МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна, Ю.О. Шевченко

ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 517.2
К 70

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
галузі знань 12 «Інформаційні технології»
(протокол № 8 від 27.06.2024)*

Рецензенти:
С. С. НАСОНОВА – канд. техн. наук, доц. (Дніпровський державний університет внутрішніх справ);
Д. О. СЕРДЮК – магістр з системного аналізу, математик-програміст (мережа магазинів «PROSTOR»).

Коряшкіна Л.С.
К 70 Практикум з диференціальних рівнянь [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна, Ю.О. Шевченко; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024 – 178 с.

У навчальному посібнику розглянуті основні розділи нормативної дисципліни «Диференціальні рівняння», а саме: диференціальні рівняння першого й вищих порядків та їх системи.

Кожна частина видання містить теоретичний матеріал, необхідний для розуміння основ теорії диференціальних рівнянь, і приклади розв’язування типових задач.

Для здобувачів ступеня бакалавра галузі знань 12 «Інформаційні технології», а також для студентів інших спеціальностей, які мають намір сформувати уявлення про основи диференціальних рівнянь.

УДК 517.2

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналіз великої кількісті технологічних, фізичних, біологічних, хімічних та природних явищ і процесів потребує глибокого знання математичного апарату, адже передбачає моделювання процесів у вигляді певних математичних виразів, рівнянь, співвідношень. Рівняння, які характеризують ту чи іншу залежність між досліджуваними величинами та швидкістю їхньої зміни відносно інших показників, називаються диференціальними. Отже, опанування цього виду математичних завдань суттєво важливе для опису й подальшого аналізу динамічних процесів і систем.

Пропонований навчальний посібник розраховано на здобувачів вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», у програму підготовки яких включено диференціальні рівняння, а також видання може бути корисним для всіх зацікавлених у моделюванні, аналізі та прогнозуванні розвитку процесів і систем, змінних у часі. Мета посібника, як і дисципліни в цілому – це формування компетентностей сфери моделювання й аналізу динамічних об'єктів за допомогою диференціальних рівнянь.

У виданні розглянуто основні розділи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а саме: диференціальні рівняння першого порядку (з розділними змінними, однорідні, лінійні, рівняння в повних диференціалах тощо) та вищих порядків (у яких можливе зниження порядку, однорідні та лінійні), системи диференціальних рівнянь (однорідні та неоднорідні); крайові задачі для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, деякі питання стійкості динамічних систем. Зміст посібника повністю відповідає програмі навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння».

Для кращого засвоєння здобувачем вищої освіти навчального матеріалу та оволодіння методами розв'язування диференціальних рівнянь у кожному розділі посібника подано теоретичні відомості, необхідні для розуміння і подальшого використання цих знань на практиці, а також приклади розв'язування типових задач. Останній розділ містить варіанти індивідуальних робіт.

Автори сподіваються, що викладений у посібнику матеріал сприятиме формуванню кваліфікації фахівця з інформаційних технологій, розвитку його самостійного мислення й творчої активності.

ТЕМА 1. ВСТУП У ТЕОРІЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує невідому функції $\boldsymbol{f(x)}$, її похідні до *n*-го порядку та незалежну змінну *x*:

$$\boldsymbol{F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0.} \qquad (\mathbf{1.1})$$

Надалі будемо вважати, що функція $F\left(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)\right)$ є функцією, неперервною за всіма своїми аргументами.

Важливо зазначити, що вираз $y' = \frac{dy}{dx}$ – це диференціальна тотожність, а не рівняння.

Часто рівняння (1.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, тобто записати його у вигляді

$$\boldsymbol{y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right).}$$

Диференціальне рівняння, яке є розв'язаним відносно старшої похідної, називається **звичайним диференціальним рівнянням в нормальній формі** або у формі (вигляді) Коші.

Найбільший порядок похідної, яка приймає участь у рівнянні, є **порядком** самого рівняння. Наприклад, $\boldsymbol{(y')^4 + 3xy = \cos(x)}$ – рівняння першого порядку, а $\boldsymbol{y^{IV} + 2y^{II} = 5}$ – рівняння четвертого порядку.

Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то мова йде про частинні похідні, а диференціальне рівняння називають **рівнянням в частинних похідних**.

Наприклад,

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t),}$$

де $\boldsymbol{u(x, y, t)}$ – невідома функція, яку необхідно знайти.

Відтак, класифікацію диференціальних рівнянь можна представити за схемою, наведеною на рис. 1.

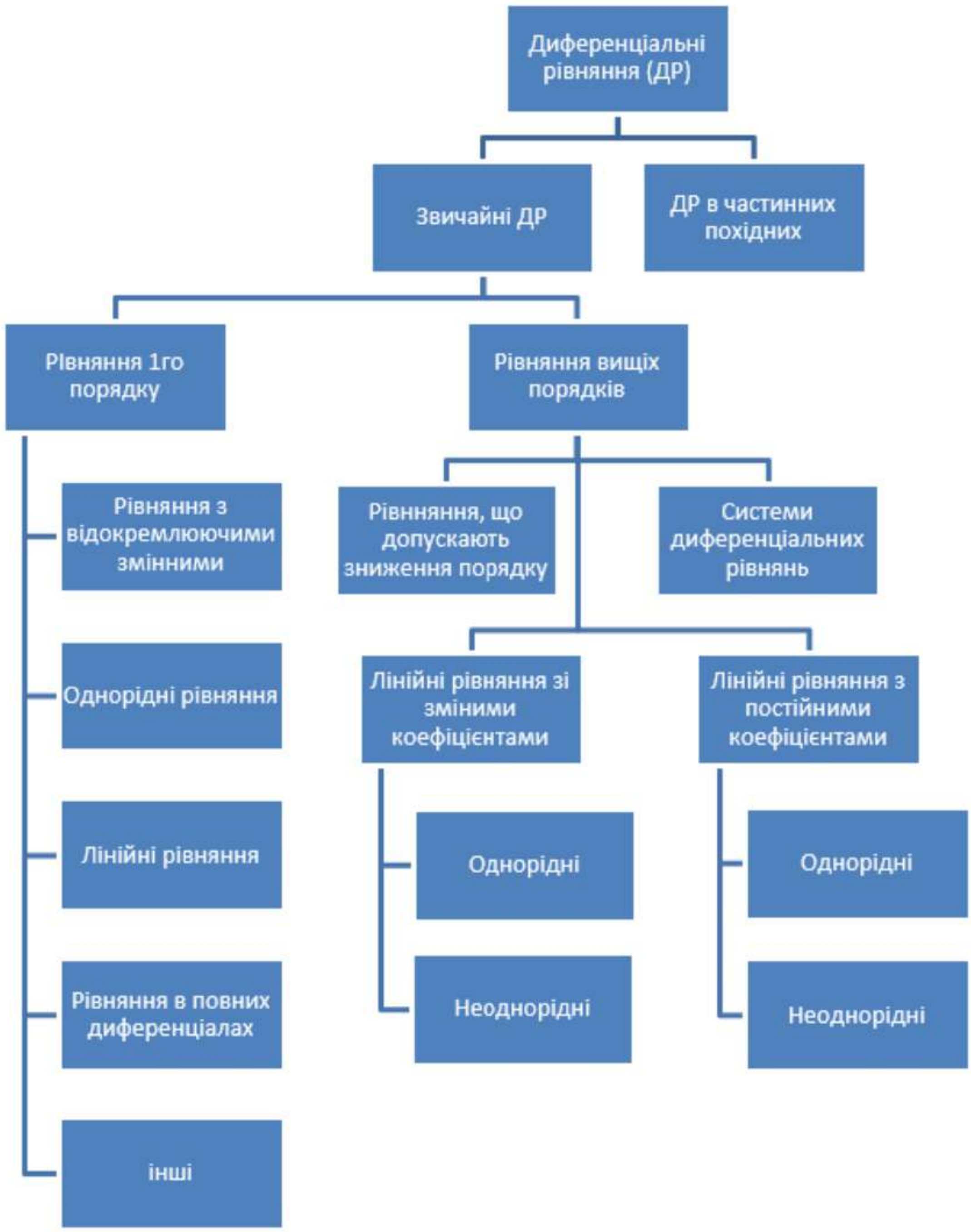

Рисунок 1.1. Класифікація диференціальних рівнянь

Загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння (1.1) називається функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \mathrm{C}_{\mathbf{1}}, \mathrm{C}_{\mathbf{2}}, \dots, \mathrm{C}_{\boldsymbol{n}})$, яка є n разів неперервно диференційованою та перетворює (1.1) на тотожність.

Окремим (частинним) розв'язком рівняння (1.1) називають розв'язок, який отримано із загального шляхом завдання певних значень констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Аби із загального розв'язку виділити один частинний розв'язок, потрібно до рівняння (1.1) додати ще *n* умов. Якщо ці умови задаються в одній точці, така задача розв'язання рівняння (1.1) називається **задачею Коші**. Математично задача Коші має наступний вигляд:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'^{(x_0)} = y_1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Теорема 1 (теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Нехай функція $f(x, y)$ задовольняє наступні умови:

– є неперервною за всіма своїми аргументами на деякій області *D*;

– має обмежену в області *D* похідну $f_y'(x, y)$.

Тоді знайдеться деякий інтервал $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, в якому існує єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (1.2).

Якщо додаткові до рівняння (1.1) умови (1.2) задані у декількох різних точках, то задача називається **багатоточковою задачею**. Якщо таких точок дві – **крайовою (або граничною) задачею**.

Особливим розв'язком диференціального рівняння (1.1) називається такий розв'язок рівняння, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Графік функції, яка є розв'язком звичайного диференціального рівняння (1.1), на площині $\mathbb{R}^2_{x,y}$ називається **інтегральною кривою**.

Важливо зазначити, що розв'язок не завжди можна представити у вигляді інтегральної кривої.

Для побудови диференціального рівняння, якому задовольняють криві сімейства

$$\varphi(x, y(x), C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \qquad (1.3)$$

необхідно диференціювати рівняння (1.3) *n*-разів, а потім з отриманих рівнянь та рівняння (1.3) виключити постійні $C_1, C_2, \dots, C_n$.

1.2. Метод ізоклін розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Розглянемо геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку в нормальному вигляді

$$y' = f(x, y). \qquad (1.4)$$

Воно визначає в кожній точці (x, y), де існує функція $f(x, y)$, значення y', тобто кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої в цій точці (рис. 1.2): $tg(\alpha) = y'(x_0, y_0)$.

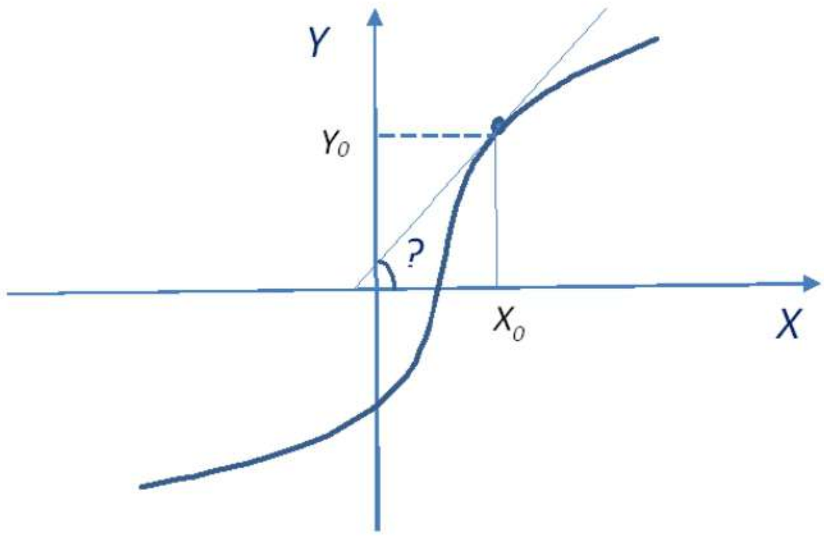

Рисунок 1.2. Геометричний зміст диференціального рівняння

Приріст по *y* можна записати у вигляді $\Delta y = f(x_0, y_0)\Delta x$. Нехай $\Delta x = 1$, тоді $\Delta y = f(x_0, y_0)$. У такому випадку до кожної точки (x, y) можна провести відрізок, який буде колінеарним (паралельним) до вектора з компонентами $\begin{pmatrix} 1 \\ f(x_i, y_i) \end{pmatrix}$. Множина усіх таких відрізків називається **полем напрямку**.

А отже, диференціальне рівняння (1.4) визначає поле напрямків.

Інтегральна крива в кожній точці дотикається поля напрямків, і будь-яка крива, що дотикається до кожної точки поля напрямків, є інтегральною кривою. За допомогою поля напрямків можна наближено відтворити розв'язок диференціального рівняння.

Задача інтегрування рівняння (1.4) може бути сформульована наступним чином: необхідно знайти таку інтегральну криву, дотична до якої в кожній точці мала б напрямок, що збігається з напрямком поля в цій точці.

Ізокліною (або лінією рівного нахилу) диференціального рівняння (1.4) називається геометричне місце точок, в яких дотична до шуканих інтегральних кривих має один і той самий напрямок.

Рівняння сімейства ізоклін має вигляд $f(x, y) = \mathrm{C}$, де C – певний параметр (константа). Так, наприклад, коли $\mathrm{C} = 0$, маємо горизонтальний нахил дотичної; при $\mathrm{C} = 1$ кут 45 градусів, для $\mathrm{C} = -1$, кут 135 градусів і т.д.

Надаючи параметру С певні значення, можна знайти досить густу сітку ізоклін і за допомогою неї приблизно побудувати інтегральні криві.

Для більшої точності зображення інтегральних кривих корисно побудувати геометричне місце точок перегину. Для цього необхідно знайти другу похідну функції та прирівняти її нулю:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f(x, y) = 0.$$

Це рівняння є рівнянням можливих точок перетину.

Приклад 1. Розв'язати за допомогою метода ізоклін:

$$y' = 2x - y.$$

Розв'язання. Позначимо $2x - y = k$, тоді маємо

$k = 0, \quad y = 2x, (\angle\alpha = 0°)$;

$k = 1, \quad y = 2x - 1, (\angle\alpha = 45°);$

$k = -1, \quad y = 2x + 1, (\angle\alpha = 135°);$

$k = 3, \quad y = 2x - 3 \ (\angle\alpha \approx 73°).$

Знайдемо також другу похідну для визначення лінії перегину:

$$y'' = (2x - y)' = 2 - y' = 2 - (2x - y) = 2 - 2x + y = 0,$$

$$y = 2x - 2.$$

За полем напрямків відновлюємо інтегральні криві (див. рис. 1.3).

Приклад 2. За допомогою метода ізоклін зобразити інтегральні криві рівняння

$$y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Розв'язання. Позначимо $\frac{y-x}{y+x} = k$, тоді маємо

$k = 0, \quad y - x = 0, \quad y = x \ (\angle\alpha = 0°);$

$k = 1, \quad y - x = y + x, \quad -x - x = 0, \quad -2x = 0, \ x = 0 \ (\angle\alpha = 45°);$

$k = -1, \quad y - x = -y - x, \ y + y = 0, \ 2y = 0, \ y = 0 \ , (\angle\alpha = 135°);$

$k = \infty, \quad y + x = 0, \quad y = -x \ (\angle\alpha = 90°).$

Поле напрямків і інтегральні криві диференціального рівняння наведено на рис. 1.4.

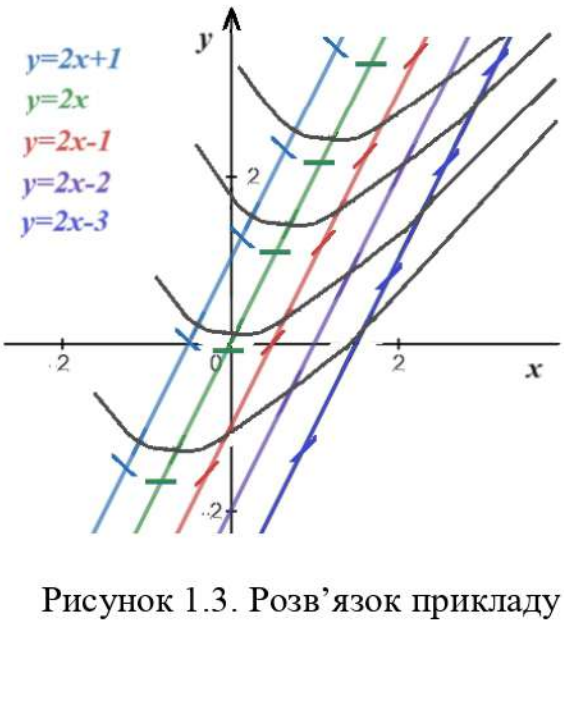

Рисунок 1.3. Розв'язок прикладу

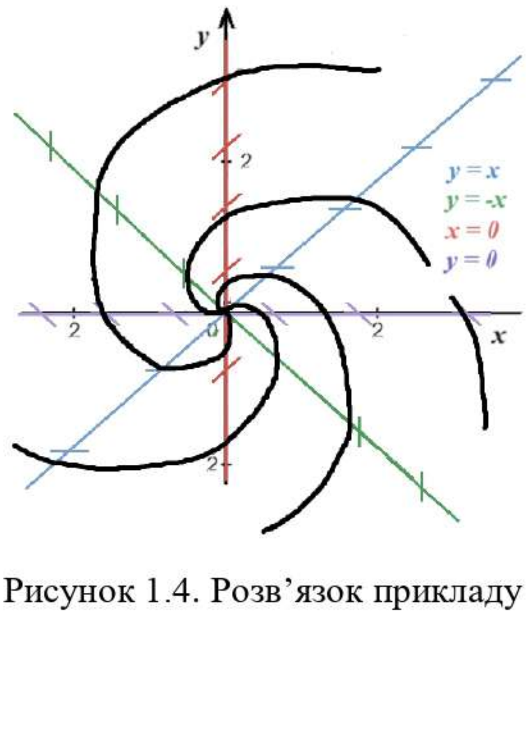

Рисунок 1.4. Розв'язок прикладу

У тому випадку, коли мова йде про розв'язок задачі Коші, маємо справу не з усім сімейством інтегральних кривих, а з конкретною кривою, яка проходить через певну точку. Так, наприклад, сформулюємо задачу Коші для попереднього прикладу $y' = 2x - y$, додавши початкову умову $y(0) = 1$.

