Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Долгов О.М, Колосов Д.Л., Онищенко С.В.

Теоретична механіка

МОДУЛЬ ІІІ. КІНЕМАТИКА. ПРЕЗЕНТАЦІЯ ЛЕКЦІЙ

для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство

Дніпро - 2023

Погоджено рішенням науково-методичної комісії
спеціальності 132 Матеріалознавство (протокол № 1 від 30.08.2023)

Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль ІІІ. Кінематика [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 19 с.

ЗМІСТ

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Теоретична механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2002. - 512 с. ISBN 966-575-184-0
2. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О. С. Апостолюк [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2007. - 400 с. ISBN 966-575-059-3
3. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. технічний ун-т, Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності. - Вид. 2-е, допов., переробл. - Луцьк : Надстир'я, 2007. - 504 с. - Бібліогр.: с. 500-501. ISBN 978-966-517-585-8

Кінематика

Кінематика точки | Кінематика твердого тіла

Кінематика – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух без урахування сил, які спричиняють цей рух, та складається з двох підрозділів:

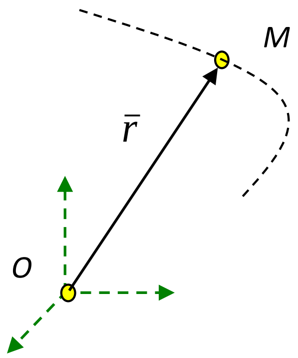
- **Кінематика точки – вивчає рух матеріальної точки та є основою вивчення руху точок твердого тіла.**
- **Задання руху точки – необхідно мати можливість визначення положення точки у просторі у будь-який момент часу (завдяки рівнянню, геометрії механізму та відомому закону руху провідної ланки).**
- **Траєкторія руху точки – сукупність положень точки у просторі під час її руху.**

Три способи задання руху точки:

Векторний спосіб:

Задається величина та напрямок радіус-вектора.

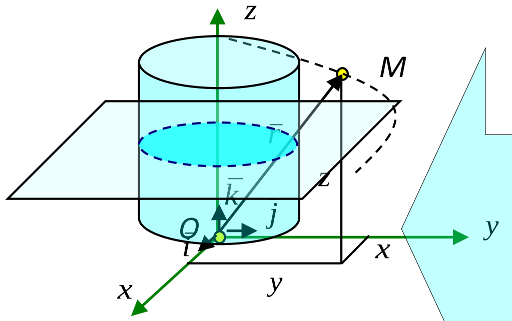
$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$



Координатний спосіб:

Визначаються координати положення точки.

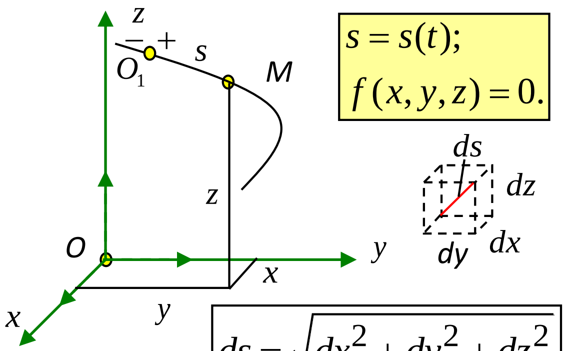
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}}$$



Природний спосіб:

Задаються закон руху точки та траєкторія

$$\boxed{\begin{aligned} &s = s(t); \\ &f(x, y, z) = 0. \end{aligned}}$$



$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Всі три способи задання еквівалентні та пов'язані між собою:

1. Векторний та координатний – співвідношенням: $\boxed{\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}}$

2. Координатний та природний – співвідношенням: $\boxed{s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt}$

3. Для отримання рівняння траєкторії руху необхідно із рівнянь руху координатного способу виключити час, через те, що траєкторія не залежить від часу:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ &y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ &z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}}$$

Останні два рівняння є рівняннями лінійних поверхонь, лінія перетину яких є траєкторією руху точки

$$\boxed{\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}}$$

Наприклад:

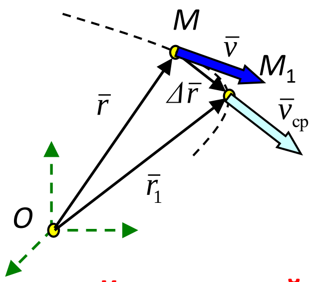
$$\boxed{\begin{aligned} &x = t \Rightarrow t = x \\ &y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{або} \quad x^2 + y^2 = R^2; \\ &z = c. \end{aligned}}$$

Останні два рівняння є рівняннями циліндричної поверхні радіуса ***R*** з твірною, паралельною вісі ***z***, та плоскої поверхні, паралельної координатній площині ***Oxy*** та зміщеної вздовж вісі ***z*** на величину ***c***. Лінія перетину цих поверхонь (коло радіуса ***R***) – траєкторія руху точки.

Швидкість точки – це величина, яка характеризує швидкість зміни положення точки у просторі.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення швидкості точки :

Векторний спосіб: Порівняємо два положення точки в моменти часу t та $t_1 = t + \Delta t$:



$$t \Rightarrow \bar{r}; \qquad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r};$$

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}_{\text{ср}}$$

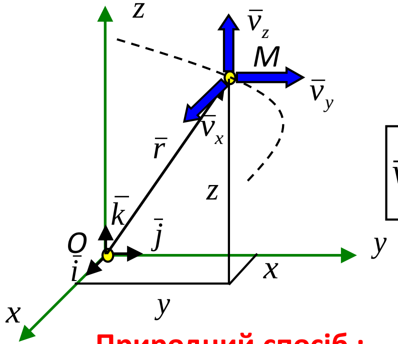
– вектор середньої швидкості в інтервалі часу Δt, спрямований у напрямку вектора переміщення (хорда MM_1).

Призначимо $\Delta t \to 0$ і перейдемо до границі:
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v} \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

– **вектор істинної швидкості точки в момент часу t,** спрямований вздовж дотичної до траєкторії (при наближенні M_1 до M хорда займає положення дотичної).

Координатний спосіб : Зв'язок радіус-вектора з координатами визначається виразом : $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



Використовуємо векторну форму визначення швидкості :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$$

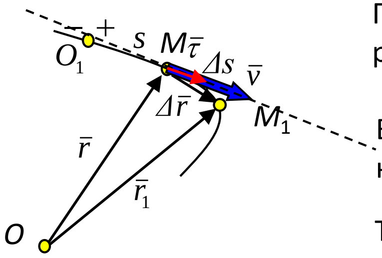
Компоненти (складові) вектора швидкості:
$$\bar{v}_x = \dot{x}(t)\bar{i}; \quad \bar{v}_y = \dot{y}(t)\bar{j}; \quad \bar{v}_z = \dot{z}(t)\bar{k}.$$

Проекції швидкості на вісі координат:
$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$
$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{\dot{y}}{v}; \quad \cos(\bar{v}, z) = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Природний спосіб : Представимо радіус-вектор як складну функцію : $\bar{r}(t) = \bar{r}[s(t)].$

Використаємо векторну форму визначення швидкості:
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\dot{s}.$$



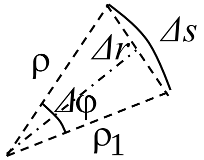
Представимо похідну радіус-вектора як границю:
$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}.$$

Вектор збільшення радіус-вектора, направлений вздовж хорди MM_1 і в границі займає дотичне положення.

