Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Пістунов І.М., Приходченко О.Ю.

Теорія ймовірності та математична статистика для економістів: навч. наоч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2023. 48с.

В посібнику розглядаються теоретичні питання стосовно поняття ймовірності, дискретних та неперервних випадкових величин, основні поняття математичної статистики.

Призначено для студентів спеціальності 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 073 «Менеджмент», 292 «Міжнародні економічні відносини»

Рецензенти:
Васильєва Н.К., завідувач каф. інформаційних систем ДДАЕУ, проф.
Алексеєв М.О., зав каф. програмних засобів комп'ютерних систем НТУ "ДП", проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей виникла з практичних потреб необхідності передбачення випадкових подій. Подією або випадком назвиме явище, яке може відбутися, а може і не відбутися. І хоча свій початок ця теорія бере з необхідності передбачати результати азартних ігор, подальший її розвиток привів до значних здобутків у теорії вимірювань, масового обслуговування та ін.

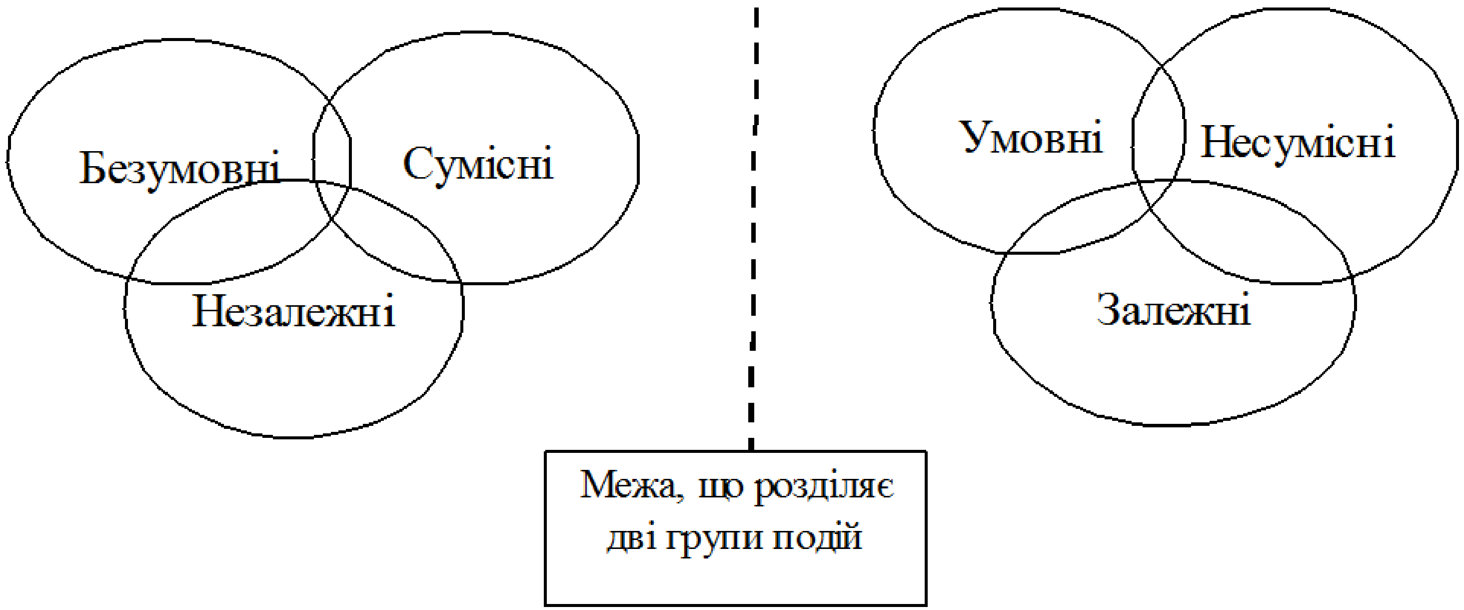
Для економістів теорія ймовірностей є однією з базових дисциплін, оскільки фінансова діяльність у суспільстві з вільною економікою повністю підлягає законам випадку і невизначеності. Уже у XVII сторіччі теорія ймовірностей застосовувалась у діяльності страхових компаній, а в наші дні вона вживається і для розрахунку ризикових фінансових операцій, плануванню банківської діяльності, макроекономічному плануванні. До задач економічного напрямку можна віднести також демографічні, сільськогосподарські, виробничі розрахунки.

1. ІМОВІРНОСТІ

1.1 Поняття ймовірності

Імовірність

$$p = \frac{a}{b} \qquad b = a/p \qquad a = p \cdot b \qquad p = 100\frac{a}{b}\%$$



1.2.Неможливі і достовірні події

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

1.3.ПРАВИЛО СКЛАДАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

події A_1 ; A_2 ;...... A_n

їх імовірності $P(A_1)$; $P(A_2)$;... $P(A_n)$

$P(A_1$ *або* A_2 .... *або* $A_n) =$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

1.4. Повна система подій

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1$$

Повну систему подій утворюють тільки ***несумісні*** події.

1.5. ПОНЯТТЯ УМОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

$P_B(A)$ – імовірність виникнення події A при умові, що подія B сталася.

1.6.-1.7. Правило множення ймовірностей

умовних подій

$$P(\,A\ i\ B\,) = P(B)\,P_B(A) = P(A)\,P_A(B)$$

незалежних подій

$$P(A\ i\ B)==P(A)P(B)$$

$$p(A_1\ i\ \ A_2\ i\ \ldots\ i\ A_n\,) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$$

1.8. Формули комбінаторики

- Перестановки $A^n{}_m = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1) =$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}$$

- Розміщення $P_m = m!$

- Сполучення $C^n{}_m$ $= \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}{m!} =$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Використання формул комбінаторики. Кожну з задач теорії ймовірності можна звести до тієї чи іншої задачі, де мова йдеться про виймання куль з урни.