Тоді необхідно знайти ту інтегральну криву, яка проходить через точку $(0; 1)$. Розв'язуючи цей приклад аналітично (про те, як це зробити, мова піде у наступному параграфі), можна отримати розв'язок у вигляді $y = 2(x - 1) + Ce^{-x}$. Тобто, кожна інтегральна крива може бути описана цим рівнянням при певному значенні *C*, а будь-якому значенню константи *C* відповідає деяка інтегральна крива. Задовольняючи умову задачі Коші, знаходимо значення константи *C*:

$1 = 2(0 - 1) + C,$

$1 = -2 + C,$

$C = 3.$

Отже, через точку $y(0) = 1$ проходить розв'язок $y = 2(x - 1) + 3e^{-x}$.

Практичні завдання

Розв'язати за допомогою метода ізоклін.

1. $\boldsymbol{y' = 2y.}$
2. $\boldsymbol{y' = x^2 + y^2}$.
3. $\boldsymbol{y' = \frac{y}{3}.}$
4. $\boldsymbol{y' = y - x^2}$.
5. $\boldsymbol{y' = 9y.}$
6. $\boldsymbol{y' = -yx^2}$
7. $\boldsymbol{y' = 2xy}$
8. $\boldsymbol{y' = y\cos(x)}$
9. $\boldsymbol{y' = x^2 - y}$
10. $\boldsymbol{y' = 2x - y}$.

1.3. Задачі, розв'язування яких зводиться до диференціальних рівнянь

Розглянемо декілька задач, математичними моделями яких є диференціальні рівняння.

Задача 1. У резервуар, що містить 10 л води, безперервно надходить зі швидкістю 2 л на хвилину розчин, у кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що надходить до резервуару, змішується з водою. Суміш витікає з резервуару з такою самою швидкістю. Скільки солі буде у резервуарі через 5 хвилин?

Розв'язання. Приймемо за незалежну змінну час t, а за шукану функцію $y(t)$ – кількість солі в резервуарі через t хвилин після початку дослідження. Знайдемо, на скільки зміниться кількість солі за проміжок часу від моменту t до $t+\Delta t$. За одну хвилину надходить 2 л розчину, а за Δt хвилин – $2\Delta t$ літрів. У цих $2\Delta t$ літрах міститься $0{,}3 \cdot 2\Delta t = 0.6\Delta t$ кг солі. З іншого боку, за час Δt із резервуару витікає $2\Delta t$ літрів розчину. У момент t у всьому сосуді (10 л) містяться $y(t)$ кг солі, а отже, в $2\Delta t$ літрах витікаючого розчину містилося б $2\Delta t \cdot y(t)$ кг солі, якби за час Δt вміст солі в ємності не змінювався. Але оскільки вона за цей час змінюється на величину, нескінченно малу при $\Delta t \to 0$, то в $2\Delta t$ літрах, що витікають, міститься $0{,}2\Delta t \cdot (y(t)+\alpha)$ кг солі, де $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Таким чином, в розчині, що втікає за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$, міститься $0.6\Delta t$ кг солі, а в тому, що витікає, $0.2\Delta t \cdot (y(t)+\alpha)$ кг. Збільшення кількості солі за цей час $y(t+\Delta t)-y(t)$ дорівнює різниці знайдених величин, тобто

$$y(t+\Delta t)-y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t \cdot (y(t)+\alpha).$$

Розділимо на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. У лівій частині виходить похідна $y'(t)$, а у правій отримаємо $0{,}6-0{,}2y(t)$, оскільки $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Отже, маємо диференціальне рівняння $y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t)$. Розв'язуючи його, отримаємо

$$y(t) = 3 - Ce^{-0.2t}.$$

Оскільки при $t = 0$ солі в резервуарі не було, то $y(0) = 0$. Покладаючи в останньому рівнянні $t = 0$, знайдемо $y(0) = 3 - C$, $0 = 3 - C$, $C = 3$. Підставляючи це значення C у розв'язок диференціального рівняння, отримаємо $y(t) = 3 - 3e^{-0.2t}$. При $t = 5$ у резервуарі буде

$$y(5) = 3 - 3e^{-0.2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг солі.}$$

Задача 2. Два сполучених резервуари мають форму паралелепіпедів, площі яких дорівнюють S і S_1 (див. рис. 1.5).

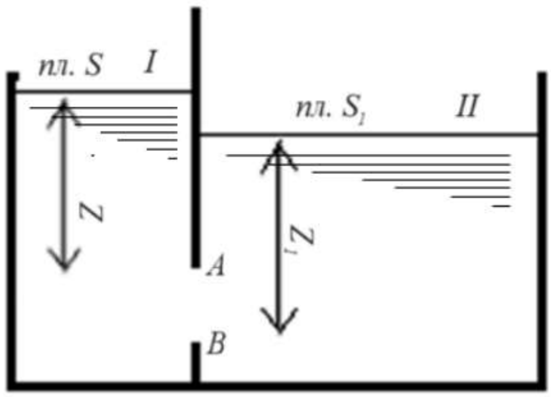

Рисунок 1.5. Задача про резервуар

Знайти час, необхідний для встановлення однакових рівнів рідини в резервуарах, якщо $S = S_1 = 100$ м^2, початкова різниця рівнів $h = 2{,}5$ м, площа отвору між резервуарами $\omega = 0{,}5$ м^2, коефіцієнт гідравлічного опору $\delta = 0{,}62$.

Розв'язання. Кількість рідини, що втрачається першим резервуаром, дорівнює кількості рідини, отриманої другим резервуаром.

Тому

$$-Sdz = S_1 dz_1.$$

Звідси

$$dz - dz_1 = \frac{S + S_1}{S_1} dz.$$

Протягом часу dt через отвір AB площею ω пройде обсяг рідини $\delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}dt$, і тому

$$-Sdz = \delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}dt$$

або

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}dt = -\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}. \tag{1.5}$$

Вважаючи $z - z_1 = u$, отримаємо:

$$du = dz - dz_1 = \frac{S+S_1}{S_1}dz,$$

звідси

$$dz = \frac{S_1 du}{S+S_1}.$$

Як наслідок, рівняння (1.5) набуде вигляду:

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}dt = -\frac{S_1}{S+S_1}\frac{du}{\sqrt{u}},$$

звідси

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}T = -\frac{S_1}{S+S_1}\int_h^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{S_1}{S+S_1}\int_0^h \frac{du}{\sqrt{u}}. \tag{1.6}$$

Інтегруючи рівність (1.6) та підставляючи числові значення, знаходимо:

$$T = \frac{SS_1\sqrt{2h}}{\delta\omega(S+S_1)\sqrt{g}} = 114{,}5 \text{ с}.$$

Задача 3. За який час витече вода з циліндричного баку діаметром 1,8 м, висотою 2,45 м через круглий отвір радіусом 3 см на дні? Вісь бака слід вважати вертикальною. В задачі прийняти, що швидкість витікання рідини з посудини $v = R\sqrt{2gh}$, де $g \approx 10$ м/с^2, h – висота рівня рідини над отвором, R – коефіцієнт в'язкості (для води $R = 0{,}6$).

Розв'язання. Нехай в момент часу t висота рівня води була $h(t)$. Знайдемо, на скільки змінився об'єм води за малий проміжок Δt. Об'єм води в малий момент часу t – $\pi R^2 h(t)$, об'єм води в момент часу $t + \Delta t$ дорівнює $\pi R^2 h(t + \Delta t)$. За цей час з циліндра витекло $\pi r^2 \frac{3}{5}\sqrt{2gh(t)}\Delta t$ води. Відтак, отримуємо рівняння

$$\pi R^2\big(h(t+\Delta t) - h(t)\big) = -\pi r^2 \frac{3}{5}\sqrt{2gh(t)}\Delta t.$$

Після ділення на Δt та переходу до границі при $\Delta t \to 0$ отримуємо

$$h' = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3}{5}\sqrt{2gh},$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3}{5}\sqrt{2g}dt,$$

$$2\sqrt{h} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3}{5}\sqrt{2g}t + C,$$

$$\sqrt{h} = -0.3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2g}t + C.$$

Константу C знайдемо з початкових умов $h(0) = H$: $\sqrt{H} = C$. Отже,

$$\sqrt{H} - \sqrt{h} = 0.3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2g}t.$$

Знайдемо, коли $h(t) = 0$:

$$\sqrt{H} = 0.3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2g}t,$$

$$t = \frac{10}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 17.5 \text{ (хв)}.$$

ТЕМА 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

2.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Загальний вигляд звичайного диференціального рівняння першого порядку має вигляд:

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку у вигляді Коші (нормальній формі) має вигляд:

$$y'(x) = f(x, y).$$

Рівняння з відокремлюваними змінними – це рівняння, які можна записати у вигляді:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \tag{2.1}$$

або

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \tag{2.2}$$

Для розв'язання такого рівняння необхідно розділити змінні, тобто привести рівняння до такого вигляду, аби при диференціалі dx стояли функції, які залежать тільки від x, а при диференціалі dy стояли функції, які залежать тільки від y. Для цього рівняння (2.1) переписують у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\,,$$

а рівняння (2.2) – у вигляді

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0.$$

Для знаходження загального розв'язку отримане рівняння необхідно інтегрувати.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння. Диференціальне рівняння, яке інтегрується за допомогою скінченного числа інтегралів чи інших елементарних дій (операцій), називається інтегрованим в квадратурах.

Зазначимо, що розв'язок може бути визначеним на всьому проміжку, або може бути зазначеним лише на скільки-завгодно малому проміжку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$$

Розв'язання. Це рівняння відноситься до класу рівнянь з відокремлюваними змінними, і його можна переписати у вигляді

$$2xdx + xy^2dx = yx^2dy + ydy$$

або

$$(2x + xy^2)dx = (yx^2 + y)dy,$$

$$x(2 + y^2)dx = y(x^2 + 1)dy.$$

Розділимо змінні, спочатку поділивши все на $(2 + y^2)$, а потім на $(x^2 + 1)$:

$$\frac{x(2 + y^2)dx}{(2 + y^2)} = \frac{y(x^2 + 1)dy}{(2 + y^2)},$$

$$xdx = \frac{y(x^2 + 1)dy}{(2 + y^2)},$$

$$\frac{xdx}{(x^2 + 1)} = \frac{y(x^2 + 1)dy}{(2 + y^2)(x^2 + 1)},$$

$$\frac{xdx}{(x^2 + 1)} = \frac{ydy}{(2 + y^2)}.$$

Інтегруємо рівняння

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)} = \int \frac{ydy}{(2 + y^2)}.$$

1. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)} = \left\{\begin{matrix} x^2 + 1 = u \\ 2xdx = du \\ xdx = \frac{du}{2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

2. $\int \frac{ydy}{(2+y^2)} = \left\{\begin{matrix} 2 + y^2 = u \\ 2ydy = du \\ ydy = \frac{du}{2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(2 + y^2) + C.$

Тоді маємо, що

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(2+y^2)+\mathrm{C}$$

або

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(2+y^2)+\ln(\mathrm{C}).$$

Отже,

$x^2+1=\mathrm{C}(2+y^2)$ – загальний інтеграл.

Відповідь: $x^2+1=\mathrm{C}(2+y^2)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'-ytgx=0.$$

Розв'язання. Перепишемо y' у вигляді $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}-ytgx=0$$

або

$$\frac{dy}{dx}=ytgx.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y}=tgxdx$$

та інтегруємо рівняння

$$\int\frac{dy}{y}=\int tgxdx.$$

Оскільки лівий інтеграл є табличним, розглянемо докладніше інтеграл $\int tgxdx$. Представимо його у вигляді:

$$\int tgxdx=\int\frac{sinx}{cosx}dx=\left\{\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=\sin x\,dx \\ dx=\dfrac{dt}{-\sin x}\end{matrix}\right\}=-\int\frac{dt}{t}=-ln|t|=-ln|\cos x|.$$

Отже, після інтегрування отримаємо:

$$ln|y|=-ln|\cos x|+C,$$

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Відповідь: $y = \frac{C}{\cos x}$.

Загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння першого порядку називають співвідношення вигляду $\Phi(x, y, C) = 0$, яке визначає неявним чином загальний розв'язок диференціального рівняння.

Окремо зазначимо, що в процесі перетворення рівняння можуть губитися його розв'язки за рахунок перетворення на нуль функцій $P(x)$ та $N(y)$. Тому необхідно додатково перевіряти наявність таких особливих розв'язків, і у випадку, коли такий розв'язок не може бути отриманим із загального розв'язку, його слід також враховувати.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\sin x \, dy = y \cos x \, dx.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

або

$$\frac{dy}{y} = ctg\, x\, dx.$$

Отже,

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctg\, x\, dx.$$

Тоді маємо

$$\ln y = \ln(\sin x) + \ln C,$$

$$y = C \cdot \sin x.$$

Зазначимо, що при розподілі змінних могли загубитися деякі розв'язки за рахунок обернення в нуль функції y, але в даному прикладі вираз $y = 0$ є складовою загального розв'язку.

Відповідь: $y = C \sin x$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(x+1)y' + y(y+1) = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо y' у вигляді $\frac{dy}{dx}$:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + y(y+1) = 0,$$

$$(x+1)dy = -y(y+1)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = -\int \frac{dx}{(x+1)}.$$

Розглянемо докладніше перший інтеграл

$$\int \frac{dy}{y^2+y} = \int \frac{dy}{\left(y^2+2y\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}} = \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = ln\left|\frac{y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + lnC.$$

Тоді маємо

$$ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + ln|C| = -ln|x+1|$$

$$\frac{y+1}{y} = \mathrm{C}(x+1).$$

Зазначимо, що при розподілі змінних могли загубитися розв'язки за рахунок обернення в нуль функцій $(y+1)$ та y. Вираз $y=-1$ є складовою загального розв'язку. Перевіримо вираз $y=0$, $(x+1)(0)' + (0)(0+1) = 0$.

Так, в нашому випадку розв'язок $y=0$ і є таким особливим розв'язком.

Відповідь: $\frac{y+1}{y} = \mathrm{C}(x+1)$ та $y=0$.

2.1.2. Рівняння, зведені до диференціального рівняння з роздільними змінними

Розглянемо рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c).$$

Таке рівняння приводиться до звичайного диференціального рівняння з роздільними змінними заміною $z(x) = ax + by(x) + c$.

Диференціюючи цей вираз, отримаємо

$$z'(x) = a + by'(x),$$

$$y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b},$$

тоді

$$z'(x) - a = bf(z).$$

$z'(x) = a + bf(z)$ – рівняння з роздільними змінними.

Приклад 5. Знайти розв'язок рівняння

$$y' = 3x + 2y + 1.$$

Розв'язання. Нехай $z(x) = 3x + 2y + 1$, тоді

$$z(x) - 3x - 1 = 2y,$$

$$\frac{z(x) - 3x - 1}{2} = y.$$

Знайдемо похідну

$$y' = \frac{z'(x) - 3}{2}.$$

Тоді

$$z'(x) - 3 = 2z,$$

$$z'(x) = 2z + 3,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2z + 3,$$

$$\frac{dz}{2z + 3} = dx.$$

Інтегруємо останній вираз та робимо зворотну заміну

$$\int \frac{dz}{2z + 3} = \int dx,$$

$$\frac{1}{2}\ln(2z + 3) = x + C,$$

$$\frac{1}{2}\ln(2(3x+2y+1)+3)=x+C.$$

$$\ln(6x+4y+5)=2x+B.$$

Відповідь: $\ln(6x+4y+5)=2x+B$.

Приклад 6. Знайти розв'язок рівняння

$$y'=5x+8y-4.$$

Розв'язання. Нехай $z(x)=5x+8y-4$, тоді

$$z(x)-5x+4=8y,$$

$$\frac{z(x)-5x+4}{8}=y.$$

Знайдемо похідну:

$$y'=\frac{z'(x)-5}{8}.$$

Тоді

$$\frac{z'(x)-5}{8}=z,$$

$$z'(x)-5=8z,$$

$$z'(x)=8z+5,$$

$$\frac{dz}{dx}=8z+5,$$

$$\frac{dz}{8z+5}=dx.$$

Інтегруємо цей вираз та робимо зворотну заміну:

$$\int\frac{dz}{8z+5}=\int dx,$$

$$\frac{1}{8}\ln(8z+5)=x+C,$$

$$\ln(2(5x+8y-4)+3)=8x+D,$$

$$\ln(10x+16y-5)=8x+D.$$

Відповідь: $\ln(10x+16y-5)=8x+D$.

Практичні завдання

Розв'язати рівняння

1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$

2. $y' \sin x = y \ln y, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

3. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' = y$

4. $(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$

5. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, y(0) = 1$

6. $(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0$

7. $y' = e^{x-y}$

8. $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$

9. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

10. $y' = -\frac{3y}{x}$

2.2. Однорідні диференціальні рівняння

2.2.1. Звичайне однорідне диференціальне рівняння першого порядку

Функція однієї чи декількох змінних $f(x_1, x_2, .., x_n)$, називається однорідною порядку k, якщо існує число k таке, що при будь-яких значення параметра t

$$f(tx_1, tx_2, .., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, .., x_n).$$

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку в нормальному вигляді $y' = f(x, y)$ називається однорідним відносно x, y, якщо функція $f(x, y,)$ є однорідною функцією своїх змінних з показником однорідності $k = 0$.

Нехай

$$t = \frac{1}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Таким чином, однорідне рівняння можна також записати у вигляді:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.3}$$

Згідно з твердженням Лейбніца, заміна $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ приводить однорідне диференціальне рівняння до звичайного диференціального рівняння з роздільними змінними.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y - xe^{\frac{y}{x}}}{x}.$$

Перевіримо рівняння на однорідність. Підставимо $y = ty,\ x = tx$:

$$\frac{ty - txe^{\frac{ty}{tx}}}{tx} = \frac{t\left(y - xe^{\frac{y}{x}}\right)}{tx} = \frac{y - xe^{\frac{y}{x}}}{x}.$$

Отже, це – однорідне рівняння. Напишемо його у вигляді:

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

Зробимо заміну $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, отже, $y(x) = z(x) \cdot x$, $y'(x) = z'(x) \cdot x + z(x)$. Тоді

$$z' \cdot x + z = z - e^z,$$

$$z' \cdot x = z - e^z - z,$$

$$z' \cdot x = -e^z,$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot x = -\,e^{z},$$

$$-\int \frac{dz}{e^{z}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$e^{-z} = \ln(C\cdot x),$$

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln(C\cdot x).$$

Відповідь: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln(C\cdot x)$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$xy' = ycos\ln\frac{y}{x}.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y}{x}cos\ln\frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, отже, $y(x) = z(x)\cdot x$, $y'(x) = z'(x)\cdot x + z(x)$, звідси

$$z'x + z = z\,cos\ln z,$$

$$z - z\,cos\ln z = -\frac{dz}{dx}x,$$

$$\frac{dz}{z - z\,cos\ln z} = -\frac{dx}{x}.$$

Знайдемо інтеграл $\int\frac{dz}{z - z\,cos\ln z}$. Нехай $\ln z = t$, тоді $\frac{dz}{z} = dt, dz = zdt$, а отже,

$$\int\frac{dz}{z - z\,cos\ln z} = \int\frac{dz}{z\,(1-\,cos\ln z)} = \int\frac{dt}{1-\cos t}.$$

Скористаємося формулами $sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $1-\cos 2\alpha = 2sin^2\alpha$, отже,

$$\int\frac{dt}{1-\cos t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}2ctg\frac{t}{2} = -ctg\frac{t}{2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$-ctg\frac{t}{2} = -\ln x - \ln C.$$

Отже,

$$ctg\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) = \ln Cx,$$

з урахуванням, що $\ln\frac{y}{x} \neq 2\pi k$.