Якщо $\Delta s \to 0$ радіус кривизни $\rho_1 \to \rho$, кут між радіусами кривизни $\Delta\varphi \to 0$, чисельник – основа рівнобедреного трикутника, знаменник – довжина кругової дуги радіуса ρ.

Величина похідної радіус-вектора по дуговій координаті дорівнює 1 :
$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = 1.$$

Таким чином, похідна радіус-вектора по дуговій координаті є одиничним вектором, спрямованим по траєкторії.



Вектор швидкості дорівнює: $\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}.$ **Проекція швидкості на дотичну:** $v_\tau = \dot{s}.$

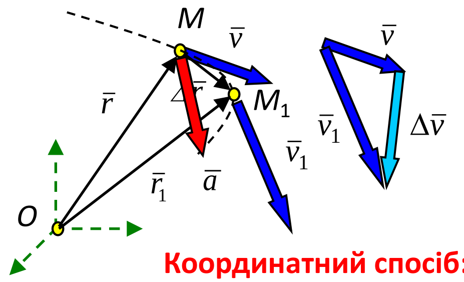
За $\dot{s} > 0$ вектор швидкості спрямовано у бік збільшення дугової координати, інакше – у зворотний бік.

❖ **Прискорення точки** – це величина, яка характеризує швидкість зміни швидкості точки.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення прискорення точки:

Векторний спосіб: Порівняємо швидкості точки у двох її положеннях у моменти часу ***t*** та $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \bar{v}; \qquad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta\bar{v};$$

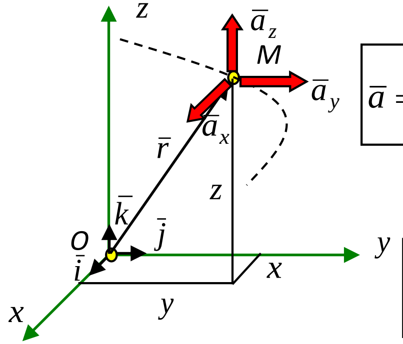


$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}_{cp}$$ - вектор середнього прискорення в інтервалі часу ***Δt***, спрямований у бік увігнутості траєкторії.

Переходячи до границі отримаємо : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}$ $\qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$ - **вектор істинного прискорення точки у момент часу *t***, лежить у дотичній площині (граничне положення площини, проведеної через дотичну в точці ***M*** і пряму, паралельну дотичній у точці M_1, при прагненні M_1 до ***M***) і *спрямований у бік увігнутості траєкторії.*

Координатний спосіб: Використаємо отриманий векторний вираз і зв'язок радіус-вектора з координатами $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

Компоненти (складові) вектора прискорення: $\bar{a}_x = \ddot{x}\bar{i}$; $\bar{a}_y = \ddot{y}\bar{j}$; $\bar{a}_z = \ddot{z}\bar{k}$.

Проекції прискорення на вісі координат: $a_x = \ddot{x}$; $a_y = \ddot{y}$; $a_z = \ddot{z}$.

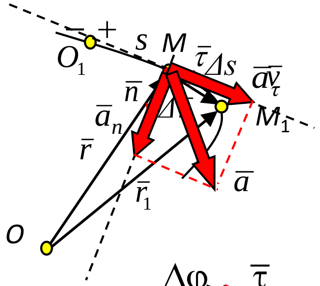
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \quad \cos(\bar{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, z) = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Природний спосіб: Використовуємо векторний вираз для прискорення та вираз для швидкості при природному способі задання руху : $\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}$.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Представимо одиничний дотичний вектор як складну функцію: $\bar{\tau}(t) = \bar{\tau}[s(t)]$.

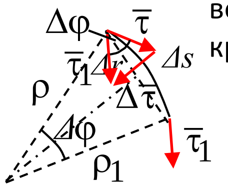
Похідна одиничного дотичного вектора: $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{ds}.$



Величина похідної одиничного дотичного вектора по дуговій координаті:

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = \frac{1}{\rho}.$$

Якщо $\Delta s \to 0$, то радіус кривизни $\rho_1 \to \rho$, кут між радіусами кривизни $\Delta\varphi \to 0$, чисельник - основа рівнобедреного трикутника, побудованого одиничними векторами τ_1 і τ, знаменник – довжина кругової дуги радіуса ρ.



Кут між збільшенням диничного вектора $\Delta\tau$ та самого вектора τ За $\Delta\varphi \to 0$, прагне до 90°

Таким чином, похідна одиничного дотичного вектора по дуговій координаті є вектор, спрямований перпендикулярно дотичній до траєкторії. Введемо одиничний вектор ***n***, нормальний (перпендикулярний) до дотичної, та спрямований до центру кривизни.

Компоненти (складові) вектора прискорення: $\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}$; $\bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}$.

Проекції прискорення на вісі τ та *n*: $a_{\tau\tau} = \ddot{s}$; $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$.

Таким чином, **повне прискорення точки є векторною сумою двох прискорень: дотичного**, спрямованого за дотичною до траєкторії у бік збільшення дугової координати, $\ddot{s} > 0$ якщо (інакше – у протилежну) та **нормального прискорення,** спрямованого за нормаллю до дотичної до центру кривизни (увігнутості траєкторії):

З використанням вектора ***n*** і раніше визначених величин прискорення точки можна представити як суму векторів : $\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Модуль повного прискорення : $a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2};$

❖ **Рівнозмінний рух точки -** рух точки за траєкторією, під час якого дотичне прискорення не змінюється за величиною. $\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s} = const.}$

Запишемо вираз для дотичного прискорення через проекцію швидкості: $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt}\dot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$

Отриманий вираз є диференціальним рівнянням, яке легко розв'язується поділом змінних та інтегруванням лівої та правої частин:

$$dv_\tau = a_{\tau\tau}dt \qquad \int\limits_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_{\tau\tau}\int\limits_0^t dt; \quad v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_{\tau\tau}\, t\Big|_0^t; \quad v_\tau - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau} t$$

$$\boxed{v_\tau = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t}$$ - швидкість точки при рівнозмінному русі

У свою чергу швидкість точки також зв'язується із дуговою координатою диференціальною залежністю: $v_\tau = \frac{ds}{dt}$ або $ds = v_\tau dt.$

Після підстановки виразу для швидкості та інтегрування отримаємо :

$$\int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t)dt; \qquad s\Big|_{s_0}^{s} = (v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2})\Big|_0^t; \quad s - s_0 = v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}.$$

$$\boxed{s = s_0 + v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}}$$ - дугова координата точки при рівнозмінному русі

