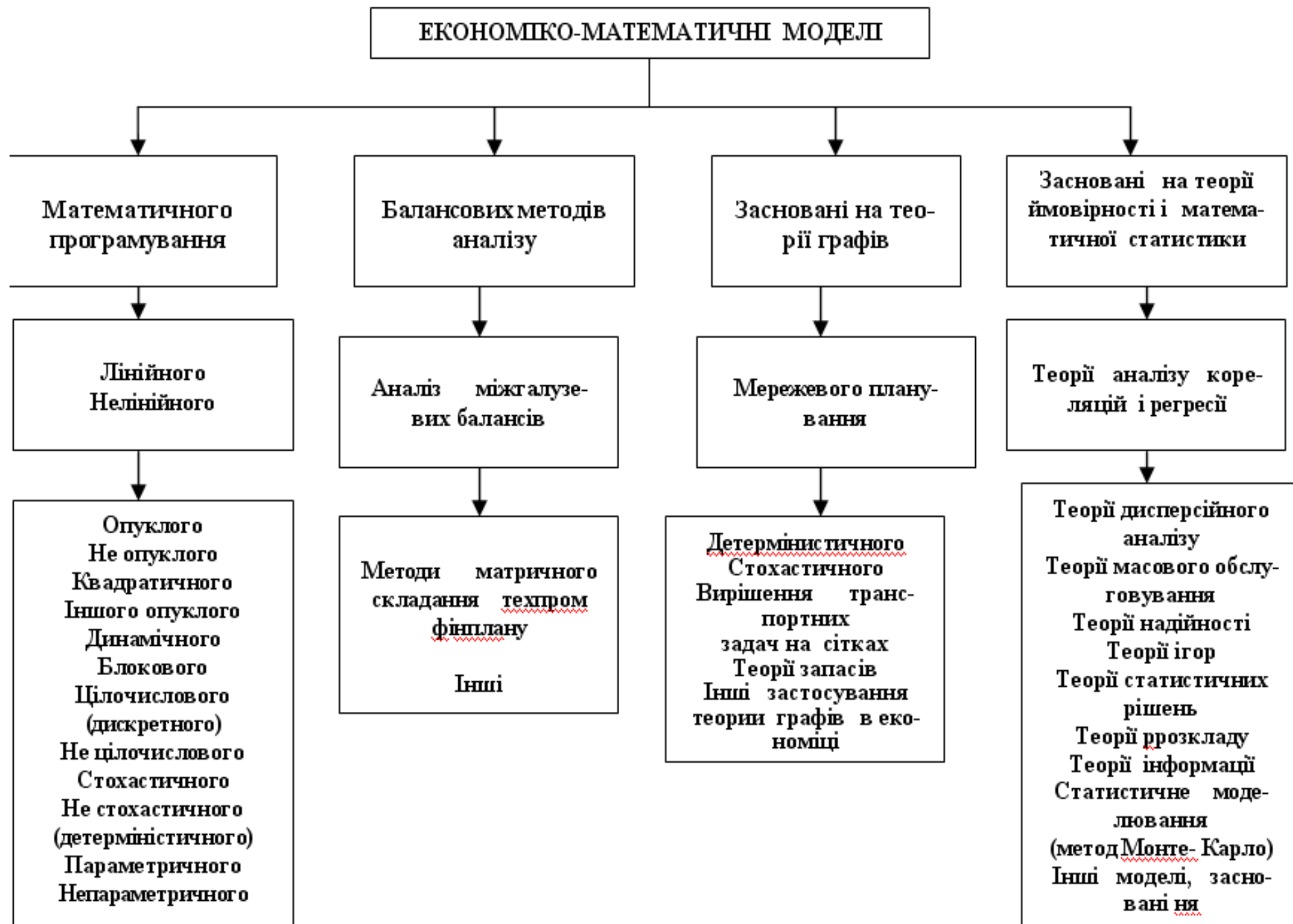
Рецензенти:

Васильєва Н.К., завідувач каф. інформаційних систем ДДАЕУ, проф.

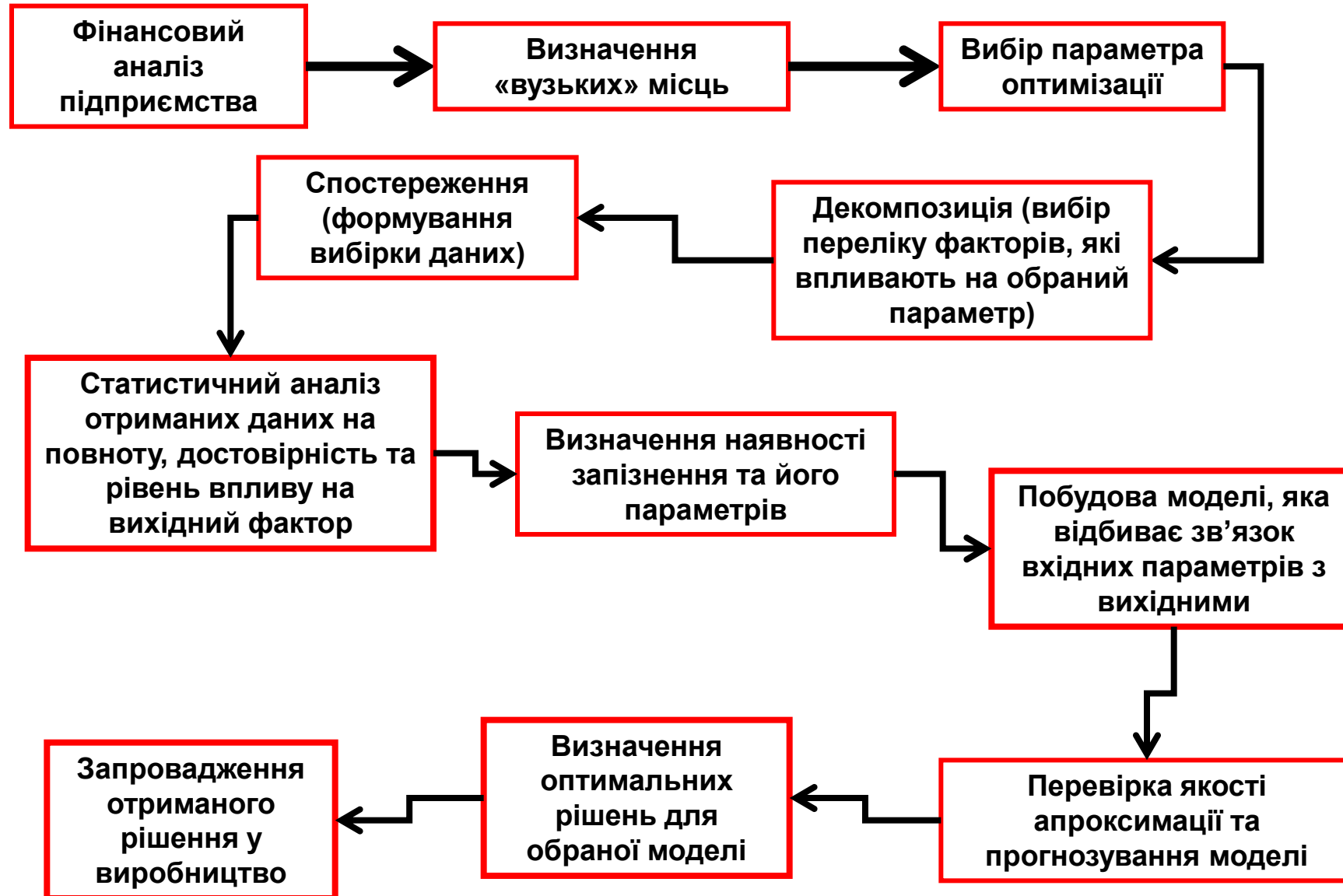
Пилипенко Ю.І., зав каф. Економічної теорії та міжнародних економічних відносин НТУ «ДП», проф.