Нехай, в урні *a* білих і *b* чорних куль; з урни наздогад виймають *k* куль. Знайти ймовірність того, що серед, них буде *l* білих, а, значить, *k* – *l* чорних ($l \le a$, $k- l \le b$).

$$P(A) = \frac{C_a^l \cdot C_b^{k-l}}{C_{a+b}^k}$$

1.9. Узагальнення правил складення і множення ймовірностей

$$P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ і } B).$$

Якщо події A і B несумісні,

то $P(A \text{ і } B) = 0$.

Якщо події A і B взаємно незалежні,

то $P(A \text{ і } B) = P(A)P(B)$.

Оскільки $0 \le P(A \text{ і } B)$, то

$$P(A \text{ або } B) \le P(A) + P(B)$$

1.10. Формула повної ймовірності

Події A_1 ; A_2 ;…… A_n

Їх імовірності $P(A_1)$; $P(A_2)$;… $P(A_n)$

Імовірності виходу

K $P_{A1}(K)$; $P_{A2}(K)$; … ; $P_{An}(K)$

для будь-якого можливого результату K цієї операції ймовірність її настання буде

$$P(K) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(K)$$

1.11. Формула Байєса

Нехай події *A1, A2,., An* являють собою повну систему подій. Якщо тоді *K* означає довільний результат цієї операції, то ймовірність того, що цей довільний результат стався внаслідок *q*-ї операції, ($1 \le q \le n$)

$$P_K(A_q) = \frac{P(A_q)P_{A_q}(K)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(K)}$$

1.12. Формула Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Уточнення формули Байєса для багаторазових випробувань

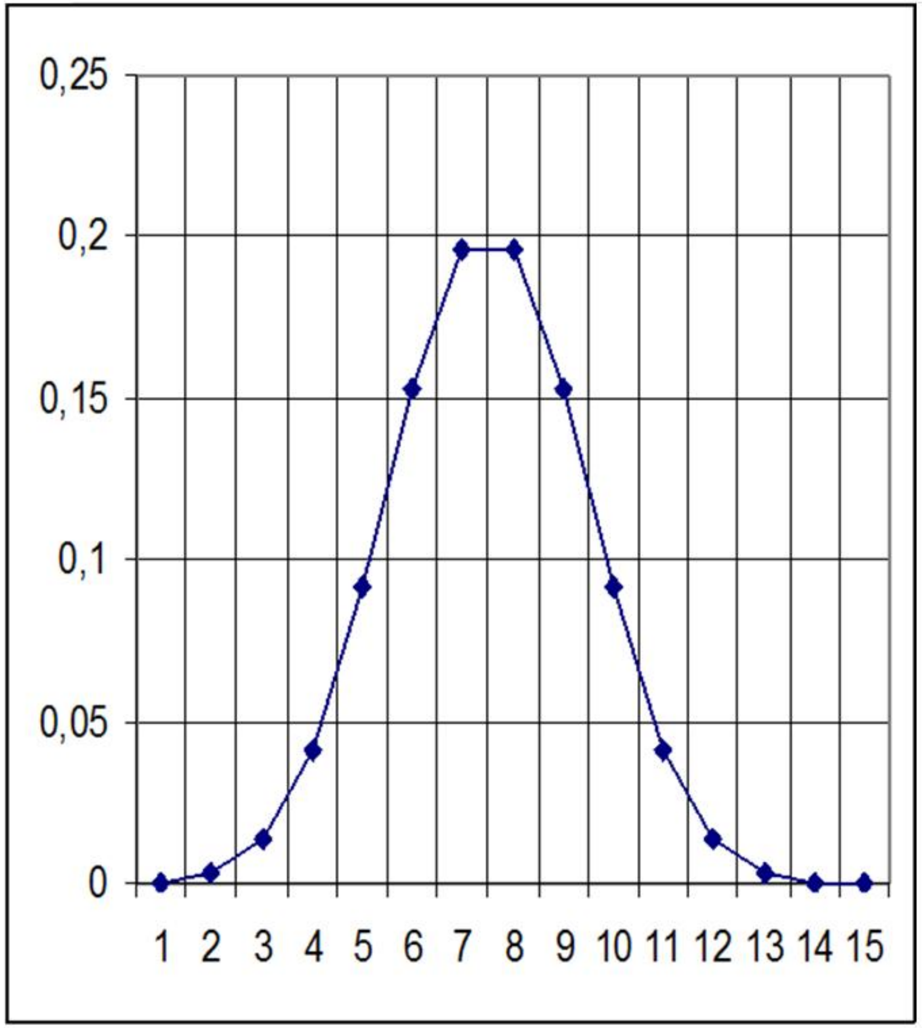
$$P_{K_m}(A_{qs}) = \frac{P_q p_q^m (1-p_q)^{s-m}}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i p_i^m (1-p_i)^{s-m}}$$

1.13 Найвірогідніше число настання події k_0

$$np - (1 - p) \le k_0 \le$$
$$\le np + p$$

Причому:

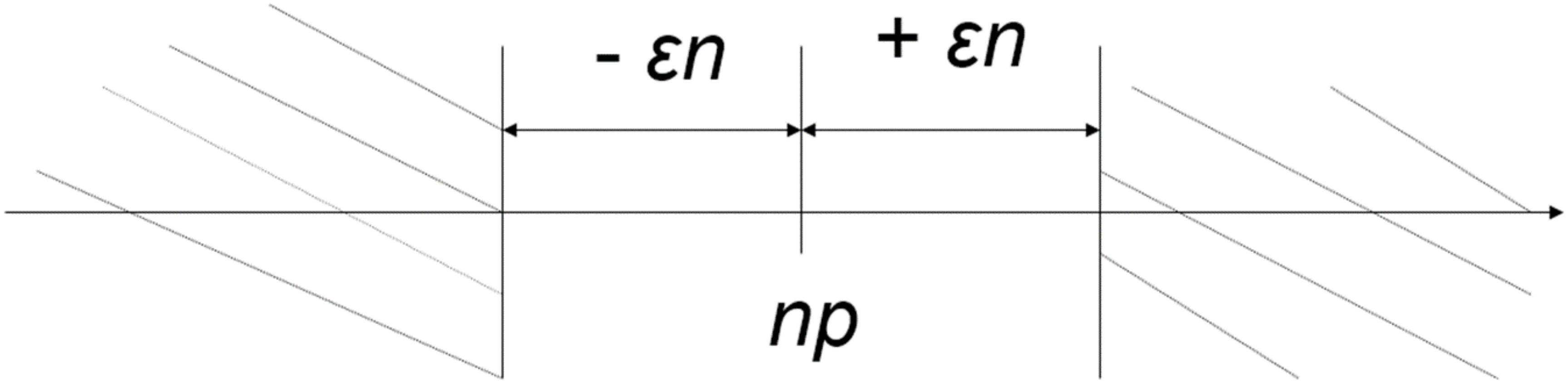
- а) якщо число $np - q$ – дробове, то існує одне найвірогідніше число k_0;
- б) якщо число $np - q$ – ціле, то існує два найвірогідніших числа, а саме: k_0 і k_0+1;
- в) якщо число np – ціле, то найвірогідніше число $k_0 = np$.



1.14. Теорема Бернуллі. Перша форма закону великих чисел

$$P(|k - np| > \varepsilon n) < \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$$

$$P(|k - np| \le \varepsilon n) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$$



2. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

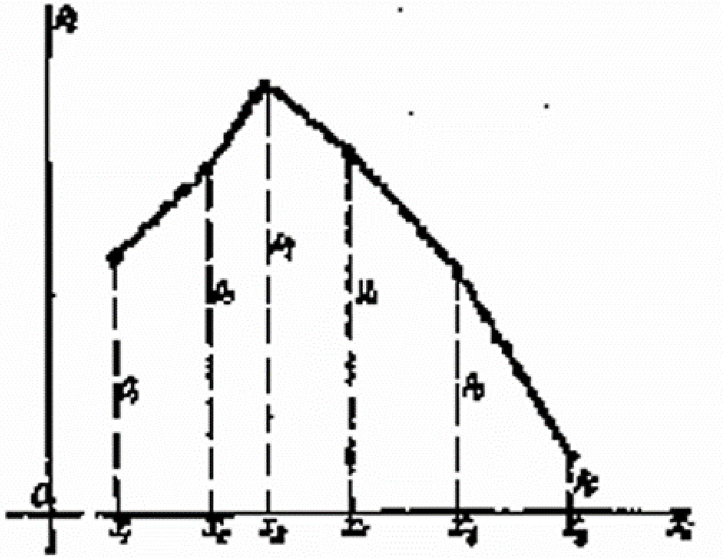
2.1.ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадкові величини, які задані законом розподілу у вигляді таблиці, називаються дискретними.

Закон розподілу

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n



Багатокутник розподілу
або розподіл імовірностей

2.2. Числові характеристики дискретної випадкової величини

$$\alpha_S[X] = \sum_{i=1}^{n} X_i^S P_i$$

$$\mu_S[X] = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha_1)^S P_i$$

$\mu_1 = 0;$

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3;$

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1^2\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^4 .$

$\alpha_1 = m_x, M_x, M[X], \bar{x}$ $\mu_2 = D_x, D[X], Q_x^2, q^2, \sigma_x^2$

$$D_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 P_i - M^2[X] \quad \sigma_x = \sqrt{D_x} \quad Var_x = \frac{\sigma_x}{M_x}$$

2.3. Теореми про властивості середнього та дисперсії

$M(a + X) = a + M(X).$

$M(a \cdot X) = a \cdot M(X).$

$M(X_1 + X_2 + X_3 ..) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) + ..$

$M(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 ...) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot M(X_3) \cdot ...$

$D(a + X) = D(X).$

$D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X).$

$D(X_1 + X_2 + X_3 ...) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + ..$

2.4. Теореми про середнє квадратичне відхилення

Маємо випадкові величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$

зі стандартами $q_1, q_2, \ldots, q_n$

середнє арифметичне $\xi = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$

результатів n вимірювань.

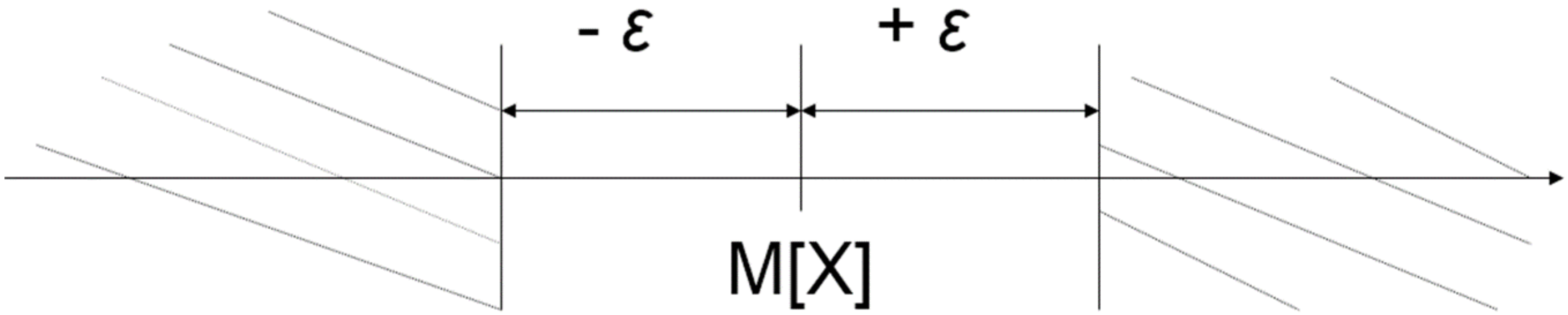
Тоді стандарт цього середнього, при умові що всі стандарти однакові

$$\frac{Q}{n} = \frac{q}{\sqrt{n}}$$

2.5.Нерівність Чєбишева

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) \leq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|\xi - M(X)\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{q^2}{\varepsilon^2 \cdot n}$$



3. БЕЗПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3. БЕЗПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

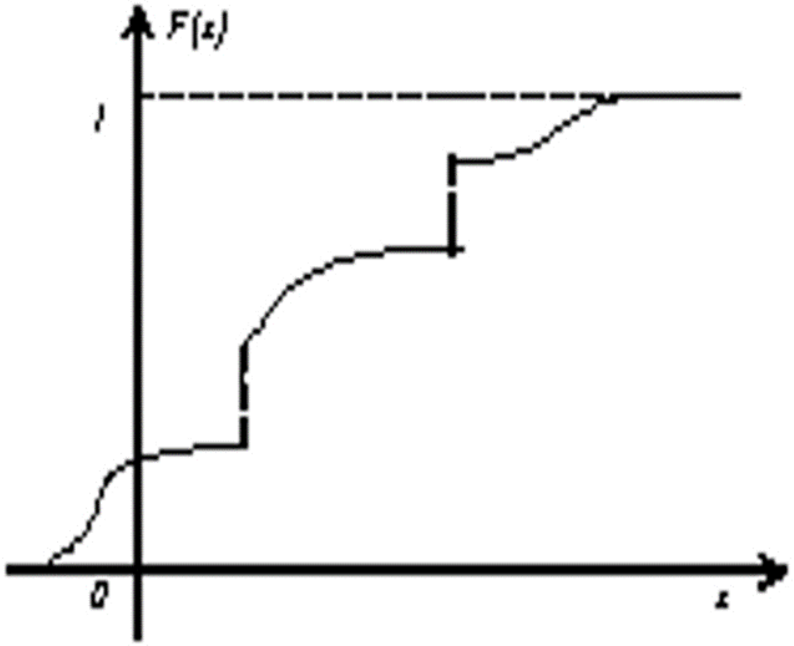
3.1. Функція розподілу $F(x) = P(X<x)$.

Властивості:

1) $x_2 > x_1, \quad F(x_2)>F(x_1)$.

2) $F(-\infty)=0$

3) $F(+\infty)=1$



Типовий графік функції розподілу

3.2. Щільність розподілу

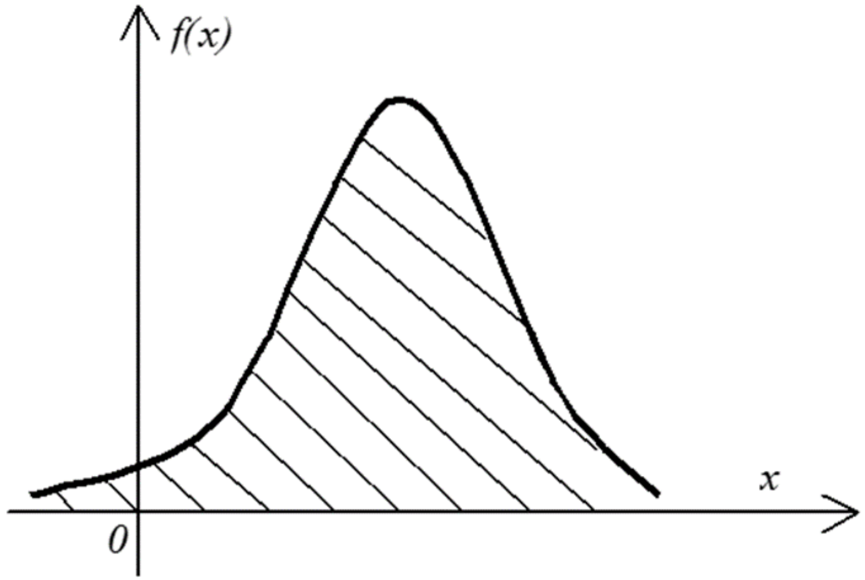
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

