



МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра механічної та біомедичної інженерії

С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ В СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

**Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з
розділу «Кінематика»**

дисципліни «Прикладна механіка»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство»

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

Онищенко С.В., Колосов Д.Л.

Розв'язання задач кінематики в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Кінематика» дисципліни «Прикладна механіка» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 29 с.

Автори

С.В. Онищенко, к.т.н., доц. каф. МБМІ

Д.Л. Колосов, д.т.н., проф., зав. каф. МБМІ

Розглянуто на засіданні кафедри механічної та біомедичної інженерії №7 від 30 червня 2023 р.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 131 «Прикладна механіка» (протокол №8 від 09.08.2023 р.).

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 132 «Матеріалознавство» (протокол №1 від 30.08.2023 р.).

Затверджено до видання навчально-методичним відділом (протокол №8 від 05.09.2023 р.) за поданням методичних комісій спеціальностей 131 Прикладна механіка (протокол №8 від 09.08.2023 р.), 132 Матеріалознавство (протокол №1 від 30.08.2023 р.).

Розглянуто приклади виконання індивідуальних завдань з розділу «Кінематика» дисципліни «Прикладна механіка» для здобувачів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство».

Відповідальний за випуск заступник завідувача кафедри механічної та біомедичної інженерії С.В. Онищенко, к.т.н.

ЗМІСТ

1 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ	7
1.1 ТМ-5, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із трьох тіл	8
1.1.1 ТМ-5, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із трьох тіл з використанням пакету MathCAD	12
1.2 ТМ-5, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із чотирьох тіл	14
1.2.1 ТМ-5, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із чотирьох тіл з використанням пакету MathCAD	19
1.3 ТМ-5, приклад 3. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл	21
1.3.1 ТМ-5, приклад 3. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл з використанням пакету MathCAD	25
1.4 ТМ-5, приклад 4. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл з фрикційною взаємодією	27
1.4.1 ТМ-5, приклад 4. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл з фрикційною взаємодією з використанням пакету MathCAD	31
1.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-5)	33
2 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ	34

2.1 ТМ-9ч1, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик точок тіл системи за плоско-паралельного руху	35
2.1.1 ТМ-9ч1, приклад 1. Розрахунок кінематичних характеристик точок тіл за плоско-паралельного руху тіла з використанням пакету MathCAD	39
2.2 ТМ-9ч1, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик точок тіл системи за плоско-паралельного руху	41
2.2.1 ТМ-9ч1, приклад 2. Розрахунок кінематичних характеристик точок тіл за плоско-паралельного руху тіла з використанням пакету MathCAD	46
2.3 Задачі для самопідготовки (ТМ-9ч1)	48
3 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА СКЛАДНОГО РУХУ (ТМ-6)	49
3.1 ТМ-6, приклад 1. Розрахунок кінематичних характеристик точки	50
3.1.1 ТМ-6, приклад 1. Розрахунок кінематичних характеристик точки з використанням пакету MathCAD	54
3.2 ТМ-6, приклад 2. Розрахунок кінематичних характеристик точки	56
3.2.1 ТМ-6, приклад 2. Розрахунок кінематичних характеристик точки з використанням пакету MathCAD	60
3.3 Задачі для самопідготовки (ТМ-6)	62
ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ	63
Рекомендована література	71

ВСТУП

Прикладна механіка є однією з базових інженерних дисциплін, з якої починається підготовка студентів багатьох спеціальностей.

Метою обов'язкової дисципліни «Прикладна механіка» є формування компетентностей щодо загальних методів використання основних законів та принципів прикладної механіки, необхідних для аналізу фізичних явищ, моделювання різноманітних процесів і пошуку оптимальних розв'язань задач матеріалознавства.

Мета методичних рекомендацій – засвоєння теоретичних знань та практичних навичок щодо основних понять, принципів та підходів до кінематичних розрахунків елементів обладнання та систем з урахуванням їхньої надійності та економічності, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів при побудові фізико-математичної моделі роботи елементів або частин інженерних об'єктів, конструкцій і систем, постановки та розв'язання задач прикладної механіки.

ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

1. Знати та вміти використовувати знання прикладної механіки для вирішення задач матеріалознавства.
2. Вміти використовувати методи опору матеріалів на рівні, необхідному для досягнення інших результатів освітньої програми.
3. Вміти поєднувати положення теоретичної механіки для розв'язування завдань матеріалознавства.
4. Застосовувати методи опору матеріалів для аналізу проблем матеріалознавства.
5. Мати обізнаність в останніх досягненнях прикладної механіки для вирішення актуальних задач матеріалознавства.
6. Застосовувати методи прикладної механіки для інженерних розрахунків технічних об'єктів в галузі матеріалознавства.
7. Обирати і застосовувати аналітичні методи та пакети сучасних прикладних програм для досліджень задач механіки абсолютно твердих і деформованих тіл.
8. Володіти сучасними методами моделювання при розрахунках задач прикладної механіки та коректно інтерпретувати їх результати.

1 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ (ТМ-5)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Поступальний рух твердого тіла – це рух, протягом якого довільно розташований на тілі відрізок прямої залишається паралельним самому собі протягом руху. З цього випливає, що для задання руху всього тіла достатньо задати лише закон руху однієї точки. При цьому траєкторії руху точок такого тіла можуть бути як прямолінійними, так і криволінійними. Водночас, швидкості і прискорення всіх точок тіла, яке рухається поступально, рівні між собою.

Обертальний рух твердого тіла – це рух, протягом якого усі точки тіла рухаються навколо нерухомої лінії, яка називається віссю обертання. Відстань між будь-якою точкою тіла та віссю обертання називається радіусом обертання.

План теми 1

- 1.1 [ТМ-5, приклад 1. Система із трьох тіл](#)
 - 1.1.1 [ТМ-5, приклад 1. Система із трьох тіл у MathCAD](#)
- 1.2 [ТМ-5, приклад 2. Система із чотирьох тіл](#)
 - 1.2.1 [ТМ-5, приклад 2. Система із чотирьох тіл у MathCAD](#)
- 1.3 [ТМ-5, приклад 3. Система із п'яти тіл](#)
 - 1.3.1 [ТМ-5, приклад 3. Система із п'яти тіл у MathCAD](#)
- 1.4 [ТМ-5, приклад 4. Система п'яти тіл з фрикційною взаємодією](#)
 - 1.4.1 [ТМ-5, приклад 4. Система п'яти тіл з фрикційною взаємодією у MathCAD](#)
- 1.5 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-5\)](#)

1.1 ТМ-5, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із трьох тіл

↑ДО ТМ-5↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Визначити закони руху тіл 2 і 3 (рис. 1.1), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла $S_1 = 5t^2$, м; зовнішній радіус тіла $R_2 = 0,08$ м, внутрішній радіус тіла $r_2 = 0,04$ м, радіус тіла 3 $R_3 = 0,1$ м, момент часу $t = 1$ с.

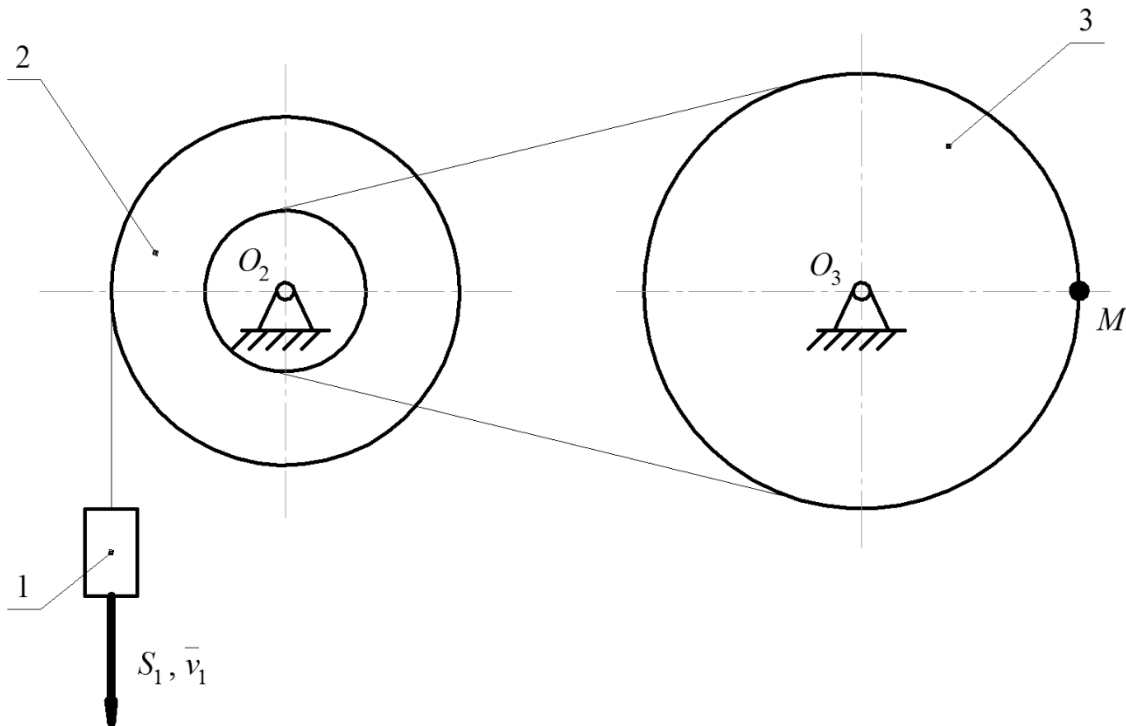


Рисунок 1.1 - Вихідна схема системи із трьох тіл

Дано:

$$S_1 = 5t^2, \text{ м}$$

$$R_2 = 0,08 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,04 \text{ м}$$

$$R_3 = 0,1 \text{ м}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

Визначити

$$\varphi_2, \varphi_3,$$

$$v_M, a_M$$

Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.2). Тіло 1 рухається поступально, тіла 2 і 3 виконують обертальний рух. Центрами обертання тіл 2 і 3 є вісі нерухомих шарнірів, позначених на рисунку O_2 і O_3 .

Позначимо точки A, B, C, D, E , напрямки руху тіл 2 і 3 (φ_2 і φ_3), напрямки кутових швидкостей ω_2 і ω_3 та кутового прискорення ε_3 , та вектори абсолютних швидкостей точок.

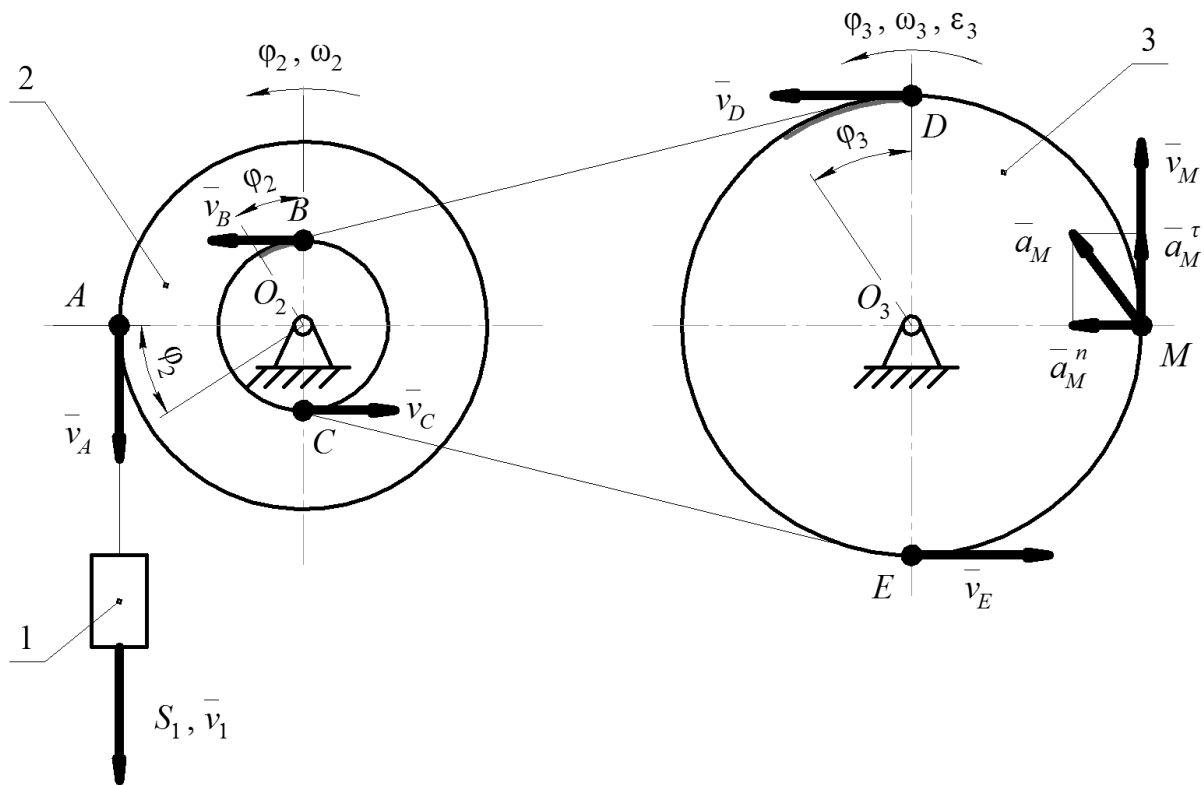


Рисунок 1.2 - Розрахункова схема для визначення швидкостей та прискорень

Тіло 1 за умовою задачі рухається вертикально вниз та з'єднується із точкою A за допомогою ідеальної нитки (такої, що не розтягується). Ця ідеальна нитка моделює собою гнучкий тяговий орган, наприклад, канат, трос, ланцюг чи пас. Одночасно з цим, точка A належить зовнішньому радіусу тіла 2 і обертається навколо точки O_2 , маючи радіус обертання R_2 .

2. Визначимо закони руху тіл.

Спираючись на вихідні дані, визначимо закон руху точки A

$$S_A = S_1 = 5t^2, \text{ м.}$$

Переміщення точки A також можна виразити через кутову координату φ_2 тіла 2

$$S_A = \varphi_2 \cdot R_2,$$

звідки

$$\varphi_2 = \frac{S_A}{R_2} = \frac{5t^2}{0,08} = 62,5t^2, \text{ рад.}$$

Визначимо кутову швидкість ω_2 тіла 2

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d(62,5t^2)}{dt} = 125t, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Напрямок ω_2 – проти годинникової стрілки через те, що вона додатна при додатному t .

Точки B і D належать одній нитці, тому їхні переміщення, лінійні швидкості та прискорення рівні між собою. Водночас із цим, точка B належить внутрішньому радіусу тіла 2 і обертається навколо точки O_2 , маючи радіус обертання r_2 , точка D обертається навколо точки O_3 , маючи радіус обертання R_3 . Прирівняємо переміщення S_B та S_D

$$S_B = S_D,$$

$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot R_3.$$

звідки

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{62,5t^2 \cdot 0,04}{0,1} = 25t^2, \text{ рад.}$$

3. Визначимо кутову швидкість ω_3 та кутове прискорення ε_3 тіла 3

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d(25t^2)}{dt} = 50t, \text{ рад/с,}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(50t)}{dt} = 50, \text{ рад/с}^2.$$

Напрямки ω_3 та ε_3 – проти годинникової стрілки через те, що вони додатні при додатному t .

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M .