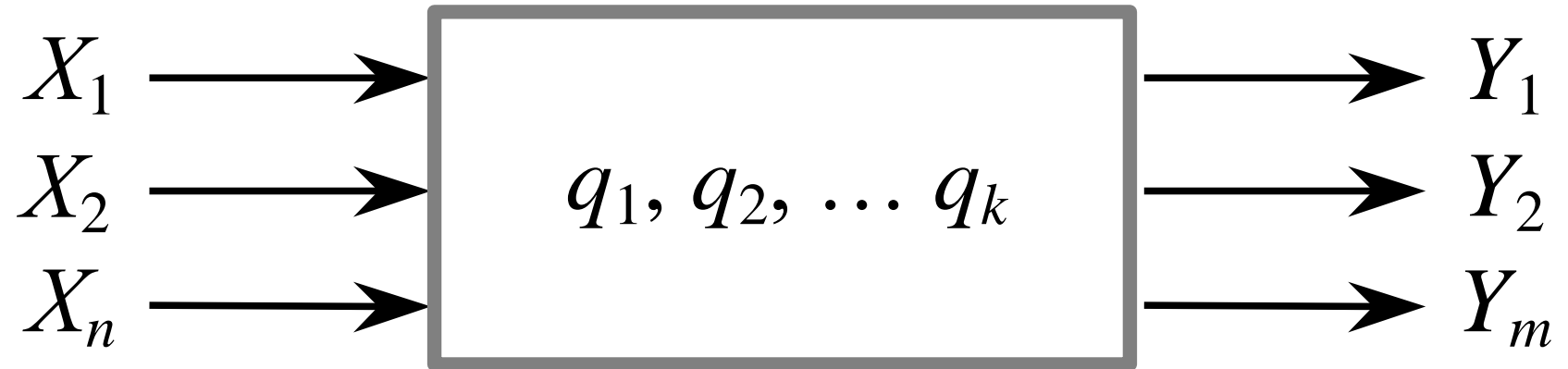




АЛГОРИТМ ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ



Об'єкт



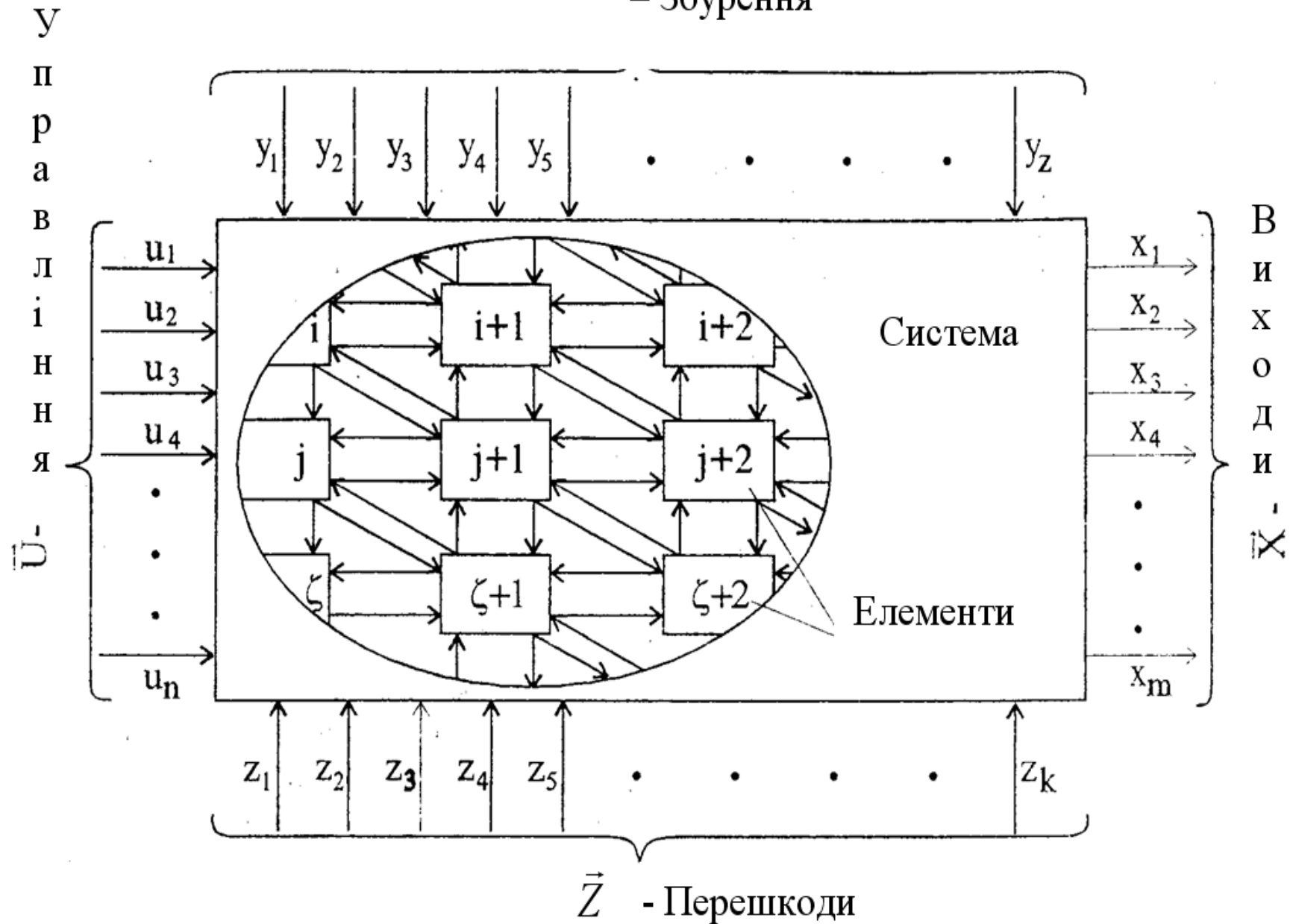
$$y = f(z(t), t), \quad z = g(z(\tau), x(\tau)), \quad \tau \leq t$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, z), \quad \frac{dz}{dt} = g(t, x, z)$$

$$z(t_{k+1}) = g(t_k, z(t_k), x(t_k))$$

СИСТЕМА

– Збурення



Методологія і методи синтезу моделей соціально-економічних систем і структур управління ними

Створення моделей соціально-економічних систем

Цей напрямок наукової діяльності можна розділити на три типи:

Перший тип – це розробка моделей, коли структура соціально-економічної системи відома. Наприклад, розробити модель прибутку підприємства, що випускає телевізори, відеомагнітофони та музичні центри, якщо ціна цих товарів відповідно 1200, 800 та 950 грн. У кожний вид продукції входить чотири комплектуючих, які мають ціну, відповідно 0,8; 1,2; 3,3; та 4,4 грн. У кожен вид товари ці комплектуючі входять у наступній кількості: для телевізора – 1, 5, 8, 4 шт.; для відеомагнітофону – 0, 8, 6, 2 шт.; для музичного центру – 4, 8, 3, 1 шт. Наявність запчастин на складі відповідно – 12000, 15000, 14000, 45000 шт. Ціна робочого часу на складання одиниці продукції відповідно – 12, 15 та 18 грн. Постійні витрати не враховуються.

Третій тип наукової діяльності при розробці моделей стосується випадку, коли структура соціально-економічної системи повністю невідома. Тоді дослідники вдаються до регресійного аналізу, який дозволяє отримати формулу зв'язку поміж вхідними та вихідними факторами. Описаний нижче порядок дій є статистично не точним, але його цілком достатньо для практичного застосування при вирішенні мікроекономічних задач.

ВСІ МОДЕЛІ БУДУЮТЬСЯ НА ПІДСТАВІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ЗА РОЗВИТКОМ ЕКОНОМІКИ

Приклад формату таблиці спостережень за факторами соціально-економічної системи

Час або дата спостереження	Вхідні фактори				Вихідні фактори			
	X_1	X_2	...	X_n	Y_1	Y_2	...	Y_m

Синтез статистичних лінійних та квазілінійних моделей

Можливі перетворення

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i x_i \quad y = a_0 \ell^{a_i x_i} \quad y = a_0 \log_n x$$

$$y = a_0 + \sum_{i=-n}^{-1} a_i x^i \quad x_1 x_2, x_1 / x_2, x_1 - x_2, \log x_1 x_2,$$

Приклад нормування-денормування

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad y = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} x + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x2}} x^2$$

$$\text{Lny} = a_0 + a_1 * \text{Lnx}_1 + a_2 * \text{Lnx}_2$$

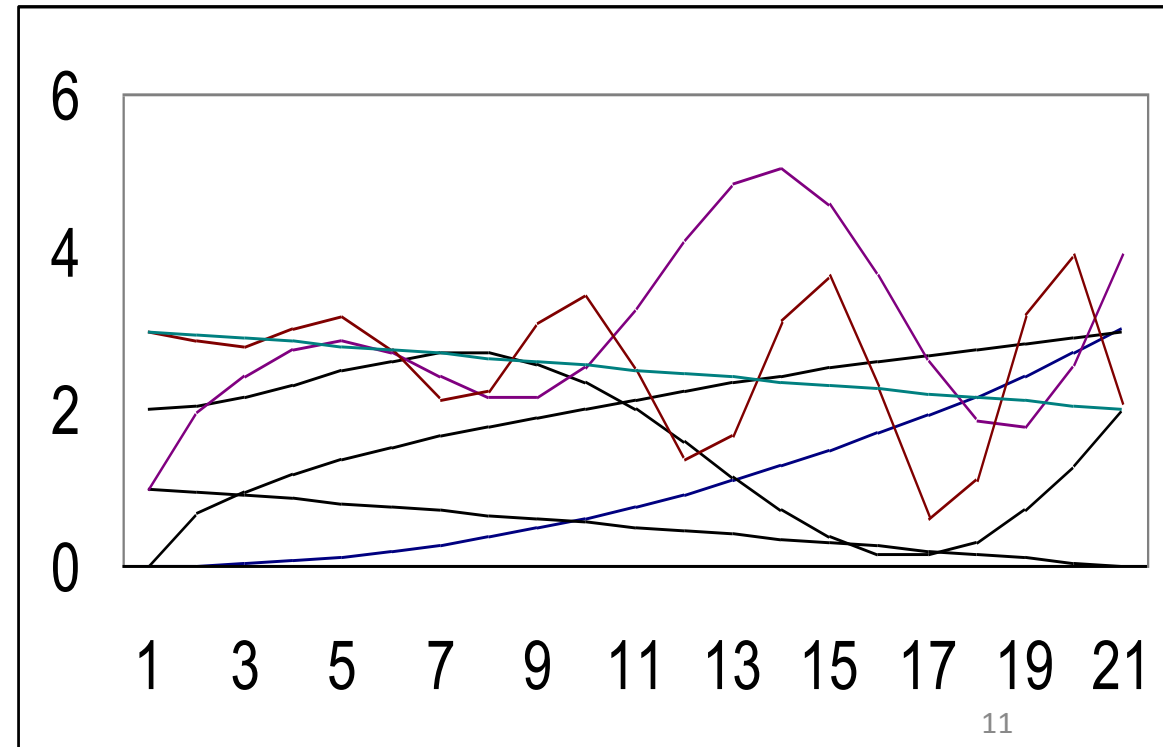
$$\text{Lny} = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x2}}{\sigma_{x2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} \text{Lnx}_1 + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x2}} \text{Lnx}_2$$

Синтез авторегресійних моделей

Рентабельність	Попереднє значення рентабельності
5%	-
4%	5%
1%	4%
12%	1%

Синтез періодичних моделей

$$y = Ax^B + C(1 - e^{Dx}) * \sin(Ex^F + G) + H$$



Спектральний аналіз

Ряд Фур'є — в математиці — спосіб представлення довільної складної функції сумою простіших. В загальному випадку кількість таких функцій може бути нескінченною, при цьому чим більше таких функцій враховується при розрахунку, тим вищою стає кінцева точність представлення даної функції. В більшості випадків в якості найпростіших використовуються тригонометричні функції синуса і косинуса. В цьому випадку ряд Фур'є називається *тригонометричним*, а обчислення такого ряду часто називають *розкладом на гармоніки*.