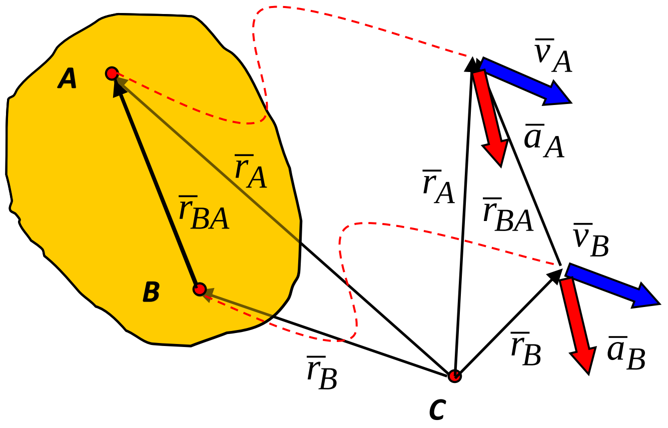
❖ **Класифікація рухів точки.**

№ з/п	$\bar{a}_\tau$	$\bar{a}_n$	Вид руху: Закон руху	Вид руху: Траєкторія
1	= 0 $[t, t_1]$	= 0 $[t, t_1]$	рівномірний (v = const)	прямолінійна ($\rho = \infty$)
2	= 0 $[t, t_1]$	$\neq 0$ $[t, t_1]$	рівномірний (v = const)	криволінійна ($\rho \neq \infty$)
2.1	= 0 у момент часу t	= 0 $[t, t_1]$	нерівномірний ($v \neq$ const), у момент часу t $v = max$	прямолінійна ($\rho = \infty$)
2.2		$\neq 0$ $[t, t_1]$		криволінійна ($\rho \neq \infty$)
3	$\neq 0$ $[t, t_1]$	= 0 $[t, t_1]$	нерівномірний ($v \neq$ const)	прямолінійна ($\rho = \infty$)
3.1		= 0 в момент часу t	зміна напрямку руху (v = 0 при t=t)	будь-яка траєкторія
3.2			нерівномірний ($v \neq$ const)	перегин траєкторії ($\rho = \infty$ при t=t)
4	$\neq 0$ $[t, t_1]$	$\neq 0$ $[t, t_1]$	нерівномірний ($v \neq$ const)	криволінійна ($\rho \neq \infty$)
5	= const $[t, t_1]$	будь-яке	равнозмінний	будь-яка траєкторія

❖ **Кінематика твердого тіла** вивчає рух твердого тіла та окремих його точок.
Існує **п'ять видів руху** твердого тіла:
1. **Поступальний** (повзун, поршень насоса, спарник коліс паровоза, що рухається прямолінійним шляхом, кабіна ліфта, двері купе, кабіна оглядового колеса).
2. **Обертальний** (маховик, кривошип, коромисло, оглядове колесо, звичайні двері).
3. **Плоскопаралельний або плоский** (шатун, колесо локомотива під час кочення по прямолінійній рейці, шліфувальне коло).
4. **Сферичний** (гіроскоп, кульова стійка).
5. **Загальний випадок руху** або вільний політ (куля, камінь, небесне тіло)

❖ **Поступальний рух твердого тіла –** такий рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, залишається паралельною до самої себе протягом усього руху. Зазвичай поступальний рух ототожнюється з прямолінійним рухом його точок, але це не так. Точки та саме тіло (центр мас тіла) можуть рухатися за криволінійними траєкторіями, як, наприклад, рух кабіни оглядового колеса.

❖ **Теорема про поступальний рух твердого тіла** – **При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу геометрично рівні швидкості та прискорення.**



Проведемо радіус-вектори до двох точок ***A*** і ***B***, а також з'єднаємо ці точки вектором $\boldsymbol{r_{BA}}$.

У будь-який момент часу виконується векторна рівність: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}.$

У будь-який момент часу вектор $\boldsymbol{r_{BA}}$ ***залишається постійним за напрямком*** (за визначенням поступального руху) ***і за величиною*** (відстань між точками не змінюється). Звідси: $\boxed{\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const},}$

Це означає, що в кожний момент часу положення точки *A* відрізняється від положення точки *B* на ту саму величину $\boldsymbol{r_{BA}}$ = ***const***, тобто **траєкторії** цих двох точок **тотожні** (збігаються одна з одною при накладенні).

Продиференціюємо за часом ліву та праву частину співвідношення: $\dfrac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_B(t)}{dt}$

і це означає, що **у кожний момент часу швидкість точки *A* дорівнює геометрично** (тобто векторно) **швидкості точки *B***.

$$\boxed{\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).}$$

Друге диференціювання за часом призводить до співвідношення: $\dfrac{d\bar{r}_A^2(t)}{dt^2} = \dfrac{d\bar{r}_B^2(t)}{dt^2}$

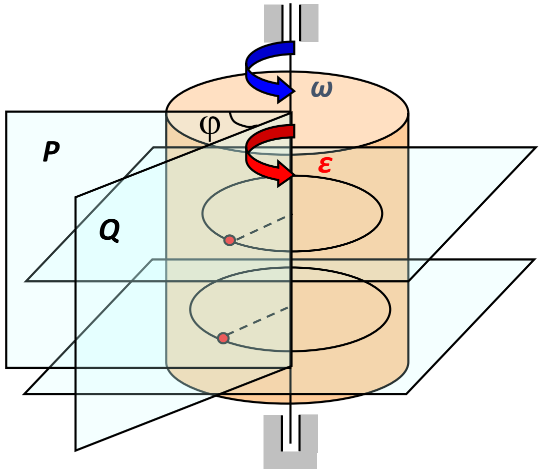
і це означає, що **у кожний момент часу прискорення точки *A* дорівнює геометрично** (тобто векторно) **прискоренню точки *B***.

$$\boxed{\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).}$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом однієї точки, що належить цьому тілу та обраної довільним чином.

Усі параметри руху цієї точки (траєкторія, швидкість та прискорення) описуються рівняннями та співвідношеннями кінематики точки.

- **Обертальний рух твердого тіла** – рух, при якому всі його точки рухаються в площинах, перпендикулярних деякій нерухомій прямій, і описують коло з центрами, що лежать на цій прямій, що є **віссю обертання**.



- **Задання обертального руху** – рух визначається законом зміни двогранного кута **φ** (кута повороту), утвореного нерухомою площиною ***P***, що проходить через вісь обертання, і площиною ***Q***, жорстко пов'язаною з тілом:

$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$ - **рівняння обертального руху**

- **Кутова швидкість** - величина, яка характеризує швидкість зміни кута повороту.

$$t \Rightarrow \varphi; \quad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi; \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{cp}$$ - середня кутова швидкість в інтервалі часу ***Δt***,

Спрямуємо $\Delta t \to 0$ та перейдемо до границі: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}}$ - **істинна кутова швидкість у момент часу *t***

Якщо ***dφ/dt*** **> 0**, то обертання відбувається у бік збільшення кута повороту,
якщо ***dφ/dt*** **< 0** , то обертання відбувається у бік зменшення кута повороту.

Кутова швидкість зображується дуговою стрілкою у бік обертання.

- **Кутове прискорення** - величина, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості.

$$t \Rightarrow \omega; \quad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega; \qquad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{cp}$$ - середнє кутове прискорення в інтервалі часу ***Δt***,

Призначимо ***Δt*** $\to$ **0** та перейдемо до границі: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ $\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}}$ - **істинне кутове прискорення в момент часу *t***

Кутове прискорення зображується дуговою стрілкою у бік збільшення кута повороту при $\boxed{\ddot{\varphi} > 0}$

Якщо ***d²φ/dt²*** та ***dφ/dt*** одного знака, швидкість збільшується по модулю і обертання є прискореним (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в один бік),
якщо ***d²φ/dt²*** та ***dφ/dt*** різного знака, швидкість зменшується по модулю і обертання є уповільненим (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в протилежні сторони)

- **Рівномірне обертання** – кутова швидкість не змінюється за величиною. $\boxed{\omega = const.}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \qquad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t.}$$

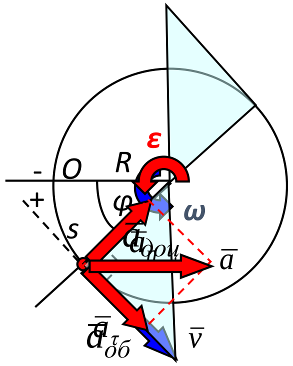
- **Рівнозмінне обертання** – кутове прискорення не змінюється за величиною

$\boxed{\varepsilon = const.}$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt; \qquad \boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t.}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \qquad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.}$$

- **Швидкість точки при обертальному русі твердого тіла -** траєкторія точки відома (коло радіуса *R* - відстань точки до вісі обертання), можна застосувати формулу для визначення швидкості точки при природному заданні руху: $\boxed{v_\tau = \dot{s}.}$



Дугова координата пов'язана з радіусом кола: $\boxed{s = \varphi R.}$ Тоді проекція швидкості на дотичну до кола : $v_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$

Оскільки далі працюють із модулем кутової швидкості після зображення її у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для модуля швидкості: $\boxed{v = \omega \cdot R}$

Вектор швидкості спрямовують **перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутової швидкості.**

Як випливає з формули, швидкість точки пропорційна відстані її до вісі обертання (радіусу обертання).