Точка M знаходиться на одній нитці із точками B , D , E та C , тому лінійні швидкості цих точок однакові. Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$v_M = \omega_3 \cdot MO_3 = 50t \cdot R_3 = 50t \cdot 0,1 = 5t, \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = 1$ с

$$v_M = 5 \cdot 1 = 5 \text{ м/с.}$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Абсолютне прискорення $\overline{a_M}$ (рис. 1.2) точки тіла, що обертається, визначається як векторна сума нормального прискорення $\overline{a_M^n}$ та тангенціального прискорення $\overline{a_M^t}$ точки навколо центру обертання O_3

$$\overline{a_M} = \overline{a_M^n} + \overline{a_M^t}.$$

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O_3 у момент часу $t = 1$ с

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot MO_3 = (50t)^2 \cdot R_3 = 2500 \cdot 0,1 = 250 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_M^t = \varepsilon_3 \cdot MO_3 = 50 \cdot R_3 = 50 \cdot 0,1 = 5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^t)^2} = \sqrt{250^2 + 5^2} = 250,05 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\varphi_2 = 62,5t^2$ рад, $\varphi_3 = 25t^2$ рад, $v_M = 5$ м/с, $a_M = 250,05$ м/с².

1.1.1 ТМ-5, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із трьох тіл з використанням пакету MathCAD

[↑ДО ТМ-5↑](#) [↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Для визначення кінематичних характеристик тіла у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задаємо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$S_1(t) := 5 \cdot t^2 \quad \text{m} \quad R_2 := 0.08 \quad \text{m} \quad r_2 := 0.04 \quad \text{m} \quad R_3 := 0.1 \quad \text{m}$$

- записуємо рівняння кінематичних зв'язків, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 1.2](#))

$$S_1 = S_A = \varphi_2 \cdot R_2$$

$$S_B = S_D$$

$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot R_3$$

- визначаємо невідомі закони руху у символьному вигляді

$$\varphi_2(t) := \frac{S_1(t)}{R_2} \rightarrow 62.5 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_3(t) := \frac{\varphi_2(t) \cdot r_2}{R_3} \rightarrow 25.0 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

- визначаємо кінематичні параметри тіла 3 у символьному вигляді

$$\omega_3(t) := \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \rightarrow 50.0 \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_3(t) := \frac{d}{dt} \omega_3(t) \rightarrow 50.0 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки *M* у символьному вигляді

$$v_M(t) := \omega_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 5.0 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(t) := \omega_3(t)^2 \cdot R_3 \rightarrow 250.0 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(t) := \varepsilon_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 5.0 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{nM}(t)^2 + a_{\tau M}(t)^2} \rightarrow \sqrt{62500.0 \cdot t^4 + 25.0} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у момент часу 1 с

$$v_M(1) = 5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(1) = 250 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(1) = 5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(1) = 250.05 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.2 ТМ-5, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із чотирьох тіл

↑ДО ТМ-5↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Визначити закони руху тіл 1, 3 і 4 (рис. 1.3), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла $\varphi_2 = 2t^2$, рад; зовнішній радіус тіла $R_2 = 0,07$ м, внутрішній радіус тіла $r_2 = 0,035$ м, радіус тіла 3 $R_3 = 0,1$ м, внутрішній радіус тіла $r_3 = 0,045$ м, момент часу $t = 1$ с.

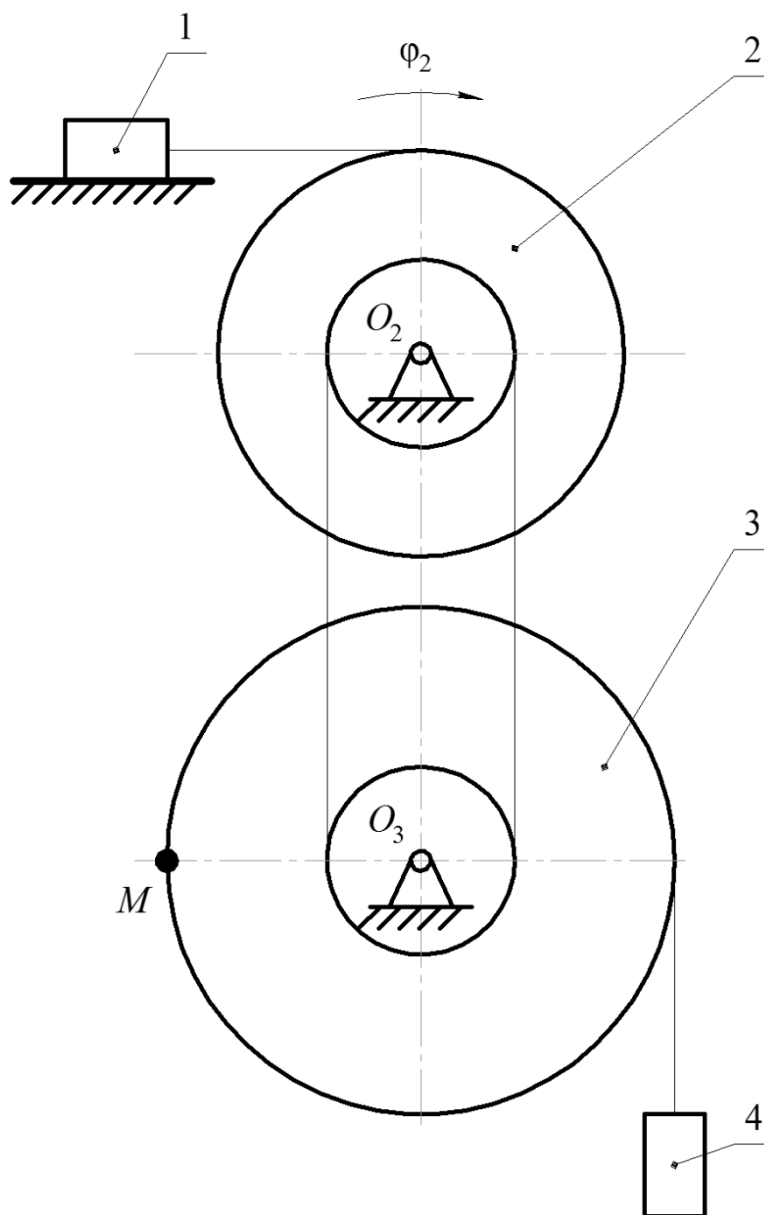


Рисунок 1.3 - Вихідна схема системи із чотирьох тіл

Дано:

$$\varphi_2 = 2t^2, \text{ рад}$$

$$R_2 = 0,07 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,035 \text{ м}$$

$$R_3 = 0,1 \text{ м}$$

$$r_3 = 0,045 \text{ м}$$

$$t = 2 \text{ с}$$

Визначити

$$S_1, \varphi_3, S_4$$

$$v_M, a_M$$

Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.4). Із умови відомо, що тіло 2 обертається за годинниковою стрілкою. Тіла 1 і 4 рухаються поступально, тіло 2 виконує обертальний рух. Центрами обертання тіл 2 і 3 є вісі нерухомих шарнірів, позначених на рисунку O_2 і O_3 .

Складемо розрахункову схему, на якій позначимо точки A, B, C, D, E, F , напрямки руху тіл 1, 3 і 4 (S_1, φ_3 і S_4), напрямки кутових швидкостей ω_2 і ω_3 та кутового прискорення ε_3 , вектори абсолютних швидкостей тіл 1 і 4 (v_1 і v_4) та вектори абсолютних швидкостей позначених на схемі точок ($v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F$).

2. Визначимо закони руху тіл.

Тіла 1 і 2 з'єднуються за допомогою ідеальної нитки, ця нитка приєднується до тіла 2 у точці A . З цього виходить, що переміщення, абсолютні швидкості та прискорення тіла 1 та точки A рівні між собою. Напишемо рівняння кінематичного зв'язку між тілами 1 і 2.

$$S_1 = S_A.$$

З умови відомо закон руху тіла 2, тому визначати інші кінематичні параметри будемо виходячи із цього.

Сформулюємо переміщення точки A через відому кутову координату φ_2 тіла 2

$$S_A = \varphi_2 \cdot R_2,$$

звідки отримаємо

$$S_1 = \varphi_2 \cdot R_2 = 2t^2 \cdot 0,07 = 0,14t^2, \text{ м.}$$

Тіла 2 і 3 теж з'єднані між собою ідеальними нитками. Запишемо рівняння кінематичних зв'язків для цих тіл.

Точки B і D лежать на одній ідеальній нитці і належать тілам 2 і 3 відповідно.

$$S_B = S_D,$$

$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot r_3.$$

звідки

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{r_3} = \frac{2t^2 \cdot 0,035}{0,045} = 1,555t^2, \text{ рад.}$$

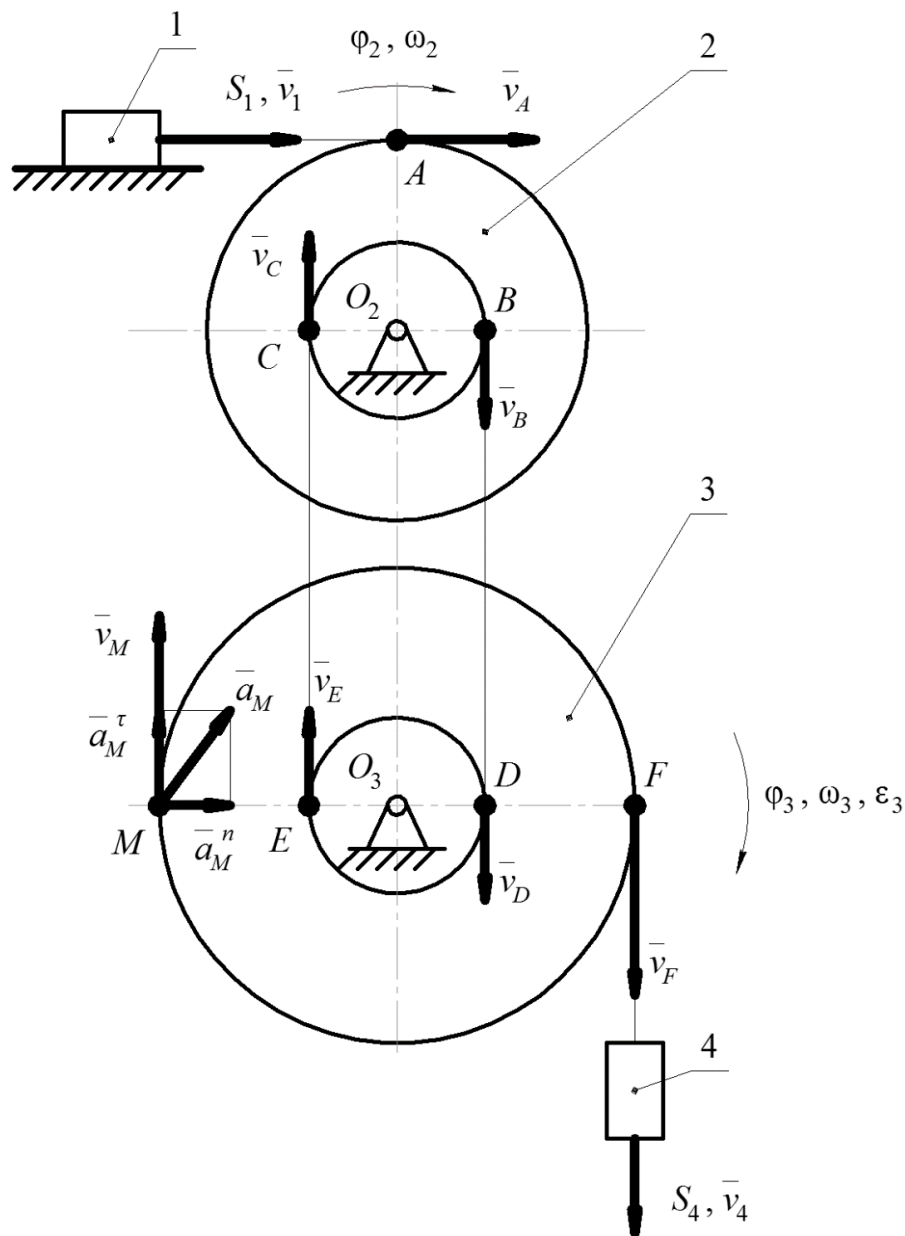


Рисунок 1.4 - Розрахункова схема для визначення швидкостей та прискорень

3. Визначимо кутову швидкість ω_3 та кутове прискорення ε_3 тіла 3

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d(1,555t^2)}{dt} = 3,111t, \text{ рад/с,}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(50t)}{dt} = 3,111, \text{ рад/с}^2.$$

Напрямки ω_3 та ε_3 – за годинниковою стрілкою через те, що вони додатні при додатному t .

Тіла 3 і 4 теж з'єднані між собою ідеальними нитками. Запишемо для них рівняння кінематичних зв'язків. Точка F належить зовнішньому радіусу тіла 3 і лежить на нитці, яка з'єднує тіло 3 і 4.

$$S_F = \varphi_3 \cdot R_3,$$

$$S_F = S_4,$$

$$S_4 = \varphi_3 \cdot R_3 = 1,555t^2 \cdot 0,1 = 0,155t^2, \text{ м.}$$

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M .

Точка M знаходиться на зовнішньому радіусі тіла 3, так само, як і точка F , тому лінійні швидкості цих точок однакові.

$$v_M = \omega_3 \cdot MO_3 = 3,111t \cdot R_3 = 3,111t \cdot 0,1 = 0,311t, \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = 2$ с

$$v_M = 0,311 \cdot 2 = 0,622 \text{ м/с.}$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Абсолютне прискорення $\overline{a_M}$ (рис. 1.4) точки тіла, що обертається, визначається як векторна сума нормального прискорення $\overline{a_M^n}$ та тангенціального прискорення $\overline{a_M^\tau}$ точки навколо центру обертання O_3

$$\overline{a_M} = \overline{a_M^n} + \overline{a_M^\tau}.$$

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O_3 у момент часу $t = 2$ с

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot MO_3 = (3,111 \cdot 2)^2 \cdot R_3 = 38,72 \cdot 0,1 = 3,872 \text{ (м/с}^2\text{),}$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot MO_3 = 3,111 \cdot R_3 = 3,111 \cdot 0,1 = 0,311 \text{ (м/с}^2\text{).}$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^t)^2} = \sqrt{3,872^2 + 0,311^2} = 3,884 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $S_1 = 0,14t^2, \text{ м,}$ $\varphi_3 = 1,555t^2 \text{ рад,}$ $S_4 = 0,155t^2, \text{ м,}$
 $v_M = 0,622 \text{ м/с,}$ $a_M = 3,884 \text{ м/с}^2.$

1.2.1 ТМ-5, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із чотирьох тіл з використанням пакету MathCAD

[↑ДО ТМ-5↑](#) [↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Для визначення кінематичних характеристик тіла у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задаємо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &:= 2 \cdot t^2 \quad \text{rad} & R_2 &:= 0.07 \quad \text{m} & r_2 &:= 0.035 \quad \text{m} \\ t &:= 2 \quad \text{s} & R_3 &:= 0.1 \quad \text{m} & r_3 &:= 0.045 \quad \text{m}\end{aligned}$$

- записуємо рівняння кінематичних зв'язків, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 1.4](#))

$$S_1 = S_A = \varphi_2 \cdot R_2$$

$$S_B = S_D$$

$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot r_3$$

$$S_F = S_4 = \varphi_3 \cdot R_3$$

- визначаємо невідомі закони руху у символному вигляді

$$S_1(t) := \varphi_2(t) \cdot R_2 \rightarrow 0.14 \cdot t^2 \quad \text{m}$$

$$\varphi_3(t) := \frac{\varphi_2(t) \cdot r_2}{r_3} \rightarrow 1.556 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$S_4(t) := \varphi_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 0.156 \cdot t^2 \quad \text{m}$$

- визначаємо кінематичні параметри тіла 3 у символному вигляді

$$\omega_3(t) := \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \rightarrow 3.111 \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_3(t) := \frac{d}{dt} \omega_3(t) \rightarrow 3.111 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у символному вигляді

$$v_M(t) := \omega_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 0.311 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(t) := \omega_3(t)^2 \cdot R_3 \rightarrow 0.968 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(t) := \epsilon_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 0.311 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{nM}(t)^2 + a_{\tau M}(t)^2} \rightarrow \sqrt{0.937 \cdot t^4 + 0.097} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у момент часу 2 с

$$v_M(2) = 0.622 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(2) = 3.872 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(2) = 0.311 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(2) = 3.884 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.3 ТМ-5, приклад 3. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл

↑ДО ТМ-5↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Визначити закони руху тіл 1, 2, 3 і 4 (рис. 1.5), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла 5 $S_5 = 3t^2$, м; зовнішні радіуси тіл $R_2 = 0,075$ м, $R_3 = 0,09$ м, $R_4 = 0,12$ м, внутрішні радіуси тіл $r_2 = 0,035$ м, $r_3 = 0,04$ м, $r_4 = 0,05$ м, момент часу $t = 2$ с.