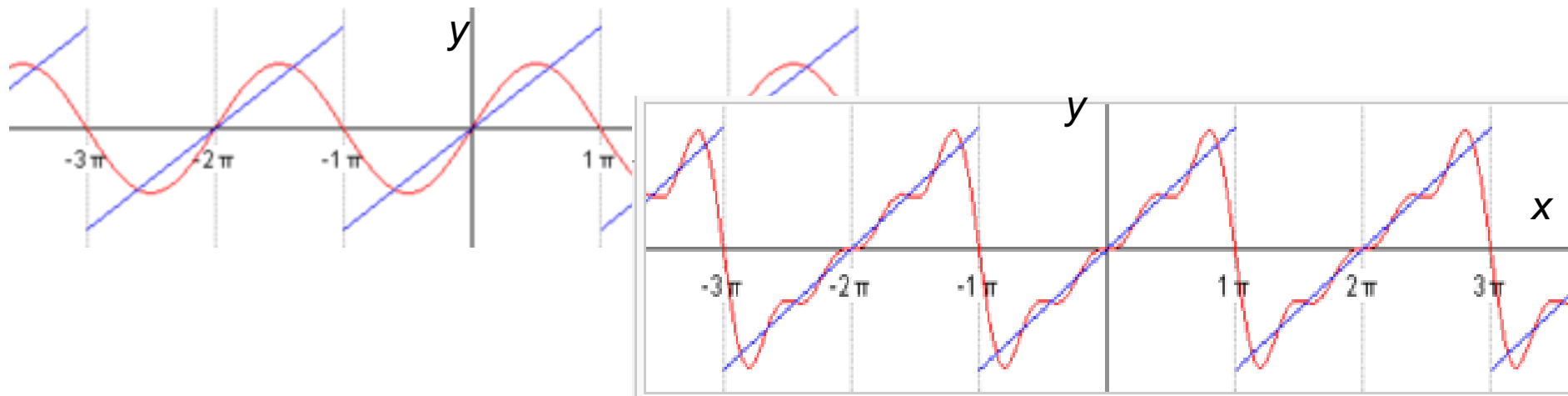
Тригонометричним рядом Фур'є називають ряд виду

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Сталі числа a_0, a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) називаються *коефіцієнтами тригонометричного ряду і знаходяться як*

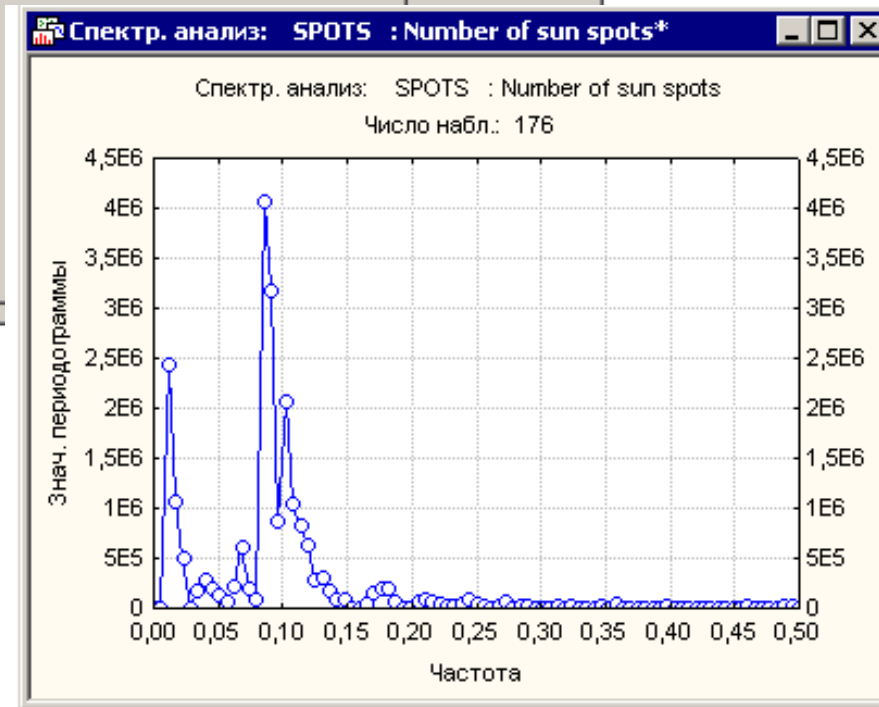
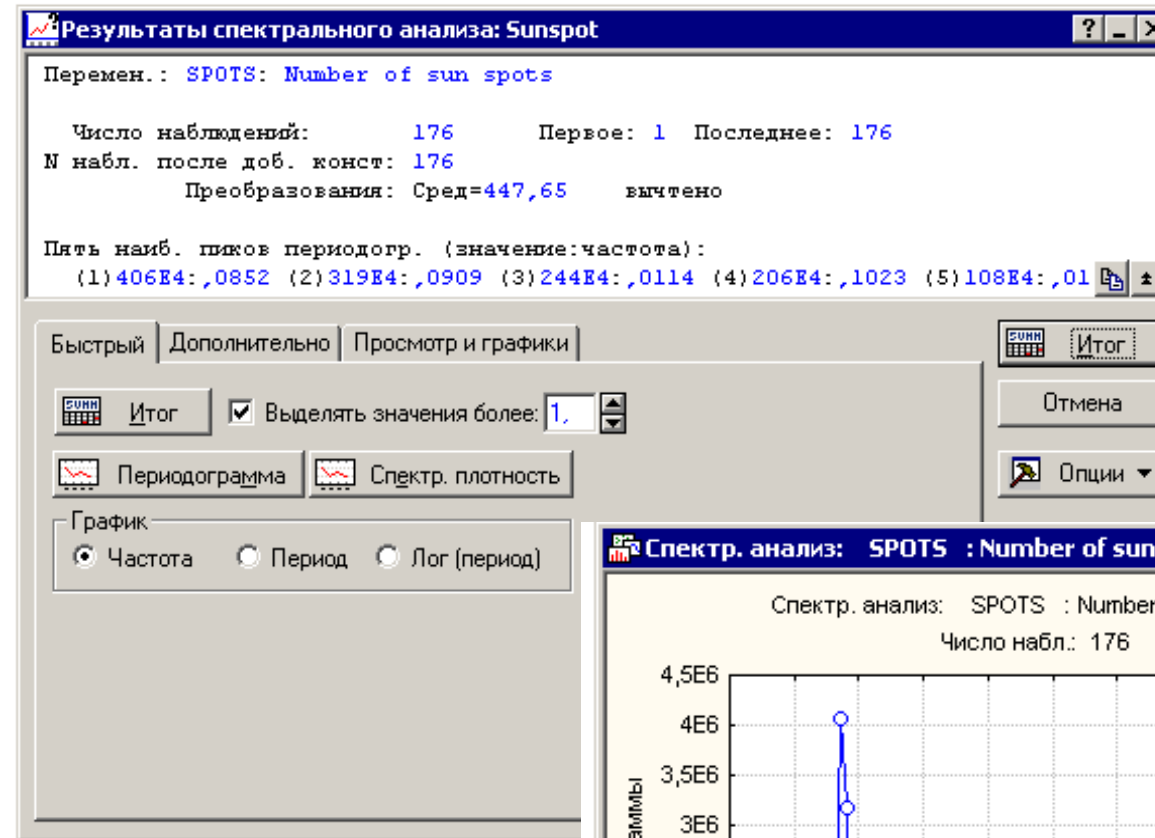
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Збіжність ряду Фур'є



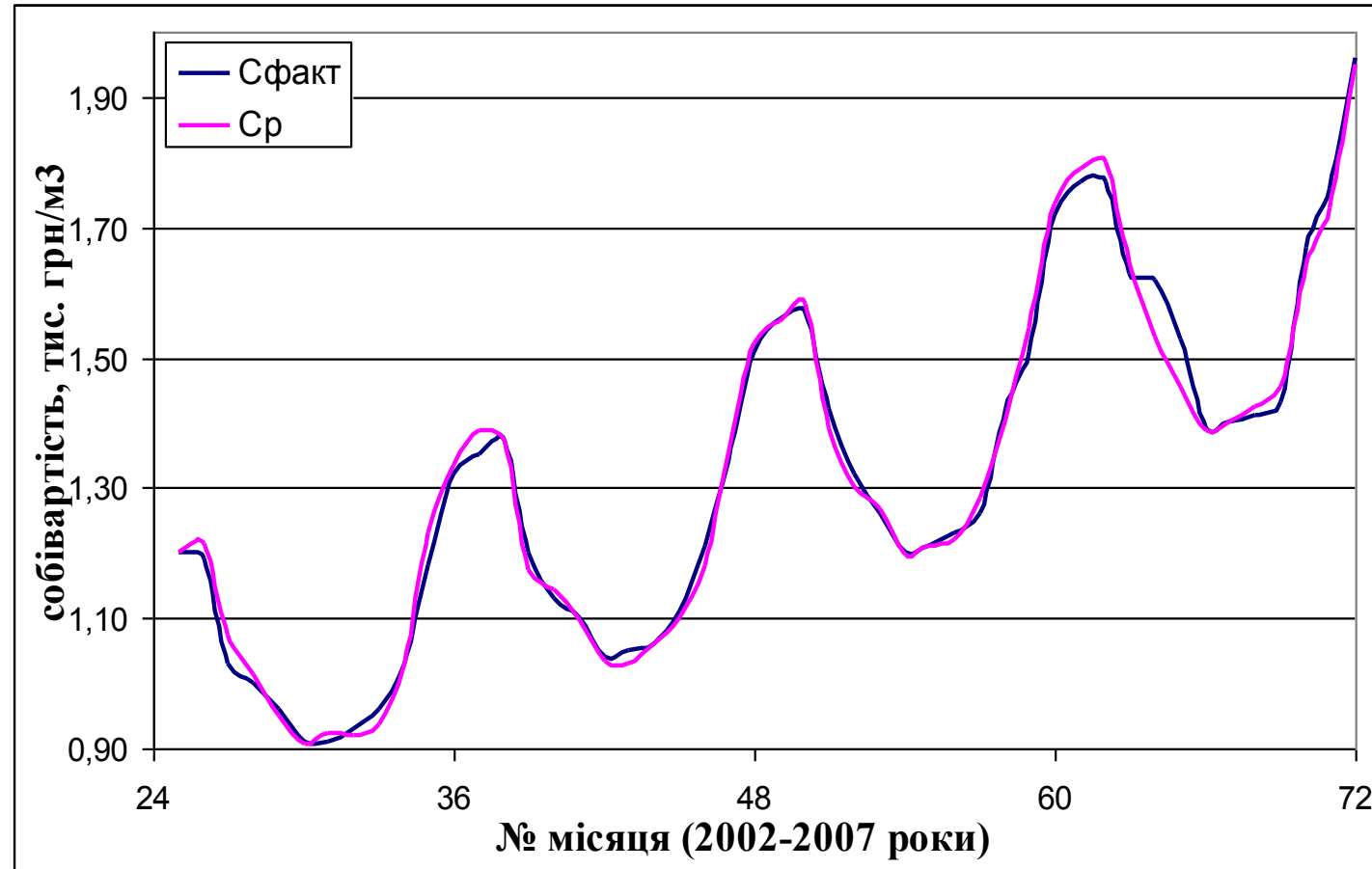
ПОБУДОВА АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕСУ ПАКЕТОМ STATISTICA