Відповідь: $ctg\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) = \ln Cx$ при $\ln\frac{y}{x} \neq 2\pi k$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$(x^2 + y^2)dx = xydy,$$

$$(x^2 + y^2) = xyy',$$

$$y' = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Перевіримо рівняння на однорідність.

Підставимо $y = ty,\ x = tx$ і отримаємо:

$$\frac{(t^2x^2 + t^2y^2)}{txty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2xy} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Отже, це – однорідне рівняння. Напишемо його у вигляді

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy},$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Отже,

$$y(x) = z(x) \cdot x, y'(x) = z'(x) \cdot x + z(x),$$

звідси

$$z'x + z = z + \frac{1}{z},$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z},$$

$$\int zdz = \int \frac{dx}{x}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\frac{z^2}{2} = \ln x + \ln C,$$

$$z^2 = 2\ln x + 2\ln C,$$

$$e^{z^2} = Dx^2.$$

З урахуванням заміни

$$e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Dx^2.$$

Відповідь: $e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Dx^2$.

2.2.2. Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних

Звичайні диференціальні рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y + c_1}{a_2x+b_2y + c_2}\right)$$

називаються диференціальними рівняннями першого порядку, що приводяться до однорідних.

У випадку таких рівнянь може бути дві ситуації:

Ситуація 1. $c_1 = c_2 = 0$, тоді $f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ – однорідна функція з показником однорідності $k = 0$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{2x + y}{5x - 2y}.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку, що приводяться до однорідного з $c_1 = c_2 = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{2x + y}{5x - 2y} = \frac{2 + \frac{y}{x}}{5 - 2\frac{y}{x}}.$$

Зробимо заміну $z = \frac{y}{x}$, отже, $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$, звідси

$$z' \cdot x + z = \frac{2 + z}{5 - 2z},$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{2 + z}{5 - 2z} - z,$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{2 - 4z + 2z^2}{5 - 2z},$$

$$\frac{(5 - 2z)dz}{2(z - 1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Знайдемо

$$\int \frac{(5 - 2z)dz}{2(z - 1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(3 + 2(1 - z))dz}{(z - 1)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(z - 1)}{(z - 1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2(z - 1)dz}{(z - 1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(z - 1)} - \ln(z - 1) + \mathrm{C}.$$

Отже, маємо

$$-\ln(z - 1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} = \ln(x) + \ln C.$$

З урахуванням заміни отримуємо:

$$\ln C(y - x) + \frac{3x}{2(y - x)} = 0.$$

Відповідь: $\ln C(y - x) + \frac{3x}{2(y-x)} = 0$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння

$$y' = \frac{-4x + 9y}{2x + 3y}.$$

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку, що приводиться до однорідного з $c_1 = c_2 = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{-4x + 9y}{2x + 3y} = \frac{-4 + 9\frac{y}{x}}{2 + 3\frac{y}{x}}.$$

Зробимо заміну $z = \frac{y}{x}$, отже, $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$, і звідси

$$z' \cdot x + z = \frac{-4 + 9z}{2 + 3z},$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{-4 + 9z}{2 + 3z} - z,$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{-4 + 7z - 3z^2}{2 + 3z},$$

$$-\int \frac{(2 + 3z)dz}{3z^2 - 7z + 4} = \int \frac{dx}{x}.$$

Знайдемо $\int \frac{(2+3z)dz}{3z^2-7z+4}$. Зазначимо, що знаменник дробу можна представити у вигляді $3z^2 - 7z + 4 = (z - 1)(3z - 4)$, тоді, згідно з методом невизначених коефіцієнтів, маємо:

$$\frac{(2 + 3z)}{(z - 1)(3z - 4)} = \frac{A}{(z - 1)} + \frac{B}{(3z - 4)},$$

$$\frac{(2 + 3z)}{(z - 1)(3z - 4)} = \frac{(3z - 4)A + B(z - 1)}{(z - 1)(3z - 4)},$$

$$\frac{(2 + 3z)}{(z - 1)(3z - 4)} = \frac{3Az - 4A + Bz - B}{(z - 1)(3z - 4)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти, отримаємо:

$$\begin{array}{lll} C: & -4A - B = 2, & A = -5; \\ z: & 3A + B = 3, & B = 18. \end{array}$$

Отже,

$$\int \frac{(2 + 3z)dz}{3z^2 - 7z + 4} = -5 \int \frac{dz}{(z - 1)} + 18 \int \frac{dz}{(3z - 4)}.$$

Нехай $z - 1 = u,\ z = u + 1,\ dz = du,$ тоді:

$$-5 \int \frac{dz}{(z - 1)} = -5 \int \frac{du}{u} = -5 \ln u = -5 \ln(z - 1).$$

Нехай $3z - 4 = u,\ z = \frac{u+4}{3},\ dz = \frac{du}{3}$, тоді:

$$18 \int \frac{dz}{(3z - 4)} = 18 \int \frac{du}{3u} = 6 \ln u = 6 \ln(3z - 4).$$

Отже, маємо, що інтеграл $-\int \frac{(2+3z)dz}{3z^2-7z+4} = \int \frac{dx}{x}$ дорівнює

$$5\ln(z-1) - 6\ln(3z-4) = \ln x + \ln C$$

або

$$\frac{(z-1)^5}{(3z-4)^6} = Cx.$$

З урахуванням заміни маємо:

$$\frac{(\frac{y}{x}-1)^5}{(3\frac{y}{x}-4)^6} = Cx.$$

Відповідь: $\frac{(y-x)^5}{(3y-4x)^6} = C.$

<u>*Ситуація 2*</u>. $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ – хоча б одна з констант не дорівнює нулю.

Випадок 1. Прямі не паралельні:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x+b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Для такого рівняння існує єдиний розв'язок *(α, β)*.

Зробимо заміну $\hat{x} = x - \alpha,\ \hat{y} = y - \beta$.

Тоді $d\hat{x} = dx, d\hat{y} = dy$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = f\left(\frac{a_1(\hat{x}+\alpha)+b_1(\hat{y}+\beta)+c_1}{a_2(\hat{x}+\alpha)+b_2(\hat{y}+\beta)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\hat{x}+b_1\hat{y}+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2\hat{x}+b_2\hat{y}+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}\right).$$

Оскільки *(α,β)* – розв'язок системи, отримуємо $(a_1\alpha+b_1\beta+c_1) = 0$, $a_2\alpha+b_2\beta+c_2 = 0$ і

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \cdots = f\left(\frac{a_1\hat{x}+b_1\hat{y}}{a_2\hat{x}+b_2\hat{y}}\right).$$

Маємо ситуацію 1, а отже, рівняння приводиться до однорідного.

Приклад 12. Розв'язати

$$y' = \frac{2x+y+1}{3x+2y-3}.$$

Розв'язання. Перевіримо визначник

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

Відтак,

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ 3x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 2 та віднімемо від нього друге:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0, \\ 3x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

$$x + 5 = 0, \quad x = -5,$$

$$3(-5) + 2y - 3 = 0, \qquad 2y = 18, \quad y = 9.$$

Зробимо заміну $x = \hat{x} - 5, \ y = \hat{y} + 9$.

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{3x + 2y - 3},$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{2(\hat{x} - 5) + (\hat{y} + 9) + 1}{3(\hat{x} - 5) + 2(\hat{y} + 9) - 3} = \frac{2\hat{x} + \hat{y}}{3\hat{x} + 2\hat{y}} = \frac{\hat{x}\left(2 + \frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)}{\hat{x}\left(3 + 2\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)} = \frac{2 + \frac{\hat{y}}{\hat{x}}}{3\frac{\hat{x}}{\hat{y}} + 2}.$$

Зробимо заміну $z = \frac{\hat{y}(\hat{x})}{\hat{x}}$, отже, $\hat{y}(\hat{x}) = z(\hat{x}) \cdot x$, $\hat{y}'(\hat{x}) = z'(\hat{x}) \cdot \hat{x} + z(\hat{x})$.

$$z'(\hat{x}) \cdot \hat{x} + z(x) = \frac{2 + z}{3z + 2},$$

$$z' \cdot \hat{x} = \frac{2 + z}{3z + 2} - z,$$

$$\hat{x}\frac{dz}{d\hat{x}} = \frac{2 + z}{3z + 2} - z,$$

$$\hat{x}\frac{dz}{d\hat{x}} = \frac{2 + z}{3(z + 2) - 4}.$$

Нехай $2 + z = u, dz = du$, отже,

$$\hat{x}\frac{du}{dx} = \frac{u}{3u - 4},$$

$$\int \frac{(3u-4)du}{u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$3\int du - 4\int \frac{du}{u} = \int \frac{d\hat{x}}{\hat{x}},$$

$$3u - 4\ln(u) = \ln(\hat{x}),$$

$$3u = 4\ln(u) + \ln(\hat{x}),$$

$$e^{3u} = u^4\hat{x} + \mathrm{C}.$$

Повертаємо змінні

$$e^{3(\,2+z)} = \hat{x}(\,2+z)^4,$$

$$e^{3\left(\,2+\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)} = \hat{x}\left(\,2+\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)^4.$$

Відповідь: $e^{3\left(\,2+\frac{y-9}{x+5}\right)} = (x+5)\left(\,2+\frac{y-9}{x+5}\right)^4.$

Приклад 13. Розв'язати рівняння:

$$y' = \frac{2x+3y+1}{6x+2y+3}.$$

Розв'язання. Перевіримо визначник

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14 \neq 0.$$

Відтак,

$$\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ 6x+2y+3=0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 3 та віднімемо від нього друге:

$$\begin{cases} 6x+6y+3=0, \\ 6x+2y+3=0. \end{cases}$$

$$8y = 0, \quad y = 0,$$

$$6x + 2\cdot 0 + 3 = 0, \qquad 6x = -3, \;\; x = -0.5.$$

Зробимо заміну $x = \hat{x} - 0.5,\;\; y = \hat{y}.$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+1}{6x+2y+3},$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}=\frac{2(\hat{x}-0.5)+3\hat{y}+1}{6(\hat{x}-0.5)+2\hat{y}+3}=\frac{2\hat{x}+3\hat{y}}{6\hat{x}+2\hat{y}}=\frac{\hat{x}\left(2+3\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)}{\hat{x}\left(6+2\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)}=\frac{2+3\frac{\hat{y}}{\hat{x}}}{6+2\frac{\hat{x}}{\hat{y}}}.$$

Зробимо заміну $z=\frac{\hat{y}(x)}{\hat{x}}$, отже, $\hat{y}(\hat{x})=z(\hat{x})\cdot\hat{x}$, $\hat{y}'(\hat{x})=z'(\hat{x})\cdot\hat{x}+z(\hat{x})$,

$$z'(\hat{x})\cdot\hat{x}+z(\hat{x})=\frac{2+3z}{6+2z},$$

$$z'\cdot\hat{x}=\frac{2+3z}{6+2z}-z,$$

$$\hat{x}\frac{dz}{d\hat{x}}=\frac{2+3z}{6+2z}-z,$$

$$\hat{x}\frac{dz}{d\hat{x}}=\frac{-2z^2-3z+2}{6+2z},$$

$$-\int\frac{(6+2z)dz}{2z^2+3z-2}=\frac{d\hat{x}}{\hat{x}}.$$

Знайдемо $\int\frac{(6+2z)dz}{2z^2+3z-2}$. Зазначимо, що знаменник дробу можна представити у вигляді $2z^2+3z-2=(z+2)(2z-1)$, тоді, згідно з методом невизначених коефіцієнтів, маємо:

$$\frac{(6+2z)}{(z+2)(2z-1)}=\frac{A}{(z+2)}+\frac{B}{(2z-1)},$$

$$\frac{(6+2z)}{(z+2)(2z-1)}=\frac{(2z-1)A+B(z+2)}{(z+2)(2z-1)},$$

$$\frac{(6+2z)}{(z+2)(2z-1)}=\frac{2Az-A+Bz+2B}{(z+2)(2z-1)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти, отримаємо:

$$\begin{aligned} C&:\quad -A+2B=6,\quad A=-0.4;\\ z&:\quad 2A+B=2,\qquad B=2.8.\end{aligned}$$

Отже,

$$\int\frac{(6+2z)dz}{2z^2+3z-2}=-0.4\int\frac{dz}{(z+2)}+2.8\int\frac{dz}{(2z-1)}.$$

Нехай $z+2=u,\ z=u-2,\ dz=du,$ тоді:

$$-0.4\int\frac{dz}{(z+2)}=-0.4\int\frac{du}{u}=-0.4\ln u=-0.4\ln(z+2).$$

Нехай $2z-1=u,\ z=\frac{u+1}{2},\ dz=\frac{du}{2}$, тоді:

$$2.8\int\frac{dz}{(2z-1)}=2.8\int\frac{du}{2u}=1.4\ln u=1.4\ln(2z-1).$$

Отже, маємо, що інтеграл $-\int\frac{(6+2z)dz}{2z^2+3z-2}$ дорівнює

$$0.4\ln(z+2)-1.4\ln(2z-1)=\ln\hat{x}+\ \ln C.$$

або

$$\frac{(z+2)^{0.4}}{(2z-1)^{1.4}}=C\hat{x}.$$

З урахуванням заміни маємо:

$$\frac{(\frac{y}{x+0.5}+2)^{0.4}}{(2\frac{y}{x+0.5}-1)^{1.4}}=C(x+0.5).$$

Відповідь: $\frac{(y+2x+1)^{0.4}}{(2y-x-0.5)^{1.4}}=C$.

Випадок 2:

$$\begin{vmatrix}\mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1\\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2\end{vmatrix}=0.$$

Отже, рівняння в системі (2.4) відповідають паралельним прямим, оскільки

$$a_1=\gamma a_2,$$
$$b_1=\gamma b_2.$$

Відтак,

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\gamma a_2x+\gamma b_2y+c_1+\gamma c_2-\gamma c_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{\gamma(a_2x+b_2y+c_2)+(c_1-\gamma c_2)}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=$$
$$=g(a_2x+b_2y+c_2).$$

Останнє рівняння приводиться до звичайного диференціального рівняння з роздільними змінними заміною $z(x)=a_2x+b_2y+c_2$.

Приклад 14. Розв’язати

$$y' = \frac{2x + 2y}{x + y + 1}.$$

Розв'язання. Перевіримо визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Отже,

$$y' = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot 1 - 2}{x + y + 1} = \frac{2(x + y + 1) - 2}{x + y + 1}.$$

Нехай $z = x + y + 1, y = z - x - 1, y' = z' - 1$, тоді

$$z' - 1 = \frac{2z - 2}{z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - 2}{z},$$

$$\frac{zdz}{z - 2} = dx,$$

$$\frac{(z - 2 + 2)dz}{z - 2} = dx.$$

$$\int \frac{(z - 2)dz}{z - 2} + \int \frac{2dz}{z - 2} = \int dx,$$

$$z + 2\ln(z - 2) = x + C.$$

З урахуванням заміни маємо

$$x + y + 1 + 2\ln(x + y + 1 - 2) = x + C,$$

$$x + y - 1 + 2\ln(x + y - 1) = x + C.$$

Відповідь: $y + 2\ln(x + y - 1) = C$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння:

$$y' = \frac{2x + 2y + 5}{3x + 3y + 1}.$$

Розв'язання. Перевіримо визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Отже,

$$y' = \frac{\frac{2}{3}\cdot 3x + \frac{2}{3}\cdot 3y + 5 + \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 1}{3x+3y+1} = \frac{\frac{2}{3}(3x+3y+1) + \left(5 - \frac{2}{3}\right)}{3x+3y+1} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(3x+3y+1) + \frac{13}{3}}{3x+3y+1}.$$

Нехай $z = 3x+3y+1, y = \frac{z-3x-1}{3}, y' = \frac{z'-1}{3}$, тоді

$$\frac{z'-1}{3} = \frac{\frac{2}{3}z + \frac{13}{3}}{z},$$

$$z' - 1 = \frac{2z+13}{z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z+13}{z} + 1,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z+13}{z},$$

$$\frac{zdz}{3z+13} = dx,$$

$$\frac{1}{3}\frac{z + \frac{13}{3} - \frac{13}{3}dz}{z + \frac{13}{3}} = dx,$$

$$\frac{1}{3}\frac{(z + \frac{13}{3}) - \frac{13}{3}dz}{z + \frac{13}{3}} = dx,$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{(z+\frac{13}{3})dz}{z+\frac{13}{3}} - \frac{13}{9}\int\frac{dz}{z+\frac{13}{3}} = \int dx,$$

$$\frac{1}{3}z - \frac{13}{9}\ln\left(z + \frac{13}{3}\right) = x + C.$$

З урахуванням заміни маємо:

$$\frac{1}{3}(3x+3y+1) - \frac{13}{9}\ln\left(3x+3y+1+\frac{13}{3}\right) = x + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(3x+3y+1) - \frac{13}{9}\ln\left(3x+3y+1+\frac{13}{3}\right) = x + C$.

2.2.3. Узагальнені однорідні рівняння

Звичайне диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається узагальненим однорідним (квазіоднорідним) з вагою однорідності k, якщо $f(tx, t^k y) = t^{k-1} f(x, y)$, тобто коли воно не змінюється відносно заміни $x \to tx$, $y \to t^k y$, де k – раціональне число.

Аби дізнатися, чи буде звичайне диференціальне рівняння узагальнено-однорідним, та знайти k, необхідно прирівняти показники степені, в яких змінна t буде входити в кожний доданок звичайного диференціального рівняння після вказаної заміни.

Твердження. Заміна $z = \frac{y}{x^k}$ зводить узагальнене однорідне звичайне диференціальне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Заміна незалежної змінної $t = x^k$ перетворює узагальнено-однорідне диференціальне рівняння на однорідне.