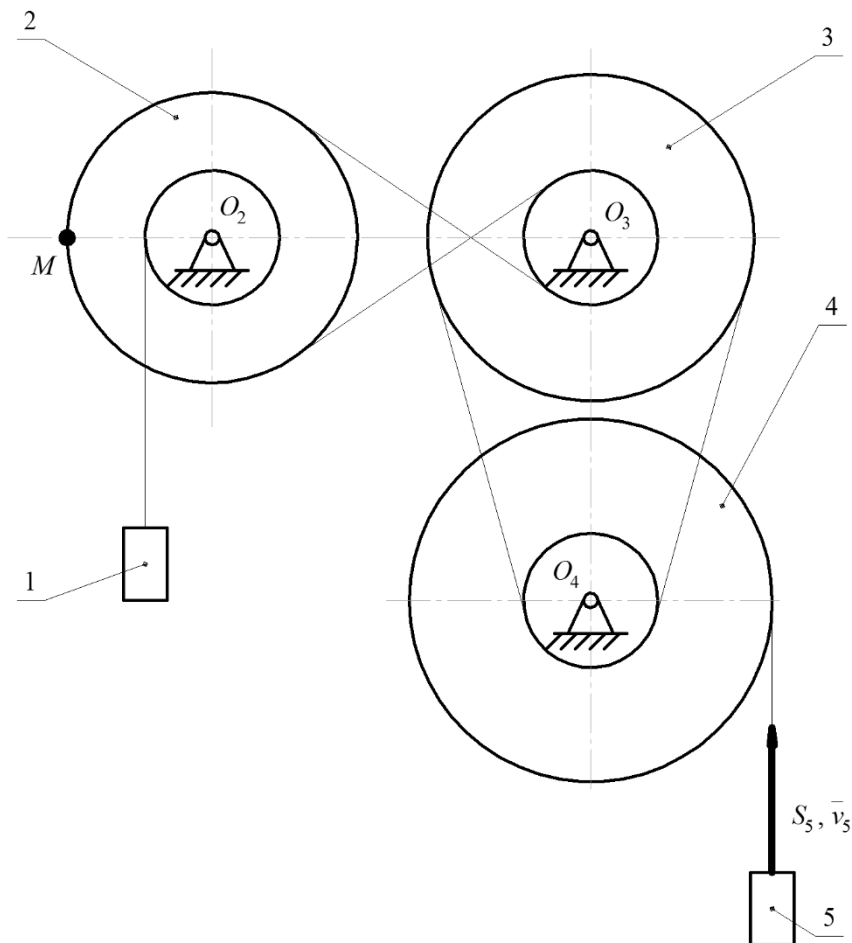


Рисунок 1.5 - Вихідна схема системи із п'яти тіл

Дано:

$$S_5 = 3t^2, \text{ м};$$

$$R_2 = 0,075 \text{ м}; r_2 = 0,035 \text{ м};$$

$$R_3 = 0,09 \text{ м}; r_3 = 0,04 \text{ м};$$

$$R_4 = 0,12 \text{ м}; r_4 = 0,05 \text{ м};$$

$$t = 2 \text{ с}$$

Визначити

$$S_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

$$v_M, a_M$$

Розв'язання

Із умови задачі відомо, що тіло 5 рухається поступально вертикально та вгору (рис. 1.5). Тіла 4, 3 і 2 виконують обертальний рух, тіло 1 рухається поступально прямолінійно. Центрами обертання тіл 4, 3 і 2 є вісі нерухомих шарнірів, позначених на рисунку O_4 , O_3 і O_2 .

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.6), на якій позначимо точки $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$, напрямки руху тіл 4, 3, 2 і 1 ($\varphi_4, \varphi_3, \varphi_2$ і S_1), напрямки кутових швидкостей ω_4, ω_3 і ω_2 та кутового прискорення ε_2 , вектори абсолютних швидкостей тіл 1 і 5 (v_1 і v_5) та вектори абсолютних швидкостей позначених на схемі точок ($v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G, v_H, v_J, v_K$). Зазначимо, що тіло 4 та 3 обертаються проти годинникової стрілки, а тіло 2 – за годинниковою стрілкою, зважаючи на систему гнучких в'язей між тілами.

2. Визначимо закони руху тіл.

Тіла 5 і 4 з'єднуються за допомогою ідеальної нитки, ця нитка приєднується до тіла 4 у точці A . З цього виходить, що переміщення, абсолютні швидкості та прискорення тіла 5 та точки A рівні між собою.

$$S_5 = S_A = 3t^2, \text{ м.}$$

Сформулюємо переміщення точки A через кутову координату φ_4 тіла 4

$$S_A = \varphi_4 \cdot R_4,$$

звідки отримаємо

$$\varphi_4 = \frac{S_A}{R_4} = \frac{3t^2}{0,12} = 25t^2, \text{ рад,}$$

Тіла 4 і 3 теж з'єднані між собою ідеальними нитками. Запишемо рівняння кінематичних зв'язків для цих тіл, прирівнявши переміщення точок B і D

$$S_B = S_D,$$

$$S_B = \varphi_4 \cdot r_4,$$

$$S_D = \varphi_3 \cdot R_3,$$

тоді

$$\varphi_4 \cdot r_4 = \varphi_3 \cdot R_3,$$

звідки

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_4 \cdot r_4}{R_3} = \frac{25t^2 \cdot 0,05}{0,09} = 13,89t^2, \text{ рад.}$$

Аналогічно визначимо параметри руху тіла 2 через відомі параметри руху тіла 3

$$S_F = S_H,$$

$$S_F = \varphi_3 \cdot r_3,$$

$$S_H = \varphi_2 \cdot R_2,$$

$$\varphi_3 \cdot r_3 = \varphi_2 \cdot R_2,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_3 \cdot r_3}{R_2} = \frac{13,89t^2 \cdot 0,04}{0,075} = 7,41t^2, \text{ рад.}$$

Повторимо процедуру для визначення параметрів тіла 1

$$S_K = S_1,$$

$$S_K = \varphi_2 \cdot r_2,$$

$$S_1 = \varphi_2 \cdot r_2 = 7,41t^2 \cdot 0,035 = 0,26t^2, \text{ м.}$$

Таким чином, закони руху тіл 4, 3, 2 і 1 визначено.

3. Розрахуємо кутову швидкість та прискорення тіла 2, на якому знаходиться точка M .

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d(7,41t^2)}{dt} = 14,82t, \text{ рад/с,}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d(14,82t)}{dt} = 14,82, \text{ рад/с}^2.$$

Напрямки ω_2 та ε_2 – за годинниковою стрілкою ([рис. 1.6](#)) через те, що вони додатні при додатному t .

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M .

Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$v_M = \omega_2 \cdot MO_2 = 14,82t \cdot R_2 = 14,82t \cdot 0,075 = 1,11t, \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = 2$ с

$$v_M = 1,11 \cdot 2 = 2,22 \text{ м/с.}$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O_2 у момент часу $t = 2$ с

$$a_M^n = \omega_2^2 \cdot MO_2 = (14,82 \cdot 2)^2 \cdot R_2 = 878,53 \cdot 0,075 = 65,89 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_2 \cdot MO_2 = 14,82 \cdot R_2 = 14,82 \cdot 0,075 = 1,11 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Абсолютне прискорення точки M

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \sqrt{65,89^2 + 1,11^2} = 65,89 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

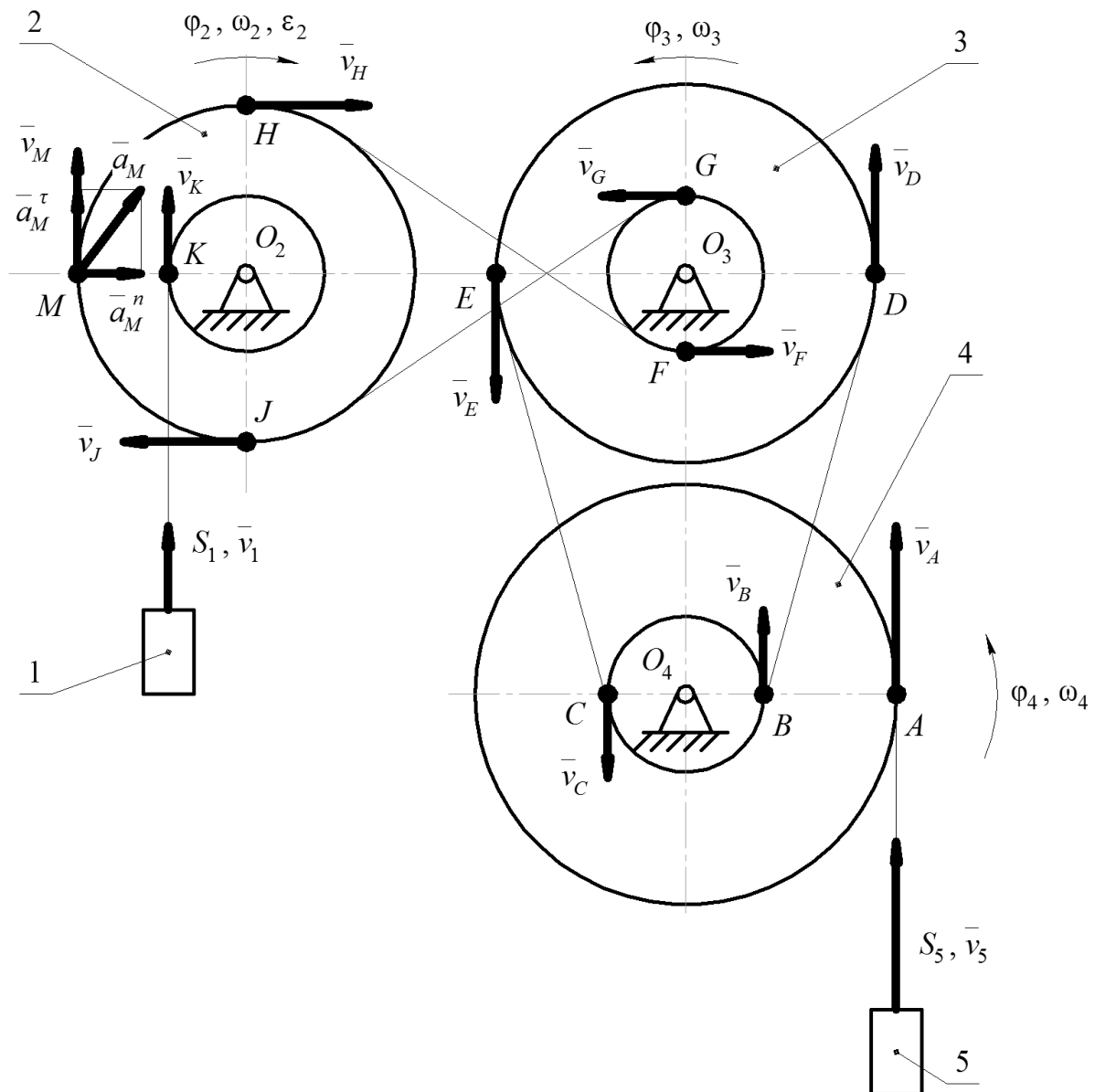


Рисунок 1.6 - Розрахункова схема для визначення швидкостей та прискорень

Відповідь: $S_1 = 0,26t^2$, м, $\varphi_2 = 7,41t^2$ рад, $\varphi_3 = 13,89t^2$ рад,
 $\varphi_4 = 25t^2$ рад, $v_M = 2,22$ м/с, $a_M = 65,89$ м/с².

1.3.1 ТМ-5, приклад 3. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із трьох тіл з використанням пакету MathCAD

↑ДО ТМ-5↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення кінематичних характеристик тіла у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задаємо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$S_5(t) := 3 \cdot t^2 \quad \text{m} \quad R_2 := 0.075 \quad \text{m} \quad R_3 := 0.09 \quad \text{m} \quad R_4 := 0.12 \quad \text{m}$$

$$t := 2 \quad \text{s} \quad r_2 := 0.035 \quad \text{m} \quad r_3 := 0.04 \quad \text{m} \quad r_4 := 0.05 \quad \text{m}$$

- записуємо рівняння кінематичних зв'язків, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 1.6](#))

$$S_5 = S_A = \varphi_4 \cdot R_4$$

$$S_B = S_D \quad \varphi_4 \cdot r_4 = \varphi_3 \cdot R_3$$

$$S_F = S_H \quad \varphi_3 \cdot r_3 = \varphi_2 \cdot R_2$$

$$S_K = S_1 = \varphi_2 \cdot r_2$$

- визначаємо невідомі закони руху у символічному вигляді

$$\varphi_4(t) := \frac{S_5(t)}{R_4} \rightarrow 25.0 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_3(t) := \frac{\varphi_4(t) \cdot r_4}{R_3} \rightarrow 13.889 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_2(t) := \frac{\varphi_3(t) \cdot r_3}{R_2} \rightarrow 7.407 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$S_1(t) := \varphi_2(t) \cdot r_2 \rightarrow 0.259 \cdot t^2 \quad \text{m}$$

- визначаємо кінематичні параметри тіла 2 у символічному вигляді

$$\omega_2(t) := \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \rightarrow 14.815 \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_2(t) := \frac{d}{dt} \omega_2(t) \rightarrow 14.815 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у символному вигляді

$$v_M(t) := \omega_2(t) \cdot R_2 \rightarrow 1.111 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(t) := \omega_2(t)^2 \cdot R_2 \rightarrow 16.461 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(t) := \varepsilon_2(t) \cdot R_2 \rightarrow 1.111 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{nM}(t)^2 + a_{\tau M}(t)^2} \rightarrow \sqrt{270.961 \cdot t^4 + 1.235} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у момент часу 2 с

$$v_M(2) = 2.222 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(2) = 65.844 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(2) = 1.111 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(2) = 65.853 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.4 ТМ-5, приклад 4. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл з фрикційною взаємодією

↑ДО ТМ-5↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Визначити закони руху тіл 1, 2, 3 і 4 (рис. 1.7), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла 5 $\varphi_5 = 60t^2$, рад; зовнішні радіуси тіл $R_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,12$ м, $R_3 = 0,08$ м, $R_4 = 0,05$ м, $R_5 = 0,03$ м, внутрішні радіуси тіл $r_2 = 0,04$ м, $r_3 = 0,035$ м, $r_4 = 0,03$ м, момент часу $t = 2$ с. Рух від одного тіла до іншого передається завдяки силі тертя без проковзування.