Data: Sunspot*...	
Wolfer's sunspot data	
1 SPOTS	
1749	809
1750	834
1751	477
1752	478
1753	307
1754	122
1755	96
1756	102
1757	324
1758	476
1759	540
1760	629
1761	859
1762	612
1763	451
1764	364
1765	209
1766	114

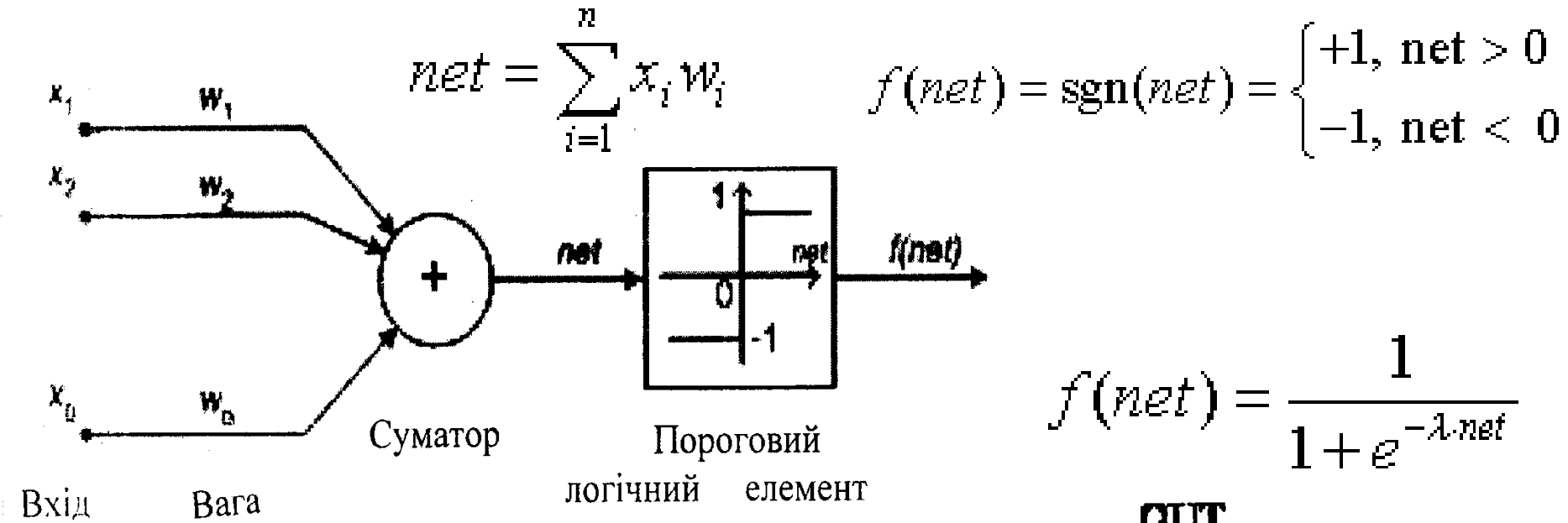


Приклад періодичної моделі

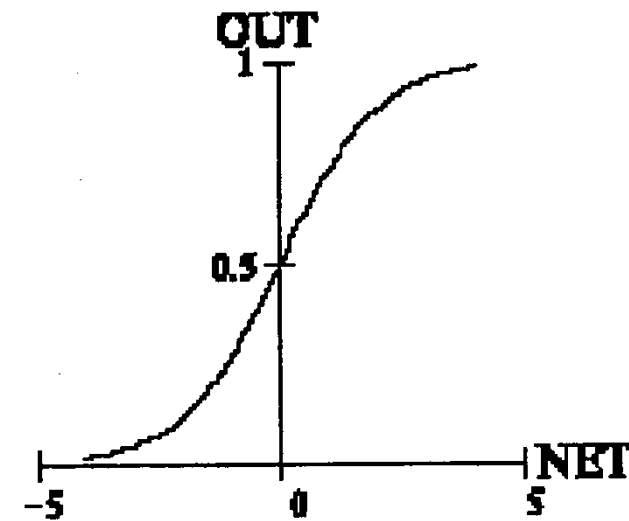
$$C_{t,1} = 1,342c_{t-12,1}^{0,887} + 0,525(1 - e^{-0,976c_{t-12,1}}) \sin(0,524c_{t-12,1}^{1,187} + 0,664) - 0,402c_{t-24,1}^{0,686} + 0,288(1 - e^{-0,106c_{t-24,1}}) \sin(0,524c_{t-24,1}^{0,808} + 0,195) - 0,146$$



Нейронні сітки



Модель граничного нейрона МакКаллоха-Піттса



Вид логістичної функції

Алгоритм навчання перцептрону

1. Початкові ваги можуть бути будь-якими. Корекція провадиться пропорційно величині похідної по даній координаті. Похідна береться від функції активації. Підстроювання j ваги для i нейрона здійснюється за формулою

$$\Delta w_{ij} = \eta \cdot [d_i - f(\text{net}_i)] \cdot f'(\text{net}_i) \cdot x_j \quad \text{де } j=1,2,\dots,n -$$

коефіцієнт навчання, підбирається евристично

2. Помилка при навчанні на k кроці:

$$E_k = \frac{1}{2} [d_i - f(\text{net}_i)]^2$$

де d_i - очікуваний вихід

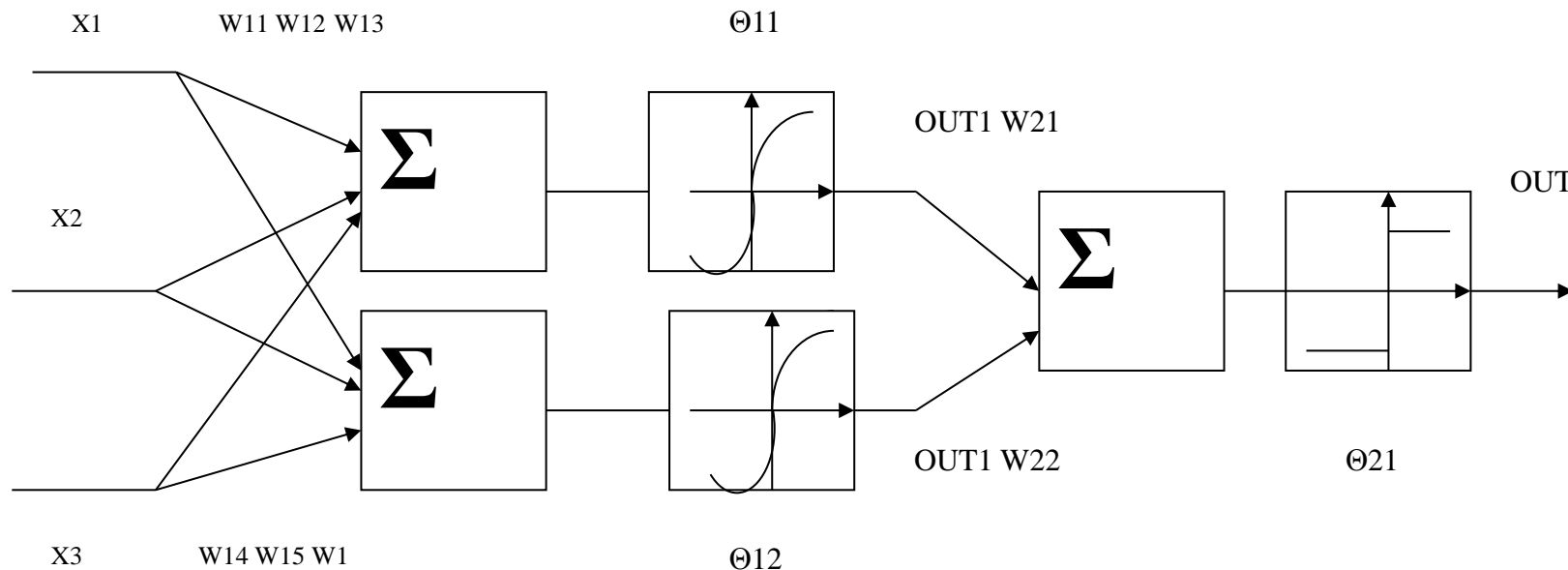
3. Загальна помилка при навчанні:

$$E = \frac{1}{2 \cdot p} \sum_{k=1}^p [d_i - f(\text{net}_i)]^2$$

де p - число прикладів у навчальній вибірці

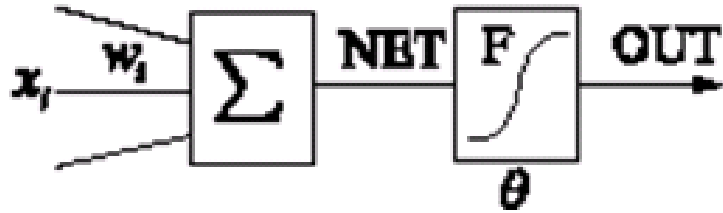
4. Похідна від сигмоїди

де p - число прикладів у навчальній вибірці. $f'(net) = \lambda \cdot f(net) \cdot [1 - f(net)]$