Тоді проекції прискорення на дотичну до кола та нормаль: $a_\tau = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \varepsilon R.$ $a_n = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\varphi R)\right]^2 = \frac{1}{R}\left[\frac{d\varphi}{dt} R\right]^2 = \omega^2 R.$ $\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.}$

Оскільки далі працюють із модулем кутового прискорення після зображення його у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для дотичного прискорення : $\boxed{a_{об} = \varepsilon \cdot R}$
і **вектор цього прискорення, що називається обертальним прискоренням**, спрямовують **перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутового прискорення.**

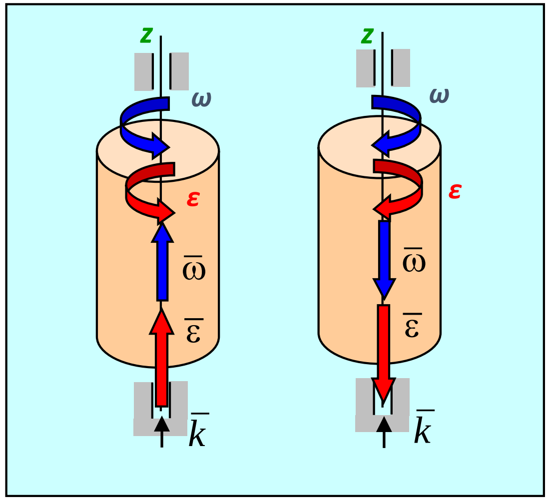
Нормальне прискорення є **доцентровим прискоренням**, його спрямовують **вздовж радіуса до вісі обертання** незалежно від напрямку стрілки дуги кутової швидкості, не кажучи вже про напрям дугової стрілки кутового прискорення. $\boxed{a_{доц} = \omega^2 \cdot R}$

Як випливає з формул, обидва прискорення точки пропорційні відстані до вісі обертання (радіусу обертання).

Повне прискорення точки, як і раніше, є векторною сумою цих прискорень : $\boxed{\bar{a} = \bar{a}_{об} + \bar{a}_{доц}.}$ $\boxed{\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{об}}{a_{доц}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).}$

- **Швидкість та прискорення точки при обертальному русі як векторні добутки.**

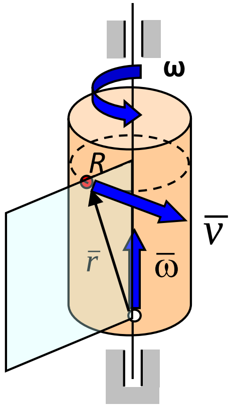
Представимо кутову швидкість і кутове прискорення як вектори, спрямовані на вісі обертання у той бік, звідки дугові стрілки цих величин вказують обертання проти годинникової стрілки.



Позитивний напрямок вісі ***z*** можна задати за допомогою одиничного вектора ***k***, тоді вектори кутової швидкості та кутового прискорення можна представити як: $\boxed{\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}}$ $\boxed{\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}}$

де ω_z, ε_z - проекції відповідних векторів на вісі ***z***.

- **Швидкість точки при обертальному русі як векторний добуток – визначається виразом** $\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$, який описує і величину, і напрямок швидкості.

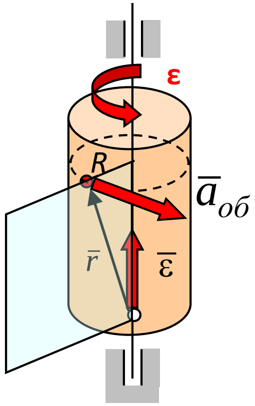


Величина (модуль) цього векторного добутку : $|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \; \underbrace{\sin(\bar{\omega}, \bar{r})}_{R}$. Таким чином: $\boxed{v = \omega \cdot R.}$

Напрямок вектора досліджуваного векторного добутку**:**
за визначенням векторного добутку – перпендикулярно площині, проведеній через вектори, що перемножуються, та спрямований у той бік, звідки поворот першого вектора до другого на найменший кут здається таким, що відбувається проти годинникової стрілки;
за правилом правої руки - при поєднанні великого пальця **з першим вектором,** решти – **з другим вектором**, поворот великого пальця перпендикулярно долоні вказує на напрямок вектора векторного добутка.

Таким чином, **дійсно векторний добуток кутової швидкості та радіус-вектора повністю визначає величину та напрямок швидкості точки при обертальному русі** відповідно до раніше отриманих результатів.

- **Обертальне прискорення точки як векторний добуток –** визначається виразом $\boxed{\bar{a}_{об} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}}$, який описує і величину, і напрямок обертального прискорення.



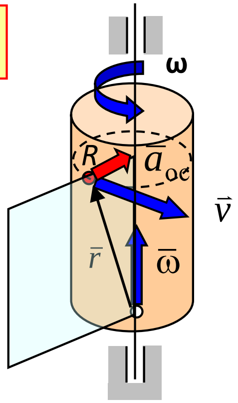
Величина (модуль) цього векторного добутку: $|\bar{a}_{об}| = |\bar{\varepsilon}| \cdot |\bar{r}| \; \underbrace{\sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r})}_{R}$. Таким чином: $\boxed{a_{об} = \varepsilon \cdot R.}$

Напрямок вектора розглянутого векторного добутку можна встановити за визначенням **векторного добутку** або за **правилом правої руки**.

Доцентрове прискорення точки як векторний добуток – визначається виразом $\boxed{\bar{a}_{доц} = \bar{\omega} \times \bar{v}}$, який описує і величину, і напрямок доцентрового прискорення.

Величина (модуль) цього векторного добутку: $|\bar{a}_{доц}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{v}| \; \sin(\bar{\omega}, \bar{v})$. Таким чином: $\boxed{a_{доц} = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R.}$

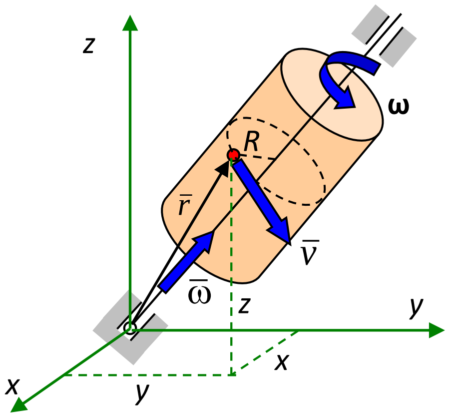
=1, через те, що вектор швидкості точки перпендикулярний площині, у якій лежить вектор кутової швидкості.