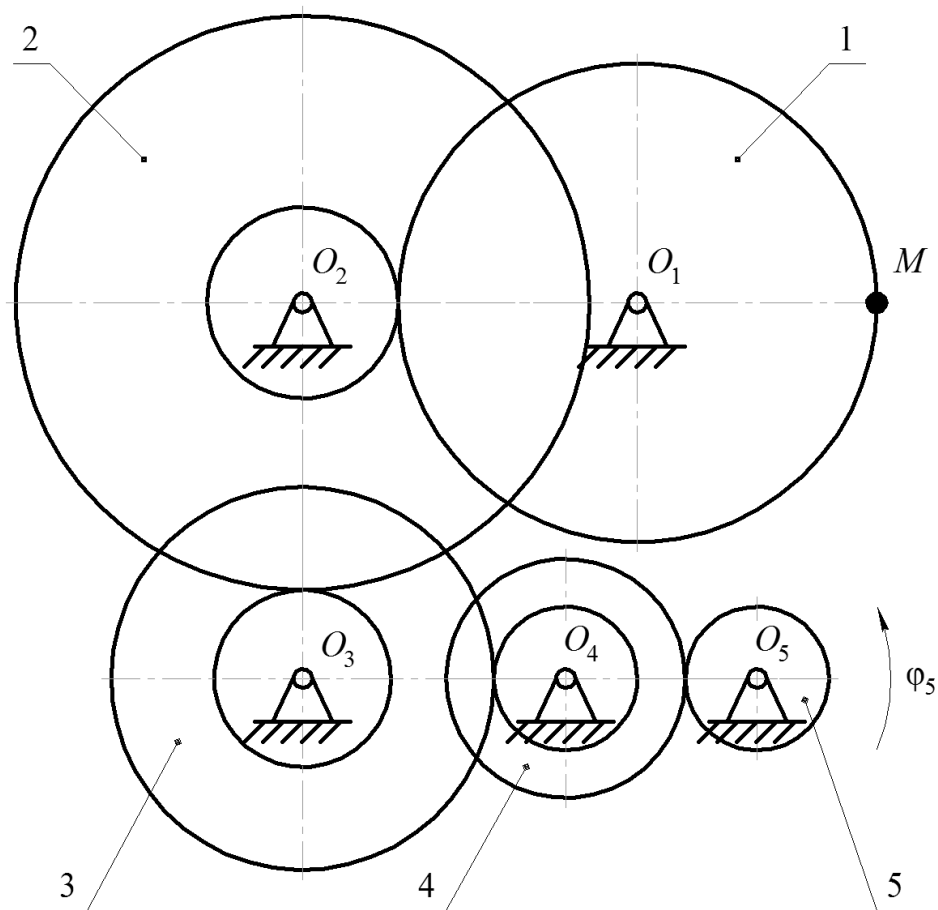


Рисунок 1.7 - Вихідна схема системи із п'яти тіл з фрикційною взаємодією

Дано:

$$\varphi_5 = 60t^2, \text{ рад}, t = 2 \text{ с},$$

$$R_1 = 0,1 \text{ м}, R_2 = 0,12 \text{ м}, R_3 = 0,08 \text{ м}, R_4 = 0,05 \text{ м}, R_5 = 0,03 \text{ м},$$

$$r_2 = 0,04 \text{ м}, r_3 = 0,035 \text{ м}, r_4 = 0,03 \text{ м}$$

Визначити

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

$$v_M, a_M$$

Розв'язання

Із умови задачі відомо, що тіло 5 виконує обертальний рух проти годинникової стрілки (рис. 1.7). Центрами обертання всіх тіл є вісі нерухомих шарнірів, позначених на рисунку O_5, O_4, O_3, O_2 і O_1 .

1. Складемо розрахункову схему (рис. 1.8), на якій позначимо точки A, B, C, D , напрямки руху тіл 4, 3, 2 і 1 ($\varphi_4, \varphi_3, \varphi_2$ і φ_1), напрямки кутових швидкостей $\omega_4, \omega_3, \omega_2$ і ω_1 та кутового прискорення ε_1 , та вектори абсолютних швидкостей позначених на схемі точок (v_A, v_B, v_C, v_D). Зазначимо, що враховуючи фрикційну взаємодію, тіла 4 та 2 обертаються за годинниковою стрілкою, тіла 3 і 1 – проти годинникової стрілки.

2. Визначимо закони руху тіл.

Тіла 5 і 4 взаємодіють у точці A за допомогою сил тертя без проковзування. З цього виходить, що точка A умовно лежить одночасно на зовнішніх радіусах тіл 5 і 4. Виразимо переміщення точки A через кінематичні параметри тіл 5 і 4

$$S_A = \varphi_5 \cdot R_5,$$

$$S_A = \varphi_4 \cdot R_4.$$

Тоді

$$\varphi_5 \cdot R_5 = \varphi_4 \cdot R_4$$

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_5 \cdot R_5}{R_4} = \frac{60t^2 \cdot 0,03}{0,05} = 36t^2, \text{ рад.}$$

Тіла 4 і 3 взаємодіють у точці B за допомогою сил тертя без проковзування. Точка B належить одночасно тілам 4 і 3. Виразимо її переміщення

$$S_B = \varphi_4 \cdot r_4,$$

$$S_B = \varphi_3 \cdot R_3,$$

$$\varphi_4 \cdot r_4 = \varphi_3 \cdot R_3,$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_4 \cdot r_4}{R_3} = \frac{36t^2 \cdot 0,03}{0,08} = 13,5t^2, \text{ рад.}$$

Тіла 3 і 2 взаємодіють у точці C за допомогою сил тертя без проковзування. Точка C належить одночасно тілам 3 і 2. Виразимо її переміщення

$$\begin{aligned} S_C &= \varphi_3 \cdot r_3, \\ S_C &= \varphi_2 \cdot R_2, \\ \varphi_3 \cdot r_3 &= \varphi_2 \cdot R_2, \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_3 \cdot r_3}{R_2} = \frac{13,5t^2 \cdot 0,035}{0,12} = 3,94t^2, \text{ рад.} \end{aligned}$$

Тіла 2 і 1 взаємодіють у точці D за допомогою сил тертя без проковзування. Точка D належить одночасно тілам 2 і 1. Виразимо її переміщення

$$\begin{aligned} S_D &= \varphi_2 \cdot r_2, \\ S_D &= \varphi_1 \cdot R_1, \\ \varphi_2 \cdot r_2 &= \varphi_1 \cdot R_1, \\ \varphi_1 &= \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{R_1} = \frac{3,94t^2 \cdot 0,04}{0,1} = 1,58t^2, \text{ рад.} \end{aligned}$$

Таким чином, закони руху тіл 4, 3, 2 і 1 визначено.

3. Розрахуємо кутову швидкість та прискорення тіла 1, на якому знаходиться точка M .

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d(1,58t^2)}{dt} = 3,16t, \text{ рад/с,} \\ \varepsilon_1 &= \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d(3,16t)}{dt} = 3,16 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

Напрямки ω_1 та ε_1 – проти годинникової стрілки ([рис. 1.8](#)) через те, що вони додатні при додатному t .

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$v_M = \omega_1 \cdot MO_1 = 3,16t \cdot R_1 = 3,16t \cdot 0,1 = 0,316t, \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = 2$ с

$$v_M = 0,316 \cdot 2 = 0,632 \text{ м/с.}$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O_1 у момент часу $t = 2$ с

$$a_M^n = \omega_1^2 \cdot MO_1 = (3,16 \cdot 2)^2 \cdot R_1 = 39,94 \cdot 0,1 = 3,994 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_1 \cdot MO_1 = 3,16 \cdot R_1 = 3,16 \cdot 0,1 = 0,316 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \sqrt{3,994^2 + 0,316^2} = 4,01 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

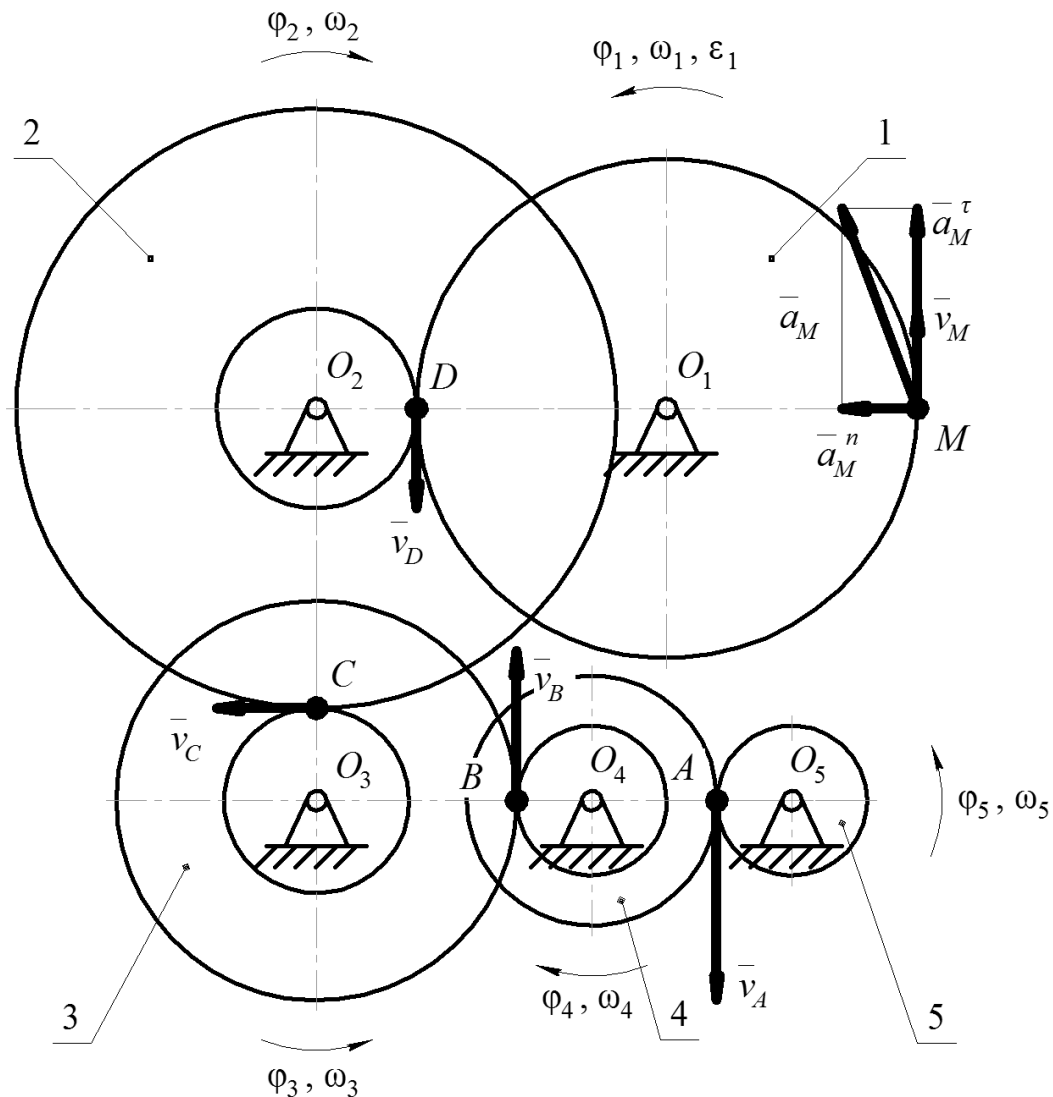


Рисунок 1.8 - Розрахункова схема для визначення швидкостей та прискорень

Відповідь: $\varphi_1 = 1,58t^2$, рад, $\varphi_2 = 3,94t^2$, рад, $\varphi_3 = 13,5t^2$, рад,
 $\varphi_4 = 36t^2$, рад, $v_M = 0,632$ м/с, $a_M = 4,01$ м/с².

1.4.1 ТМ-5, приклад 4. Визначення кінематичних характеристик тіла для системи із п'яти тіл з фрикційною взаємодією з використанням пакету MathCAD

[↑ДО ТМ-5↑](#) [↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Для визначення кінематичних характеристик тіла у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задаємо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$\begin{aligned} \varphi_5(t) &:= 60 \cdot t^2 \quad \text{rad} & R_1 &:= 0.1 \quad \text{m} & R_2 &:= 0.12 \quad \text{m} & R_3 &:= 0.08 \quad \text{m} & R_4 &:= 0.05 \quad \text{m} \\ t &:= 2 \quad \text{s} & R_5 &:= 0.03 \quad \text{m} & r_2 &:= 0.04 \quad \text{m} & r_3 &:= 0.035 \quad \text{m} & r_4 &:= 0.03 \quad \text{m} \end{aligned}$$

- записуємо рівняння кінематичних зв'язків, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 1.8](#))

$$S_A = \varphi_5 \cdot R_5 = \varphi_4 \cdot R_4$$

$$S_B = \varphi_4 \cdot r_4 = \varphi_3 \cdot R_3$$

$$S_C = \varphi_3 \cdot r_3 = \varphi_2 \cdot R_2$$

$$S_D = \varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_1 \cdot R_1$$

- визначаємо невідомі закони руху у символьному вигляді

$$\varphi_4(t) := \frac{\varphi_5(t) \cdot R_5}{R_4} \rightarrow 36.0 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_3(t) := \frac{\varphi_4(t) \cdot r_4}{R_3} \rightarrow 13.5 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_2(t) := \frac{\varphi_3(t) \cdot r_3}{R_2} \rightarrow 3.9375 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

$$\varphi_1(t) := \frac{\varphi_2(t) \cdot r_2}{R_1} \rightarrow 1.575 \cdot t^2 \quad \text{rad}$$

- визначаємо кінематичні параметри тіла 1 у символьному вигляді

$$\omega_1(t) := \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \rightarrow 3.15 \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_1(t) := \frac{d}{dt} \omega_1(t) \rightarrow 3.15 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у символному вигляді

$$v_M(t) := \omega_1(t) \cdot R_1 \rightarrow 0.315 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(t) := \omega_1(t)^2 \cdot R_1 \rightarrow 0.992 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(t) := \varepsilon_1(t) \cdot R_1 \rightarrow 0.315 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{nM}(t)^2 + a_{\tau M}(t)^2} \rightarrow \sqrt{0.985 \cdot t^4 + 0.099} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначаємо кінематичні параметри точки M у момент часу 2 с

$$v_M(2) = 0.63 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{nM}(2) = 3.969 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(2) = 0.315 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(2) = 3.981 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.5 Задачі для самопідготовки (ТМ-5)

↑ДО ТМ-5↑

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Умова задачі

<https://btpm.nmu.org.ua/ua/selfstudy/tm5%D1%83%D0%BA%D1%80.jpg>

2 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ (ТМ-9ч1)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Плоско-паралельний рух (ППР) твердого тіла – це рух, протягом якого всі точки тіла рухаються у площині, паралельній певній нерухомій площині. Прикладом ППР є рух колеса залізничного потягу. Особливістю ППР є наявність миттєвого центру швидкостей (МЦШ) – точки, яка є нерухомою у даний момент руху, а в наступний момент МЦШ буде уже в іншій точці.