Приклад 16. Знайти розв'язок

$$2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}.$$

Розв'язання. Перевіримо, що це – узагальнене однорідне звичайне диференціальне рівняння. Введемо заміну $x \to tx$, $y \to t^k y$

$$2txt^{k-1}y' + t^k y = t^{2k}y^2\sqrt{tx - t^2x^2t^{2k}y^2}.$$

Перетворимо це рівняння на рівняння початкового виду

$$2xt^k y' + t^k y = t^{2k}y^2\sqrt{tx - t^2x^2t^{2k}y^2}.$$

Розділимо все на t^k.

$$2xy' + y = t^k y^2\sqrt{tx - t^2x^2t^{2k}y^2}.$$

Ліворуч у рівнянні параметр t відсутній (його степінь нульова). Занесемо праворуч t^k під корінь. Отримаємо вираз $t^{2k+1}x - t^{4k+2}x^2y^2$, і прирівняємо в ньому степені t обох доданків до нуля $2k + 1 = 0, 4k + 2 = 0$. Отже, $k = -1/2$.

За такого значення k маємо наступну праву частину рівняння:

$$t^{-\frac{1}{2}}y^2\sqrt{tx-t^2x^2t^{-2\frac{1}{2}}y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{t}}\sqrt{tx-t^2x^2t^{-1}y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{t}}\sqrt{tx-x^2ty^2}=$$

$$=\frac{y^2}{\sqrt{t}}\sqrt{t(x-x^2y^2)}=y^2\sqrt{x-x^2y^2}.$$

Оскільки вираз збігається з правою частиною початкового рівняння, то робимо висновок, що воно є узагальнено-однорідним.

Замінюємо $y=z(x)x^{-\frac{1}{2}}=\frac{z(x)}{\sqrt{x}}$.

Оскільки $\sqrt{x-x^2y^2}$, $x-x^2y^2\geq 0$, відтак, $x\geq x^2y^2$

$$y'=\frac{z'}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{z}{x^{\frac{3}{2}}},$$

$$2x\left(\frac{z'}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{z}{x^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{z}{\sqrt{x}}=\frac{z^2}{x}\sqrt{x-x^2\frac{z^2}{x}},$$

$$2\sqrt{x}z'-\frac{z}{\sqrt{x}}+\frac{z}{\sqrt{x}}=\frac{z^2}{x}\sqrt{x-x^2\frac{z^2}{x}},$$

$$2\sqrt{x}z'=\frac{z^2}{x}\sqrt{x-x^2\frac{z^2}{x}},$$

$$2\sqrt{x}z'=\frac{z^2}{x}\sqrt{x}\sqrt{1-z^2}.$$

$2z'=\frac{z^2}{x}\sqrt{1-z^2}$ – диференціальне рівняння з роздільними змінними:

$$2\frac{dz}{z^2\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x};$$

$$2\frac{dz}{z^2\sqrt{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}=\frac{dx}{x};$$

$$2\frac{dz}{z^3\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}=\frac{dx}{x}.$$

Нехай $\frac{1}{z^2} - 1 = u$. Тоді

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$

$$-2\sqrt{u} = \ln(x) + lnC,$$

$$2\sqrt{u} = -\ln(Cx),$$

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{z^2(x)} - 1\right)} = -\ln(Cx),$$

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{xy^2} - 1\right)} = -\ln(Cx).$$

Під час розв'язання диференціального рівняння на певному етапі здійснювалося ділення на $z^2\sqrt{1-z^2}$. Звичайною перевіркою впевнюємося, що функції, які перетворюють на нуль цей вираз, а саме, $y = 0$ та $xy^2 = 1$ є особливими розв'язками рівняння.

Відповідь: $2\sqrt{\left(\frac{1}{xy^2} - 1\right)} = -\ln(Cx)$, $y = 0$ та $xy^2 = 1$.

Приклад 17. Знайти розв'язок рівняння:

$$2y + (x^2y + 1)xy' = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, що це – узагальнене однорідне звичайне диференціальне рівняння. Підставимо замість $x \to tx$, $y \to t^k y$, $y' \to t^{k-1}y'$ і тоді:

$$2t^k y + (t^2x^2t^k y + 1)txt^{k-1}y' = 0$$

або

$$2t^k y + (t^{2k+2}x^2y + t^k)xy' = 0.$$

Рівняння не зміниться, якщо $k = 2k + 2$, тобто $k = -2$. Отже, рівняння є квазіоднорідним. Заміною $z = \frac{y}{x^{-2}} = yx^2$ зведем його до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y = \frac{z}{x^2};\ y' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3};$$

$$2\frac{z}{x^2} + \left(x^2\frac{z}{x^2} + 1\right)x\left(\frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}\right) = 0;$$

$$\frac{2z}{x^2} + \frac{zz'}{x} - \frac{2z^2}{x^2} + \frac{z'}{x} - \frac{2z}{x^2} = 0;$$

$$\frac{(z+1)z'}{x} = \frac{2z^2}{x^2};$$

$$\frac{(z+1)dz}{z^2} = \frac{2dx}{x};$$

$$lnz - \frac{1}{z} = 2lnx + lnC.$$

Після повернення до початкових змінних отримаємо:

$$lnyx^2 - \frac{1}{yx^2} = lnCx^2$$

або

$$yx^2ln(Cy) = 1.$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося, що втрачений у процесі розв'язання диференціального рівняння розв'язок $y = 0$ є особливим його розв’язком.

Відповідь: $x^2y\ln(Cy) = 1; y = 0$.

Практичні завдання

1. $y' = \frac{y}{x}$
2. $y' - 2xy = 0$
3. $xy' - 5y = 0$
6. $y' = \sin(xy)$
7. $y' = \frac{2x+3y}{5x+2y}$
8. $y' = \frac{x+y+5}{x+2y-3}$

4. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

5. $y' = e^{\frac{y}{x}}$

9. $y' = \dfrac{x+y+5}{x+y-3}$

10. $y' = \dfrac{x+3y}{x+2y-3}$

2.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

2.3.1. Звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x). \tag{2.5}$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається однорідним, в протилежному випадку – неоднорідним. В нормальній формі (формі Коші) воно приймає вигляд

$$y' = f(x) - a(x)y(x) = g(x,y).$$

В обох випадках $a(x), f(x), y(x)$ – неперервні функції, $g(x,y)$ – неперервна функція своїх аргументів, лінійна відносно y.

Розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку можна представити у вигляді загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_{\text{част}}(x);$$
$$y'_{\text{одн}}(x) + a y_{\text{одн}}(x) = 0;$$
$$y'_{\text{част}}(x) + a y_{\text{част}}(x) = f(x).$$

Для розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку зазвичай використовують **метод варіації довільної постійної** (**метод Лагранжа**), який складається з двох етапів:

1. Розв'язується лінійне однорідне диференціальне рівняння, прийнявши $f(x) = 0$, тобто

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Це – рівняння з роздільними змінними, а отже, маємо:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx,$$

$$\ln(y) = -\int a(x)dx + \ln(C),$$

$$y = e^{-\int a(x)dx} \cdot e^{\ln(C)},$$

$$y = C \cdot e^{-\int a(x)dx}.$$

2. Варіюється довільна постійна, тобто розв'язок початкового рівняння (2.5) представляється у вигляді

$$y = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}. \tag{2.6}$$

знаходиться його похідна і отримані вирази підставляються в рівняння (2.5). Розв'язується диференціального рівняння відносно $C(x)$, знайдений її вираз підставляється в (2.6) й отримується загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння.

Приклад 18. Розв'язати

$$y' - \frac{y}{x} = -x.$$

Розв'язання. Оскільки це рівняння є неоднорідним, спочатку необхідно знайти розв'язок однорідного рівняння вигляду $y' - \frac{y}{x} = 0$.

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \ln(C)$$

$$y = \mathrm{C} \cdot x$$

2. Будемо шукати розв'язок у вигляді $y = C(x) \cdot x$.

Підставимо знайдене значення в рівняння $y' - \frac{y}{x} = -x$:

$$y' = C'(x) \cdot x + C(x)$$

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = -x$$

$$C'(x) \cdot x = -x$$

$$C'(x) = -1$$

$$C(x) = -x + D$$

Тоді загальний розв'язок

$$\text{y} = (-x + D) \cdot x = -x^2 + Dx.$$

Відповідь: $\text{y} = (-x + D) \cdot x = -x^2 + Dx$.

Приклад 19. Розв'язати рівняння:

$$xy' + 2y = x^2.$$

Розв'язання. Оскільки це рівняння є неоднорідним, спочатку необхідно знайти розв'язок однорідного рівняння вигляду $xy' + 2y = 0$.

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння:

$$xy' + 2y = 0,$$

$$y' = -2\frac{y}{x}.$$

Розділяємо змінні:,

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\ln(y) = -2\ln(x) + \ln(C),$$

$$y = \frac{\text{C}}{x^2}.$$

2. Будемо шукати розв'язок у вигляді $y = \frac{C(x)}{x^2}$.

Підставимо знайдене значення в рівняння $xy' + 2y = x^2$:

$$x\frac{C'(x)x^2 - 2C(x)x}{x^4} + 2\frac{C(x)}{x^2} = x^2,$$

$$x^2\frac{C'(x)x - 2C(x)}{x^4} + 2\frac{C(x)}{x^2} = x^2,$$

$$\frac{C'(x)x}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^2} + 2\frac{C(x)}{x^2} = x^2,$$

$$\frac{C'(x)x}{x^2} = x^2,$$

$$C'(x) = x^3,$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + D.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x^4}{4x^2} + \frac{D}{x^2}.$$

Відповідь: $y = \frac{x^4}{4x^2} + \frac{D}{x^2}$.

Іншим методом розв'язку лінійних диференціальних рівнянь першого порядку є **метод Бернуллі**. Його ідея полягає у тому, що розв'язок розраховується у вигляді $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, де $u(x), v(x)$ – невідомі.

Підставляючи цей вираз в початкове рівняння, отримуємо:

$$u'v + (v'u + a(x)uv) = f(x),$$

$$u'v + u(v' + a(x)v) = f(x).$$

Підбираємо функцію $v(x)$ таким чином, щоб вираз в дужках дорівнював нулю:

$$v' + a(x)v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -a(x)v,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int a(x)dx,$$

$$v = e^{-\int a(x)dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію в рівняння, знаходимо також і $u(x)$.

Приклад 20. Розв'язати

$$y' - \frac{y}{x} = -x.$$

Розв'язання. Згідно з методом Бернуллі, представимо розв'язок у вигляді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

$$u'v + v'u - \frac{u \cdot v}{x} = -x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -x.$$

Підбираємо функцію $v(x)$ так, аби вираз у дужках дорівнював нулю:

$$v' = \frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$v = x.$$

Підставляємо знайдену функцію в рівняння та знаходимо $u(x)$:

$$u'x = -x,$$

$$u' = -1,$$

$$u = -x + C.$$

Тоді загальний розв'язок:

$$y = (-x + C) \cdot x = -x^2 + Cx.$$

Відповідь: $y = -x^2 + Cx$.

Приклад 21. Розв'язати рівняння:

$$xy' + 2y = x^2.$$

Розв'язання. Згідно з методом Бернуллі, представимо розв'язок у вигляді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

$$x(u'v + v'u) + 2uv = x^2,$$

$$xu'v + xv'u + 2uv = x^2,$$

$$xu'v + u(xv' + 2v) = x^2.$$

Підбираємо функцію $v(x)$, аби вираз у дужках дорівнював нулю:

$$xv' = -2v,$$

$$x\frac{dv}{dx} = -2v,$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -2\ln x,$$

$$v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставляємо знайдену функцію в рівняння та знаходимо $u(x)$:

$$xu'\frac{1}{x^2} = x^2,$$

$$\frac{u'}{x} = x^2,$$

$$u' = x^3,$$

$$u = \frac{x^4}{4} + C.$$

Тоді загальний розв'язок:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^4}{4x^2} + \frac{C}{x^2}.$$

Відповідь: $y = \frac{x^4}{4x^2} + \frac{C}{x^2}$.

2.3.2. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до лінійних

Рівняння вигляду

$$y' + a(x)y = f(x)y^n,$$

де $n \neq 0, n \neq 1$ – деяке постійне число, називається **рівнянням Бернуллі**.

Воно зводиться до лінійного діленням на y^n і заміною $z(x) = y^{(1-n)}$:

$$\frac{y'}{y^{(n)}} + a(x)y^{(1-n)} = f(x),$$

$$z' = (1-n)y^{(1-n-1)}y'$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{1}{1-n}z'.$$

Отже,

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z = f(x).$$

Помноживши це рівняння на $(1-n)$, отримують лінійне диференціальне рівняння

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)f(x).$$

Приклад 22. Знайти розв’язок рівняння

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}.$$

Розв’язання. Це – рівняння Бернуллі. Помножимо його на y^2:

$$3xy^2y' - 2y^3 = x^3.$$

Робимо заміну $z = y^3$, похідна нової функції має вигляд: $z' = 3y^2y'$. Отримуємо лінійне диференціальне рівняння

$$xz' - 2z = x^3.$$

Розв’яжемо його методом Бернуллі:

$$z = u \cdot v,$$

$$x(u'v + v'u) - 2uv = x^3,$$

$$xu'v + u(v'x - 2v) = x^3.$$

Підбираємо функцію $v(x)$:

$$v'x - 2v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$v = x^2.$$

Підставляємо знайдену функцію в рівняння та знаходимо $u(x)$:

$$xu'x^2 = x^3,$$

$$u' = 1,$$

$$u = x + C,$$

$$z = (x + C)x^2.$$

Тоді загальний розв'язок:

$$y^3 = (x + C)x^2,$$

$$y = \sqrt[3]{(x + C)x^2}.$$

Відповідь: $y = \sqrt[3]{(x + C)x^2}$.

Приклад 23. Знайти розв'язок рівняння:

$$y' - \frac{y}{x} = -y^2.$$

Розв'язання. Це – рівняння Бернуллі. Розділимо рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -1.$$

Зробимо заміну $z = y^{-1}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$, і рівняння запишемо у вигляді:

$$z' + \frac{z}{x} = 1.$$

Згідно з методом Бернуллі, представимо розв'язок у вигляді

$$z(x) = u(x) \cdot v(x),$$

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = 1,$$

$$u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = 1.$$

Підбираємо функцію $v(x)$ так, аби вираз у дужках дорівнював нулю:

$$v' = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -\ln x,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо знайдену функцію в рівняння та знаходимо $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

$$u' = x,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Тоді:

$$z(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Отже, загальний розв'язок

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, \qquad y = \frac{2x}{x^2 + D}.$$

Відповідь: $y = \frac{2x}{x^2+D}$.

Рівняння вигляду

$$y'(x) = p(x)y + q(x)y^2 + f(x)$$

називається **рівнянням Ріккаті**. Воно інтегрується в квадратурах не завжди, тому часто для його розв'язку використовують чисельні методи. Але якщо p, q, f – константи, то рівняння Ріккаті перетворюється на рівняння з роздільними змінними.

У 1841 році Жозеф Ліувілль встановив, що спеціальне рівняння Ріккаті $y'(x) = y^2 + x^\alpha$ можна інтегрувати лише у тому випадку, коли $\alpha = -2, \alpha = \frac{-4n}{2n-1}$.

<u>Твердження</u>. Якщо вдається визначити (вгадати) частинний розв'язок рівняння Ріккаті, то заміною $y(x) = y_{\text{часн}} + z(x)$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

<u>Доведення.</u> Нехай $y_{\text{часн}}$ – частинний розв'язок:

$$y'_{\text{часн}} = py_{\text{часн}} + q{y^2}_{\text{часн}} + f.$$

Нехай $y(x) = y_{\text{часн}} + z(x)$.

Підставимо в рівняння Ріккаті

$$y'_{\text{часн}} + z' = py_{\text{часн}} + pz + q{y^2}_{\text{часн}} + 2qy_{\text{часн}}z \quad + qz^2 + f.$$

Оскільки $y_{\text{часн}}$ – розв'язок, то частина рівняння скорочується

$$\cancel{y'_{\text{часн}}} + z' = \cancel{py_{\text{часн}}} + pz + \cancel{qy^2_{\text{часн}}} + 2qy_{\text{часн}}z + qz^2 + \cancel{f}$$

$$z' = (p + 2qy_{\text{часн}})z + qz^2$$

Отримане рівняння – рівняння Бернуллі.

Слід зазначити, що також можна одразу зробити заміну $y = y_{\text{ч}} + \frac{1}{z}$, яка зведе рівняння до лінійного.

Приклад 24. Розв’язати рівняння Ріккаті:

$$xy' + x(y^2 - x^2) - y = 0,$$

якщо відомо, що частинний розв’язок має вид $y_{\text{ч}} = ax + b$.

Розв’язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' + y^2 - x^2 - \frac{y}{x} = 0.$$

Підставимо $y_{\text{ч}} = ax + b$ в рівняння і отримаємо:

$$a + a^2x^2 + 2abx + b^2 - x^2 - \frac{ax + b}{x} = 0,$$

$$a + a^2x^2 + 2abx + b^2 - x^2 - a - \frac{b}{x} = 0,$$

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 - x^2 - \frac{b}{x} = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $x^2,\ x$ та вільні члени:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ 2ab = 0, \\ b^2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $a = \pm 1,\ b = 0$. Розглянемо випадок, коли $a = 1,\ b = 0$, тоді $y_{\text{ч}} = x$. Робимо заміну $y = x + \frac{1}{z},\ y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$. Підставляючи ці вирази у початкове рівняння, отримуємо

$$1 - \frac{z'}{z^2} + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 - \frac{x + \frac{1}{z}}{x} = 0,$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - x^2 - 1 - \frac{1}{zx} = 0,$$

$$-\frac{z'}{z^2}+\frac{2x}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{zx}=0.$$

Помноживши все на z^2x, маємо

$$-z'x+2zx^2+x-z=0,$$

$$-z'x+z(2x^2-1)=-x,$$

$$z'-z\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)=1.$$

Це – лінійне рівняння, розв'яжемо його за допомогою методу Лагранжа.

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння

$$z'-z\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)=0.$$

$$\frac{dz}{z}=\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)dx$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{(2x^2-1)dx}{x},$$

$$lnz=x^2-lnx+lnC,$$

$$z=\frac{Ce^{x^2}}{x}.$$

2. Будемо шукати розв'язок у вигляді $z=\frac{C(x)e^{x^2}}{x}$. Підставимо цей вираз в рівняння $z'-z\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)=1$:

$$C'(x)\frac{e^{x^2}}{x}+C(x)\frac{2xe^{x^2}x-e^{x^2}}{x^2}-\frac{C(x)e^{x^2}}{x}\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)=1,$$

$$C'(x)\frac{e^{x^2}}{x}=1,$$

$$C'(x)=xe^{-x^2},$$

$$C(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+D.$$

Тоді маємо розв'язок

$$z = \frac{(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + D)e^{x^2}}{x} = \frac{-1 + De^{x^2}}{2x},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2x}{-1 + De^{x^2}},$$

Отже, загальний розв'язок для першої ситуації прийме вид:

$$y = x + \frac{2x}{-1 + De^{x^2}}.$$

Відповідь: $y = x + \frac{2x}{-1+De^{x^2}}$.