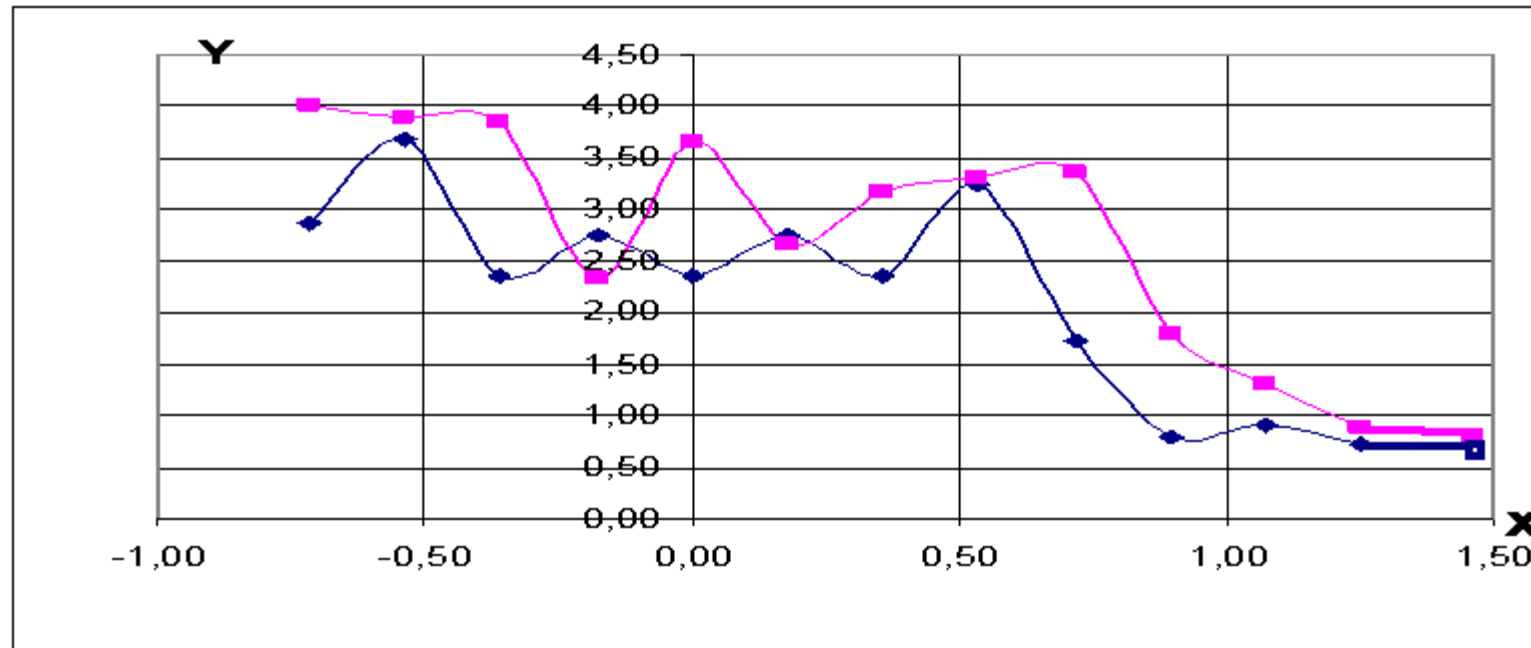


Приклади нейронних сіток

Загальний вигляд схеми перцептрона з одним нейроном та суматором на вході

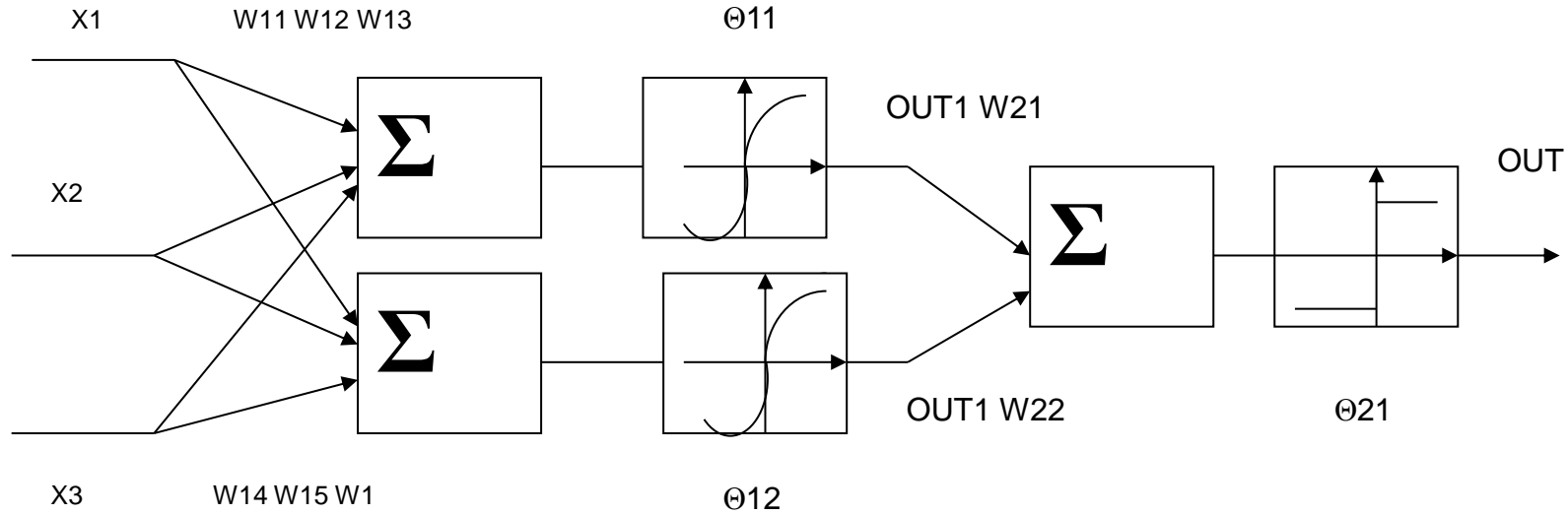


$$OUT = \frac{1}{1 + e^{-(w_1 x_i + w_2 x_{i+1} + w_3 x_{i+2})}}$$



Графік кількості викликів Y по годинам робочого дня X.
(♦ – експериментальна крива,
■ – розрахована крива)

Схема двошарового перцептрона з трьома входами на кожному нейроні



$$OUT = Sign \left[\frac{10,37669298}{1 + e^{-(1,443525248X_1 + 1,561436345X_2 + 1,582503396X_3 + 4,683681367)}} + \frac{7,940045065}{1 + e^{-(1,556474752X_1 + 4,561436345X_2 + 4,582503396X_3 + -3,683681367)}} + 2,883681367 \right]$$

Модель прогнозування інвестицій на вугільній шахті О.Ю. Чуріканової

$$OUT = \text{sigm}(NET) = \frac{1}{1 + \exp(\lambda_3 \left\{ \frac{1}{1 + \exp(\lambda_1 (\sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^3 x_{ij}^1 w_{ij}^1))} + \frac{1}{1 + \exp(\lambda_2 (\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^1 x_{ij}^2 w_{ij}^2))} \right\})}$$

де i – номер входу, j – номер нейрона у шарі, l – номер шару,
 для $l=1: j=1,3; \underline{i}=1,26: x_1^1$ - інвестиції в підймальні установки; x_2^1 - інвестиції в
 вентиляторні установки; x_3^1 - інвестиції в компресорні установки; x_4^1 -
 інвестиції в водовідливні установки; x_5^1 - інвестиції в транспортні установки;
 x_6^1 - інвестиції в дегазацію; x_7^1 - інвестиції в теплоенергетичні установки; x_8^1 -
 інвестиції в технічний комплекс поверхні шахти; x_9^1 - інвестиції в
 електротехнічні установки; x_{10}^1 - інвестиції в споруди; x_{11}^1 - інвестиції в запаси
 матеріалів; x_{12}^1 - інвестиції в акції; x_{13}^1 - інвестиції в цінні папери; x_{14}^1 - інвестиції
 в депозити; x_{15}^1 - інвестиції в підготовку кадрів; x_{16}^1 - інвестиції в дослідження
 та розробки; x_{17}^1 - інвестиції в рекламу; x_{18}^1 - середня зольність вугілля; x_{19}^1 -
 середня вологість вугілля; x_{20}^1 - середня сірчистість вугілля; x_{21}^1 - залишкові
 промислові запаси млн.т.; x_{22}^1 - середня геологічна потужність пластів м.; x_{23}^1 -
 максимальна глибина розробки; x_{24}^1 - протяжність гірничих виробок; x_{25}^1 - кут
 падіння пластів; x_{26}^1 - потужність (проектна) млн. тон на рік.

для $l=2: j=1,3; \underline{i}=1: x_1^2$ - прибуток. x_{ij}^l – i -ий вхідний сигнал j -го нейрона в шарі
 l , w_{ij}^l – ваговий коефіцієнт i -го входу нейрона номер j у шарі l NET_{lj} – сигнал
 NET j -го нейрона в шарі l , OUT_{li} – вхідний сигнал нейрона, $\lambda > 0$ – коефіцієнт
 крутості безупинної функції $f(net)$ біля $net=0.5$.