Властивості

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

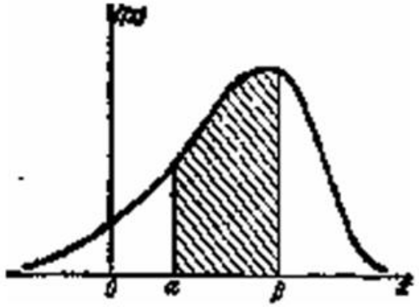
2) $f(x) \geq 0$



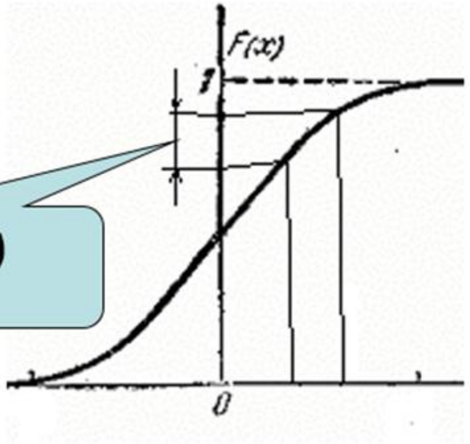
Типовий вигляд щільності розподілу

3.3. Імовірність попадання випадкової величини на задану ділянку

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$



$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$



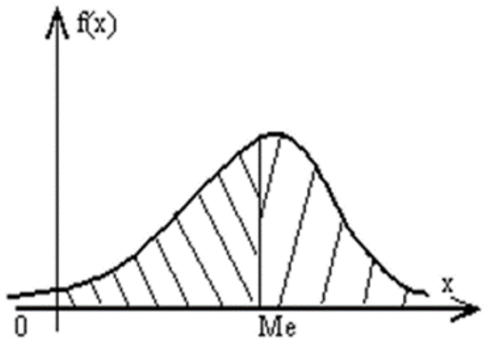
$P(\alpha \le X < \beta)$

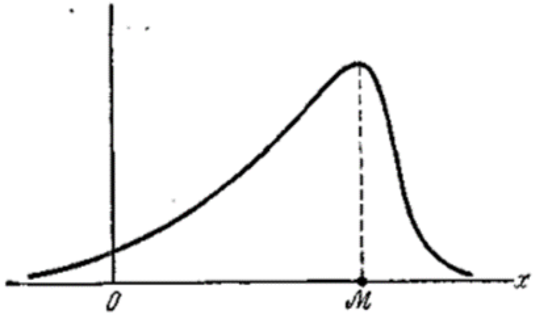
Графічна інтерпретація

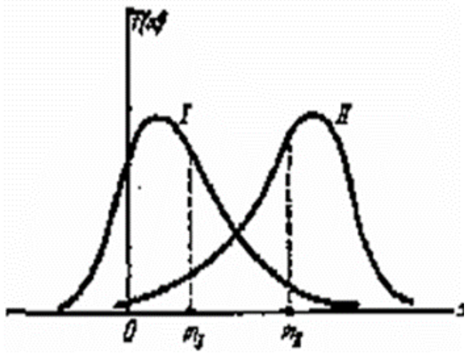
a *b*

3.4. Числові характеристики безперервних випадкових величин

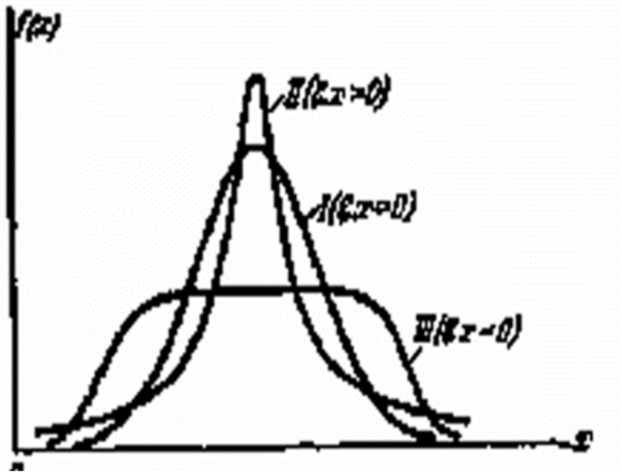
$$\alpha_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^S f(x)dx \qquad \mu_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^S f(x)dx$$







$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx$$



$$S_k = \mu_3 / \sigma^3$$

$$E_X = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

3.5. Закон рівномірної щільності

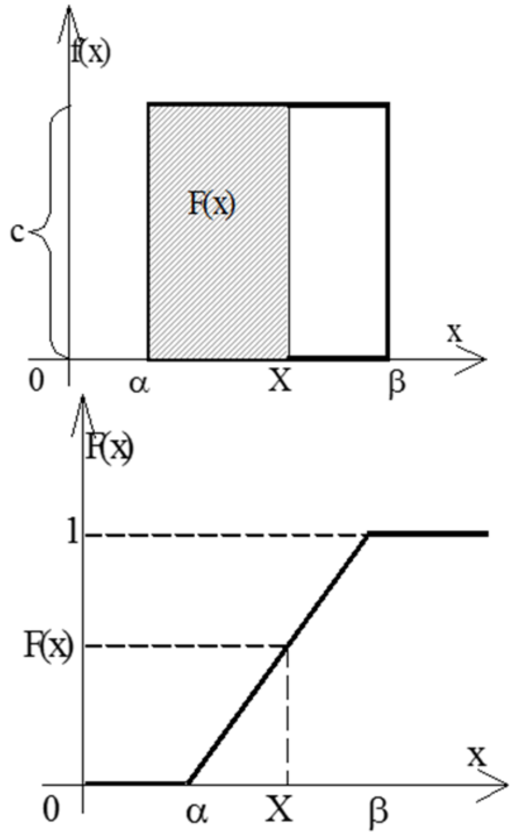
f(x)=1/(*β*-*α*), при $\alpha \le x \le \beta$

f(x)=0 при *x* < *α* або *x* > *β*

F(x) = 0, при *x* < *α*;

F(x) = (*x*-*α*)/(*β*-*α*), при $\alpha \le x \le \beta$

F(x) = 1 при *x* > *β*



$$m_x = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha} \, dx = \frac{(\alpha + \beta)}{2}$$

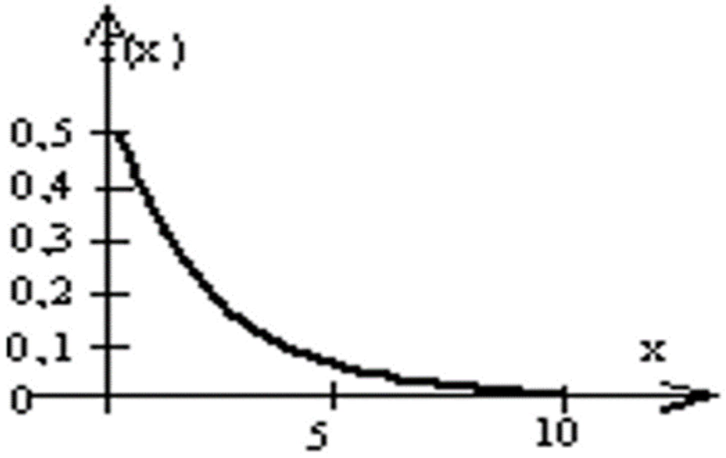
$$D_x = \alpha_2 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{12}} \quad E_X = \mu_4 / \sigma^4 - 3 = -1{,}2$$

$$P(a < x < b) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$

3.6. Експоненціальний закон розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$P(a<x<b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