Особливість визначення лінійних швидкостей точок тіла, яке виконує ППР, полягає у тому, що миттєвим центром обертання є МЦШ і радіусом обертання є відстань від розглянутої точки до МЦШ.

Визначення абсолютних прискорень точок, що виконують ППР, потребують обрання полюса – точки, лінійне прискорення якої відомо, або легко визначити. Зазвичай такою точкою є центр мас тіла. Тоді абсолютне прискорення точки за ППР визначається як векторна сума прискорення полюса та прискорення розглянутої точки навколо полюса.

План теми 2

- 2.1 [ТМ-9ч1, приклад 1. Система із трьох тіл](#)
 - 2.1.1 [ТМ-9ч1, приклад 1. Система із трьох тіл у MathCAD](#)
- 2.2 [ТМ-9ч1, приклад 2. Система із трьох тіл](#)
 - 2.2.1 [ТМ-9ч1, приклад 2. Система із трьох тіл у MathCAD](#)
- 2.3 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-9ч1\)](#)

2.1 ТМ-9ч1, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик точок тіл системи за плоско-паралельного руху

↑ДО ТМ-9ч1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Визначити закони руху тіл 2 та 3 (рис. 2.1), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла 1 $S_1 = 5t^2$, м; зовнішній радіус тіла 2 $R_2 = 1$ м, внутрішній радіус тіла 2 $r_2 = 0,5$ м, радіус тіла 3 $R_3 = 0,75$ м, момент часу $t = 1$ с.

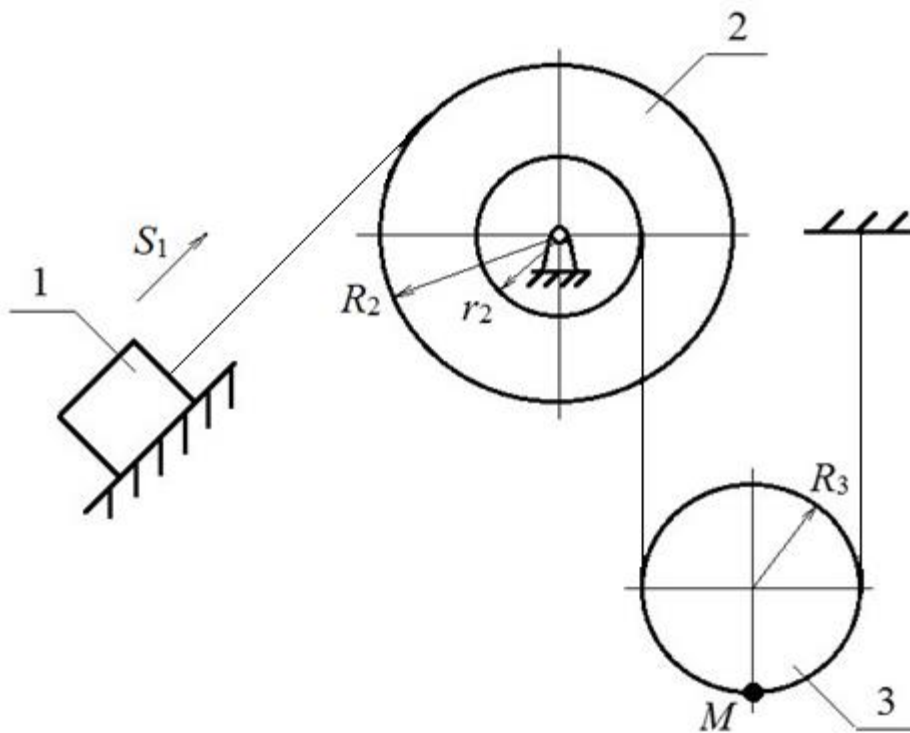


Рисунок 2.1 – Вихідна схема (ТМ-9ч1, приклад 1)

Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 2.2). На ній позначимо – допоміжні точки A, B, C, D, P , напрямки руху тіл 2 та 3, напрямки кутової швидкості ω_3 та кутового прискорення ε_3 тіла 3, та вектор абсолютної швидкості v_M .

Тіло 1 рухається поступально, тіло 2 має обертальний рух, тіло 3 – плоско-паралельний рух. Тіло 1 та точка A пов'язані ідеальною ниткою (такою, що не розтягується). Точки B та D, P та опора – також пов'язані ідеальними нитками.

Дано:

$$S_1 = 5t^2, \text{ м}$$

$$R_2 = 1 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \text{ м}$$

$$R_3 = 0,75 \text{ м}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

Знайти:

$$\varphi_2, \varphi_3, v_M, a_M$$

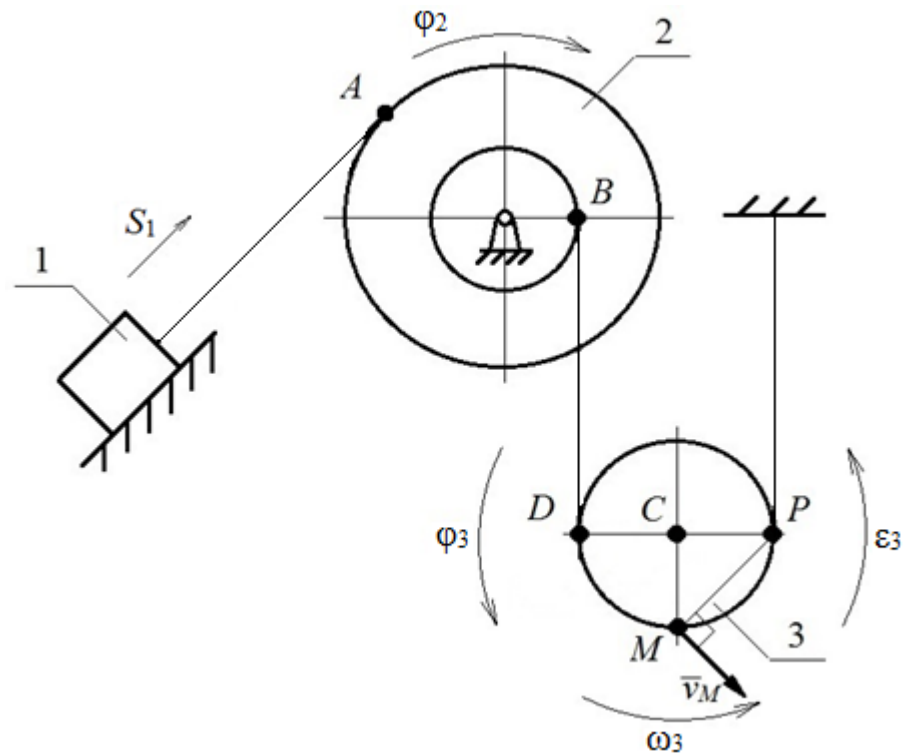


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема (ТМ-9ч1, приклад 1)

З вихідних даних маємо напрямок руху тіла 1. Якщо тіло 1 поступально піднімається вздовж похилої поверхні та пов'язане з точкою A ідеальною ниткою, то тіло 2 обертається за годинниковою стрілкою (позначено φ_2 на [рис. 2.2](#)). Аналогічно визначаємо напрямок руху тіла 3, яке обертається проти годинникової стрілки (позначено φ_3 на [рис. 2.2](#)).

Якщо нитка ідеальна, то переміщення тіла 1 дорівнює довжині нитки, що намотується на зовнішній радіус тіла 2. Аналогічно, довжина нитки, що розмотується з внутрішнього радіуса тіла 2, дорівнює довжині нитки, що намотується на радіус тіла 3.

2. Визначимо рівняння кінематичних зв'язків

$$S_1 = \varphi_2 \cdot R_2,$$

$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot 2R_3.$$

Звідки закони руху тіл 2 та 3

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{R_2} = \frac{5t^2}{1} = 5t^2, \text{ рад,}$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{2R_3} = \frac{5t^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,75} = 1,67t^2, \text{ рад.}$$

3. Визначимо кутову швидкість ω_3 та кутове прискорення ε_3 тіла 3.

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d(1,67t^2)}{dt} = 3,34t, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(3,34t)}{dt} = 3,34, \text{ рад/с}^2$$

Напрямки ω_3 та ε_3 – проти годинникової стрілки через те, що вони додатні при додатному t .

Тіло 3 рухається плоско-паралельно та підвішене за допомогою ідеальної нитки до опори. Тому центром обертання (миттєвим центром швидкостей) тіла 3 є точка P .

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$v_M = \omega_3 \cdot MP = 3,34t \cdot \sqrt{2} \cdot R_3 = 3,53t, \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = 1$ с

$$v_M = 3,53 \cdot 1 = 3,53 \text{ м/с.}$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Абсолютне прискорення точки тіла, що рухається плоско-паралельно, визначається як векторна сума прискорення полюса $\overline{a_C}$ та нормального $\overline{a_{MC}^n}$ та тангенціального прискорення $\overline{a_{MC}^t}$ точки навколо цього полюса. В якості полюса обирається точка, прискорення якої відомо або легко знайти. Призначимо полюсом точку C через те, що вона є центром мас тіла 3 та рухається поступально.

$$\overline{a_M} = \overline{a_C} + \overline{a_{MC}^n} + \overline{a_{MC}^t}$$

Визначимо прискорення точки C

$$S_C = \varphi_3 \cdot CP = 1,67t^2 \cdot R_3 = 1,25t^2, \text{ м,}$$

$$v_C = \frac{dS_C}{dt} = \frac{d(1,25t^2)}{dt} = 2,5t, \text{ м/с,}$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d(2,5t)}{dt} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно полюса C у момент часу $t = 1$ с

$$a_{MC}^n = \omega_3^2 \cdot MC = (3,34t)^2 \cdot R_3 = 8,37 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_{MC}^\tau = \varepsilon_3 \cdot MC = 3,34 \cdot R_3 = 2,51 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для визначення абсолютного прискорення точки M спроектуємо вектори визначених прискорень на осі координат x та y (рис. 2.3). Зазначимо, що нормальне прискорення a_{MC}^n спрямовано від точки M до полюса C , а тангенціальне прискорення a_{MC}^τ – перпендикулярно до нормального прискорення у напрямку кутового прискорення ε_3 .

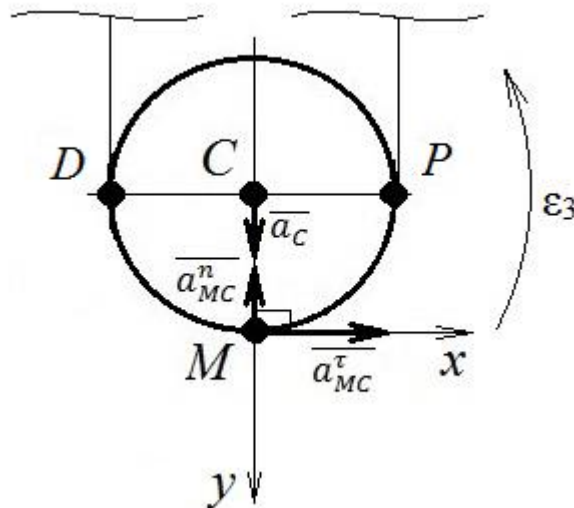


Рисунок 2.3 – Розрахункова схема для визначення прискорень
(ТМ-9ч1, приклад 1)

Тоді абсолютне прискорення a_M точки M

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{\left(\sum a_{ix}\right)^2 + \left(\sum a_{iy}\right)^2} = \sqrt{(a_{MC}^\tau)^2 + (a_C - a_{MC}^n)^2} = \\ &= \sqrt{2,51^2 + (2,5 - 8,37)^2} = 6,38 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\varphi_2 = 5t^2$, рад, $\varphi_3 = 1,67t^2$, рад, $v_M = 3,53$ м/с,
 $a_M = 6,38$ м/с².

2.1.1 ТМ-9ч1, приклад 1. Розрахунок кінематичних характеристик точок тіл за плоско-паралельного руху тіла з використанням пакету MathCAD

↑ДО ТМ-9ч1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення кінематичних характеристик тіл ([рис. 2.1](#)) аналітичним методом у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задамо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= 5 \cdot t^2 \quad \text{m} & R_2 &:= 1 \quad \text{m} & R_3 &:= 0.75 \quad \text{m} \\ t &:= 1 \quad \text{s} & r_2 &:= 0.5 \quad \text{m} \end{aligned}$$

- сформулюємо рівняння кінематичних залежностей, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 2.2](#))

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_2 \cdot R_2 \\ \varphi_2 \cdot r_2 &= \varphi_3 \cdot 2 \cdot R_3 \end{aligned}$$

- визначимо закони руху тіл

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &:= \frac{S_1(t)}{R_2} \rightarrow 5 \cdot t^2 \quad \text{rad} \\ \varphi_3(t) &:= \frac{\varphi_2(t) \cdot r_2}{2 \cdot R_3} \rightarrow 1.667 \cdot t^2 \quad \text{rad} \end{aligned}$$

- визначимо кутову швидкість та прискорення тіла 3, на якому знаходиться точка *M* ([рис. 2.2](#))

$$\begin{aligned} \omega_3(t) &:= \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \rightarrow 3.333 \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \varepsilon_3(t) &:= \frac{d}{dt} \omega_3(t) \rightarrow 3.333 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

- визначимо абсолютну швидкість точки *M*

$$v_M(t) := \omega_3(t) \cdot \sqrt{2} \cdot R_3 \rightarrow 2.5 \cdot \sqrt{2} \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_M(1) = 3.536 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо прискорення полюса C

$$S_C(t) := \varphi_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 1.25 \cdot t^2 \quad \text{m}$$

$$v_C(t) := \frac{d}{dt} S_C(t) \rightarrow 2.5 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_C(t) := \frac{d}{dt} v_C(t) \rightarrow 2.5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначимо абсолютне прискорення точки M (рис. 2.3)

$$a_{nM}(t) := \omega_3(t)^2 \cdot R_3 \rightarrow 8.333 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(t) := \varepsilon_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 2.5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{\tau M}(t)^2 + (a_C(t) - a_{nM}(t))^2} \rightarrow \sqrt{(8.333 \cdot t^2 - 2.5)^2 + 6.25} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{nM}(1) = 8.333 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau M}(1) = 2.5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(1) = 6.346 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.2 ТМ-9ч1, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик точок тіл системи за плоско-паралельного руху

↑ДО ТМ-9ч1↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

Визначити закони руху тіл 2 та 3 (рис. 2.4), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M , якщо відомо: закон руху тіла 1 $S_1 = 30t^2$, м; зовнішній радіус тіла 2 $R_2 = 0,8$ м, внутрішній радіус тіла 2 $r_2 = 0,45$ м, зовнішній радіус тіла 3 $R_3 = 0,6$ м, внутрішній радіус тіла 3 $r_3 = 0,35$ м, момент часу $t = 1$ с.