Приклад 25. Розв'язати рівняння Ріккаті:

$$3y' + y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

якщо відомо, що частинний розв'язок має вигляд $y_ч = \frac{a}{x}$.

Розв'язання. Підставимо $y_ч = \frac{a}{x}$ в рівняння і знайдемо невідому константу:

$$-3\frac{a}{x^2} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = -\frac{2}{x^2}.$$

Помножимо все на x^2:

$$-3a + a^2 = -2,$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Звідси $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, тоді $y_{ч1} = \frac{1}{x}, y_{ч2} = \frac{2}{x}$.

Розглянемо першу ситуацію, коли $y_{ч1} = \frac{1}{x}$. Робимо заміну:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z},\ y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{z'}{z^2}.$$

Підставляючи ці вирази у початкове рівняння, отримуємо

$$3\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{z'}{z^2}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = -\frac{2}{x^2},$$

$$-\frac{3}{x^2} + 3\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{x^2},$$

$$3\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Помножимо все на z^2:

$$3z' + \frac{2z}{x} + 1 = 0$$

або

$$3z' + \frac{2z}{x} = -1.$$

Це – лінійне рівняння, розв'яжемо його за допомогою методу Лагранжа.

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння:

$$3z' + \frac{2z}{x} = 0$$

у вигляді

$$z = \frac{C}{x^{2/3}}.$$

2. Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $z = \frac{C(x)}{x^{2/3}}.$

Після підстановки його в рівняння отримаємо:

$$3\frac{C'(x)x^{2/3} - \frac{2}{3}C(x)x^{-1/3}}{x^{4/3}} + 2\frac{C(x)}{x^{5/3}} = -1,$$

$$3\frac{C'(x)x^{2/3}}{x^{4/3}} - 2\frac{C(x)x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} + 2\frac{C(x)}{x^{\frac{5}{3}}} = -1,$$

$$3\frac{C'(x)}{x^{2/3}} - 2\frac{C(x)}{x^{\frac{5}{3}}} + 2\frac{C(x)}{x^{\frac{5}{3}}} = -1,$$

$$3\frac{C'(x)}{x^{2/3}} = -1,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{3}x^{2/3},$$

$$C(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + D.$$

Відтак

$$z = \frac{C(x)}{x^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{5}x + \frac{D}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{D - x^{\frac{5}{3}}}{5x^{\frac{2}{3}}},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{D - x^{\frac{5}{3}}}.$$

Отже, загальний розв'язок для першої ситуації приймає вид:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{D - x^{\frac{5}{3}}}.$$

Аналогічно знаходять розв'язок для другого частинного розв'язку.

Практичні завдання

Розв'язати лінійне рівняння методом Лагранжа чи Бернуллі.

1. $\boldsymbol{y' - \frac{2y}{x} = x^2}$
2. $\boldsymbol{(2x+1)y' = 4x + 2y}$
3. $\boldsymbol{(xy' - 1)\ln x = 2y}$
4. $\boldsymbol{y' - 2ctgx \cdot y = 2sinx}$
5. $\boldsymbol{4y^2dx + \left(e^{\frac{1}{y}} + x\right)dy = 0}$
6. $\boldsymbol{y' - \sin(xy) = x^2}$
7. $\boldsymbol{(2x+3y)dx - dy = e^x}$
8. $\boldsymbol{xy' - y = 3xe^x}$
9. $\boldsymbol{y' + 3x^2y = 2sinx}$
10. $\boldsymbol{y' + \frac{y}{x} = 4x^2}$

2.4. Рівняння у повних диференціалах

Нехай дана функція $z = \Phi(x, y)$. Тоді її похідна $dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$.

Звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.7)$$

називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом функції Z, тобто

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy$$

або

$$M = \Phi_x dx = \frac{d\Phi}{dx},\ \ N = \Phi_y dy = \frac{d\Phi}{dy}. \tag{2.8}$$

Теорема 1. Нехай $G = \{a < x < b, c < y < d\}, \frac{dM}{dy}, \frac{dN}{dx}$ – неперервні. Тоді в G існує функція двох змінних $\Phi(x,y)$ така, що $d\Phi = Mdx + Ndy$, тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Це означає, що ліва частина (2.7) є повним диференціалом деякої функції $\Phi(x,y)$, а розв'язок рівняння (2.7) може бути представлений у вигляді загального інтегралу

$$\Phi(x,y) = \mathrm{C}. \tag{2.9}$$

Пошук функції $\Phi(x,y)$ здійснюється наступним чином. З того, що

$$\frac{d\Phi}{dx} = M(x,y),$$

отримуємо

$$\int \frac{d\Phi}{dx} = \int M(x,y)dx\,,\ \ y - const,$$

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y). \tag{2.10}$$

Диференціюючи (2.10) і враховуючи рівність

$$\frac{d\Phi}{dy} = N(x,y),$$

отримуємо рівняння відносно похідної невідомої функції $C(y)$:

$$C'(y) = \varphi(y)$$

і інтегруємо його. Підставляємо знайдені вирази в (2.9) і отримуємо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння.

Приклад 26. Розв'язати рівняння

$$(2x^3 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 + 4y)dy = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні $\frac{dM}{dy}, \frac{dN}{dx}$:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(2x^3 + 4xy^3)}{dy} = 12xy^2,$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(6x^2y^2 + 4y)}{dx} = 12xy^2.$$

Оскільки функції тотожні, робимо висновок, що це рівняння в повних диференціалах. Загальний інтеграл знайдемо у вигляді $\Phi(x, y) = \mathrm{C}$.

$$M(x, y)dx = 2x^3 + 4xy^3,$$

$$\Phi(x, y) = \int (2x^3 + 4xy^3)dx + C(y) = \frac{x^4}{2} + 2x^2y^3 + C(y),$$

$$N(x, y)dy = 6x^2y^2 + 4y,$$

$$\frac{d\left(\frac{x^4}{2} + 2x^2y^3 + C(y)\right)}{dy} = 6x^2y^2 + 4y,$$

$$6x^2y^2 + C'(y) = 6x^2y^2 + 4y,$$

$$C'(y) = 4y,$$

$$\mathrm{C}(y) = 2y^2 + \mathrm{B}.$$

Тоді загальний інтеграл прийме вид

$$\Phi(x, y) = \frac{x^4}{2} + 2x^2y^3 + 2y^2 + \mathrm{B}.$$

Відповідь: $\Phi(x, y) = \frac{x^4}{2} + 2x^2y^3 + 2y^2 + \mathrm{B}$.

Приклад 27. Розв'язати рівняння:

$$(x^2 - 2xy)dx + (y^4 - x^2)dy = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні $\frac{dM}{dy}, \frac{dN}{dx}$:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(x^2 - 2xy)}{dy} = -2x,$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(y^4 - x^2)}{dx} = -2x.$$

Оскільки функції тотожні, робимо висновок, що це – рівняння в повних диференціалах. Загальний інтеграл знайдемо у вигляді $\Phi(x,y) = \mathrm{C}$:

$$M(x,y)dx = x^2 - 2xy,$$

$$\Phi(x,y) = \int (x^2 - 2xy)dx + C(y) = \frac{x^3}{3} - x^2y + C(y),$$

$$N(x,y)dy = y^4 - x^2,$$

$$\frac{d\left(\frac{x^3}{3} - x^2y + C(y)\right)}{dy} = y^4 - x^2,$$

$$-x^2 + C'(y) = y^4 - x^2,$$

$$C'(y) = y^4,$$

$$\mathrm{C}(y) = \frac{y^5}{5} + \mathrm{B}.$$

Тоді загальний інтеграл прийме вид

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}} - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} + \frac{\boldsymbol{y}^5}{\mathbf{5}} + \mathrm{B}.$$

Відповідь: $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}} - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} + \frac{\boldsymbol{y}^5}{\mathbf{5}} + \mathrm{B}$.

Слід звернути увагу, що при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь першого порядку можна виділяти в них повні диференціали. Інколи шляхи отримання розв'язку рівняння за допомогою такого прийому є коротшими. Корисно запам'ятати і враховувати наступні формули:

$$d(x \pm y) = dx \pm dy,$$

$$d(x \cdot y) = ydx + xdy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

$$d(y^a) = ay^{a-1}dy,$$

$$d(lny) = \frac{dy}{y}$$

і т.д.

Приклад 28.

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Розв'язання. Розділимо рівняння на $\boldsymbol{y^2}$, відразу зазначимо, що $\boldsymbol{y = 0}$ є його розв'язком. Отримаємо рівняння:

$$2xdx - \frac{ydx - xdy}{y^2} + dy + \frac{dy}{y} = 0.$$

Виділимо повні диференціали:

$$dx^2 - d\left(\frac{x}{y}\right) + dy + \frac{dy}{y} = 0$$

і інтегруючи обидві частини отриманого рівняння, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + lny = C.$$

Відповідь: $x^2 - \frac{x}{y} + y + lny = C.$

Практичні завдання

1. $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$

2. $x^2ydx + (xy^2 - 1)dy = 0$

3. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (xy^2 - 1)dy = 0$

4. $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$

5. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + lnx)dy = 0$

6. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx + \left(\sqrt{x^2 - y}\right)dy = 0$

7. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$

8. $2xcos^2ydx + (2y - x^2sin2y)dy = 0$

9. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

10. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$

2.5. Інтегрувальний множник

Нехай є

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (2.11)$$

і

$$M_y \neq N_x.$$

Тобто (2.11) не є диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Функція $\mu(x,y)$ називається інтегруючим множником звичайного диференціального рівняння (2.11), якщо при множенні на неї воно перетворюється на рівняння у повних диференціалах. Тобто для рівняння

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

має місце рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu M(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu N(x,y)\big). \qquad (2.12)$$

Диференціюючи (2.12), можна отримати:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M(x,y) + \mu\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N(x,y) + \mu\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial \mu}{\partial y}M(x,y) = \mu\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) \qquad (2.13)$$

або

$$\frac{\partial ln\mu}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Отже, для відшукання інтегруючого множника $\mu(x,y)$ необхідно розв'язати відносно цієї функції диференціальне рівняння в частинних похідних (2.13).

В окремих випадках для знаходження μ можна уникнути таких складнощів.

1. Якщо інтегруючий множник є функцією лише змінної x: $\mu=\mu(x)$, то її можна знайти, розв'язуючи наступне рівняння:

$$\frac{d\ ln\mu}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N}.$$

2. Коли інтегруючий множник залежить тільки від y: $\mu=\mu(y)$, для його відшукання розв'язується рівняння вигляду

$$\frac{d\ ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M}.$$

3. У випадку інтегруючого множника, що залежить від двох змінних $\mu=\mu\big(f(x,y)\big)$, можна спробувати підібрати внутрішню функцію серед таких: $f=x^a y^b$, $f=ax+by$ або $f=ax^2+by^2$.

Приклад 29. Розв'язати рівняння:

$$\boldsymbol{(x^2+y^2+x)dx+ydy=0}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d(x^2+y^2+x)}{dy}=2y}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{d(y)}{dx}=0}.$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}}.$$

Отже, це не є рівнянням в повних диференціалах. Оскільки

$$\frac{d\,ln\mu}{dx} = \frac{2y - 0}{y} = 2,$$

інтегруючий множник будемо шукати у вигляді $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{d\,ln\mu}{dx} = 2 \Rightarrow \int d\,ln\mu = \int 2dx \Rightarrow ln\mu = 2x \Rightarrow \mu = e^{2x}.$$

Помножимо початкове рівняння на цю функцію та отримаємо

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Переконаємося, що це рівняння в повних диференціалах, тобто виконується рівність $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d\left(e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\right)}{dy} = 2ye^{2x},$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 2ye^{2x}.$$

Загальний інтеграл знайдемо у вигляді $\Phi(x, y) = \mathrm{C}$.

$$N(x, y) = e^{2x}y,$$

$$\Phi(x, y) = \int e^{2x}ydy + C(x) = \frac{y^2e^{2x}}{2} + C(x).$$

Скористаємося тим, що $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = M(x, y)$:

$$N(x, y)dy = e^{2x}y,$$

$$\frac{d\left(\frac{y^2e^{2x}}{2} + C(x)\right)}{dx} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),$$

$$y^2e^{2x} + C'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),$$

$$C'(x) = e^{2x}(x^2 + x),$$

$$\mathrm{C}(x) = \int e^{2x}(x^2 + x)dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} + B.$$

Тоді загальний інтеграл прийме вид

$$\Phi(x, y) = \frac{x^2e^{2x}}{2} + \frac{y^2e^{2x}}{2} + B.$$

Відповідь: $\Phi(x,y)=\frac{(x^2+y^2)e^{2x}}{2}+B$.

Приклад 30. Розв'язати рівняння:

$$x^2y(ydx+xdy)=xdy.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$x^2y^2dx+(x^3y-x)dy=0.$$

Перевіримо, чи є рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d(x^2y^2)}{dy}=2x^2y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{d(x^3y-x)}{dx}=3x^2y-1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, це не є рівнянням в повних диференціалах. Оскільки

$$\frac{d\,ln\mu}{dx}=\frac{2x^2y-3x^2y+1}{x^3y-x}=\frac{-(x^2y-1)}{x(x^2y-1)}=\frac{-1}{x},$$

інтегруючий множник будемо шукати у вигляді $\mu=\mu(x)$:

$$\frac{d\,ln\mu}{dx}=-\frac{1}{x}\Rightarrow\int d\,ln\mu=\int-\frac{1}{x}dx\Rightarrow ln\mu=-lnx\Rightarrow\mu=\frac{1}{x}.$$

Помножимо початкове рівняння на цю функцію і отримаємо

$$\frac{1}{x}x^2y^2dx+\frac{1}{x}(x^3y-x)dy=0$$

або

$$xy^2dx+(x^2y-1)dy=0.$$

Переконаємося, що це – рівняння в повних диференціалах, тобто виконується рівність $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d(xy^2)}{dy}=2xy,$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{d(x^2y-1)}{dx}=2xy.$$

Загальний інтеграл знайдемо у вигляді $\Phi(x,y)=\mathrm{C}$.

$$M(x,y)dx=\boldsymbol{x}y^{\mathbf{2}},$$

$$\Phi(x,y)=\int(\boldsymbol{x}y^{\mathbf{2}})dx+C(y)=\frac{x^2y^{\mathbf{2}}}{2}+C(y),$$

$$N(x,y)dy=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}y-1,$$

$$\frac{d\left(\frac{x^2y^{\mathbf{2}}}{2}+C(y)\right)}{dy}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}y-1,$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}y+C'(y)=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}y-1,$$

$$C'(y)=-1,$$

$$\mathrm{C}(y)=-y+\mathrm{B}.$$

Тоді загальний інтеграл прийме вид

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}=-\boldsymbol{y}+\mathrm{B}.$$

<u>2 спосіб</u>: розділимо рівняння $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{d}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\boldsymbol{d}\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$ і отримаємо:

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{d}\boldsymbol{y}.$$

Інтегруємо обидві частини і знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C},$$

який збігається з тим, що отриманий вище.

Відповідь: $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}$.

2.6. Особливі розв’язки

Особливим розв’язком диференціального рівняння першого порядку називається розв’язок, в кожній точці якого порушується умова єдиності розв’язку задачі Коші для цього рівняння.

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ права частина задовольняє умови теореми про існування єдиності розв'язку, то особливих розв'язків немає (наприклад, коли $f(x, y)$ – поліном).

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ є неперервною за x та має неперервну частинну похідну по y, то особливим розв'язком можуть бути криві $\varphi = \varphi(x)$, вздовж яких

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\varphi = \varphi(x)} = \infty.$$

Будемо називати такі криві «підозрілими» на особливі розв'язки за аналітичним виглядом правої частини рівняння.

Криві, які підозрюються на особливі розв'язки, можна також шукати за аналітичним виглядом сімейства інтегральних кривих, яке визначається довільною постійною C.

Нехай рівняння $y' = f(x, y)$ таке, що його загальний інтеграл має вигляд $\Phi(x, y, \mathrm{C}) = 0$.

Огинаючою сімейства інтегральних кривих називається крива, яка в кожній точці дотикається хоча б однієї кривої цього сімейства та на жодній її ділянці не збігається з жодною з інтегральних кривих. Якщо огинаюча існує, то вона і є особливим розв'язком.

Слід зазначити, що огинаючою може бути лише **дискримінантна крива** – крива, яка визначається рівнянням сімейства інтегральних кривих та рівнянням, що отримується шляхом диференціювання рівняння сімейства за параметром:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, \mathrm{C}) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{C}} = 0. \end{cases}$$

Після знаходження дискримінантної кривої необхідно перевірити, чи буде вона огинаючою для даного сімейства. Інколи це можна зробити геометричною побудовою, іноді користуються наступною достатньою умовою огинаючої: якщо система

$$\begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$$

така, що ${x'_c}^2 + {y'_c}^2 \neq 0$, та на цій кривій ${\Phi'_x}^2 + {\Phi'_y}^2 \neq 0$, то вона буде огинаючою для сімейства $\Phi(x, y, \mathrm{C}) = 0$.

Приклад 31. Розв'язати рівняння

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Розв'язання. Знайдемо сімейство інтегральних кривих

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}},$$

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int 3dx,$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3x + C,$$

$$y = (x + C)^3.$$

Знайдемо особливий розв'язок за аналітичним виглядом

$$\begin{cases} y = (x + C)^3, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{C}} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (x + C)^3, \\ 3(x + C)^2 = 0. \end{cases}$$

Відповідно, $y = 0$ – особливий розв'язок.

Відповідь: $y = (x + C)^3,\ y = 0$

Зазначимо, що особливими розв'язками можуть бути розв'язки, які губляться через перетворення рівняння в процесі його інтегрування. Наприклад, при діленні на деяку функцію $\xi(x, y)$, $\xi(x, y) = 0$ – може бути особливим розв'язком.