Таблиця 1

Значення вагових коефіцієнтів w_{ij}^l першого шару

Номер нейрону	Номер входу													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	1,7	5,1	1,9	4,2	4,2	2,6	3,1	0,9	0,2	2,5	5,2	1,8	1,3	
2	5,2	1,1	5,9	2,9	6,2	-0,1	1,1	6,6	5,2	0,1	2,7	3,3	3,8	
3	-0,5	1,0	6,8	3,7	3,4	3,4	0,6	0,9	5,0	3,6	3,1	3,6	1,5	
Номер нейрону	Номер входу													
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
1	2,6	2,4	0,6	2,2	0,6	3,4	3,8	1,7	2,6	4,0	3,8	1,6	0,0	
2	1,9	0,2	0,1	0,2	5,5	0,4	2,4	0,7	1,1	0,9	0,1	2,9	1,1	
3	2,9	4,1	2,7	6,3	4,2	5,8	6,2	3,5	1,0	0,0	1,0	3,7	3,1	

Таблиця 2

Значення вагових коефіцієнтів w_{ij}^l другого шару

Номер нейрону	Номер виходу
	1
1	1,1
2	0,1
3	4,2

Приклад імітаційного моделювання

Отже, сформуємо *концептуальну модель*, яка враховує таке:

1. Випуск продукції пов'язаний з експлуатаційними витратами (випадкова величина R_{rach}), котрі мають (за гіпотезою) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням витрат (m_{rach}) і середньоквадратичним відхиленням витрат (σ_{rach});

2. Місткість ринку, де має реалізуватись продукція підприємства, також є випадковою величиною (R_{ryn}), яка має (за припущенням) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням місткості ринку (m_{ryn}) і середньоквадратичним відхиленням місткості ринку (σ_{ryn});

3. Частка підприємства на ринку є невизначеною і може бути задана деякою випадковою величиною з певною функцією розподілу (наприклад інтервально-рівномірною функцією);

4. Вважатимемо, що прибуток підприємства є випадковою величиною (R_{prof}), котра визначається з виразу:

$$R_{prof} = R_{ryn} \cdot d_{ryn} - R_{rach} \quad (3.9)$$

де R_{prof} — випадкова величина прибутку підприємства; R_{ryn} — випадкова величина місткості ринку; d_{ryn} — випадкова величина частки ринку підприємства; R_{rach} — випадкова величина експлуатаційних витрат підприємства.

Результуючими характеристиками моделі вважатимемо:

• суму значень R_{prof}^i випадкової величини R_{prof} для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S_{prof} = \sum_{i=1}^{N_p} R_{prof}^i \quad (3.10)$$

• суму квадратів значень випадкової величини прибутку для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S_{prof}^2 = \sum_{i=1}^{N_p} (R_{prof}^i)^2 \quad (3.11)$$

Показником ефективності функціонування підприємства оберемо гарантований прибуток за заданого рівня ризику, який визначатимемо за формулою:

$$G_{prof} = m_{prof} - k_{\alpha} \cdot \sigma_{prof}$$

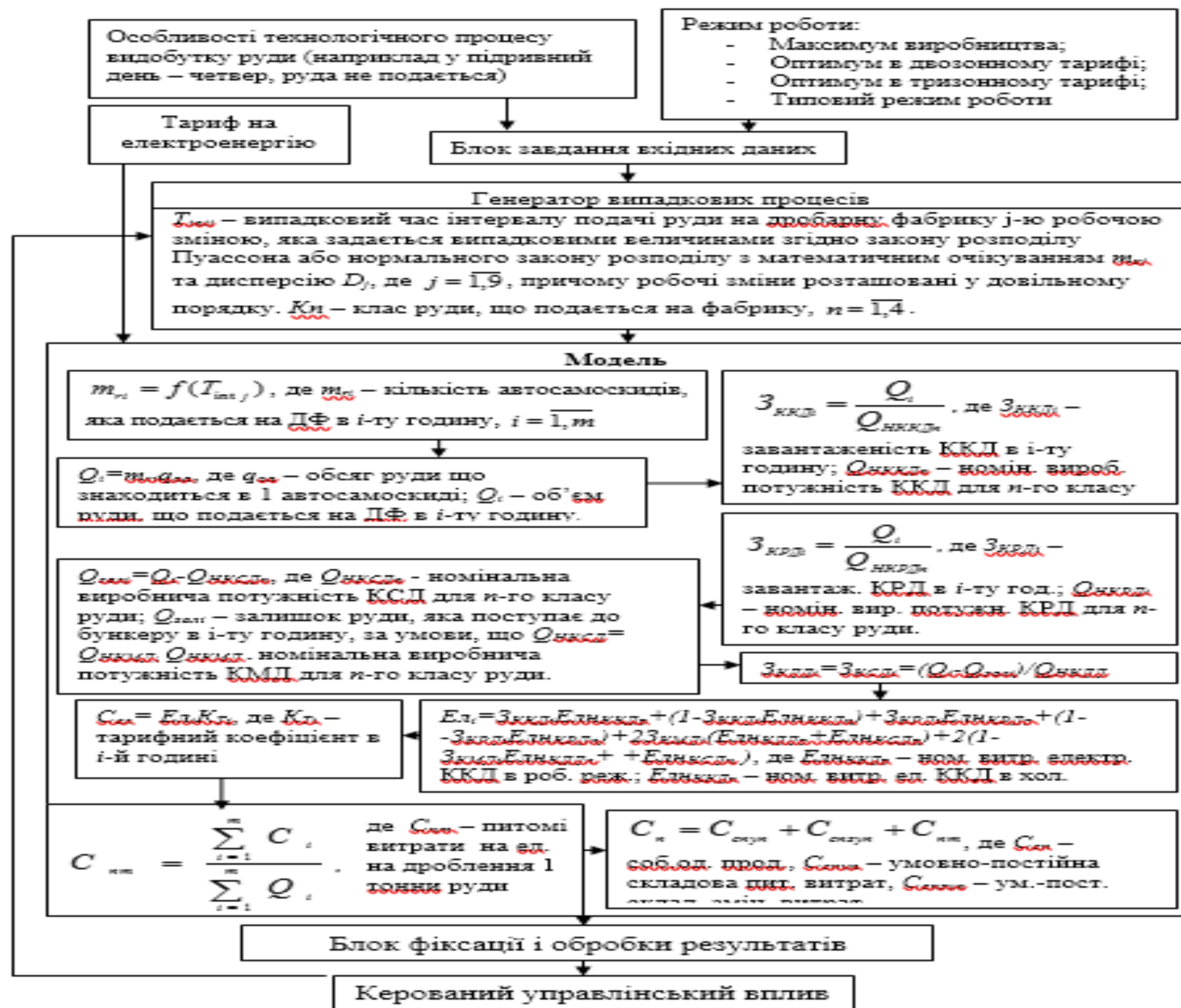
де G_{prof} — гарантований обсяг прибутку згідно із заданим значенням показника ризику α ; m_{prof} — оцінка математичного сподівання прибутку

$$m_{prof} = \frac{S_{prof}}{N_p}$$

σ_{prof} — оцінка середньоквадратичного відхилення прибутку:

$$\sigma_{prof} = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1} (S_{prof}^2 - N_p m_{prof}^2)} \quad (3.12)$$

k_{α} — квантиль нормального закону розподілу відповідно до заданого значення компоненти (α) вектора ризику, наприклад, якщо $\alpha = 0,1$, то $k_{\alpha} = 1,28$ (визначається за таблицями щільності нормального закону розподілу)



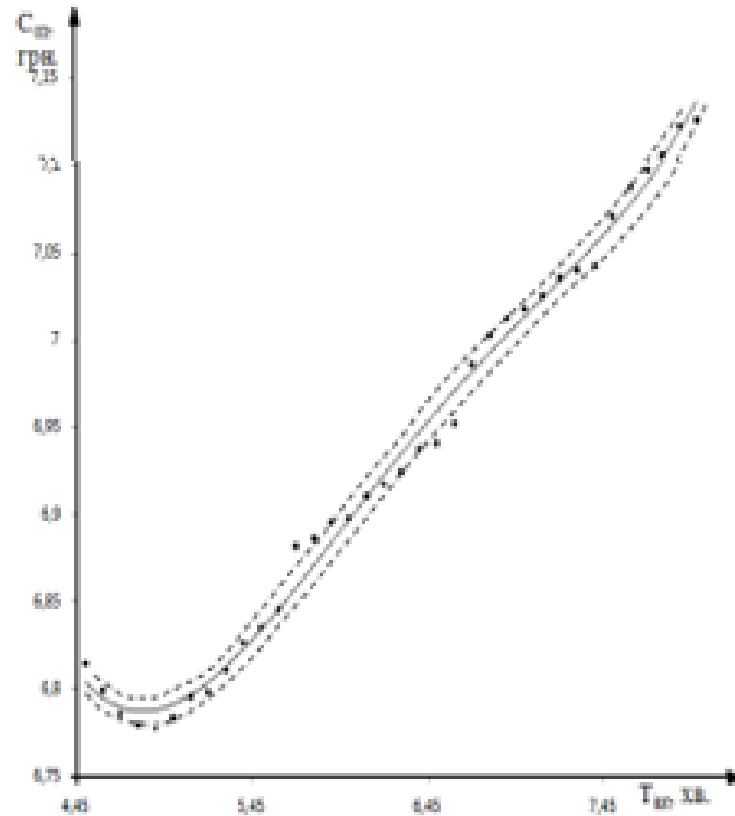


Рис. 2а. Залежність собівартості продукції від інтервалу подачі руди в умовах двозонного тарифу на електроенергію