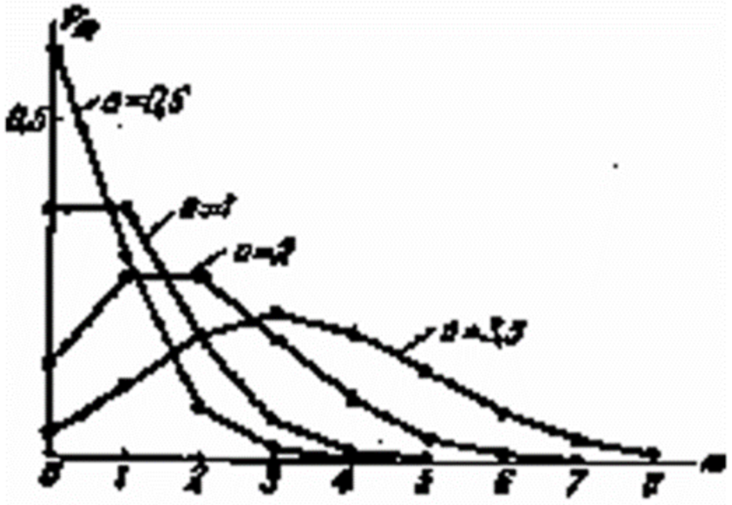
$$D_x = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$M_e = -\ln 0.5/\lambda \approx 0.69/\lambda$$

3.7. Закон Пуассона

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

$$m_x = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a$$



Закон Пуасона
для різних значень a

$$D_x = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} - a^2 = a$$

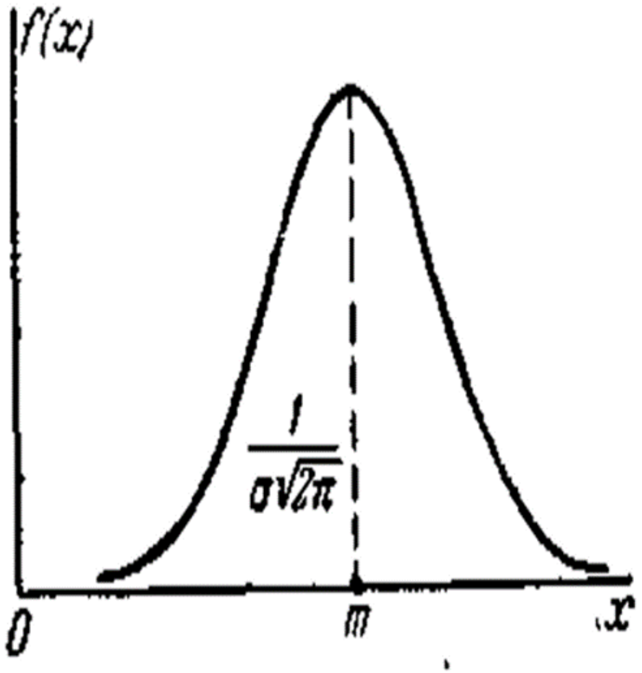
$$R_1 = 1 - P_m = 1 - e^{-a}$$

3.8. Нормальний закон і його параметри

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}dx=m_x$$

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2$$



$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Для непарних

$$\mu_S(X)=(S-2)\sigma^2\mu_{S-2}(X)$$

для парних центральних моментів

$$\mu_S(X)=(S-1)!!\sigma^S$$

Функція Лапласа

Фрагмент таблиці значень функції

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

для квантиля $z = \dfrac{\beta - m}{\sigma}$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0	0	0,1	0,08	0,2	0,159	0,3	0,236	0,4	0,311
0,5	0,383	0,6	0,451	0,7	0,516	0,8	0,576	0,9	0,632
1,0	0,683	1,1	0,729	1,2	0,770	1,3	0,806	1,4	0,838
1,5	0,866	1,6	0,890	1,7	0,911	1,8	0,928	1,9	0,943
2,0	0,955	2,5	0,988	3,0	0,997	4,0	0,9999	5,0	1

Квантиль функції Лапласа, z	Імовірність попадання в інтервал $P(\alpha < x < \beta)$ для функції Лапласа вигляду	
	$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$
$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}})\right]$	$\left[\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}})\right]$
$\frac{x-m}{\sigma}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma})\right]$	$\left[\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma})\right]$

Квантиль функції Лапласа, z	Функція розподілу $F(x) = P(X < x) = P(-? < X < x)$ для функції Лапласа вигляду	
	$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$
$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{m-x}{\sigma\sqrt{2}}) + 1\right]$	$\left[\Phi(\frac{m-x}{\sigma\sqrt{2}}) + 0.5\right]$
$\frac{x-m}{\sigma}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{m-x}{\sigma}) + 1\right]$	$\left[\Phi(\frac{m-x}{\sigma}) + 0.5\right]$

Теореми Лапласа

Локальна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Інтегральна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$$

Відхилення відносної частоти від постійної імовірності в незалежних дослідженнях

$$x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Інші функції розподілу

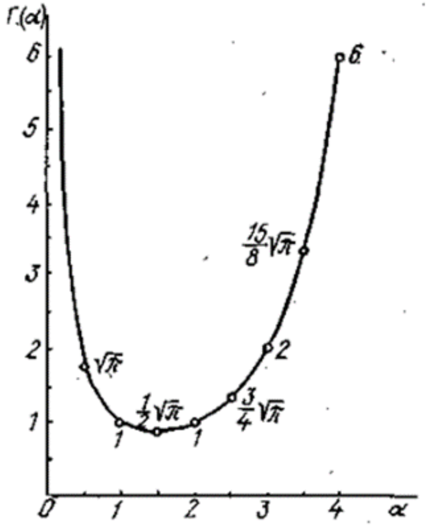
3.9. Гамма-функція

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$

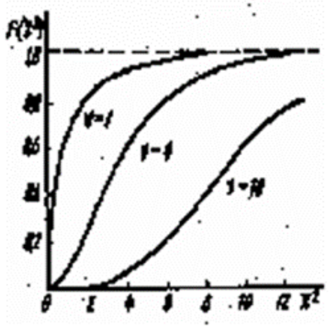
2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad при \quad \alpha 0 > 0;$