Приклад 32. Розв'язати рівняння:

$$xy' = y - (y')^2.$$

Розв'язання. Знайдемо сімейство інтегральних кривих. Для цього введемо заміну $y' = p$, тобто $p = dy/dx$, тоді

$$xp = y - p^2,$$

Диференціюємо обидві частини цього рівняння, вважаючи x та p рівноправними змінними і враховуючи, що $y' = p$, і отримаємо:

$$xdp + pdx = pdx - 2pdp,$$

$$xdp + 2pdp = 0,$$

$$dp(x + 2p) = 0.$$

Звідси маємо дві ситуації: або $dp = 0$, або $x + 2p = 0$.

Якщо $dp = 0$, а отже, $p = C$, тому $y = C^2 + Cx$ – загальний розв'язок рівняння.

Якщо $x + 2p = 0$, маємо:

$$x + 2p = 0, \qquad p = -\frac{x}{2};$$

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

Відповідно, $y = Cx + C^2$ – загальний розв’язок, а $y = -\frac{x^2}{4}$ – особливий розв’язок.

Відповідь: $y = Cx + C^2, y = -\frac{x^2}{4}$.

2.7. Рівняння Лагранжа і Клеро

Рівняння виду

$$A(y')y + B(y')x = C(y'),$$

лінійне відносно x, y, де A, B та C – диференційовані функції від y', називається **рівнянням Лагранжа**. У тому випадку, коли $A(y') \neq 0$, це рівняння можна переписати у вигляді

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Для розв'язання такого рівняння слід ввести заміну $y'(x) = p$, підставивши $dy = pdx$, отримаємо

$$p = \varphi(p) + \left[x\varphi'^{(p)} + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}.$$

Якщо розглядати x як функцію від p, отримаємо

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'^{(p)} + \psi'(p),$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x\varphi'^{(p)}}{\varphi(p) - p} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Отже, рівняння Лагранжа зводиться до лінійного, методи розв'язання якого були розглянути раніше в цьому параграфі.

Приклад 33. Знайти розв'язок рівняння

$$y = 2xy'^2 + y'^2.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням Лагранжа, $\varphi(y') = 2y'^2$, $\psi(y') = y'^2$. Введемо заміну $y'(x) = p$, тоді

$$pdx = d(2xp^2 + p^2) = 4xpdp + 2p^2dx + 2pdp,$$

$$4xpdp + 2p^2dx + 2pdp - pdx = 0.$$

Розділимо рівняння на p, помітимо що $p = 0$ – його розв'язок. Отримаємо:

$$4xdp + 2pdx + 2dp - dx = 0$$

або

$$(4x + 2)dp + (2p - 1)dx = 0$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язавши яке запишемо:

$$\frac{dp}{2p - 1} = -\frac{dx}{4x + 2},$$

$$\frac{dp}{p - 0.5} = -\frac{dx}{2x + 1},$$

$$\ln(p - 0.5) = -\frac{1}{2}\ln(x + 0.5) + \ln C.$$

$$p - 0.5 = \frac{C}{\sqrt{x + 0.5}},$$

$$p = 0.5 + \frac{C}{\sqrt{x + 0.5}}.$$

Таким чином, підставляючи цей вираз в рівняння, записане через параметр: $y = 2xp^2 + p^2$, отримаємо загальний розв'язок у вигляді:

$$y = (2x + 1)\left(0.5 + \frac{C}{\sqrt{x + 0.5}}\right)^2.$$

Відповідь: $y = (2x + 1)\left(0.5 + \frac{C}{\sqrt{x+0.5}}\right)^2$.

Рівняння виду

$$y = xy' + \psi(y')$$

називається **рівнянням Клеро** і є окремим випадком рівняння Лагранжа.

Для розв'язання такого рівняння вводиться заміна $y' = p$, тоді

$$y = xp + \psi(p).$$

Диференціювання цього виразу за x приводить до наступного рівняння

$$y' = p + xp'_x + \psi'_x p'_x.$$

Звідси

$$(x + \psi'_x)p'_x = 0.$$

А отже, $x + \psi'_x = 0$ або $p'_x = 0$. Звідси $p = C$ – сімейство кривих, тоді загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = x\mathrm{C} + \psi(\mathrm{C}).$$

Рівність $x + \psi'_x = 0$ визначатиме особливий розв'язок рівняння Клеро.

Приклад 34. Знайти розв'язок рівняння:

$$y = xy' - \sin y'.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням Клеро. Введемо заміну $y'(x) = p$, тоді

$$y = xp - \sin p.$$

$$pdx = d(xp - \sin p) = xdp + pdx - cos\, pdp,$$

$$(x - cos\, p)dp = 0.$$

Це рівняння має два варіанти розв'язку:

1. $dp = 0$. Відповідно, $p = C, y = Cx + \sin C$. Це є загальним розв'язком рівняння.

2. $x - cos\, p = 0$. Відповідно, $p = \arccos(x) + 2\pi n, y = x\,(\pm\arccos(x) + 2\pi n) + \sin(\pm\arccos(x))$. Це – особливі розв'язки рівняння.

Відповідь: $y = Cx + \sin C$, $y = \pm x(\arccos(x) + 2\pi n) \pm \sqrt{1 - x^2}$.

Приклад 35. Розв'язати рівняння Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{3}y'^3.$$

Розв'язання. Введемо заміну $y' = p$, тоді

$$y = xp - \frac{1}{3}p^3.$$

Диференціюємо за x та отримуємо

$$y' = p + xp'_x - p^2 p'_x.$$

Звідси випливає

$$p'_x(x - p^2) = 0. \qquad (2.14)$$

А отже, $p'_x = 0$ або $x - p^2 = 0$.

З першої рівності отримуємо $p = \mathrm{C}$, і загальний розв'язок рівняння Клеро записуємо у вигляді

$$y = x\mathrm{C} - \frac{1}{3}\mathrm{C}^3,$$

що є однопараметричним сімейством прямих.

З рівності нулю другого множника в (2.14) випливає $x = p^2$. Тоді, виключаючи параметр p з цього рівняння і з рівняння $y = xp - \frac{1}{3}p^3$, отримаємо

$$y = p^2 p - \frac{1}{3}p^3,$$

$$y = p^3 - \frac{1}{3}p^3 \text{ або } y = \frac{2}{3}p^3,$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{3y}{2}},$$

$$x = -\left(\frac{3y}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$x^3 = \frac{9y^2}{4},$$

$$4x^3 = 9y^2.$$

Остання рівність визначає також розв'язок вихідного рівняння (особливий розв'язок).

Відповідь: загальний розв'язок $y = x\text{C} - \frac{1}{3}\text{C}^3$, особливим розв'язком є функція $4x^3 = 9y^2$.

Приклад 36. Розв'язати рівняння:

$$y = xy' - y'^2.$$

Розв'язання. Це рівняння є рівнянням Клеро. Введемо заміну $y' = p$, тоді

$$y = xp - p^2.$$

Диференціюємо за x та отримаємо:

$$y' = p + xp'_x - 2pp'_x.$$

Звідси випливає

$$p'_x(x - 2p) = 0. \qquad (2.15)$$

А отже, $p'_x = 0$ або $x - 2p = 0$.

З першої рівності отримуємо $p = \text{C}$, і загальний розв'язок рівняння Клеро записуємо у вигляді

$$y = x\text{C} - \text{C}^2,$$

що є однопараметричним сімейством прямих.

З рівності нулю другого множника в (2.15) випливає $x = 2p$. Тоді, виключаючи параметр p з цього рівняння і з рівняння $y = xp - p^2$, отримаємо

$$y = 2pp - p^2,$$

$$y = p^2,$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Остання рівність визначає також розв'язок вихідного рівняння (особливий розв'язок).

Відповідь: загальний розв'язок $y = x\mathrm{C} - \mathrm{C}^2$, особливим розв'язком є функція $y = \frac{x^2}{4}$.

ТЕМА 3. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Рівняння, у яких допускається зниження порядку

Рівняння виду

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{3.1}$$

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{3.2}$$

де x – незалежна зміна, y – шукана функція, F визначена та неперервна, називається рівнянням n-го порядку.

Загальним розв'язком рівняння (3.1) називається функція $y = \varphi(x, \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n)$, де $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$ – довільні постійні, яка перетворює рівняння на тотожність.

Для побудови задачі Коші для рівняння (3.1) необхідно задати не одну умову, а n:

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_1,$$
$$\dots,$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Теорема 1 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (3.2)). Нехай функція f задовольняє наступним умовам:

– функція неперервна за всіма аргументами в деякій області D їх зміни;

– функція має обмежені в області D частинні похідні по аргументах $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Тоді знайдеться деякий інтервал зміни $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, в якому існує та єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (3.2).

Розглянемо деякі рівняння, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Тобто маємо рівняння (3.1), в яке не входить невідома функція y та перші похідні до $(k-1)$ порядку.

Заміною $z = y^{(k)}$ порядок рівняння знижується до $(n-k)$:

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0$$

Приклад 1.

$$y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$$

Розв'язання.

Введемо заміну $z = y''$. Тоді

$$z' = \sqrt{1 - z^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2},$$

$$\arcsin z = x + C,$$

$$z = \sin(x + C),$$

$$y'' = \sin(x + C),$$

$$y' = -cos(x + C) + D,$$

$$y = -sin(x + C) + Dx + B.$$

Відповідь: $y = -sin(x + C) + Dx + B$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'' = y''' + x.$$

Розв'язання. Введемо заміну $z = y''$. Тоді

$$z = z' + x,$$

$$z' - z = -x.$$

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння:

$$z' - z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{z} = dx,$$

$$\ln(z) = x + C,$$

$$z = Ce^x.$$

2. Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $z = C(x) \cdot e^x$:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = -x,$$

$$C'(x)e^x = -x,$$

$$C'(x) = -xe^x.$$

Розглянемо детальніше інтеграл $\int xe^x\,dx$:

$$\int xe^x\,dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{Bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + D.$$

Отже,

$$C(x) = xe^x - e^x + D.$$

Тоді:

$$z = (xe^x - e^x + D) \cdot e^x,$$

$$z = xe^{2x} - e^{2x} + De^x.$$

З урахуванням заміни $z = y''$, маємо

$$y'' = xe^{2x} - e^{2x} + De^x.$$

Розглянемо детальніше інтеграл $\int xe^{2x}\,dx$:

$$\int xe^{2x}\,dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^{2x} dx \\ du = dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{Bmatrix} = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^{2x}x}{2} - \frac{e^{2x}}{4}.$$

Отже,

$$y' = \frac{e^{2x}x}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{2} + De^x = \frac{e^{2x}x}{2} - \frac{3e^{2x}}{4} + De^x + C.$$

Аналогічним чином знаходимо

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}x}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) + De^x + Cx + B.$$

Таким чином, загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = \frac{e^{2x}x}{4} - \frac{e^{2x}}{2} + De^x + Cx + B.$$

Відповідь: $y = \frac{e^{2x}x}{4} - \frac{e^{2x}}{2} + De^x + Cx + B$.

2. Рівняння вигляду

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Тобто маємо рівняння (3.1), яке не містить незалежну зміну x.

Для розв'язання такого рівняння необхідно ввести заміну $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, $y''' = \left(p''p + {p'}^2\right)p = p''p^2 + {p'}^2 p$ і т.д. Тоді порядок рівняння зменшиться на 1:

$$F\left(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$${y'}^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язання. Введемо заміну $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, тоді

$$p^2 + 2ypp' = 0.$$

Розділимо на p (при цьому не забуваємо, що $p = 0$, тобто $y = C$ є розв'язком рівняння):

$$p + 2yp' = 0,$$

$$2y\frac{dp}{dy} = -p,$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\ln p = -\frac{1}{2}\ln y + \ln C,$$

$$p = \frac{C}{\sqrt{y}}.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{y}},$$

$$\sqrt{y}dy = Cdx,$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = Cx + D,$$

$$y^3 = (Cx + D)^2.$$

Відповідь: $y = (Cx + D)^{2/3}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$yy'' - 2yy'lny = (y')^2.$$

Розв'язання. Введемо заміну $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, тоді

$$yp'p - 2yplny = p^2.$$

Розділимо на p (увага! $y = C$ – розв'язок рівняння):

$$yp' - 2ylny = p?$$

$$yp' - p = 2ylny.$$

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння:

$$yp' - p = 0,$$

$$y\frac{dp}{dy} = p,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

$$\ln p = \ln y + \ln C,$$

$$p = Cy.$$

2. Будемо шукати розв'язок у вигляді $p = C(y) \cdot y$.

Підставимо знайдене значення в рівняння$yp' - p = 2ylny$:

$$y^2C'(y) + C(y)y - C(y)y = 2ylny,$$

$$C'(y) = \frac{2ylny}{y^2},$$

$$C'(y) = \frac{2lny}{y}.$$

Отже,

$$C(y) = ln^2y + D,$$

$$p = (ln^2y + D)y.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$y' = (ln^2y + D)y,$$

$$\frac{dy}{dx} = (ln^2y + D)y,$$

$$\frac{dy}{(ln^2y + D)y} = dx,$$

$$\frac{dlny}{(ln^2y + 2D)} = dx.$$

Якщо константа $D > 0$, то

$$\int \frac{dlny}{(ln^2y + D)} = \frac{1}{\sqrt{D}} arctg\left(\frac{lny}{\sqrt{D}}\right) + C,$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} arctg\left(\frac{lny}{\sqrt{D}}\right) = x + C \text{ або } lny = Btg(Bx + Q).$$

Якщо константа $D < 0$, то

$$\int \frac{dlny}{(ln^2y + D)} = \frac{1}{2\sqrt{-D}} ln\left(\frac{lny - \sqrt{-D}}{lny + \sqrt{-D}}\right) + C,$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{2\sqrt{-D}} ln\left(\frac{lny - \sqrt{-D}}{lny + \sqrt{-D}}\right) = x + C.$$

Коли константа $D = 0$, маємо

$$\int \frac{dlny}{ln^2y} = -\frac{1}{lny} + C,$$

і розв'язок буде наступним:

$$-\frac{1}{lny} = x + C \quad \text{або} \quad \frac{1}{lny} = C - x \text{ чи } (C - x)lny = 1.$$

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{-D}} ln\left(\frac{lny-\sqrt{-D}}{lny+\sqrt{-D}}\right) = x + C;\ lny = Btg(Bx + Q);\ (C - x)lny = 1, y = C$.

3. Рівняння вигляду

$$F\left(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Тобто маємо рівняння (3.1), в яке не входить незалежна змінна x та функція y із своїми першими $k-1$ похідними.

Заміна $y' = p(y)$ в такому випадку знизить порядок рівняння на одиницю та зробить його складнішим, тому краще зробити заміну $p(x) = y^{(k)}(x)$, після чого ввести заміну $p' = z(p)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y' \cdot y''' = 2y''^2.$$

Розв'язання. Введемо заміну $y' = p(x)$, тоді

$$p \cdot p'' = 2p'^2.$$

Нехай $p' = z(p)$, тоді $p'' = z'z$

$$p \cdot z'z = 2z^2.$$

Оскільки нова функція залежить від параметру p, маємо рівняння з роздільними змінними. Розділимо рівняння на z (увага! $z = y''$, тому $y = Cx + D$ – розв'язок рівняння, його неможна загубити):

$$p \cdot z' = 2z,$$

$$p \cdot \frac{dz}{dp} = 2z,$$

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p},$$

$$\frac{1}{2}\ln z = \ln p,$$

$$\sqrt{z} = p \;\; \longrightarrow \;\; z = Cp^2.$$

Оскільки $p' = z(p)$,

$$p' = Cp^2,$$

$$p^{-2}dp = Cdx,$$

$$-\frac{1}{p} = Cx + D,$$

$$p = \frac{1}{Cx + D}.$$

З урахуванням, що $y' = p(y)$, маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Cx + D},$$

$$y = \frac{1}{C}\ln(Cx + D) + B.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{C}\ln(Cx + D) + B;\ y = Cx + D.$

Приклад 6. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y' = 0.$$

Розв'язання. Введемо заміну $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$

$$p' + p = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = -p,$$

$$\frac{dp}{p} = -dx.$$

Отже, маємо:

$$\ln p = -x + C,$$

$$p = Be^{-x}.$$

З урахуванням, що $y' = p(x)$, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = Be^{-x},$$

$$dy = Be^{-x}dx,$$

$$y = -Be^{-x} + D.$$

Відповідь: $y = -Be^{-x} + D.$

4. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x).$$

Інколи порядок рівняння легко можна понизити за рахунок перетворення так, аби обидві його частини були повними похідними по x певної функції.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$yy''' - y'y'' = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння до вигляду:

$$yy''' = y'y''.$$

Розділимо обидві частини на yy'' ($y = 0; y = Cx + D$ –є розв'язками рівняння):

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y};$$

$$\frac{d(y'')}{y''} = \frac{d(y)}{y},$$

$$\ln(y'') = \ln(y) + \ln C,$$

$$y'' = Cy.$$

Таким чином, порядок рівняння знижено.

Нехай $y' = p(y)$, тоді

$$pp' = Cy,$$

$$\frac{pdp}{dy} = Cy,$$

$$\frac{p^2}{2} = C\frac{y^2}{2} + \frac{B}{2}.$$

Тобто $p = \pm\sqrt{Cy^2 + B}$.

З урахуванням, що $y' = p(y)$, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy^2 + B},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{Cy^2 + B}} = \pm dx.$$

Якщо $C > 0, B > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{BC}} arctg\left(\sqrt{\frac{C}{B}}y\right) = \pm x + D;$$

якщо $C > 0, B < 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} ln\left(\sqrt{C}y + \sqrt{Cy^2 + B}\right) = \pm x + D;$$

або

$$ln\left(\sqrt{C}y+\sqrt{Cy^2+B}\right)=\pm\sqrt{C}x+D;$$

якщо $C<0, B>0$:

$$\frac{1}{\sqrt{-C}}arcsin\left(\sqrt{\frac{-C}{B}}y\right)=\pm x+D$$

або $y=\sqrt{\frac{B}{-C}}\sin\left(\pm\sqrt{-C}x+D\right)$.

Відповідь: $y=\sqrt{\frac{B}{-C}}\sin\left(\pm\sqrt{-C}x+D\right)$; $ln\left(\sqrt{C}y+\sqrt{Cy^2+B}\right)=\pm\sqrt{C}x+D$; $\frac{1}{\sqrt{BC}}arctg\left(\sqrt{\frac{C}{B}}y\right)=\pm x+D; y=Cx+D.$

3.2. Однорідні рівняння, у яких допускається зниження порядку

Однорідне відносно y та його похідних рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0.$$

Для перевірки однорідності рівняння слід замінити $y=ty, y'=ty', y''=ty'',\dots, y^{(n)}=ty^{(n)}$ і отримати еквівалентне рівняння вигляду

$$F\left(x,ty,ty',ty'',\dots,ty^{(n)}\right)=t^mF\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right).$$

Заміна $y'=yz$ (де z – невідома функція) знижує порядок такого рівняння. Старші похідні функції y замінюються на наступні вирази:

$$y''=y'z+yz'=(yz)z+yz'=y(z^2+z')$$

$$y'''=y'(z^2+z')+y(z^2+z')'=yz(z^2+z')+y(2zz'+z'')$$

$$=yz^3+yzz'+2zyz'+z''y=y(z''+3zz'+z^3)$$

… і т.д.