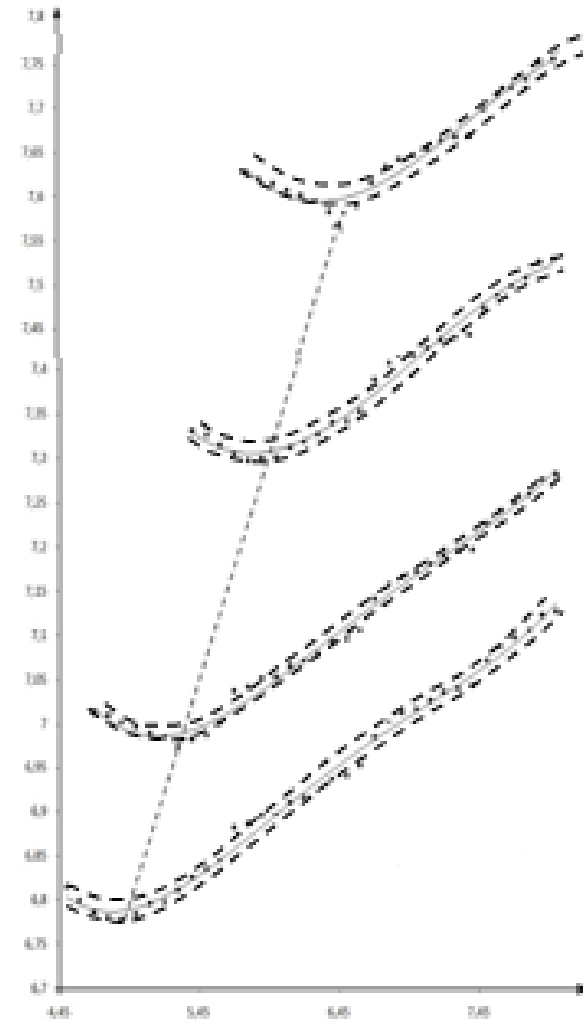


Рис. 2б. Дрейф залежності собівартості продукції від інтервалу подачі руди на підприємство при подачі руди різного класу

$$C_{cn} = 0,009188T_{int}^4 - 0,23941T_{int}^3 + 2,3215T_{int}^2 - 9,8125T_{int} + 22$$

Нечіткі моделі

Функція приналежності $A = \{x/mA(x)>0\}$.

Трикутна

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-c}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Типи функцій приналежності

Трапецевидна

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Гаусіана

$$MF(x) = \exp \left[- \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2 \right]$$

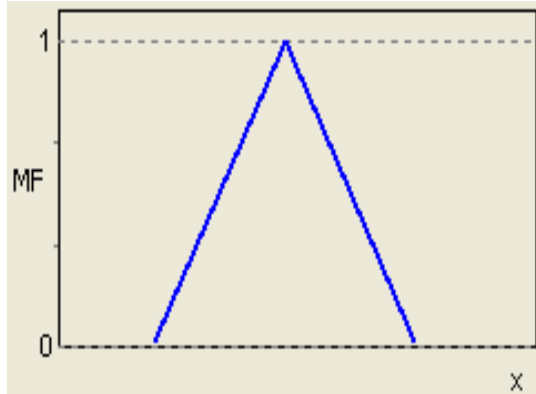
Кругова

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \frac{(x-a)^2}{b}} / x$$

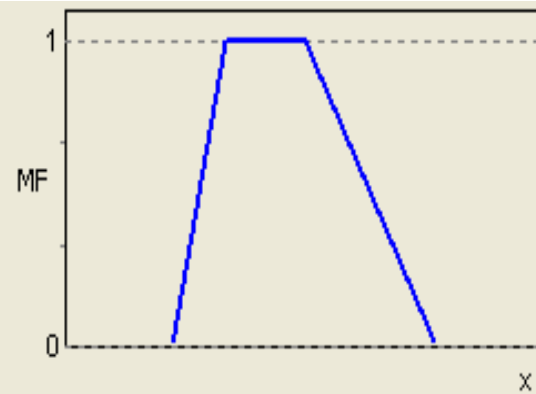
$$\mu(x) = a \sqrt{\frac{x}{x_{max}} \left(1 - \frac{x}{x_{max}} \right)}$$

Приклад вигляду функцій приналежності

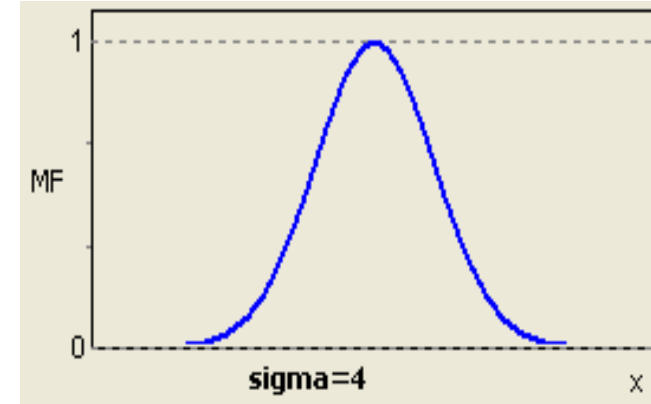
Трикутна



Трапецевидна



Гаусіана



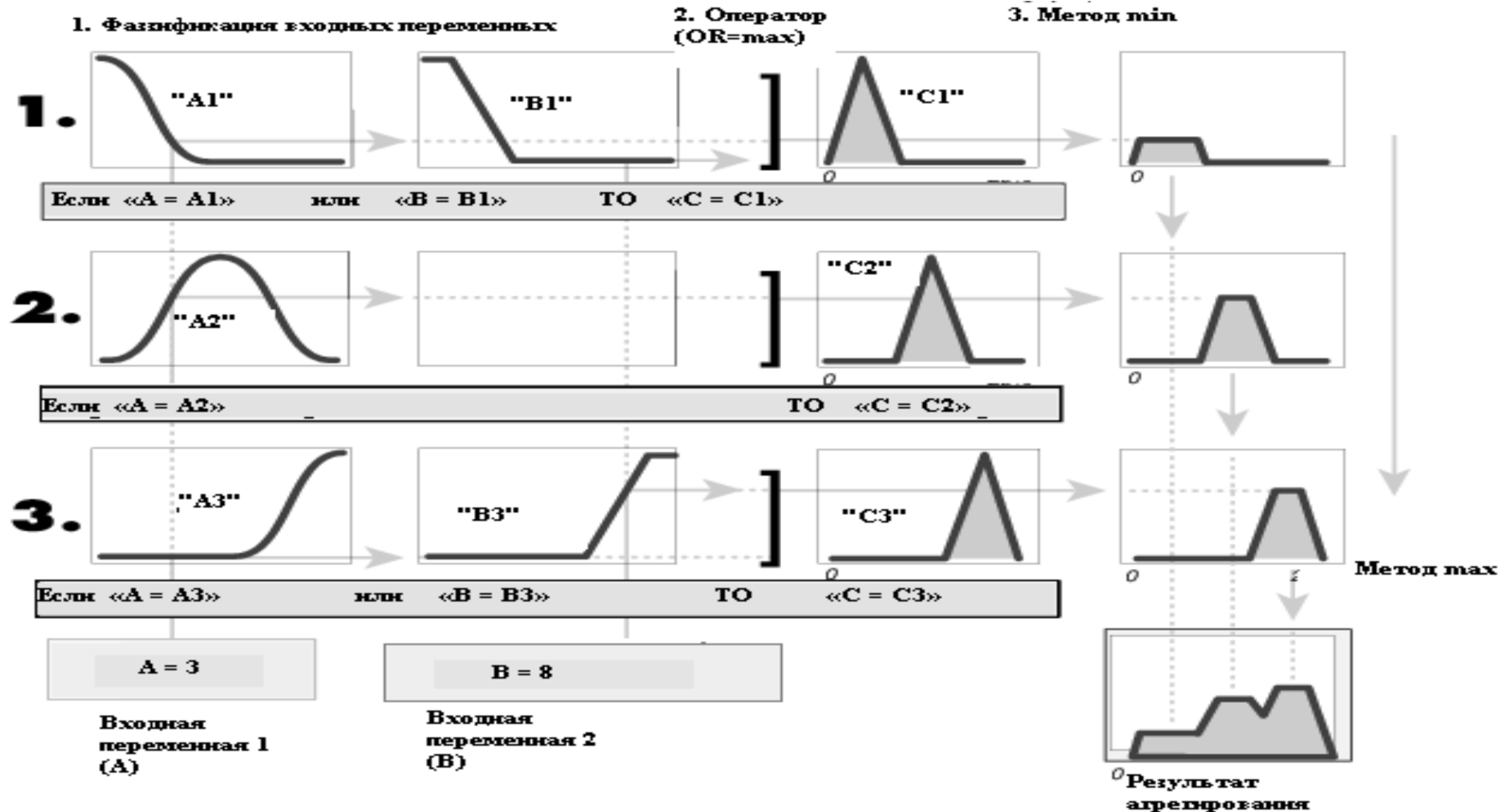
Структура нечіткої системи управління

ЯКЩО x_1 це A_1 . І/АБО . x_2 це A_2 , ТО y це B .