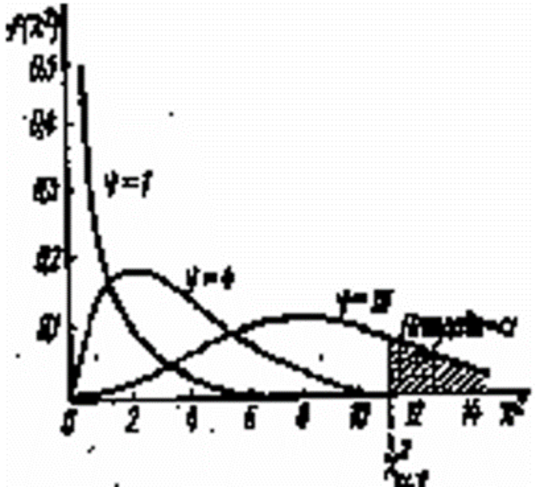
3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$



3.10. Хі-квадрат (χ^2)

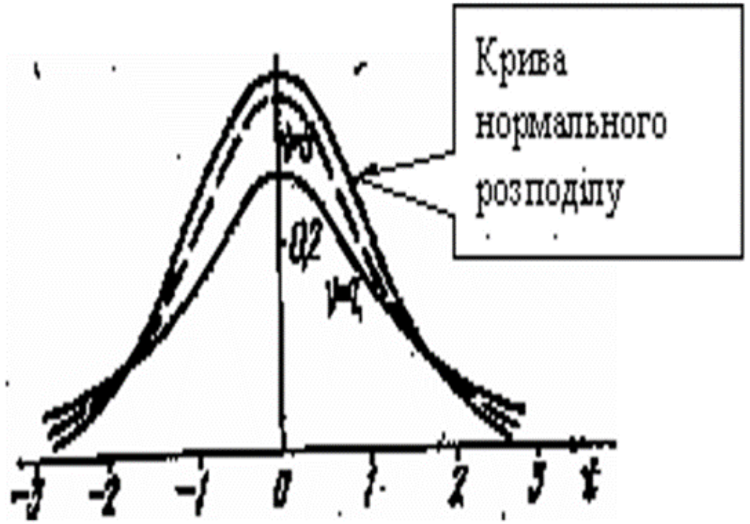
$$F(\chi^2) = P(\chi^2 < \chi_0^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)} \displaystyle\int_0^{\chi_0^2} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2), & якщо \quad \chi^2 \geq 0 \\ 0, & якщо \quad \chi^2 < 0 \end{cases}$$





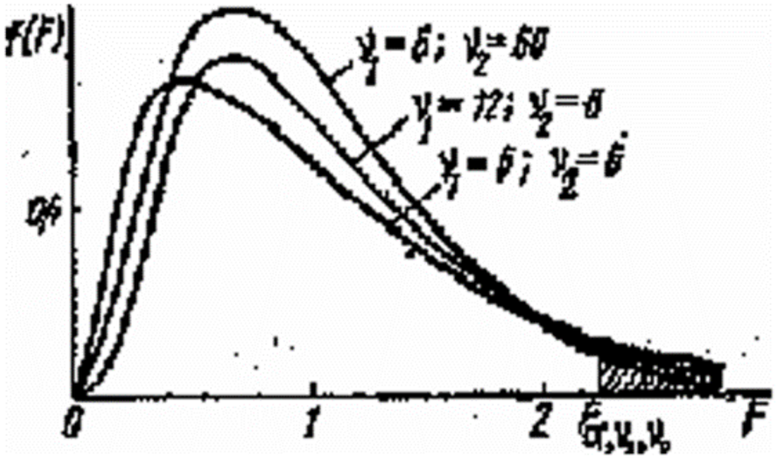
3.11. Розподіл Стьюдента

$$f(t)=S(t,\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},\quad -\infty$$



3.12. Розподіл Фішера

$$f(F)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}\cdot F\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & F>0\\ 0 & F?0\end{cases}$$



3.13. Поняття про теорію масового обслуговування

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad \rho = \lambda / \upsilon$$

При $1 \le k \le n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{k!} \rho_0;$$

При $k \ge n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{n-k}} \rho_0$$

де $$\rho_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right]^{-1} \qquad \rho < n$$

$\rho_0 = 0$ для $\rho \ge n$

Поняття про теорію надійності

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0) \quad P(t) = e^{-\lambda t}$$

Імовірність безвідмовної роботи в інтервалі t_0 - t

$$P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)} = e^{-\lambda t_0} e^{-\lambda t}$$

Імовірність безвідмовної роботи в інтервалі t_0 – t, якщо він вже працював безвідмовно у попередньому інтервалі 0- t_0

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}$$

Імовірність безвідмовної роботи з резервом

$$P_n(m) = \sum_{i=0}^{m} C_{m+n}^{n+i} p^{m+i} (1 - p)^{m-i}$$

3.14. Центральна гранична теорема

Теорема Ляпунова

$$P(Y_n < y) \xrightarrow[n \to \infty]{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{Y_n}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(Y_n - M(Y_n))^2}{2\sigma_{Y_n}^2}} dy$$

Теорема Муавра-Лапласа

$$P\left(a \le Y_n \le b\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)\right)$$

4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

- До цього ми розглядали всі задачі про випадкові величини при умові, що закон їхнього розподілу відомий.
- Але на практиці, спостерігаючи за зміною значень випадкової величини, практично неможливо визначити ані закон розподілу, ані основні числові характеристики, бо невідомі ймовірності появи, того чи іншого значення.
- А для того, щоб їх визначити, треба проводити дуже великі спостереження, що пов`язано зі значними матеріальними затратами.
- Тому, замість нескінченних спостережень за випадковою величиною використовується якась відносно невелика їх кількість, яка називається “**вибіркою**”.