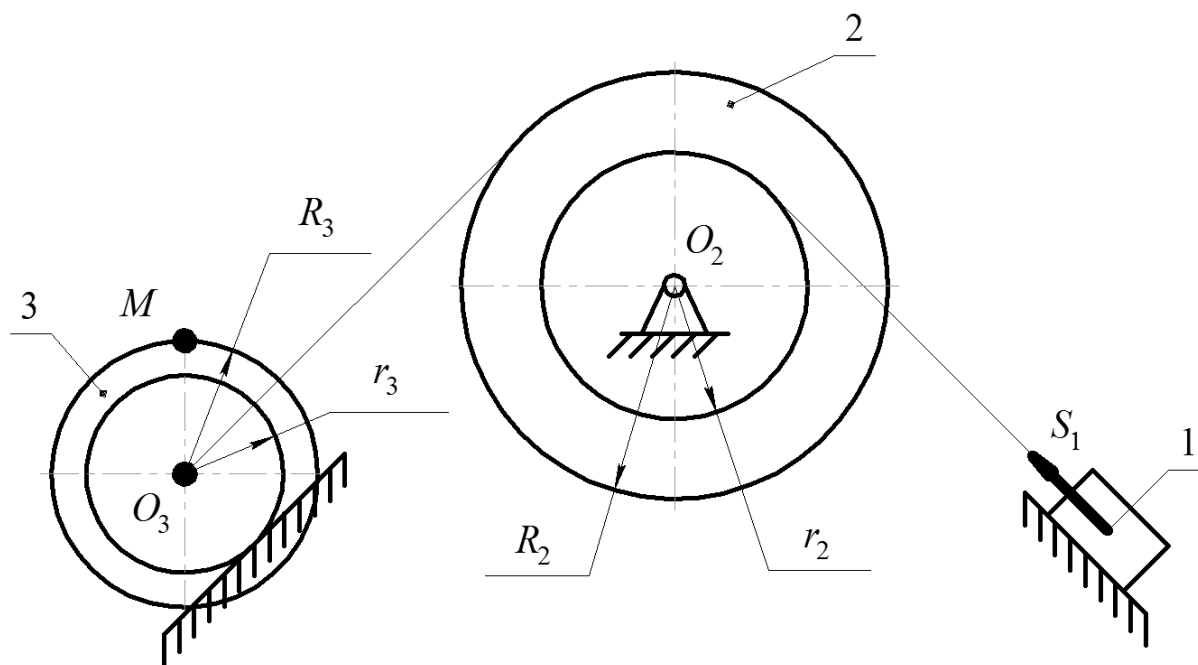


Рисунок 2.4 – Вихідна схема (ТМ-9ч1, приклад 2)

Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 2.5). На ній позначимо – допоміжні точки A, B, P , напрямки руху тіл 2 та 3 – φ_2 та φ_3 , напрямки кутових швидкостей ω_2 і ω_3 та кутового прискорення ε_3 , та вектор абсолютної швидкості v_M .

Тіло 1 рухається поступально, тіло 2 має обертальний рух, тіло 3 – плоско-паралельний рух. Тіло 1 та точка A пов'язані ідеальною ниткою. Точки B та O_3 – також пов'язані ідеальною ниткою.

З вихідних даних маємо напрямок руху тіла 1. Якщо тіло 1 рухається поступально прямолінійно вгору вздовж похилої поверхні та пов'язане з точкою A ідеальною ниткою, то тіло 2 обертається проти годинникової стрілки (позначено φ_2 на [рис. 2.5](#)). Аналогічно визначаємо напрямок руху тіла 3, яке котиться вздовж похилої поверхні вниз без проковзування проти годинникової стрілки (позначено φ_3 на [рис. 2.5](#)).

Якщо нитка ідеальна, то переміщення точки O_3 дорівнює довжині нитки, що розмотується із зовнішнього радіуса тіла 2. Аналогічно, довжина нитки, що намотується на внутрішній радіус тіла 2, дорівнює переміщенню тіла 1.

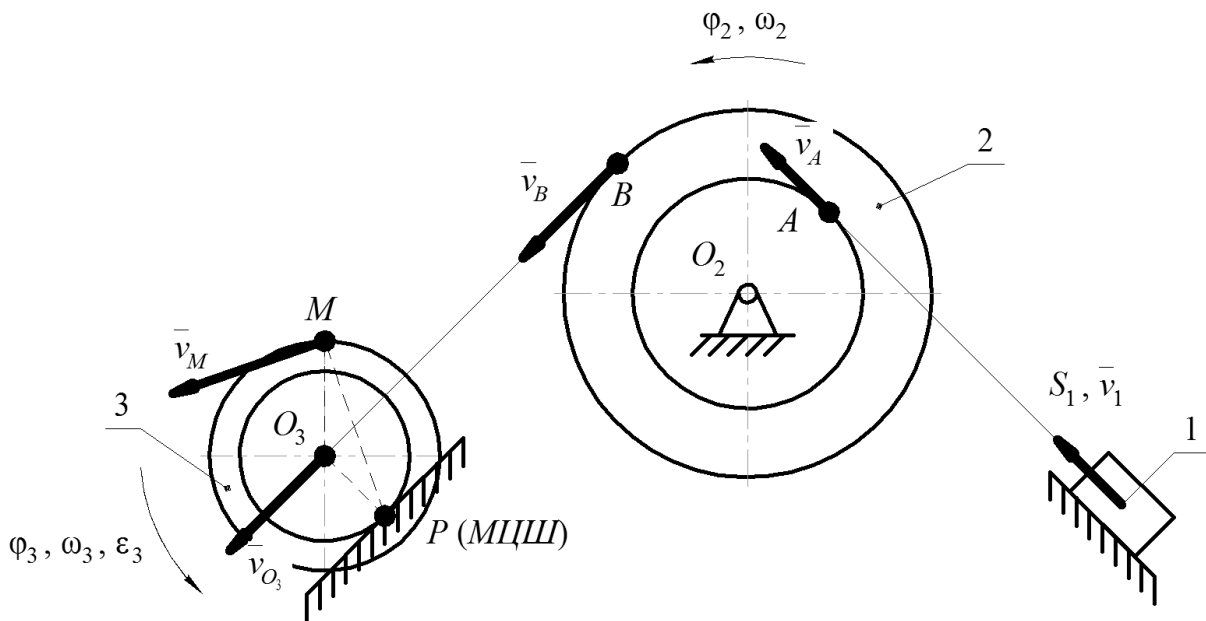


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема (ТМ-9ч1, приклад 2)

2. Визначимо рівняння кінематичних зв'язків

$$s_1 = \varphi_2 \cdot r_2,$$

$$\varphi_2 \cdot R_2 = \varphi_3 \cdot O_3P.$$

Звідки закони руху тіл 2 та 3

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{r_2} = \frac{30t^2}{0,45} = 66,67t^2, \text{ рад,}$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot R_2}{O_3P} = \frac{\varphi_2 \cdot R_2}{r_3} = \frac{66,67t^2 \cdot 0,8}{0,35} = 152,38t^2, \text{ рад.}$$

3. Визначимо кутову швидкість ω_3 та кутове прискорення ε_3 тіла 3.

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d(152,38t^2)}{dt} = 304,76t, \text{ рад/с.}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d(304,76t)}{dt} = 304,76, \text{ рад/с}^2.$$

Напрямки ω_3 та ε_3 – проти годинникової стрілки через те, що вони додатні при додатному t .

Тіло 3 котиться вздовж похилої поверхні вниз без проковзування проти годинникової стрілки. Тому центром обертання (миттєвим центром швидкостей) тіла 3 є точка P , яка знаходиться у точці контакту тіла 3 із похилою поверхнею.

4. Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$v_M = \omega_3 \cdot MP.$$

За теоремою косинусів визначаємо радіус обертання MP

$$\begin{aligned} MP &= \sqrt{O_3P^2 + O_3M^2 - 2 \cdot O_3P \cdot O_3M \cdot \cos(135^\circ)} = \\ &= \sqrt{r_3^2 + R_3^2 - 2 \cdot r_3 \cdot R_3 \cdot \cos(135^\circ)} = \\ &= \sqrt{0,35^2 + 0,6^2 - 2 \cdot 0,35 \cdot 0,6 \cdot (-0,707)} = 0,883 \text{ (м)}. \\ v_M &= \omega_3 \cdot MP = 304,76t \cdot 0,883 = 269,1t, \text{ м/с}. \end{aligned}$$

У момент часу $t = 1$ с

$$v_M = 269,1 \cdot 1 = 269,1 \text{ (м/с)}.$$

5. Визначимо абсолютне прискорення точки M .

Абсолютне прискорення точки тіла, що рухається плоско-паралельно, визначається як векторна сума прискорення полюса $\overline{a_{O_3}}$ та нормального $\overline{a_{MO_3}^n}$ та тангенціального прискорення $\overline{a_{MO_3}^\tau}$ точки навколо цього полюса. В якості полюса обирається точка, прискорення якої відомо або легко знайти. Призначимо полюсом точку O_3 через те, що вона є центром мас тіла 3 та рухається поступально.

$$\overline{a_M} = \overline{a_{O_3}} + \overline{a_{MO_3}^n} + \overline{a_{MO_3}^\tau}.$$

Визначимо прискорення точки O_3

$$S_{O_3} = \varphi_3 \cdot O_3P = 152,38t^2 \cdot r_3 = 53,33t^2, \text{ м,}$$

$$v_{O_3} = \frac{dS_{O_3}}{dt} = \frac{d(53,33t^2)}{dt} = 106,66t, \text{ м/с,}$$

$$a_{O_3} = \frac{dv_{O_3}}{dt} = \frac{d(106,66t)}{dt} = 106,66 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно полюса C у момент часу $t = 1$ с

$$a_{MO_3}^n = \omega_3^2 \cdot MO_3 = (304,76t)^2 \cdot R_3 = 55727(\text{м/с}^2),$$

$$a_{MO_3}^\tau = \varepsilon_3 \cdot MO_3 = 304,76 \cdot R_3 = 182,85 (\text{м/с}^2).$$

Для визначення абсолютного прискорення точки M спроектуємо вектори визначених прискорень на осі координат x та y (рис. 2.6). Зазначимо, що нормальне прискорення $a_{MO_3}^n$ спрямовано від точки M до полюса O_3 , а тангенціальне прискорення $a_{MO_3}^\tau$ – перпендикулярно до нормального прискорення у напрямку кутового прискорення ε_3 .

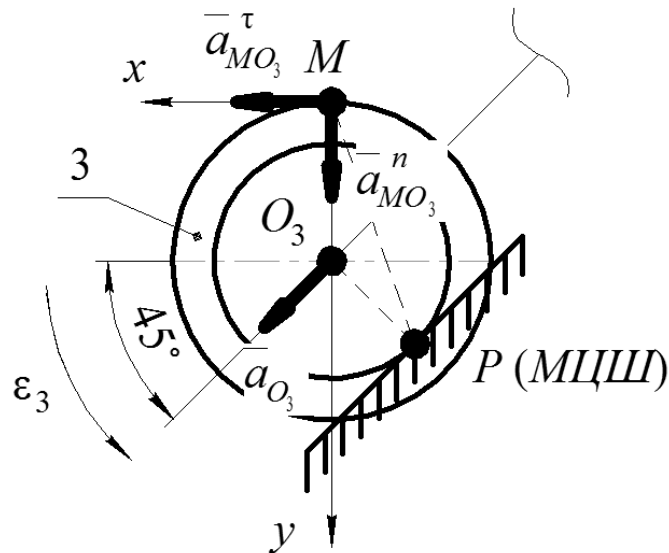


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема для визначення прискорень
(ТМ-9ч1, приклад 2)

Тоді абсолютне прискорення a_M точки M

$$a_M = \sqrt{\left(\sum a_{ix}\right)^2 + \left(\sum a_{iy}\right)^2} =$$

Розв'язання задач кінематики в середовищі MathCAD. ТМ-9ч1, приклад 2

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(a_{Mo_3}^{\tau} + a_{o_3} \cdot \cos(45^\circ))^2 + (a_{Mo_3}^n + a_{o_3} \cdot \sin(45^\circ))^2} = \\ &= \sqrt{(182,85 + 106,66 \cdot 0,707)^2 + (55727 + 106,66 \cdot 0,707)^2} = \\ &= 55803 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\varphi_2 = 66,67t^2$, рад, $\varphi_3 = 152,38t^2$, рад, $v_M = 269,1$ м/с,
 $a_M = 55803$ м/с².

2.2.1 ТМ-9ч1, приклад 2. Розрахунок кінематичних характеристик точок тіл за плоско-паралельного руху тіла з використанням пакету MathCAD

↑ДО ТМ-9ч1↑ ↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення кінематичних характеристик тіл ([рис. 2.4](#)) аналітичним методом у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- задамо відомі величини (розмірності не включаємо до виразів – це потрібно для коректної роботи алгоритму)

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= 30 \cdot t^2 \text{ m} & R_2 &:= 0.8 \text{ m} & R_3 &:= 0.6 \text{ m} \\ t &:= 1 \text{ s} & r_2 &:= 0.45 \text{ m} & r_3 &:= 0.35 \text{ m} \end{aligned}$$

- сформулюємо рівняння кінематичних залежностей, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 2.5](#))

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_2 \cdot r_2 \\ \varphi_2 \cdot R_2 &= \varphi_3 \cdot r_3 \end{aligned}$$

- визначимо закони руху тіл

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &:= \frac{S_1(t)}{r_2} \rightarrow 66.667 \cdot t^2 \text{ rad} \\ \varphi_3(t) &:= \frac{\varphi_2(t) \cdot R_2}{r_3} \rightarrow 152.381 \cdot t^2 \text{ rad} \end{aligned}$$

- визначимо кутову швидкість та прискорення тіла 3, на якому знаходиться точка *M* ([рис. 2.5](#))

$$\begin{aligned} \omega_3(t) &:= \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \rightarrow 304.762 \cdot t \text{ } \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \varepsilon_3(t) &:= \frac{d}{dt} \omega_3(t) \rightarrow 304.762 \text{ } \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

- визначимо абсолютну швидкість точки *M*

$$MP := \sqrt{r_3^2 + R_3^2 - 2 \cdot r_3 \cdot R_3 \cdot \cos(135 \text{ deg})} = 0.883 \quad \text{m}$$

$$v_M(t) := \omega_3(t) \cdot MP \rightarrow 269.07 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_M(1) = 269.07 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо прискорення полюса C

$$S_{O_3}(t) := \varphi_3(t) \cdot r_3 \rightarrow 53.333 \cdot t^2 \quad \text{m}$$

$$v_{O_3}(t) := \frac{d}{dt} S_{O_3}(t) \rightarrow 106.667 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{O_3}(t) := \frac{d}{dt} v_{O_3}(t) \rightarrow 106.667 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначимо абсолютне прискорення точки M (рис. 2.6)

$$a_{nMO_3}(t) := \omega_3(t)^2 \cdot R_3 \rightarrow 55727.891 \cdot t^2 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau MO_3}(t) := \varepsilon_3(t) \cdot R_3 \rightarrow 182.857 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(t) := \sqrt{\left(a_{\tau MO_3}(t) + a_{O_3}(t) \cdot \cos(45 \text{ deg})\right)^2 + \left(a_{nMO_3}(t) + a_{O_3}(t) \cdot \sin(45 \text{ deg})\right)^2} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{nMO_3}(1) = 55727.891 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\tau MO_3}(1) = 182.857 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_M(1) = 55803.914 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.3 Задачі для самопідготовки (ТМ-9ч1)

[↑ДО ТМ-9ч1↑](#)

[↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Умова задачі

<https://btpm.nmu.org.ua/ua/selfstudy/tm9%D1%83%D0%BA%D1%80.jpg>

3 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧКИ ЗА СКЛАДНОГО РУХУ (ТМ-6)

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Складний рух точки – це рух, протягом якого точка приймає участь у декількох рухах одночасно. Точка може одночасно приймати участь у двох та більше рухах. Приклади складного руху точки – рух пасажирів всередині автобуса або іншого рухомого транспортного засобу, рух моторного човна на річці, рух вантажа баштового крана та ін.