Після відповідної підстановки отримують рівняння, яке на порядок нижче початкового.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Розв'язання. Перевіримо рівняння на однорідність, для чого зробимо заміну $y = ty, y' = ty', y'' = ty''$:

$$xtyty'' - x(ty')^2 - tyty' = 0,$$

$$t^2\left(xyy'' - xy'^2 - yy'\right) = 0.$$

Отже, маємо однорідне рівняння. Введемо заміну $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$, тоді

$$xyy(z^2 + z') - x(yz)^2 = yyz,$$

$$xy^2z^2 + xy^2z' - xy^2z^2 = y^2z,$$

$$xy^2z' = y^2z.$$

Розділимо рівняння на y^2 та отримаємо

$$xz' = z,$$

$$\frac{xdz}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln z = \ln x + \ln C,$$

$$z = Cx.$$

Зробимо зворотну заміну

$$\frac{y'}{y} = Cx,$$

$$\frac{dy}{y} = Cxdx,$$

$$\ln y = C\frac{x^2}{2} + B,$$

$$y = Be^{Cx^2}.$$

Відповідь: $y = Be^{Cx^2}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння:

$$y'^3 - yy'y'' = yy'^2.$$

Розв'язання. Перевіримо рівняння на однорідність, для чого зробимо заміну $y = ty, y' = ty', y'' = ty''$:

$$t^3y'^3 - tyty'ty'' - tyt^2y'^2 = 0,$$

$$t^3\left(y'^3 - yy'y'' - yy'^2\right) = 0.$$

Отже, маємо однорідне рівняння. Введемо заміну $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$, тоді

$$y^3z^3 - y^3z(z^2 + z') = y^3z^2,$$

$$y^3z^3 - y^3z^3 - y^3zz' = y^3z^2,$$

$$-y^3zz' = y^3z^2.$$

Розділимо рівняння на y^3z (не забуваємо перевіряти $y = 0$ та $z = 0$ на можливий розв'язок) та отримаємо:

$$-z' = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -z,$$

$$\frac{dz}{z} = -dx,$$

$$\ln z = -x + \ln C,$$

$$z = Ce^{-x}.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$\frac{y'}{y} = Ce^{-x},$$

$$\frac{dy}{y} = Ce^{-x}dx,$$

$$\ln y = -Ce^{-x} + B,$$

$$y = De^{Ce^{-x}}.$$

Відповідь: $y = De^{Ce^{-x}}$.

Диференціальне рівняння називається **узагальнено-однорідним**, якщо при заміні $x = tx, y = t^{\alpha}y, y' = t^{\alpha-1}y', \dots,\ y^{(n)} = t^{\alpha-n}y^{(n)}$ (де α – деяке число) буде отримано еквівалентне рівняння, тобто коли виконується рівність

$$F\left(tx, t^{\alpha}y, t^{\alpha-1}y', \dots, t^{\alpha-n}y^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right).$$

Для розв'язування такого рівняння необхідно спочатку зробити заміни вигляду:

$$\boldsymbol{x = e^t,\ y = z(t)e^{\alpha t}} \text{ (при } \boldsymbol{x \geq 0}\text{)},$$
$$\boldsymbol{x = -e^t,\ y = z(t)e^{\alpha t}} \text{ (при } \boldsymbol{x < 0}\text{)},$$

тоді

$$\boldsymbol{y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(z(t)e^{\alpha t})'}{e^{t'}} = \frac{z'e^{\alpha t} + \alpha z e^{\alpha t}}{e^t} = (z' + \alpha z)e^{(\alpha-1)t}}$$

$$\boldsymbol{y'' = \frac{(y')'_t}{x'_t} = \frac{\left((z' + \alpha z)e^{(\alpha-1)t}\right)'}{e^{t'}}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{z''e^{(\alpha-1)t} + (\alpha-1)z'e^{(\alpha-1)t} + \alpha z'e^{(\alpha-1)t} + \alpha(\alpha-1)ze^{(\alpha-1)t}}{e^t}}$$
$$\boldsymbol{= (z'' + (2\alpha-1)z' + \alpha(\alpha-1)z)e^{(\alpha-2)t}}$$

... і т.д

Після відповідної підстановки отримують диференціальне рівняння, яке не містить змінну x**.** У подальшому порядок знижують заміною $z = p(z)$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$x^3y'' - 6xy = x^4.$$

Розв'язання. Перевіримо, що рівняння є узагальнено-однорідним, для чого введемо заміну $x = tx, y = t^{\alpha}y, y' = t^{\alpha-1}y', y'' = t^{\alpha-2}y''$:

$$t^3x^3t^{\alpha-2}y'' - 6txt^{\alpha}y = t^4x^4.$$

Отже, $t^{3+\alpha-2} = t^{\alpha+1} = t^4$, а ця рівність вірна за умови, що $\alpha = 3$. Таким чином, робимо висновок, що рівняння є узагальнено-однорідним.

Для розв'язування введемо заміну вигляду:

$$\boldsymbol{x = e^t,\ y = z(t)e^{3t}} \text{ (при } \boldsymbol{x \geq 0}\text{)},$$

тоді

$$y'' = (z'' + 5z' + 6z)e^t.$$

Отже, маємо рівняння вигляду

$$e^{3t}(z'' + 5z' + 6z)e^t - 6e^t z e^{3t} = e^{4t}.$$

Приведемо подібні

$$e^{4t}(z'' + 5z' + 6z) - 6ze^{4t} = e^{4t}.$$

Скорочуємо на e^{4t}

$$(z'' + 5z' + 6z) - 6z = 1.$$

Введемо заміну $z' = p(t)$, тоді

$$p' + 5p = 1,$$

$$\frac{dp}{dt} = 1 - 5p,$$

$$\frac{dp}{5p - 1} = -dt,$$

$$\ln(5p - 1) = -t + C.$$

Потенціюємо та знаходимо

$$5p - 1 = C \cdot e^{-t}\ .$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$p = \frac{1}{5} + Ce^{-t}.$$

З урахуванням, що $z'(t) = p(z)$, маємо

$$z' = \frac{1}{5} + Ce^{-t}$$

або

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{5} + Ce^{-t}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння і отримуємо:

$$z = \frac{t}{5} - Ce^{-t} + D.$$

Повертаємося до заміни: $\boldsymbol{x = e^t}$, $\boldsymbol{y = z(t)e^{3t}}$ і отримаємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді:

$$\frac{y}{x^3} = D + \frac{lnx}{5} - \frac{C}{x}$$

або

$$y = Dx^3 + x^3\left(\frac{lnx}{5} - \frac{C}{x}\right).$$

Відповідь: $\boldsymbol{y = Dx^3 + x^3\frac{lnx}{5} - \frac{C}{x^2}, x = 0}$.

.

Практичні завдання

Розв'язати рівняння

1. $y'' = sin2x$
2. $y'' = xe^{-x}$
3. $y'' = (e^x + e^{-x})^2$
4. $y'' = xe^{-x}$
5. $y'' = cos^2x$
6. $y'' = (2 + x)^{-x}$
7. $y'' = sin2x$
8. $y'' = 3e^{2x}$
9. $y'' = 2^x$
10. $y'' = -sin4x$

3.3. Лінійні однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами

В загальному вигляді лінійні однорідні рівняння (зі змінними коефіцієнтами) мають наступний вигляд:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (3.3)$$

Тут $a_i(x), i = 1, n$ – деякі неперервні функції.

Функції $y_i(x), i = 1, n$ можуть бути лінійно залежними чи лінійно незалежними. Необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності n розв'язків $y_j(x)$ є умова, що знайдеться хоча б одна точка x_0, де визначник Вронського системи цих рівнянь буде відмінний від нуля, тобто

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приклад 11. Визначити, чи є дані функції лінійно незалежними:

$$y_1 = x, y_2 = 5x, y_3 = x^3.$$

Розв'язання. Складемо визначник Вронського для цієї системи функції:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 5x & x^3 \\ 1 & 5 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = 30x^2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 30x^2 = 0.$$

Отже, ці функції є лінійно залежними.

Приклад 12. Визначити, чи є дані функції лінійно незалежними:

$$y_1 = sinx, y_2 = cosx, y_3 = x^2.$$

Розв'язання. Складемо визначник Вронського для цієї системи функції:

$$W(x) = \begin{vmatrix} sinx & cosx & x^2 \\ cosx & -sinx & 2x \\ -sinx & -cosx & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2sin^2x - x^2cos^2x - 2x\,sinx\,cosx - (x^2sin^2x - 2x\,sinx\,cosx + 2cos^2x) =$$

$$= -2sin^2x - x^2cos^2x - 2x\,sinx\,cosx - x^2sin^2x$$

$$= +2x\,sinx\,cosx - 2cos^2x = -2 - x^2 \neq 0.$$

Отже, ці функції є лінійно незалежними.

Лінійно незалежна система розв'язків рівняння (3.3) називається фундаментальною системою розв'язків. За допомогою неї можна знайти загальний розв'язок (3.3) у вигляді

$$y_з(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x). \tag{3.4}$$

Основна складність пошуку розв'язку лінійного однорідного рівняння в загальному вигляді полягає в тому, що не існує так званого універсального методу пошуку фундаментальної системи рівнянь. Але такі методи існують для розв'язку лінійних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами мають вигляд:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3.5}$$

де $a_i, i = \overline{1, n}$ – деякі константи.

Для розв'язування такого рівняння необхідно визначити корені характеристичного рівняння:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{3.6}$$

де k є заміною оператора диференціювання по x, тобто кожну похідну $y^{(n)}$ замінюють на відповідне значення k^n з урахуванням того, що $y = y^{(0)}$ і $k^0 = 1$.

В залежності від знайдених коренів характеристичного рівняння, виділяють три можливих випадки:

1. Корені $k_i, i = 1, \dots, n,$ – різні та дійсні. В такому випадку фундаментальна система розв'язків прийме вигляд:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}.$$

А загальний розв'язок можна знайти за формулою (3.4):

$$y_з = C_1 e^{k_1 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Корені такого рівняння $k_1 = 1, k_2 = -3$ – різні та дійсні. Тоді фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-3x}$. Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Відповідь: $y_з = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 5k + 4 = 0.$$

Корені такого рівняння: $k_1 = -1, k_2 = -4$ – різні та дійсні. Тоді фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-4x}$. Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

Відповідь: $y_з = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

2. Корені $k_i, i = 1, \dots, n$ – різні та деякі з них (а може, всі) є комплексними. У такому випадку фундаментальна система розв'язків розподіляється в залежності від вигляду кореня. Дійсні корені записуються згідно з першим випадком, а кожній парі комплексних сполучених коренів $\alpha \pm \beta i$ відповідає розв'язок вигляду:

$$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x.$$

Загальний розв'язок так само можна знайти за формулою (3.4).

Приклад 15. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 2 = 0$$

Дискримінант такого рівняння від'ємний та дорівнює -4. Пара комплексних сполучених коренів $k = -1 \pm i$, і в підсумку маємо другу ситуацію. Тоді фундаментальна система розв'язків буде приймати вигляд $y_1 = e^{-x} cosx$, $y_2 = e^{-x} sinx$. Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^{-x} cosx + C_2 e^{-x} sinx.$$

Приклад 16. Розв'язати рівняння:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 5 = 0.$$

Дискримінант такого рівняння від'ємний та дорівнює -16. Пара комплексних сполучених коренів: $k = 1 \pm 2i$, і в підсумку маємо другу ситуацію. Тоді фундаментальна система розв'язків прийме вигляд $y_1 = e^x cos2x,\ y_2 = e^x sin2x$.

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sin2x.$$

Відповідь: $y_з = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sin2x$.

3. Корені $k_i, i = 1, n$ – кратні між собою і можуть бути як дійсні, так і комплексні. В такому випадку фундаментальна система розв'язків (ФСР) записується згідно вигляду кореня. Дійсному кореню k кратності p відповідають наступні функції ФСР:

$$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \dots, y_n = x^{p-1}e^{kx}.$$

Кожній парі комплексних сполучених коренів $\alpha \pm \beta i$ відповідає розв'язок вигляду:

$$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x,$$
$$y_3 = xe^{\alpha x} cos\beta x, \qquad y_4 = xe^{\alpha x} sin\beta x,$$
$$\dots$$
$$y_3 = x^{p-1}e^{\alpha x} cos\beta x, \qquad y_4 = x^{p-1}e^{\alpha x} sin\beta x,$$

де p – кратність пари коренів $\alpha \pm \beta i$.

Загальний розв'язок має вигляд (3.4).

Приклад 17. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^4 + k^2 = 0.$$
$$k^2(k^2 + 1) = 0.$$

Легко побачити, що це рівняння має два дійсних кореня $k_{1,2} = 0$ та пару комплексних сполучених корені $k = \pm i$, отже, маємо третю ситуацію. Тоді фундаментальна система розв'язків буде приймати вигляд $y_1 = e^0 = 1, y_2 =$

$xe^0 = x,\ y_3 = e^0 cosx = cosx,\ y_4 = e^0 sinx = sinx.$ Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 + C_2x + C_3cosx + C_4sinx.$$

Відповідь: $y_з = C_1 + C_2x + C_3cosx + C_4sinx.$

Приклад 18. Розв'язати рівняння:

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^3 - 2k^2 + 2k = 0,$$

$$k(k^2 - 2k + 2) = 0.$$

Легко бачити, що це рівняння має дійсний корінь $k_1 = 0$ та пару комплексних сполучених коренів $k = 1 \pm i$. Фундаментальна система розв'язків прийме вигляд $y_1 = e^0 = 1, y_2 = e^x cosx,\ y_3 = e^x sinx.$

Загальний розв'язок рівняння

$$y_з = C_1 + C_2e^x cosx + C_3e^x sinx.$$

Відповідь: $y_з = C_1 + C_2e^x cosx + C_3e^x sinx.$

Практичні завдання

Розв'язати рівняння.

1. $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = 0}$
2. $\boldsymbol{y'' + 4y' + y = 0}$
3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 4y = 0}$
4. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 10y = 0}$
5. $\boldsymbol{y'' + 2y' - 5y = 0}$
6. $\boldsymbol{y'' - y' - 5y = 0}$
7. $\boldsymbol{y'' - 5y = 0}$
8. $\boldsymbol{y'' + 3y' + 5y = 0}$
9. $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$
10. $\boldsymbol{y'' + 3y' + 4y = 0}$

3.4. Лінійні неоднорідні рівняння із сталими коефіцієнтами

В загальному вигляді лінійні неоднорідні рівняння (зі змінними коефіцієнтами) мають наступний вигляд:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (3.6)$$

тут $a_i(x), f(x),\ i = 1, n$ – деякі неперервні функції.

У тому випадку, коли загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_з$ відомий, а також відомим є певний частинний розв'язок $y_ч$, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння прийме вигляд

$$y = y_з + y_ч.$$

Окремо слід зазначити, що в тих випадках, коли функція $f(x)$ має складений вигляд, можна використовувати теорему про складання розв'язків. Згідно з нею, якщо права частина диференціального рівняння (3.6) є складеною функцією, що записується у вигляді суми декількох більш простих функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$, то загальний частинний розв'язок (3.6) має вигляд $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2} + + \dots + y_{чm}$, де $y_{ч1}, \dots,\ y_{чm}$ – відповідні частинні розв'язки наступних рівнянь:

$$y_{ч1}:\quad a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

$$\dots$$

$$y_{чm}:\quad a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_m(x).$$

В теорії динамічних систем така їх властивість називається принципом суперпозиції – реакція системи на декілька окремих зовнішніх впливів є сумою реакцій системи на кожен з них.

Окремим випадком лінійного неоднорідного рівняння зі змінними коефіцієнтами є рівняння з постійними коефіцієнтами. Таке рівняння має наступний вигляд:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (3.7)$$

де $a_i, i = 1, n$ – певні постійні, а $f(x)$ – неперервна функція.

Для знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння з постійними коефіцієнтами можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів або метод варіації довільних постійних. Розглянемо їх докладніше.

Метод невизначених коефіцієнтів використовується у випадку, коли права частина рівняння має спеціальний вигляд: або $f(x) = P_n(x)e^{kx}$ (де $P_n(x)$ – многочлен порядку *n*), або $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$ (де Q_m – многочлен порядку m).

Випадок 1. Права частина має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{kx}$. Перевіряють, чи є k коренем характеристичного рівняння. Якщо k не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$y_ч = e^{kx}B_n(x).$$

Тут $B_n(x)$ – многочлен ступеня *n* з невизначеними коефіцієнтами (тобто $B_0(x) = A, B_1(x) = Ax + B, B_2(x) = Ax^2 + Bx + C, \dots$).

Якщо k є коренем характеристичного рівняння кратності s, то частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$y_ч = x^s e^{kx}B_n(x).$$

Приклад 19. Розв'язати рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-3x}.$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді $y = y_з + y_ч$.

Знайдемо загальний розв'язок $y_з$ однорідного рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Корені такого рівняння $k_1 = -1, k_2 = -2$ – різні та дійсні, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Задане неоднорідне рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, де $P_1(x) = 3x, k = -3$. Оскільки $k = -3$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_ч$ прийме вигляд

$$y_ч = e^{kx}B_n(x), B_1(x) = Ax + B,$$

$$y_ч = e^{-3x}(Ax + B) = e^{-3x}Ax + e^{-3x}B.$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів A та B знайдемо похідні частинного розв'язку та підставимо їх у початкове рівняння ($y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-3x}$):

$$y_ч' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} - 3Be^{-3x}, \qquad y_ч'' = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 9Be^{-3x} -$$

$$-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 9Be^{-3x} + 3(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} - 3Be^{-3x}) +$$

$$+2(e^{-3x}Ax + e^{-3x}B) = 3xe^{-3x}.$$

Спростимо вираз та скоротимо його на e^{-3x}:

$$-3A + 2Ax + 2B = 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях змінної ліворуч і праворуч у отриманому рівнянні. Звідси маємо, що

$$\begin{cases} -3A + 2B = 0, \\ 2A = 3, \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{3}{2}, \\ -3\frac{3}{2} + 2B = 0, \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{3}{2}, \\ B = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Отже, $y_ч = \frac{3}{2}xe^{-3x} + \frac{9}{4}e^{-3x}$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{3}{2}xe^{-3x} + \frac{9}{4}e^{-3x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{3}{2}xe^{-3x} + \frac{9}{4}e^{-3x}$.