Нехай ми маємо вибірку значень випадкової величини $X= x_1, x_2, \ldots x_n$, з кількістю спостережень – N. Розіб`ємо весь діапазон можливих значень спостережень випадкової величини на d однакових ділянок. Знайдемо значення випадкової величини на правій межі кожної ділянки як

$$d_{max}(i) = x_{min} + \frac{(x_{max} - x_{min}) \cdot i}{d} \tag{4.1}$$

де, i – номер ділянки [1; d]; x_{max}, x_{min} – відповідно найбільше та найменше значення випадкової величини у вибірці. Права межа i-ї ділянки водночас є лівою межею i+1 ділянки. Ліва межа для 1-ї ділянки – це x_{min}. А права межа останньої ділянки – це x_{max}.

Орієнтовно, кількість цих ділянок може бути визначена як

(4.2)

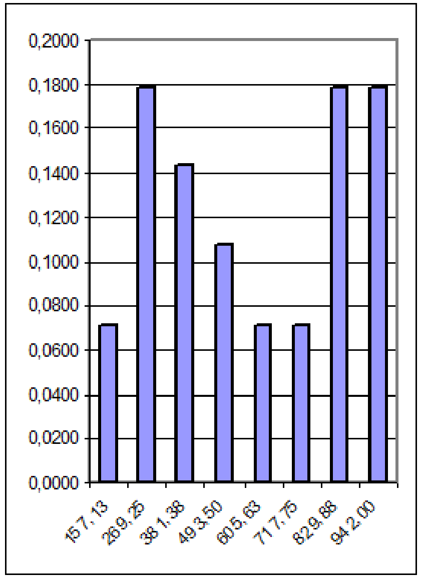
але ця формула не є обов’язковою для використання. Дослідник може прийняти рішення про розбиття діапазону на довільну кількість ділянок.

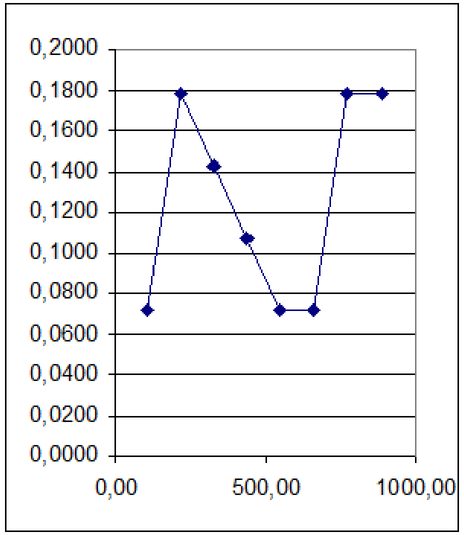
Визначимо кількість значень випадкової величини, що попали в ту чи іншу ділянку як K_i. Це число називається “**частотою**”.
“**Відносною частотою**” називається число (4.3)

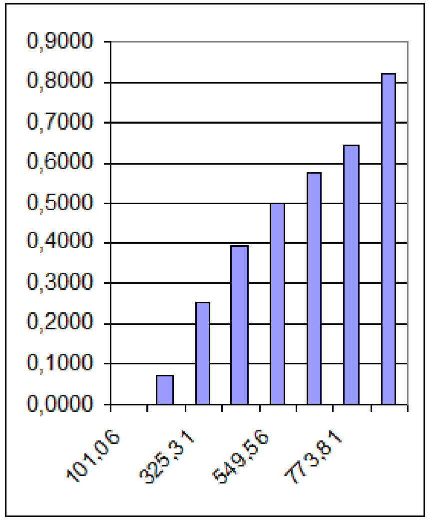
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

$$d_{max}(i) = x_{min} + \frac{(x_{max} - x_{min}) \cdot i}{d} \qquad d_{op} = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,332 \cdot \ln N}$$

$$F(d_i) = \sum_{l=0}^{i-1} k_l$$







Гістограма, Полігон Кумулята

4.2. Оцінки числових характеристик випадкової величини

$$\ddot{\alpha}_S[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,S} \qquad \ddot{\mu}_S[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \ddot{\alpha}_1)^S$$

$$\ddot{M}[X] = \ddot{\alpha}_1, \qquad \ddot{D}[X] = \frac{N}{N-1}\ddot{\mu}_2 \qquad \mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \ddot{\alpha}_1^2$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\ddot{D}(x)}{\ddot{M}(X)} \qquad K\operatorname{var}(X) = \frac{\ddot{\sigma}(x)}{\ddot{M}(X)}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = R_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \ddot{m}_x)(y_i - \ddot{m}_y)$$

$$cor(X,Y) = r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\ddot{\sigma}_X \cdot \ddot{\sigma}_Y}$$

4.3. Закон великих чисел. Теорема Чєбишева

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ddot{M}(x_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \ddot{M}(X)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

4.4. Довірчий інтервал

$$P(|\Theta[X] - \ddot{\Theta}[X]| < \varepsilon) = \beta \qquad \ddot{\Theta}[X] - \varepsilon < \Theta[X] < \ddot{\Theta}[X] + \varepsilon$$

$$\varepsilon_m = \ddot{\sigma}_x Л(\beta) \qquad \varepsilon_D = \ddot{D}_x Л(\beta)\sqrt{\frac{0,8N+1,2}{N(N-1)}}$$

$$\varepsilon_{p_i} = Л(\beta)\sqrt{\frac{k_i(1-k_i)}{N}} \qquad \ddot{\sigma}_m = \sqrt{\frac{D_x}{N}}$$

Де *Л(β)*– зворотне значення функції Лапласа для квантиля таблиці z= $\frac{x - m_x}{\sigma_x}$

4.5. Віднесення випадкової величини до певного закону розподілу

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати цей закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «**нуль-гіпотезу**» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини з певною довірчою ймовірністю *p*. Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони і знаходимо відносні частоти k_i . Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за відомою вже формулою

$$P(x_i<x<x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{d}\frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}$$

$$r = d - s - 1$$

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат») буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.