Таким чином, дійсно **векторний добуток кутового прискорення та радіус-вектор повністю визначає величину та напрямок обертального прискорення точки** відповідно до раніше отриманих результатів.

Цей векторний добуток може бути також записаний у вигляді : $\boxed{\bar{a}_{об} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}$

❖ **Формули Ейлера.** За допомогою розкриття векторного добутку для швидкості точки можна отримати загальні аналітичні вирази для цієї швидкості через координати точки, яка розглядається при довільному розташуванні вісі обертання у просторі:



$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=(\omega_y z-\omega_z y)\bar{i}+(\omega_z x-\omega_x z)\bar{j}+(\omega_x y-\omega_y x)\bar{k}$$

Звідси виходять аналітичні формули для проекцій швидкостей точки:

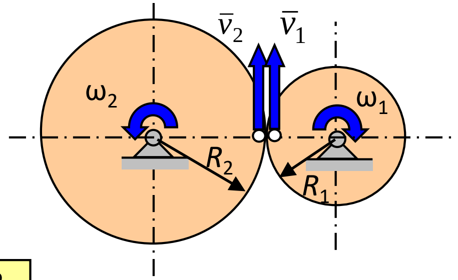
$$v_x=\omega_y z-\omega_z y;\quad v_y=\omega_z x-\omega_x z;\quad v_z=\omega_x y-\omega_y x.$$

Перетворення обертальних рухів - зміна величини і напрямку кутових швидкостей обертових ланок в різних передавальних механізмах:

❖ **Фрикційне зачеплення**:
Швидкості точок коліс, які входять в контакт, за відсутності проковзування дорівнюють:

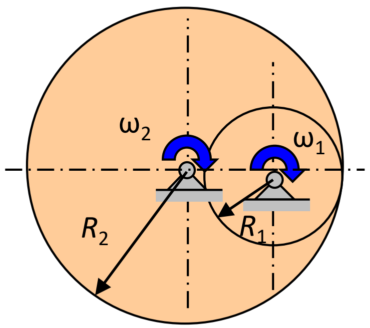
$$v_1=v_2;\qquad \omega_1 R_1=\omega_2 R_2.$$

Звідси: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{R_2}{R_1}$



Передатне число, яке характеризує зміну швидкості обертання під час передачі руху від однієї ланки до іншої **– це відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого:**

$$i_{1-2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}$$



❖ **Зубчасте зачеплення.** Кількість зубів кожного з коліс прямо пропорційне радіусу колеса. Окружні швидкості точок поверхонь зубів, що входять в контакт, рівні**.**

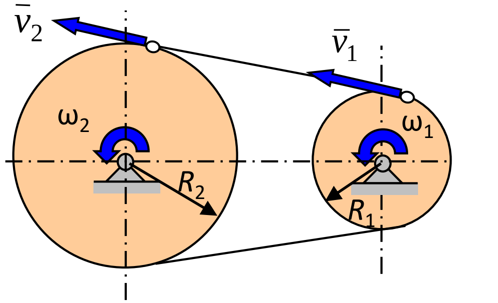
Отримані співвідношення залишаються вірними, зокрема й у випадку внутрішнього зачеплення.

Радіуси ділильних кіл пов'язані з кроком зубів співвідношеннями: $2\pi R_1=z_1 h$ $\quad 2\pi R_2=z_2 h$

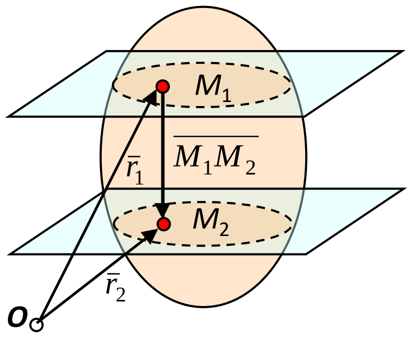
З використанням чисел зубів кожного з коліс маємо: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{z_2}{z_1}$

❖ **Ремінна та ланцюгова передачі.** Окружні швидкості точок поверхонь обох коліс або зубів, які входять в контакт з ременем або ланцюгом, рівні (ремінь або ланцюг не розтягуються і не стискаються). Отримані співвідношення залишаються вірними.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}\qquad \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}$$



❖ **Плоскопаралельний рух твердого тіла – рух, під час якого кожна точка тіла рухається в площині паралельній деякій нерухомої площині**. Перетин тіла однією з таких площин є плоскою фігурою, що залишається в цій площині протягом руху тіла.



❖ **Теорема про плоскопаралельний рух твердого тіла – плоскопаралельний рух твердого тіла однозначно визначається рухом плоскої фігури, утвореної перетином тіла однією з паралельних площин.**

Виберемо дві точки на довільних двох перерізах тіла, що знаходяться на одному перпендикулярі до цих площин:

Проведемо до кожної точки радіус-вектори з нерухомої точки ***O*** і зв'яжемо їх між собою вектором $\boldsymbol{M_1M_2}$: $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \overline{M_1M_2}$

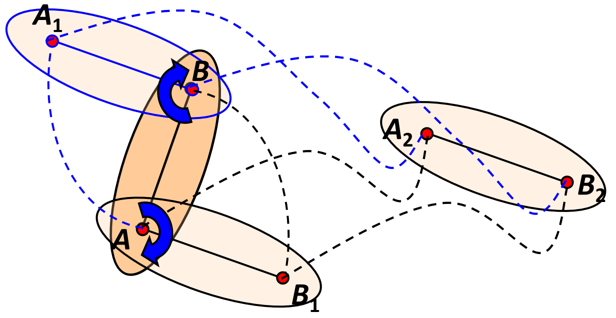
При плоскому русі тіла вектор $\boldsymbol{M_1M_2}$ не змінюється за величиною, залишається паралельним самому собі (рухається поступально) і, отже, точки цього вектора описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу однакові швидкості та прискорення:

$$\frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \overline{const}); \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \quad та \quad \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}; \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

Таким чином, під час плоского руху тіла рух кожної точки однієї з плоских фігур визначає рух відповідних точок, що знаходяться у всіх інших суміжних паралельних площинах.

Наслідок: Оскільки положення плоскої фігури однозначно визначається положенням її двох точок або відрізка прямої, проведеної через ці точки, **то плоскопаралельний рух твердого тіла визначається рухом прямолінійного відрізка, що належить одному з перерізів тіла за допомогою паралельних площин.**

❖ **Розкладання плоскопаралельного руху плоскої фігури на поступальний та обертальний рухи –** Плоску фігуру або відрізок прямої можна перевести з одного положення в інше незліченною кількістю способів, змінюючи послідовність виконання поступального та обертального руху між собою, а також вибираючи різні траєкторії та точки як полюси:



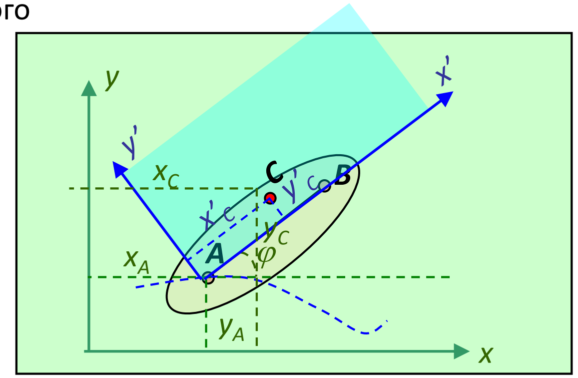
❖ Таким чином, **плоскопаралельний рух складається з двох рухів: поступальний та обертальний, і його завжди можна розкласти на ці два рухи.** При цьому поступальний рух залежить від вибору полюса та траєкторії руху, а обертальний, що характеризується поворотом навколо обраного полюса, не залежить від вибору полюса (для будь-якого полюса величина кута повороту та напрямок обертання – однакові).