Для опису складного руху зазвичай використовується нерухома та рухома системи відліку. Нерухома система може бути прив'язана до землі чи якогось іншого нерухомого об'єкта, а рухома система відліку переміщується разом із тілом, яке рухається.

Під час опису складного руху користуються наступними поняттями – абсолютний рух (швидкість, прискорення), відносний рух (швидкість, прискорення) та переносний рух (швидкість, прискорення).

Абсолютний рух (має індекси a) – рух точки відносно нерухомої системи відліку. Відносний рух (має індекси r) – рух точки відносно рухомої системи відліку. Переносний рух (має індекси e) – рух рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку.

План теми 3

- 3.1 [ТМ-6, приклад 1. Система із трьох тіл](#)
 - 3.1.1 [ТМ-6, приклад 1. Система із трьох тіл у MathCAD](#)
- 3.2 [ТМ-6, приклад 2. Система із трьох тіл](#)
 - 3.2.1 [ТМ-6, приклад 2. Система із трьох тіл у MathCAD](#)
- 3.3 [Задачі для самопідготовки \(ТМ-6\)](#)

3.1 ТМ-6, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик точки за складного руху

↑ДО ТМ-6↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

За заданим законом відносного руху $S_r = 3t^2$, м точки M (рис. 3.1) та переносного руху $\varphi_e = 2\pi t^2$, рад трикутної рами із каналом, вздовж якого рухається точка M , визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M . Відомо, що відстань $a = 20$ м, час $t = 2$ с.

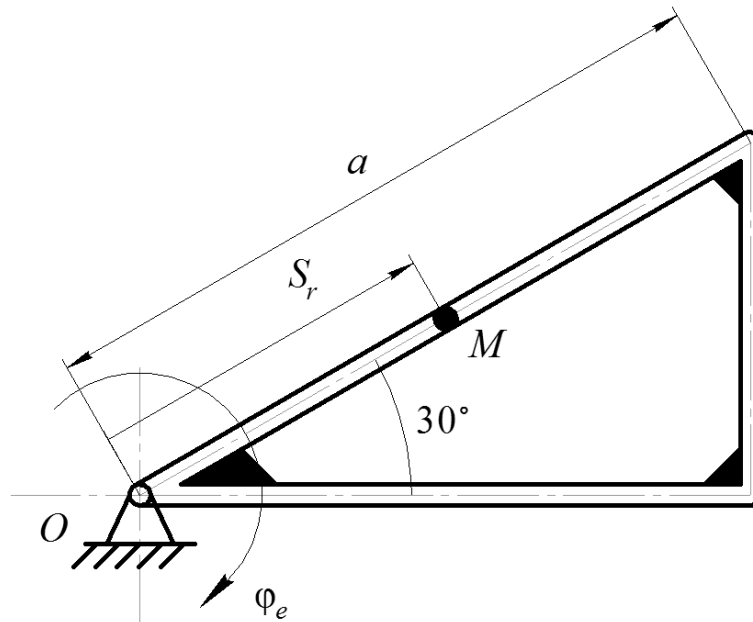


Рисунок 3.1 – Вихідна схема (ТМ-6, приклад 1)

Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 3.2). На схемі позначимо відносну швидкість v_r , відносне прискорення a_r , переносну швидкість v_e , переносні прискорення a_e^n та a_e^t , кутову швидкість ω_e та прискорення ε_e для переносного руху, прискорення Кориоліса a_C , та вісі координат x та y .

Відносний рух є прямолінійним вздовж каналу рамки, переносний рух є обертальним навколо нерухомого шарніра O , на якому закріплено раму.

2. Визначимо положення точки M у момент часу $t = 2$ с.

Підставимо $t = 2$ с до $S_r = 3t^2$

$$S_r(2) = 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ (м)}.$$

Для визначення параметрів відносного руху умовно зупинимо переносний рух.

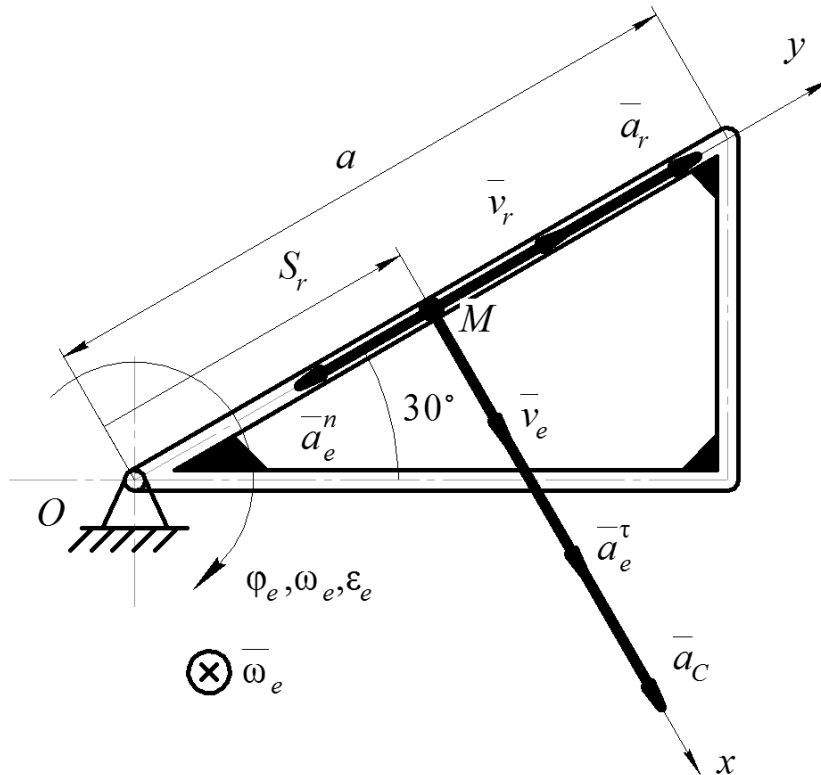


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема (ТМ-6, приклад 1)

3. Визначимо відносну швидкість v_r за прямолінійного руху точки

$$v_r(t) = \frac{d(S_r(t))}{dt} = \frac{d(3t^2)}{dt} = 6t, \text{ м/с.}$$

Підставимо $t = 2 \text{ с}$

$$v_r(2) = 6 \cdot 2 = 12, \text{ м/с.}$$

4. Визначимо відносне прискорення a_r за прямолінійного руху точки

$$a_r(t) = \frac{d(v_r(t))}{dt} = \frac{d(6t)}{dt} = 6, \text{ м/с}^2.$$

Для визначення параметрів переносного руху умовно зупинимо відносний рух.

5. Визначимо переносну швидкість v_e за криволінійного руху

Радіусом обертання для переносного руху є відстань MO , яка визначалася як положення точки M у момент часу 2 с.

Визначимо кутову швидкість ω_e за криволінійного переносного руху

$$\omega_e(t) = \frac{d(\varphi_e(t))}{dt} = \frac{d(2\pi t^2)}{dt} = 4\pi t, \text{ рад/с.}$$

Лінійна швидкість точки за обертального переносного руху

$$v_e(t) = \omega_e(t) \cdot MO = 4\pi t \cdot 12 = 48\pi t, \text{ м/с.}$$

Підставимо $t = 2$ с

$$v_e(2) = 48\pi \cdot 2 = 301,59 \text{ м/с.}$$

6. Визначимо лінійне прискорення за криволінійного переносного руху

$$\overline{a_e} = \overline{a_e^n} + \overline{a_e^\tau}.$$

Визначимо нормальне прискорення точки M відносно центру обертання O за криволінійного переносного руху

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot MO = (4\pi t)^2 \cdot 12 = 192 \cdot \pi^2 \cdot t^2, \text{ м/с}^2.$$

Підставимо $t = 2$ с

$$a_e^n(2) = 192 \cdot \pi^2 \cdot 2^2 = 7579,9 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо кутове прискорення ε_e за криволінійного переносного руху

$$\varepsilon_e(t) = \frac{d(\omega_e(t))}{dt} = \frac{d(4\pi t)}{dt} = 4\pi, \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O за криволінійного переносного руху

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot MO = 4\pi \cdot 12 = 150,8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

7. Визначимо прискорення Коріоліса

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin(90^\circ) = 2 \cdot 4\pi t \cdot 6t \cdot 1 = 48\pi t^2, \text{ м/с.}$$

Підставимо $t = 2$ с

$$a_c(2) = 48\pi t^2 = 48\pi \cdot 2^2 = 603,19 \text{ м/с.}$$

На розрахунковій схемі прискорення Коріоліса спрямовуємо у бік, з якого поворот вектора ω_e в напрямку v_r видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

8. Визначимо абсолютну швидкість точки M

Напрямки векторів швидкостей v_r та v_e швидкостей перетинаються під кутом 90° , тому за теоремою Піфагора

$$v_M(2) = \sqrt{(v_r(2))^2 + (v_e(2))^2} = \sqrt{12^2 + 301,59^2} = 301,83 \text{ (м/с)}.$$

9. Визначимо абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 2$ с

Зважаючи на напрямки прискорень, вказані на рисунку 3.2,

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{\left(\sum a_{ix}\right)^2 + \left(\sum a_{iy}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(a_e^t(2) + a_c(2))^2 + (a_r(2) - a_e^n(2))^2} = \\ &= \sqrt{(150,8 + 603,19)^2 + (6 - 7579,9)^2} = \\ &= \sqrt{(753,99)^2 + (7573,9)^2} = 7611,3 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $v_M = 301,83$ (м/с), $a_M = 7611,3$ (м/с²).

3.1.1 ТМ-6, приклад 1. Визначення кінематичних характеристик точки за складного руху з використанням пакету MathCAD

↑ДО ТМ-6↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Для визначення кінематичних характеристик точки за складного руху (рис. 3.1) аналітичним методом у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- запишемо вихідні дані

$$S_r(t) := 3 \cdot t^2 \quad \text{m} \quad t := 2 \quad \text{s}$$
$$\varphi_e(t) := 2 \cdot \pi \cdot t^2 \quad \text{rad} \quad a := 20 \quad \text{m}$$

- визначимо положення точки M у момент часу $t = 2$ с

$$S_r(2) = 12 \quad \text{m}$$

- визначимо відносну швидкість v_r за прямолінійного руху точки

$$v_r(t) := \frac{d}{dt} S_r(t) \rightarrow 6 \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_r(2) = 12 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо відносне прискорення a_r за прямолінійного руху точки

$$a_r(t) := \frac{d}{dt} v_r(t) \rightarrow 6 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$a_r(2) = 6 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначимо переносну швидкість v_e за криволінійного руху

$$MO := S_r(2) = 12 \quad \text{m}$$
$$\omega_e(t) := \frac{d}{dt} \varphi_e(t) \rightarrow 4 \cdot \pi \cdot t \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$v_e(t) := \omega_e(t) \cdot MO \rightarrow 48 \cdot \pi \cdot t \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_e(2) = 301.593 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо лінійне прискорення за криволінійного переносного руху

$$a_{en}(t) := \omega_e(t)^2 \cdot MO \rightarrow 192 \cdot \pi^2 \cdot t^2 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_{en}(2) = 7579.86 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$\varepsilon_e(t) := \frac{d}{dt} \omega_e(t) \rightarrow 4 \cdot \pi \quad \frac{rad}{s^2}$$

$$a_{e\tau}(t) := \varepsilon_e(t) \cdot MO \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_{e\tau}(2) = 150.796 \quad \frac{m}{s^2}$$

- визначимо прискорення Коріоліса

$$a_C(t) := 2 \cdot \omega_e(t) \cdot v_r(t) \cdot \sin(90 \text{ deg}) \rightarrow 48 \cdot \pi \cdot t^2 \cdot \sin(90 \cdot \text{deg}) \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_C(2) = 603.186 \quad \frac{m}{s^2}$$

- визначимо абсолютну швидкість точки M у момент часу $t = 2$ с

$$v_M(t) := \sqrt{v_r(t)^2 + v_e(t)^2} \rightarrow 6 \cdot \sqrt{64 \cdot \pi^2 \cdot t^2 + t^2} \quad \frac{m}{s}$$

$$v_M(2) = 301.832 \quad \frac{m}{s}$$

- визначимо абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 2$ с, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 3.2](#))

$$a_M(t) := \sqrt{(a_{e\tau}(t) + a_C(t))^2 + (a_r(t) - a_{en}(t))^2} \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_M(2) = 7611.293 \quad \frac{m}{s^2}$$

3.2 ТМ-6, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик точки за складного руху

↑ДО ТМ-6↑ ↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑

За заданим законом відносного руху $S_r = 0,5t^2 + 1,5t$, м точки M (рис. 3.3) та переносного руху $\varphi_e = 2,5t^2 + t$, рад кільцевої рами із каналом, вздовж якого рухається точка M , визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M . Відомо, що радіус рами $R = 10$ м, час $t = 3$ с.

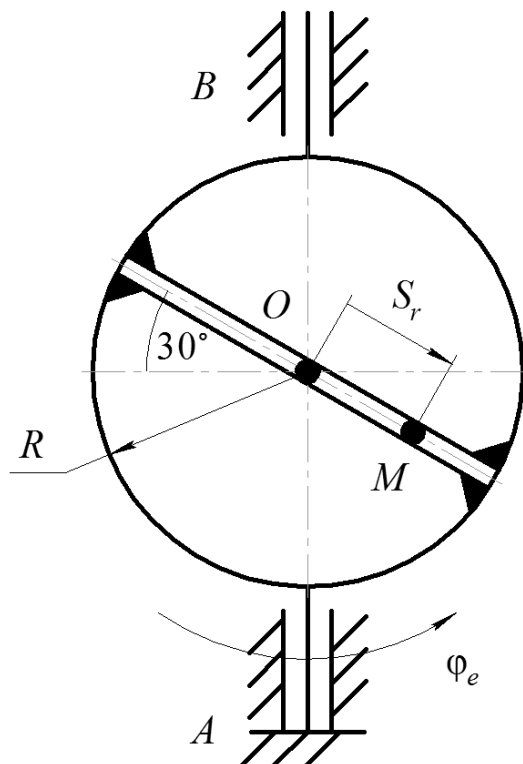


Рисунок 3.3 – Вихідна схема (ТМ-6, приклад 2)

Розв'язання

Вісь обертання рами встановлено в під'ятник A та шарнірну циліндричну опору B . Обертання рами за законом переносного руху $\varphi_e = 2,5t^2 + t$, рад відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитись на конструкцію згори.

1. Складемо розрахункову схему (рис. 3.4). На схемі позначимо відносну швидкість v_r , відносне прискорення a_r , переносну швидкість v_e , переносні прискорення a_e^n та a_e^t , кутову швидкість ω_e та прискорення ε_e для переносного руху, прискорення Коріоліса a_C , та вісі координат x , y та z .

Зазначимо, що параметри v_e , a_e^{τ} , a_c та вісь z спрямовані у напрямку, перпендикулярному площині рисунку та вдалечінь (позначено \otimes).

Відносний рух є прямолінійним вздовж каналу рами, переносний рух є обертальним навколо вісі рами AB .