Нечіткий вивід за Мамдані

$$\alpha_i = \min(A_{ik}(x_k)) \quad B_i^*(y) = \min(\alpha_i, B_i(y)) \quad MF(y) = \max(B_i^*(y))$$

$$y = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} MF(y) dy = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \max(B_i^*(y)) dy$$



ПЛАНИ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ДЛЯ КІЛЬКОСТІ ФАКТОРІВ:

1

№ п/п	X
1	+1
2	-1
3	-1, 414
4	+1,414
5	0

2

№ п/п	X ₁	X ₂
1	+1	+1
2	-1	+1
3	+1	-1
4	-1	-1
5	-1, 414	0
6	+1,414	0
7	0	-1, 414
8	0	+1,414
9	0	0

3

№ п/п	X ₁	X ₂	X ₃
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	+1	-1	-1
8	-1	-1	-1
9	-1, 414	0	0
10	+1,414	0	0
11	0	-1, 414	0
12	0	+1,414	0
13	0	0	-1, 414
14	0	0	+1,414
15	0	0	0

ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ
ФОРМУЛАМИ
ДЛЯ КІЛЬКОСТІ
ФАКТОРІВ:

$$1 \quad y = a_0 + a_1x + a_{11}x^2$$

$$2 \quad y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2$$

$$3 \quad y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$

Кластерний аналіз

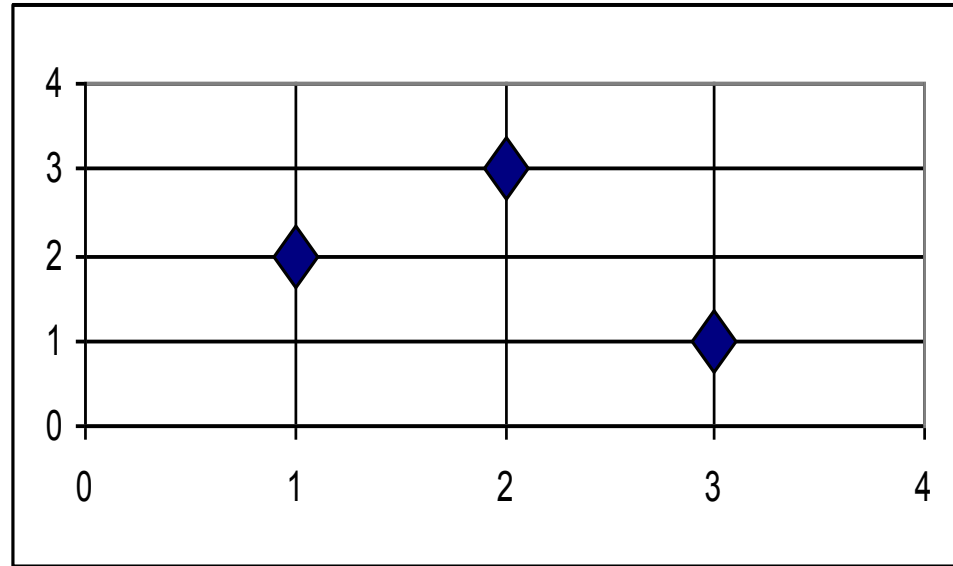
Відстані між двома об'єктами

$$d_S(x_i; y_i) = \left(\sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$d_M(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2}$$

$$d_E(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_{SUP}(x_i; y_i) = SUP|x_i - y_i|$$



Представлення трьох об'єктів,
як точок на площині

$$d_{XEM}(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i)$$

$$d_L(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i|$$

Кластеризація повним перебором об'єктів

$$Z = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} d_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} q_{ij} \leq N_0$$

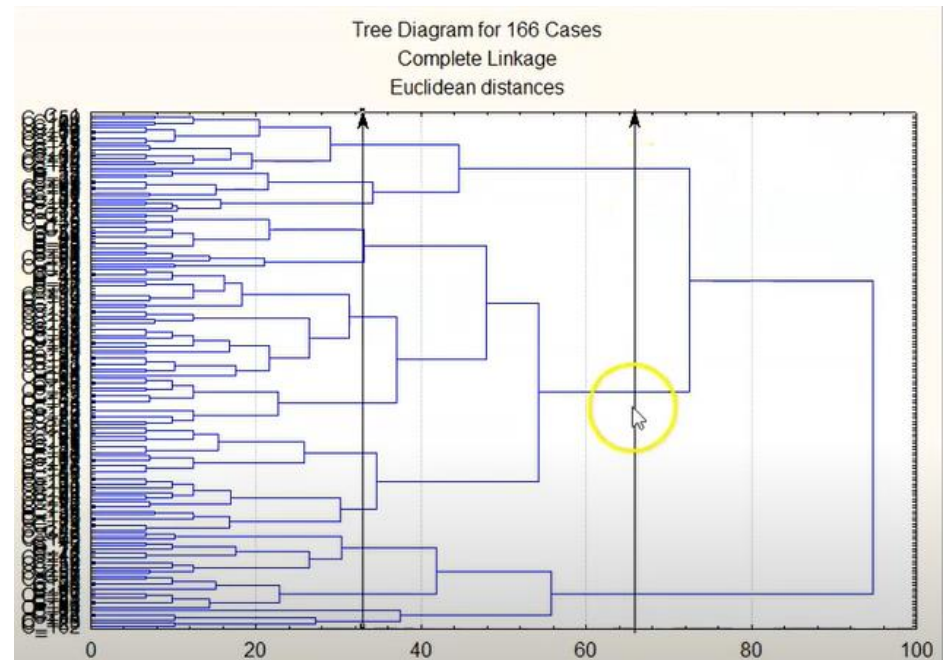
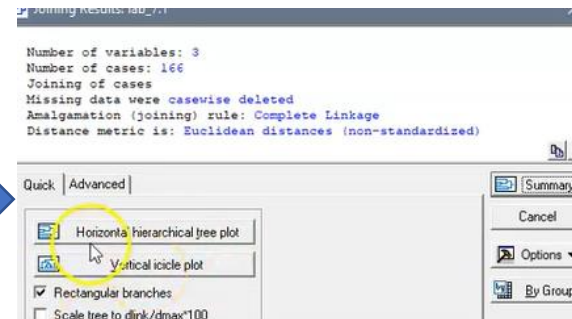
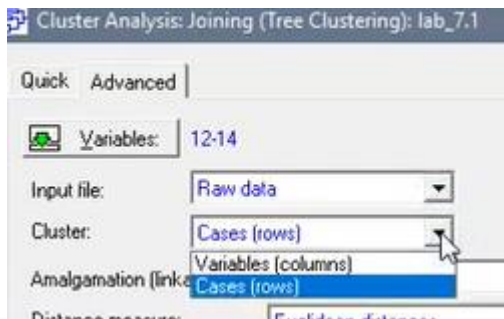
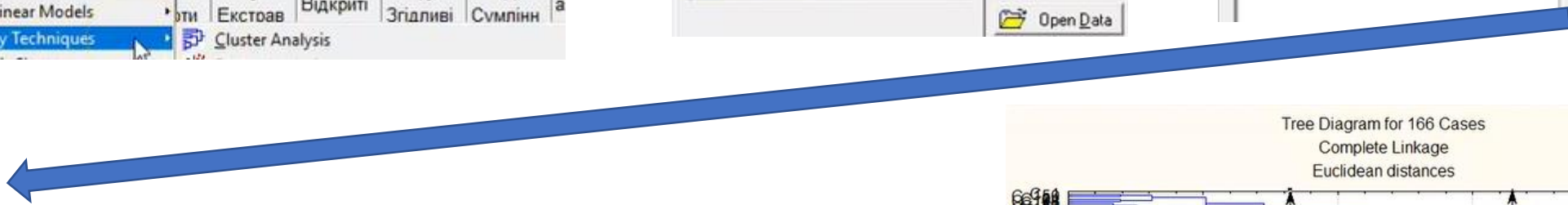
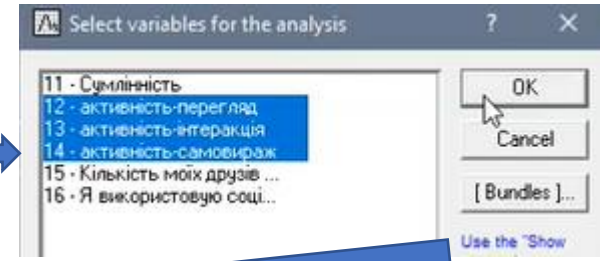
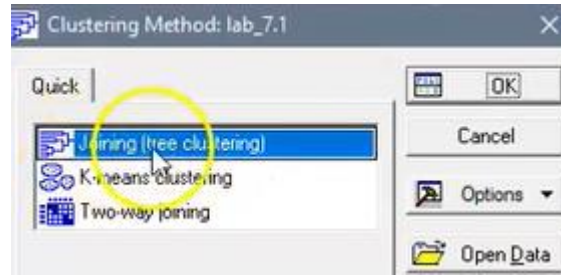
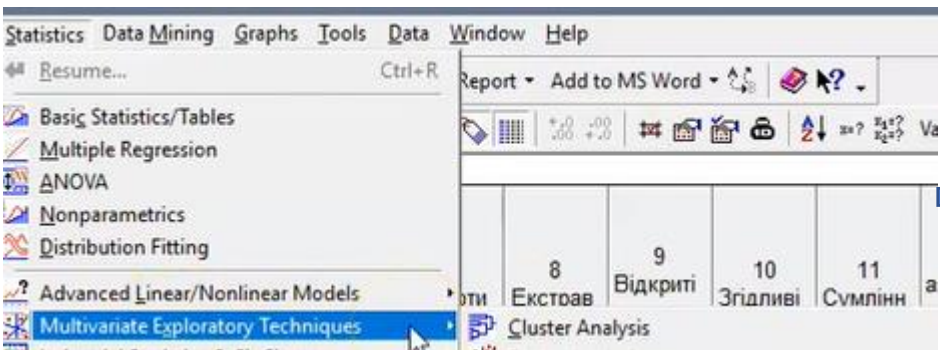
$$\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = N_0$$

	1	2	3	4	5
1	0	0,89	0,41	0,74	0,46
2	0,89	0	0,86	0,87	0,61
3	0,41	0,86	0	0,96	0,66
4	0,74	0,87	0,96	0	0,62
5	0,46	0,61	0,66	0,62	0

		Об'єкти					Сума по клас-терам
		1	2	3	4	5	
Клас-тер-и	1	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	1	1	2
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0
Сума по стовпцям		1	1	1	1	1	5

Кластерний аналіз із застосуванням пакету Statistika



Лекція з подробицями використання пакету
https://www.youtube.com/watch?v=c6Ualu5JL7I&ab_channel=IrynaKryvenko