❖ **Рівняння руху плоскої фігури:** Вибираючи як полюс будь-яку точку, наприклад, ***A***, поступальна частина руху описуватиметься рівняннями руху цієї точки. Обертальна частина руху описується рівнянням зміни кута повороту навколо полюса:

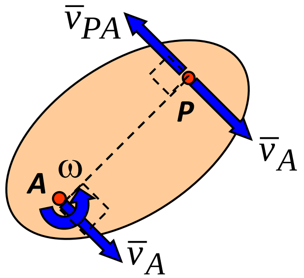
$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

Рівняння руху будь-якої точки плоскої фігури, положення якої задається координатами локальної системи відліку, пов'язаної з фігурою:

$$x_C = x_A(t) + x'_C \cos\varphi(t) - y'_C \sin\varphi(t);$$
$$y_C = y_A(t) + x'_C \sin\varphi(t) + y'_C \cos\varphi(t).$$



❖ **Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) – Під час руху плоскої фігури в кожний момент часу існує точка, яка жорстко пов'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю**.



Якщо відома швидкість однієї з точок фігури та кутова швидкість тіла навколо цієї точки:

Запишемо векторне співвідношення для швидкості деякої точки ***P*** відповідно до теореми про складання швидкостей:

$$\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}.}$$

Задамо значення швидкості цієї точки *P*, що дорівнює нулю: $\boxed{\bar{v}_P = 0.}$

Тоді отримаємо :

$$\bar{v}_{PA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = -\bar{v}_A.$$

Тобто обертальна швидкість шуканої точки повинна дорівнювати модулю швидкості точки ***A***, паралельна цій швидкості і спрямована в протилежний бік.

Це дозволяє знайти положення МЦШ (точки ***P***), а саме: МЦШ повинен знаходитись на перпендикулярі до швидкості точки ***A***, відкладеної у бік кутової швидкості, на відстані :

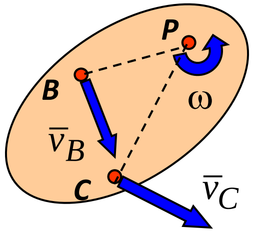
$$\boxed{AP = \frac{v_A}{\omega}.}$$

Якщо положення МЦШ знайдено, швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна легко визначити за допомогою вибору полюса у МЦШ. В цьому випадку векторний вираз теореми про складання швидкостей вироджується у відому залежність швидкості від відстані до центру обертання :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PB} = \bar{v}_{BP}; \qquad (\bar{v}_P = 0); \qquad v_B = \omega \cdot BP;$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PC} = \bar{v}_{CP}; \qquad (\bar{v}_P = 0); \qquad v_C = \omega \cdot CP;$$

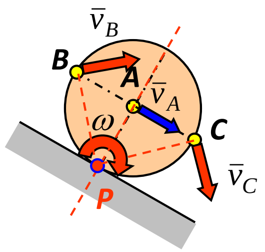
Іншими словами, можна стверджувати, що **будь-якої миті часу тіло не здійснює жодного іншого руху, крім обертального руху навколо МЦШ.**



Тема 3 (продовження)

❖ **Приклади використання МЦШ для визначення швидкостей точок плоскої фігури.** Оскільки при русі плоскої фігури в кожний момент часу існує точка (МЦШ), жорстко пов'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю, то при визначенні швидкостей цю точку слід вибирати як полюс, що грає роль центру обертання на даний момент часу. Нижче разглянемо процедуру визначення швидкостей на прикладах:

1 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, положення точок ***A, B, C***, проковзування відсутнє.
Знайти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора $\boldsymbol{v}_A$ (Немає проковзування і точка з нульовою швидкістю збігається з точкою контакту колеса та нерухомої поверхні кочення).

2) Визначаємо кутову швидкість : $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

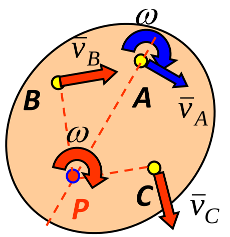
Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік вектора лінійної швидкості $\boldsymbol{v}_A$.

3) З'єднуємо точки ***B*** і ***C*** з МЦШ та визначаємо швидкості цих точок:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Вектори лінійних швидкостей $\boldsymbol{v}_B$ та $\boldsymbol{v}_C$ спрямовані у бік дугової стрілки кутової швидкості.

2 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, ***ω*** ,положення точок ***A***, ***B***, ***C***.
Знайти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора $\boldsymbol{v}_A$

2 Визначаємо відстань до МЦШ: $\boxed{AP = \dfrac{v_A}{\omega}.}$

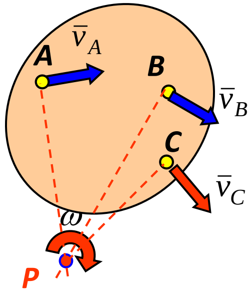
Відстань ***AP*** відкладаємо у бік дугової стрілки кутової швидкості. Дугову стрілку кутової швидкості зображаємо навколо МЦШ.

3) З'єднуємо точки ***B*** і ***C*** з МЦШ та визначаємо швидкості цих точок :

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Вектори лінійних швидкостей $\boldsymbol{v}_B$ та $\boldsymbol{v}_C$ спрямовані у бік дугової стрілки кутової швидкості.

3 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, положення точок ***A***, ***B***, ***C***.
Знайти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$,

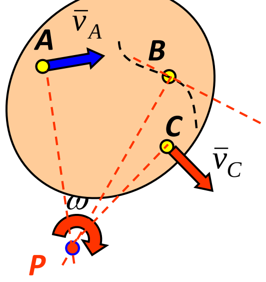
2) Визначаємо кутову швидкість : $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}.}$

Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік векторів лінійних швидкостей $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$.

3) З'єднуємо точку *C* з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор лінійної швидкості $\boldsymbol{v}_C$ спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

4 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, траєкторія точки *B*, положення точок *A*, *B*, *C*.
Знайти: $\boldsymbol{v}_C$,



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикуляра до вектора $\boldsymbol{v}_A$ і перпендикуляра до дотичної до траєкторії точки ***B***.

2) Визначаємо кутову швидкість: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік векторів лінійних швидкостей $\boldsymbol{v}_A$.

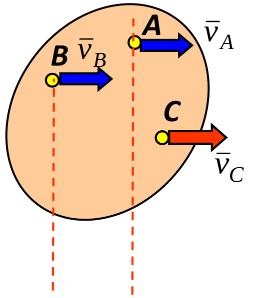
3) З'єднуємо точку *C* з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор лінійної швидкості $\boldsymbol{v}_C$ спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

Тема 3 (продовження)

Приклади використання МЦШ для визначення швидкостей точок плоскої фігури

5 Дано: v_A, v_B, $v_A \parallel v_B$, положення точок ***A***, ***B***, ***C***.
Знайти: v_C



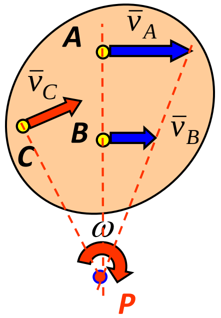
1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B . Ця точка знаходиться в нескінченності.