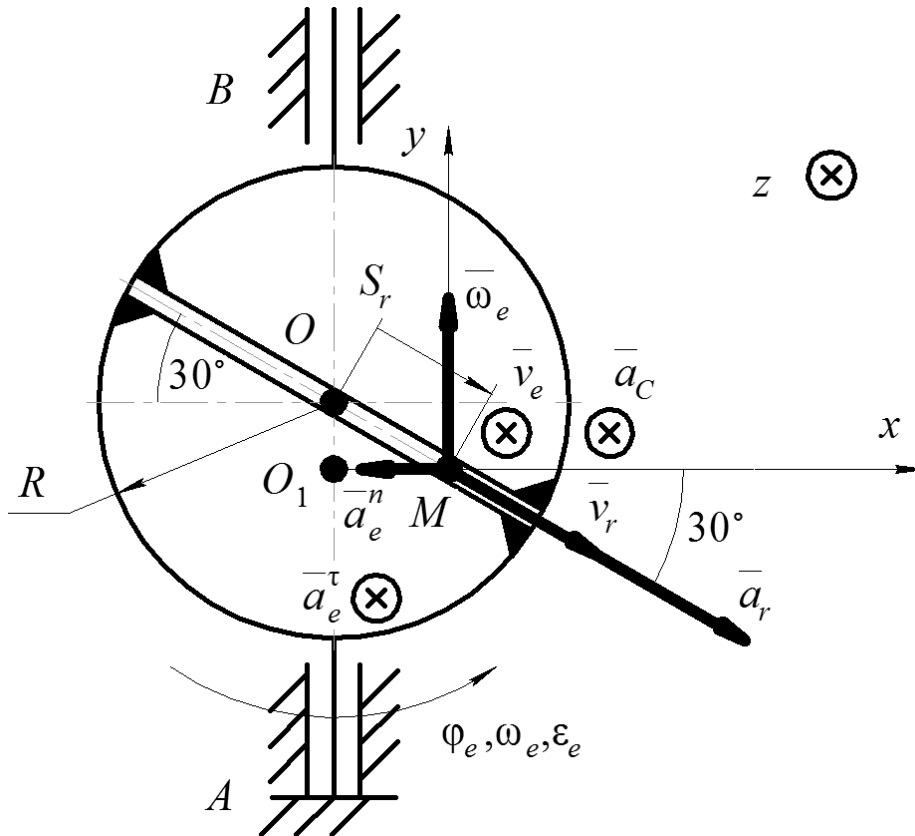


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема (ТМ-6, приклад 2)

2. Визначимо положення точки M у момент часу $t = 3$ с.

Підставимо $t = 3$ с до $S_r = 0,5t^2 + 1,5t$

$$S_r(3) = 0,5 \cdot 3^2 + 1,5 \cdot 3 = 9 \text{ (м)}.$$

Для визначення параметрів відносного руху умовно зупинимо переносний рух.

3. Визначимо відносну швидкість v_r за прямолінійного руху точки

$$v_r(t) = \frac{d(S_r(t))}{dt} = \frac{d(0,5t^2 + 1,5t)}{dt} = t + 1,5, \text{ м/с}.$$

Підставимо $t = 3$ с

$$v_r(3) = 3 + 1,5 = 4,5 \text{ (м/с)}.$$

4. Визначимо відносне прискорення a_r за прямолінійного руху точки

$$a_r(t) = \frac{d(v_r(t))}{dt} = \frac{d(t + 1,5)}{dt} = 1, \text{ м/с}^2.$$

Для визначення параметрів переносного руху умовно зупинимо відносний рух.

5. Визначимо переносну швидкість v_e за криволінійного руху

Радіусом обертання для переносного руху є відстань MO_1 , яка визначається із положення точки M у момент часу 3 с

$$MO_1 = S_r(3) \cdot \cos(30^\circ) = 7,79 \text{ (м)}.$$

Визначимо кутову швидкість ω_e за криволінійного переносного руху

$$\omega_e(t) = \frac{d(\varphi_e(t))}{dt} = \frac{d(2,5t^2 + t)}{dt} = 5t + 1, \text{ рад/с}.$$

Лінійна швидкість точки за обертального переносного руху

$$v_e(t) = \omega_e(t) \cdot MO_1 = (5t + 1) \cdot 7,79 = 38,95t + 7,79, \text{ м/с}.$$

Підставимо $t = 3$ с

$$v_e(3) = 38,95 \cdot 3 + 7,79 = 124,7 \text{ м/с}.$$

6. Визначимо лінійне прискорення за криволінійного переносного руху

$$\overline{a_e} = \overline{a_e^n} + \overline{a_e^\tau}.$$

Визначимо нормальне прискорення точки M відносно центру обертання O_1 за криволінійного переносного руху

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot MO_1 = (5t + 1)^2 \cdot 7,79, \text{ м/с}^2.$$

Підставимо $t = 3$ с

$$a_e^n(3) = (5 \cdot 3 + 1)^2 \cdot 7,79 = 1994,24 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо кутове прискорення ε_e за криволінійного переносного руху

$$\varepsilon_e(t) = \frac{d(\omega_e(t))}{dt} = \frac{d(5t + 1)}{dt} = 5, \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо тангенціальне прискорення точки M відносно центру обертання O_1 за криволінійного переносного руху

$$a_e^r = \varepsilon_3 \cdot MO_1 = 5 \cdot 7,79 = 38,95 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

7. Визначимо прискорення Коріоліса

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin(120^\circ) = 2 \cdot (5t + 1) \cdot (t + 1,5) \cdot 0,866, \text{ м/с}.$$

Підставимо $t = 3 \text{ с}$

$$a_c(3) = 2 \cdot (5 \cdot 3 + 1) \cdot (3 + 1,5) \cdot 0,866 = 124,7 \text{ м/с}.$$

На розрахунковій схемі прискорення Коріоліса спрямовуємо у бік, з якого поворот вектора ω_e в напрямку v_r видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

8. Визначимо абсолютну швидкість точки M

Напрямки векторів швидкостей v_r та v_e швидкостей перетинаються під кутом 90° , тому за теоремою Піфагора

$$v_M(3) = \sqrt{(v_r(3))^2 + (v_e(3))^2} = \sqrt{4,5^2 + 124,7^2} = 124,78 \text{ (м/с)}.$$

9. Визначимо абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 2 \text{ с}$

Зважаючи на напрямки прискорень, вказані на рисунку 3.4,

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{\left(\sum a_{ix}\right)^2 + \left(\sum a_{iy}\right)^2 + \left(\sum a_{iz}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(a_r \cdot \cos(30^\circ) - a_e^n)^2 + (a_r \cdot \sin(30^\circ))^2 + (a_e^r + a_c)^2} = \\ &= \sqrt{(1 \cdot 0,866 - 1994,24)^2 + (1 \cdot 0,5)^2 + (38,95 + 124,7)^2} = \\ &= \sqrt{(-1993,374)^2 + (1,5)^2 + (163,65)^2} = 2000,1 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $v_M = 124,78 \text{ (м/с)}$, $a_M = 2000,1 \text{ (м/с}^2\text{)}$.

3.2.1 ТМ-6, приклад 2. Визначення кінематичних характеристик точки за складного руху з використанням пакету MathCAD

[↑ДО ТМ-6↑](#) [↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Для визначення кінематичних характеристик точок за складного руху (рис. 3.3) аналітичним методом у прикладному пакеті MathCAD можна скористатись наступним алгоритмом

- запишемо вихідні дані

$$S_r(t) := 0.5 \cdot t^2 + 1.5t \quad \text{m} \quad t := 3 \quad \text{s}$$
$$\varphi_e(t) := 2.5 \cdot t^2 + t \quad \text{rad} \quad \underline{\underline{R}} := 10 \quad \text{m}$$

- визначимо положення точки M у момент часу $t = 3$ с

$$S_r(3) = 9 \quad \text{m}$$

- визначимо відносну швидкість v_r за прямолінійного руху точки

$$v_r(t) := \frac{d}{dt} S_r(t) \rightarrow 1.0 \cdot t + 1.5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_r(3) = 4.5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо відносне прискорення a_r за прямолінійного руху точки

$$a_r(t) := \frac{d}{dt} v_r(t) \rightarrow 1.0 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$a_r(3) = 1 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- визначимо переносну швидкість v_e за криволінійного руху

$$MO_1 := S_r(3) \cdot \cos(30\text{deg}) = 7.794 \quad \text{m}$$
$$\omega_e(t) := \frac{d}{dt} \varphi_e(t) \rightarrow 5.0 \cdot t + 1 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$v_e(t) := \omega_e(t) \cdot MO_1 \rightarrow 38.97 \cdot t + 7.79 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_e(3) = 124.708 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- визначимо лінійне прискорення за криволінійного переносного руху

$$a_{en}(t) := \omega_e(t)^2 \cdot MO_1 \rightarrow 7.79 \cdot (5-t + 1)^2 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_{en}(3) = 1995.32 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$\varepsilon_e(t) := \frac{d}{dt} \omega_e(t) \rightarrow 5.0 \quad \frac{rad}{s^2}$$

$$a_{e\tau}(t) := \varepsilon_e(t) \cdot MO_1 \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_{e\tau}(3) = 38.971 \quad \frac{m}{s^2}$$

- визначимо прискорення Коріоліса

$$a_C(t) := 2 \cdot \omega_e(t) \cdot v_r(t) \cdot \sin(120deg) \rightarrow \sin(120 \cdot deg) \cdot (1.0-t + 1.5) \cdot (10.0-t + 2) \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_C(3) = 124.708 \quad \frac{m}{s^2}$$

- визначимо абсолютну швидкість точки M у момент часу $t = 3$ с

$$v_M(t) := \sqrt{v_r(t)^2 + v_e(t)^2} \rightarrow \sqrt{(38.97 \cdot t + 7.79)^2 + (1-t + 1.5)^2} \quad \frac{m}{s}$$

$$v_M(3) = 124.789 \quad \frac{m}{s}$$

- визначимо абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 3$ с, орієнтуючись на розрахункову схему ([рис. 3.4](#))

$$a_M(t) := \sqrt{(a_r(t) \cdot \cos(30deg) - a_{en}(t))^2 + (a_r(t) \cdot \sin(30deg))^2 + (a_{e\tau}(t) + a_C(t))^2} \quad \frac{m}{s^2}$$

$$a_M(3) = 2001.162 \quad \frac{m}{s^2}$$

3.3 Задачі для самопідготовки (ТМ-6)

[↑ДО ТМ-6↑](#)

[↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑](#)

Умова задачі

<https://btpm.nmu.org.ua/ua/selfstudy/tm6%D1%83%D0%BA%D1%80.jpg>

ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до Положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти».

Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

Шкали

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок мобільних студентів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90...100	відмінно / Excellent
74...89	добре / Good
60...73	задовільно / Satisfactory
0...59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

Засоби та процедури

Зміст засобів діагностики спрямовано на контроль рівня сформованості знань, умінь, комунікації, автономності та відповідальності студента за вимогами НРК до 6-го кваліфікаційного рівня під час демонстрації регламентованих робочою програмою результатів навчання.

Студент на контрольних заходах має виконувати завдання, орієнтовані виключно на демонстрацію дисциплінарних результатів навчання (розділ 2).

Засоби діагностики, що надаються студентам на контрольних заходах у вигляді завдань для поточного та підсумкового контролю, формуються шляхом конкретизації вихідних даних та способу демонстрації дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики (контрольні завдання) для поточного та підсумкового контролю дисципліни затверджуються кафедрою.

Види засобів діагностики та процедур оцінювання для поточного та підсумкового контролю дисципліни подано нижче.

Засоби діагностики та процедури оцінювання

ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ			ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ	
навчальн е заняття	засоби діагностики	процедури	засоби діагностики	процедури
лекції	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдання під час лекцій	комплексна контрольна робота (ККР)	визначення середньозваженого результату поточних контролів;
практичні	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдань під час практичних занять		виконання ККР під час екзамену за бажанням студента
	або індивідуальне завдання	виконання завдань під час самостійної роботи		

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих завдань. Практичні заняття оцінюються якістю виконання контрольного або індивідуального завдання.

Якщо зміст певного виду занять підпорядковано декільком складовим, то інтегральне значення оцінки може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюються викладачем.

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі студента шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен студент під час екзамену має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Кількість конкретизованих завдань ККР повинна відповідати відведеному часу на виконання. Кількість варіантів ККР має забезпечити індивідуалізацію завдання.

Значення оцінки за виконання ККР визначається середньою оцінкою складових (конкретизованих завдань) і є остаточним.

Інтегральне значення оцінки виконання ККР може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюється кафедрою для кожної складової опису кваліфікаційного рівня НРК.

Критерії

Реальні результати навчання студента ідентифікуються та вимірюються відносно очікуваних під час контрольних заходів за допомогою критеріїв, що описують дії студента для демонстрації досягнення результатів навчання.

Для оцінювання виконання контрольних завдань під час поточного контролю лекційних і практичних занять в якості критерію використовується коефіцієнт засвоєння, що автоматично адаптує показник оцінки до рейтингової шкали:

$$O_i = 100 a/m,$$

де a – число правильних відповідей або виконаних суттєвих операцій відповідно до еталону рішення; m – загальна кількість запитань або суттєвих операцій еталону.

Індивідуальні завдання та комплексні контрольні роботи оцінюються експертно за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою.

Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
Знання		
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
Уміння/навички		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
Комунікація		
<ul style="list-style-type: none"> ♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово 	<p>Вільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. <p>Комунікаційна стратегія:</p> <ul style="list-style-type: none"> - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції 	95-100
	<p>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами.</p> <p>Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами.</p> <p>Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</p>	90-94

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
<i>Відповідальність і автономія</i>		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<p>♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах;</p> <p>♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти;</p> <p>♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп;</p> <p>♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії</p>	<p>самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію;</p> <ul style="list-style-type: none"> - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; <p>2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; <p>3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - використання професійно-орієнтовних навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; <p>4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації 	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

Рекомендована література

↑↑↑ДО ЗМІСТУ↑↑↑

1. Онищенко С.В., Колосов Д.Л. Розв'язання задач на рівновагу збіжної системи сил в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з тем «Моделювання взаємозв'язків об'єктів» та «Система збіжних сил» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 55 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/162051>

2. Онищенко С.В., Колосов Д.Л. Розв'язання задач статички в середовищі MathCAD. Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 208 с. – Режим доступу : <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/162050>

3. Теоретична механіка [Текст] : підруч. Для студ. вищ. Навч. Закл. / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с. ISBN 966-575-184-0

4. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач: навч. Посібник для студ. вищих навч. Закл. / О. С. Апостолюк [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2007. – 400 с. ISBN 966-575-059-3

5. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. Посіб. Для студ. вищ. Навч. Закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. Технічний ун-т, Львівський держ. Ун-т безпеки життєдіяльності. – Вид. 2-е, допов., переробл. – Луцьк : Надстир'я, 2007. – 504 с. – Бібліогр.: с. 500-501. ISBN 978-966-517-585-8

Онищенко Сергій Валерійович
Колосов Дмитро Леонідович

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ В СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD.

Методичні рекомендації до самопідготовки студентів (практикум) з розділу «Кінематика» дисципліни «Прикладна механіка» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство»

Видається в авторській редакції

Підписано до видання 05.09.2023 р.
Електронний ресурс Авт. арк. 3,27

Розроблено і видано в
Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.