2) Кутова швидкість дорівнює нулю (миттєво поступальний рух): $\omega = \dfrac{v_A}{\infty} = \dfrac{v_B}{\infty} = 0.$

3) Швидкість точки ***C*** дорівнює геометричним швидкостям точок ***A*** і ***B***: $\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.$

Вектор швидкості точки ***C*** спрямований паралельно до векторів швидкостей точок ***A*** і ***B*** (в той же бік).

6 Дано: v_A, v_B, $v_A \parallel v_B$, положення точок ***A***, ***B***, ***C***.
Знайти: v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B. Ці перпендикуляри зливаються одну лінію.

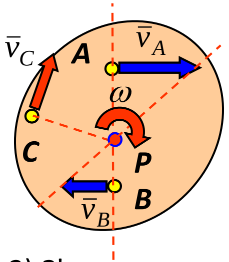
2) Визначаємо положення МЦШ (проводимо лінію через кінці векторів v_A та v_B) та кутову швидкість: $\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP} = \dfrac{v_A - v_B}{AB}.$

Дугову стрілку кутової швидкості зображуємо у бік векторів лінійних швидкостей v_A, v_B.

3) З'єднуємо точку *C* з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки : $v_C = \omega \cdot CP.$

Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

7 Дано: v_A, v_B, $v_A \parallel v_B$, положення точок ***A***, ***B***, ***C***.
Знайти : v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B. Ці перпендикуляри зливаються в одну лінію.

2) Визначаємо положення МЦШ (проводимо лінію через кінці векторів v_A та v_B) та кутову швидкість : $\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP} = \dfrac{v_A + v_B}{AB}.$

Дугову стрілку кутової швидкості зображуємо у бік векторів лінійних швидкостей v_A, v_B.

3) З'єднуємо точку *C* з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки : $v_C = \omega \cdot CP.$

Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

Теорема про складання прискорень. Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса та прискорення цієї точки навколо полюса

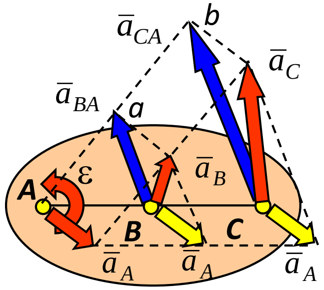
Швидкості точок ***A*** та ***B*** пов'язані між собою співвідношенням:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Продиференціюємо це співвідношення за часом : $\dfrac{d\bar{v}_B}{dt} = \dfrac{d\bar{v}_A}{dt} + \dfrac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \dfrac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$

Другий доданок диференціюємо як добуток двох функцій : $\dfrac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \dfrac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$

Отримали суму обертального та доцентрового прискорення розглянутої точки відносно полюса. Таким чином, прискорення точки плоскої фігури: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{об} + \bar{a}_{BA}^{доц} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$



Наслідки. Кінці векторів прискорень точок плоскої фігури, що лежать на одній прямій, також лежать на одній прямий і поділяють її на відрізки, пропорційні відстаням між точками.

Кінці векторів прискорень точок a_{BA} та a_{CA} лежать на одній прямій ***ABC*** та ділять її на відрізки, пропорційні відстаням між точками :

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,AB;\; a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,AC.$$

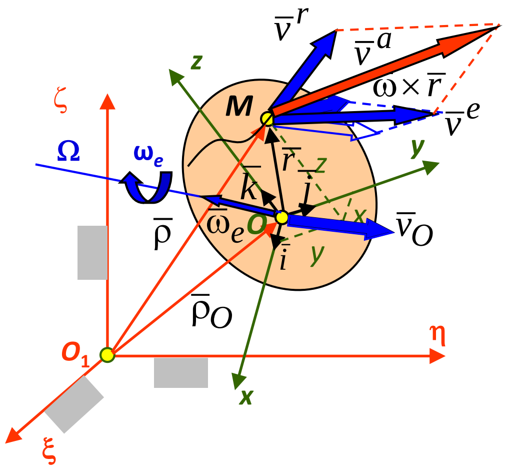
Кінці векторів прискорень полюса ***A***, зображених у точках ***B*** і ***C***, також лежать на одній прямій.

Неважко довести з подоби трикутників, що кінці векторів сумарних прискорень точок ***B*** і ***C*** також лежать на одній прямій, і ділять цю пряму на частини, пропорційні до відстаней між точками.

❖ **Складний рух точки – такий рух, у якому точка бере участь одночасно у двох чи кількох рухах.**

Приклади складного руху точки (тіла): човен, що перепливає річку; людина, що йде по рухомому ескалатору; камінь рухомої куліси, поршень хитаючого циліндра; кулі відцентрового регулятора Уатта.

Для опису складного руху точки або для подання руху у вигляді складного використовуються **нерухома система відліку *O*$_1$ξηζ,** пов'язана з якимось умовно нерухомим тілом, наприклад, із Землею, і **рухлива система відліку *Oxyz*,** пов'язана з якимось тілом, що рухається.



Абсолютний рух (*a*) - рух **точки**, який розглядається відносно **нерухомої** системи відліку.
Відносний рух (*r*) - рух **точки**, який розглядається відносно рухомої системи відліку.
Переносний рух (*e*) - рух **рухомої системи відліку,** який розглядається відносно **нерухомої системи відліку.**

Абсолютна швидкість (прискорення) **точки *v*^{a} (*a*^{a})** - швидкість (прискорення) точки, обчислена відносно нерухомої системи відліку.
Відносна швидкість (прискорення) **точки *v*^{r} (*a*^{r})** – **швидкість** (прискорення) точки, **обчислена** відносно **рухомої** системи відліку.
Переносна швидкість (прискорення) **точки *v*^{e} (*a*^{e})** – **швидкість** (прискорення) точки**, що належить** рухомій системі координат або твердому тілу**,** з яким жорстко пов'язана рухома система координат, та **збігається з рухомою точкою** в даний момент часу і обчислена відносно **нерухомої системи відліку**.

Теорема про складання швидкостей – абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної та переносної швидкостей точки. У будь-який момент часу справедливе співвідношення: $\boxed{\bar\rho=\bar\rho_O+\bar r=\bar\rho_O+x\bar i+y\bar j+z\bar k.}$

Продиференціюємо це співвідношення за часом маючи на увазі, що орти ***i***, ***j***, ***k*** змінюють свій напрямок у загальному випадку руху вільного тіла, з яким пов'язана рухома система координат :

$$\frac{d\bar\rho}{dt}=\frac{d\bar\rho_O}{dt}+\frac{d\bar r}{dt}=\underbrace{\boxed{\frac{d\bar\rho_O}{dt}}}_{\bar v_O}+\underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}\bar i+\frac{dy}{dt}\bar j+\frac{dz}{dt}\bar k}}_{\bar v^r}+\boxed{x\frac{d\bar i}{dt}+y\frac{d\bar j}{dt}+z\frac{d\bar k}{dt}}.$$

Тут перший доданок (***v$_O$***) - швидкість полюса ***O***; наступні три – **відносна швидкість точки (*v*^{r}).**

Для останніх трьох доданків слід визначити похідні за часом від ортів ***i***, ***j***, ***k***:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\bar i}{dt}&=(\bar\omega_e\times\bar i);\\ \frac{d\bar j}{dt}&=(\bar\omega_e\times\bar j);\\ \frac{d\bar k}{dt}&=(\bar\omega_e\times\bar k).\end{aligned}}$$

Тут використана векторна формула для лінійної швидкості точки відносно вісі обертання :

$$\boxed{\frac{d\bar r}{dt}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar r).}$$

Підставимо векторні добутки в останні три доданки :

$$x(\bar\omega_e\times\bar i)+y(\bar\omega_e\times\bar j)+z(\bar\omega_e\times\bar k)=$$
$$=\bar\omega_e\times(x\bar i+y\bar j+z\bar k)=\boxed{\bar\omega_e\times\bar r.}$$

Сума першого та останнього доданку – швидкість точки вільного тіла і є **переносною швидкістю точки (*v*^{e})**: $\boxed{\bar v^e=\bar v_O+\bar\omega_e\times\bar r.}$

Таким чином, з урахуванням того, що похідна за часом радіус-вектора ρ є абсолютною швидкістю, отримаємо :

$$\boxed{\bar v^a=\bar v^r+\bar v^e.}$$

Модуль вектора абсолютної швидкості:

$$\boxed{|\bar v^a|=\sqrt{|\bar v^r|^2+|\bar v^e|^2+2|\bar v^r||\bar v^e|\sin(\bar v^r,\bar v^e)}.}$$

- **Теорема про складання прискорень (теорема Коріоліса) – абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень точки.**

Співвідношення для швидкості було отримано раніше :

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{d\bar{\rho}_O}{dt}+\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}+x\frac{d\bar{i}}{dt}+y\frac{d\bar{j}}{dt}+z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Продиференціюємо це співвідношення за часом ще раз:

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}=\underbrace{\boxed{\frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2}}}_{\bar{a}_O}+\underbrace{\boxed{\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k}}}_{\bar{a}^r}+\underbrace{\boxed{\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}+\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}}}_{\bar{a}^c}+\boxed{x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}}.$$

Тут перший доданок(a_O) - прискорення полюса ***O***;
наступні три – **відносне прискорення точки (a^r).**

Для останніх трьох доданків слід визначити другі похідні за часом від ортів рухомої системи координат ***i***, ***j***, ***k***:

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{i})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{i});$$

$$\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{j})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{j});$$

$$\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{k})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{k}).$$

Підставимо ці вирази в останні три доданки і згрупуємо :

$$\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times x\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times x\bar{i})+\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times y\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times y\bar{j})+$$
$$+\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times z\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times z\bar{k})=\boxed{\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{r})}.$$

Сума першого та отриманих двох доданків – прискорення точки вільного тіла і є **переносне прискорення точки (a^e)**:

$$\boxed{\bar{a}^e=\bar{a}_O+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{r}).}$$

У інших шести доданках складемо однакові члени, підставимо векторні добутки для перших похідних за часом від ортів і згрупуємо :

$$2\left[\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right]=2\left[\dot{x}(\bar{\omega}_e\times\bar{i})+\dot{y}(\bar{\omega}_e\times\bar{j})+\dot{z}(\bar{\omega}_e\times\bar{k})\right]=\boxed{2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}^r).}$$

Отримана компонента прискорення є **коріолісовим прискоренням (a^c)**: $\boxed{\bar{a}^c=2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}^r).}$

Таким чином, з урахуванням того, що друга похідна за часом радіус-вектора ρ є абсолютним прискоренням, отримаємо: $\boxed{\bar{a}^a=\bar{a}^r+\bar{a}^e+\bar{a}^c.}$

Величина та напрямок прискорення Коріоліса:

Модуль вектора прискорення Коріоліса :

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю у двох випадках:

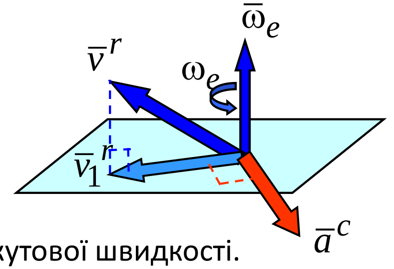
1. Кутова швидкість переносного руху дорівнює 0 (поступальний переносний рух).
2. Вектор кутової швидкості паралельний вектору відносної швидкості (синус кута між векторами дорівнює 0).

$$\boxed{\left|\bar{a}^c\right|=2\omega_e v^r\sin(\bar{\omega}_e,\bar{v}^r).}$$

Напрямок вектора прискорення Коріоліса:

Визначається по одному із трьох правил :

1. За визначенням векторного добутку (Лекція 3.2).
2. За правилом правої руки (Лекція 3.2).
3. **За правилом Жуковського:**

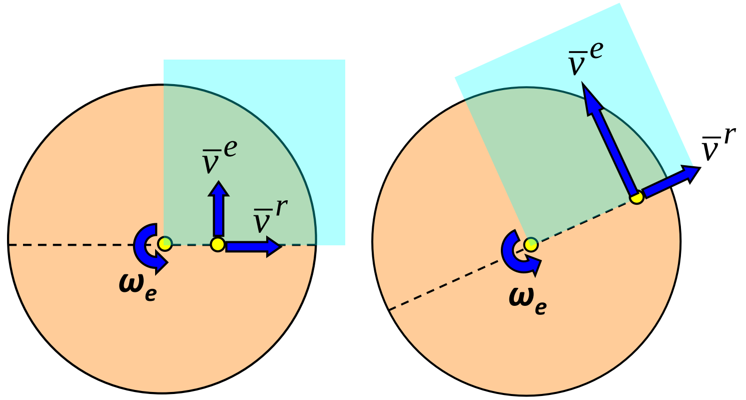


а) Спроектувати вектор відносної швидкості на площину, перпендикулярну вектору кутової швидкості.

б) Повернути проекцію вектора відносної швидкості на прямий кут у бік дугової стрілки кутової швидкості.

- **Причини виникнення прискорення Коріоліса:** Формально прискорення Коріоліса було виведено угрупованням доданків, що містять проекції відносної швидкості та похідні за часом від ортів рухомої системи координат. При цьому раніше було отримано подвоєне число таких доданків. Для прояснення фізичних причин виникнення прискорення Коріоліса розглянемо якісний приклад, у якому будемо спеціально вважати постійними вектор відносної швидкості (у рухомій системі координат) та вектор кутової переносної швидкості (обертання) рухомої системи координат відносно нерухомої вісі) :

Нехай у певний момент часу положення точки та вектора відносної та переносної швидкостей такі, як вони зображені на рисунку (вид згори):



Через деякий час точка відійде від вісі обертання і тіло обернеться на деякий кут.

В результаті:

1) **відносна швидкість зміниться у** напрямку через наявність переносної кутової швидкості та
2) **переносна лінійна швидкість зміниться за** величиною через наявність відносної швидкості, що змінює відстань точки до вісі обертання.

Таким чином, можна вважати, що існує дві причини виникнення прискорення Коріоліса:

1) переносна кутова швидкість впливає на відносну швидкість, а
2) відносна швидкість в свою чергу впливає на переносну лінійну швидкість.

Можливо, це допоможе запам'ятати коефіцієнт, що дорівнює 2, у формулі для визначення прискорення Коріоліса.

$$\boxed{\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).}$$

- **Приклади визначення напрямку прискорення Коріоліса** зручно розглянути для випадків різного становища рухомих точок по поверхні Землі, що обертається відносно своєї вісі :