Приклад 20. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y' + 2y = 2xe^{-x}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + k + 2 = 0.$$

Корені такого рівняння $k_1 = 1, k_2 = -2$ – різні та дійсні, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{x} + C_2e^{2x}.$$

Розглянемо рівняння $C_1e^x + C_2e^{2x} = 2xe^{-x}$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це – перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_1(x) = 2x, k = -1$. Оскільки $k = -1$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = e^{kx}B_n(x), B_1(x) = Ax + B,$$

$$y_ч = e^{-x}(Ax + B) = e^{-x}Ax + e^{-x}B.$$

Для пошуку невідомого $Ax + B$ знайдемо похідні частинного розв'язку та підставимо їх у початкове рівняння $y'' + y' + 2y = 2xe^{-x}$:

$$y_ч' = Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x},$$

$$y_ч'' = -Ae^{-x} + Axe^{-x} - Ae^{-x} + Be^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x}$$

$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x} + Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x} + 2(e^{-x}Ax + e^{-x}B) =$$

$$= 2xe^{-x}.$$

Спростимо вираз та скоротимо його на e^{-x}:

$$-A + 2Ax + 2B = 2x.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} -A + 2B = 0, \\ 2Ax = 2x, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ -1 + 2B = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0{,}5. \end{cases}$$

Отже, $y_ч = xe^{-x} + 0{,}5e^{-x}$.

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^{-x} + 0{,}5e^{-x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^{-x} + 0{,}5e^{-x}$.

Приклад 21. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Корені такого рівняння $k_1 = -1, k_2 = -2$ – різні та дійсні, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Розглянемо рівняння $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$. Тут $P_0(x) = 2, k = -1$. Оскільки $k = -1$ – це розв'язок характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = x^s e^{kx} B_n(x) = xe^{-x} B_0(x) = xe^{-x} A.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y'_ч = (Axe^{-x})' = -Axe^{-x} + Ae^{-x},$$

$$y''_ч = (-Axe^{-x} + Ae^{-x})' = Axe^{-x} - Ae^{-x} - Ae^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$$

та підставимо їх у початкове рівняння $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$:

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + 3(-Axe^{-x} + Ae^{-x}) + 2Axe^{-x} = 2e^{-x}.$$

Скоротимо вираз на e^{-x} та спростимо, в підсумку отримаємо:

$$A = 2.$$

Отже, $y_ч = 2xe^{-x}$.

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2xe^{-x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2xe^{-x}$.

Приклад 22. Розв'язати рівняння

$$y'' + 5y' + 4y = 2e^{-x}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 5k + 4 = 0$$

Корені такого рівняння $k_1 = -1, k_2 = -4$ – різні та дійсні, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

Розглянемо рівняння $y'' + 5y' + 4y = 2e^{-x}$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_0(x) = 2, k = -1$. Оскільки $k = -1$ – це розв'язок характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд

$$y_ч = x^s e^{kx} B_n(x) = xe^{-x} B_0(x) = xe^{-x} A.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку

$$y'_ч = (Axe^{-x})' = -Axe^{-x} + Ae^{-x}.$$

$$y''_ч = (-Axe^{-x} + Ae^{-x})' = Axe^{-x} - Ae^{-x} - Ae^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$$

та підставимо їх у початкове рівняння ($y'' + 5y' + 4y = 2e^{-x}$):

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + 5(-Axe^{-x} + Ae^{-x}) + 4Axe^{-x} = 2e^{-x}.$$

Скоротимо вираз на e^{-x} та спростимо

$$3A = 2,$$

$$A = 2/3.$$

Отже, $y_ч = \frac{2}{3}xe^{-x}$. Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \frac{2}{3}xe^{-x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \frac{2}{3}xe^{-x}$.

Розглянемо ситуацію, коли функція $f(x)$ має складний вигляд виду $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$. Загальний частинний розв'язок будемо шукати у вигляді: $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2} + + \dots + y_{чm}$.

Приклад 23. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' - 3y = x + xe^x$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

Корені такого рівняння $k_1 = 1, k_2 = -3$ – різні та дійсні, отже, $y_1 = e^x, y_2 = e^{-3x}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^x + C_2e^{-3x}.$$

Маємо $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + xe^x$. Згідно з теоремою про складання розв'язків, потрібно розв'язати два неоднорідних рівняння: $y'' + 2y' - 3y = x$ та $y'' + 2y' - 3y = xe^x$.

Розглянемо перше рівняння $y'' + 2y' - 3y = x$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_1(x) = x,\ k = 0$. Оскільки $k = 0$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд

$$y_ч = e^{kx}B_n(x) = B_1(x) = Ax + B.$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів A та B знайдемо похідні частинного розв'язку та підставимо їх у початкове рівняння ($y'' + 2y' - 3y = x$):

$$y_ч' = A, \qquad y_ч'' = 0,$$

$$0 + 2A - 3Ax - 3B = x.$$

Звідси маємо систему

$$\begin{cases} 2A - 3B = 0, \\ -3A = 1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3}, \\ 2(-\frac{1}{3}) - 3B = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3}, \\ B = -\frac{2}{9}. \end{cases}$$

Отже, $y_{ч1} = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$.

Розглянемо друге рівняння $y'' + 2y' - 3y = xe^x$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, $P_1(x) = x, k = 1$. Оскільки $k = 1$ є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = x^s e^{kx}B_n(x) = xe^x B_1(x) = xe^x(Ax + B) = Ax^2e^x + Bxe^x.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_ч' = (Ax^2e^x + Bxe^x)' = 2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x,$$

$$y_ч'' = (2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x)' =$$

$$= 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Be^x + Bxe^x =$$

$$= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x + 2Be^x + Bxe^x,$$

та підставимо їх у рівняння:

$$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x + 2Be^x + Bxe^x + 2(2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x) -$$

$$-3(Ax^2e^x + Bxe^x) = xe^x.$$

Скоротимо вираз на e^x та спростимо:

$$2A + 4Ax + Ax^2 + 2B + Bx + 4Ax + 2Ax^2 + 2B + 2Bx - 3Ax^2 - 3Bx = x,$$

$$2A + 8Ax + 4B = x.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} 8A = 1, \\ 2A + 4B = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8}, \\ 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4B = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8}, \\ B = -\frac{1}{16}. \end{cases}$$

Отже, $y_{ч2} = \frac{1}{8}x^2e^x - \frac{1}{16}xe^x$.

Таким чином, $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2} = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{1}{8}x^2e^x - \frac{1}{16}xe^x$.

Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{1}{8}x^2e^x - \frac{1}{16}xe^x.$$

Відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{1}{8}x^2e^x - \frac{1}{16}xe^x$.

Випадок 2. Права частина має вигляд $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$. Перевіряють, чи є $\alpha \pm \beta$і коренем характеристичного рівняння. Якщо $\alpha \pm \beta$і не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$y_ч = e^{\propto x}(P_N(x)cos\beta x + Q_N(x)sin\beta x).$$

Тут $P_N(x), Q_N(x)$ – многочлени порядку N з невизначеними коефіцієнтами (тобто $B_0(x) = A, B_1(x) = Ax + B, B_2(x) = Ax^2 + Bx + C, \ldots$), де $N = \max(n, m)$.

Якщо $\alpha \pm \beta$і є коренем характеристичного рівняння з кратністю s, то частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$y_ч = x^s e^{\propto x}(P_N(x)cos\beta x + Q_N(x)sin\beta x).$$

Приклад 24. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(x).$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 2 = 0.$$

Дискримінант такого рівняння від'ємний та дорівнює -4. Пара комплексних сполучених коренів $k = -1 \pm$ і, тоді $y_1 = e^{-x}cosx,\ y_2 = e^{-x}sinx$. Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{-x}cosx + C_2e^{-x}sinx.$$

Права частина рівняння $y'' + 2y' + 2y = \cos(x)$ має вигляд $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, а отже, це другий випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $\alpha = 0, \beta = 1, P_0(x) = 1, Q_0 = 0, N = \max(0,0) = 0.$ Оскільки $0 \pm$ і не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = e^0(P_0(x)sinx + Q_0(x)\cos x) = A\cos x + Bsinx.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y'_ч = -A\sin x + Bcosx,$$

$$y''_ч = -A\cos x - Bsinx$$

та підставимо їх в початкове рівняння ($y'' + 2y' + 2y = \cos x$):

$$-A\cos x - Bsinx + 2(-A\sin x + Bcosx) + 2(A\cos x + Bsinx) = \cos x,$$

$$-A\cos x - Bsinx - 2A\sin x + 2Bcosx + 2A\cos x + 2Bsinx = \cos x,$$

$$A\cos x + Bsinx - 2A\sin x + 2Bcosx = \cos x,$$

$$(A + 2B)\cos x + (B - 2A)\sin x = \cos x.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $sin\, x$ ліворуч і праворуч у отриманому рівнянні маємо, що

$$\begin{cases} A + 2B = 1, \\ B - 2A = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0.2, \\ B = 0.4. \end{cases}$$

Отже, $y_ч = 0.2\cos x + 0.4sinx$. Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = C_1e^{-x}cosx + C_2e^{-x}sinx + 0.2\cos x + 0.4sinx.$$

Відповідь: $y = C_1e^{-x}cosx + C_2e^{-x}sinx + 0.2\cos x + 0.4sinx.$

Приклад 25. Розв'язати рівняння:

$$y'' - 4y' + 5y = e^x sinx.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Дискримінант такого рівняння від'ємний та дорівнює -4. Пара комплексних сполучених коренів $k = 2 \pm$ і, тоді $y_1 = e^{2x}cosx,\ y_2 = e^{2x}sinx.$

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{2x}cosx + C_2e^{2x}sinx.$$

Права частина рівняння $y'' - 4y' + 5y = e^x sin(x)$ має вигляд $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, а отже, це – другий випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $\alpha = 1, \beta = 1, P_0(x) = 0, Q_0 = 1$, $N = \max(0{,}0) = 0$. Оскільки $1 \pm i$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_{ч} = e^x(P_0(x)sinx + Q_0(x)\cos x) = A\cos x\, e^x + B\sin x\, e^x.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_{ч}' = (B - A)e^x \cos x + (B + A)e^x sinx,$$

$$y_{ч}'' = 2Ae^x sinx + 2Be^x \cos x$$

та підставимо їх в початкове рівняння $y'' - 4y' + 5y = e^x sin(x)$:

$$2Ae^x sinx + 2Be^x \cos x - 4\big((B - A)e^x \cos x + (B + A)e^x sinx\big) + 5(A\cos x\, e^x + B\sin x\, e^x) = \cos x,$$

$$2Ae^x sinx + 2Be^x \cos x - 4Be^x \cos x + 4Ae^x \cos x - 4Be^x sinx - 4Ae^x sinx + 5A\cos x\, e^x + 5B\sin x\, e^x = \cos x.$$

Скоротимо вираз на e^x та спростимо:

$$sinx(2A - 4B - 4A + 5A) + \cos x\,(2B - 4B + 4A + 5B) = \cos x.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 1, \end{cases} \to \begin{cases} A = 0.16, \\ B = 0.12. \end{cases}$$

Отже, $y_{ч} = 0.16\cos x\, e^x + 0.12\sin x\, e^x$.

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} cosx + C_2 e^{2x} sinx + 0.16\cos x\, e^x + 0.12\sin x\, e^x.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} cosx + C_2 e^{2x} sinx + 0.16\cos x\, e^x + 0.12\sin x\, e^x$.

Приклад 26. Розв'язати рівняння

$$y'' + 9y = sin3x.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 9 = 0.$$

Очевидно, що коренями такого рівняння є пара $k = 0 \pm 3i$, тоді $y_1 = cos3x$, $y_2 = sin3x$. Загальний розвязок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 cos3x + C_2 sin3x.$$

Права частина рівняння $y'' + 2y' + 2y = sin3x$ вигляду $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, а отже це другий випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $\alpha = 0, \beta = 3, P_0(x) = 0, Q_0 = 1$, $N = \max(0,0) = 0$. Оскільки $0 \pm 3i$ є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_{ч} = x^s e^{0x}(P_0(x)cos3x + Q_0(x)sin3x) = x(Acos3x + Bsin3x) =$$
$$= Axcos3x + Bxsin3x.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_{ч}' = Acos3x - 3Axsin3x + Bsin3x + 3Bxcos3x,$$
$$y_{ч}'' = -3Asin3x - 3Asin3x - 9Axcos3x + 3Bcos3x + 3Bcos3x - 9Bxsin3x =$$
$$= -6Asin3x - 9Axcos3x + 6Bcos3x - 9Bxsin3x$$

та підставимо їх в початкове рівняння ($y'' + 9y = sin3x$):

$$-6Asin3x - 9Axcos3x + 6Bcos3x - 9Bxsin3x + 9(Axcos3x + Bxsin3x) =$$
$$= sin3x,$$
$$-6Asin3x + 6Bcos3x = sin3x.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} -6Asin3x = sin3x, \\ 6Bcos3x = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отже, $y_{ч} = -\frac{x}{6}cos3x$. Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = C_1cos3x + C_2sin3x - \frac{x}{6}cos3x.$$

Відповідь: $y = C_1cos3x + C_2sin3x - \frac{x}{6}cos3x$.

Приклад 26. Розв'язати рівняння:

$$y'' - 2y' + 10y = e^x cos3x.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 10 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння дорівнює -36. Очевидно, що коренями такого рівняння є пара $k = 1 \pm 3i$, тоді $y_1 = e^x cos3x$, $y_2 = e^x sin3x$.

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^x cos3x + C_2e^x sin3x.$$

Права частина рівняння $y'' - 2y' + 10y = e^x cos3x$ вигляду $f(x) = e^{\propto x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, а отже, це – другий випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $\alpha = 1, \beta = 3, P_0(x) = 1, Q_0 = 0$, $N = \max(0,0) = 0$. Оскільки $1 \pm 3i$ є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = x^s e^x(P_0(x)cos3x + Q_0(x)sin3x) = xe^x(Acos3x + Bsin3x) =$$
$$= Axe^x cos3x + Bxe^x sin3x.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_ч' = Ae^x cos3x + Axe^x cos3x - 3Axe^x sin3x + Be^x sin3x + Bxe^x sin3x +$$
$$+3Bxe^x cos3x = e^x cos3x(A + Ax + 3Bx) + e^x sin3x(-3Ax + B + Bx),$$

$$y_ч'' = Ae^x cos3x - 3Ae^x sin3x + Ae^x cos3x + Axe^x cos3x - 3Axe^x sin3x -$$
$$-3(Ae^x sin3x + Axe^x sin3x + 3Axe^x cos3x) + Be^x sin3x + 3Be^x cos3x +$$
$$+Be^x sin3x + Bxe^x sin3x + 3Bxe^x cos3x + 3(Be^x cos3x + Bxe^x cos3x -$$
$$-3Bxe^x sin3x) = e^x cos3x(2A - 8Ax + 6B + 6Bx) +$$
$$+e^x sin3x(-6A - 6Ax + 2B - 8Bx)$$

та підставимо їх в початкове рівняння $y'' - 2y' + 10y = e^x cos3x$:

$$e^x cos3x(2A - 8Ax + 6B + 6Bx) + e^x sin3x(-6A - 6Ax + 2B - 8Bx)$$
$$- 2(e^x cos3x(A + Ax + 3Bx) + e^x sin3x(-3Ax + B + Bx))$$
$$+ 10(Axe^x cos3x + Bxe^x sin3x) = e^x cos3x,$$
$$6Be^x cos3x - 6Ae^x sin3x = e^x cos3x.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} 6B = 1, \\ -6A = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Отже, $y_ч = \frac{1}{6}xe^x sin3x$.

Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y = C_1 e^x cos3x + C_2 e^x sin3x + \frac{1}{6} x e^x sin3x.$$

Відповідь: $y = C_1 e^x cos3x + C_2 e^x sin3x + \frac{1}{6} x e^x sin3x.$

Метод варіації довільних постійних (метод невизначених множників Лагранжа). Суть методу варіації довільних постійних полягає е тому, що на першому етапі так само, як і в методі невизначених коефіцієнтів, шукають загальний розв'язок $y_з(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ – з єдиною тільки різницею, що коефіцієнти $C_i, i = 1, \ldots, n$ далі вважаються не сталими, а певними функціями $C_i(x), i = 1, \ldots, n.$ Для їх визначення слід розв'язати систему рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + \cdots + C_n' y_n(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + \cdots + C_n' y_n'(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Оскільки визначник Вронського цієї системи не дорівнює нулю, система має єдиний розв'язок $C'_i(x) = \gamma_i(x),\ i = 1, \ldots, n.$ Підставляючи $\gamma_i(x)$ в загальний розв'язок, отримують кінцевий розв'язок рівняння.

Окремо слід зазначити, що метод варіації довільної сталої передбачає, що коефіцієнт a_0 дорівнює одиниці. У тому випадку, коли ця умова не виконується, необхідно під час застосування методу останнє рівняння системи прирівняти до $\frac{f(x)}{a_0}$ замість $f(x)$.

Приклад 27. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Очевидно, що коренями такого рівняння є пара $k = 1$, тоді загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Складемо систему алгебраїчних рівнянь згідно з методом варіації постійних:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2'(e^x + x e^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Віднявши від другого рівняння системи перше, отримаємо $C_2' e^x = \frac{e^x}{x}$, отже, $C_2' = \frac{1}{x}$. Інтегруючи це рівняння, знаходимо $C_2 = \ln|x| + B$. Підставивши отриманий розв'язок в перше рівняння, маємо

$$C_1' e^x + \frac{1}{x} x e^x = 0.$$

Отже, скоротивши рівняння на e^x, маємо $C_1' = -1$. Звідси $C_1 = -x + D$. Тоді розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y = (-x + D)e^x + (\ln|x| + B)xe^x = -xe^x + De^x + xe^x \ln|x| + Bxe^x.$$

Відповідь: $y = De^x + xe^x \ln|x| + \hat{B}xe^x$.

Приклад 28. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = 2ctg\, x$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0.$$

Очевидно, що коренями такого рівняння є пара $k = \pm i$, тоді загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Складемо систему алгебраїчних рівнянь згідно з методом варіації постійних:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 2ctg\, x. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $\cos x$, а друге – на $\sin x$ та отримаємо

$$\begin{cases} C_1' \cos^2 x + C_2' \sin x \cos x = 0, \\ -C_1' sin^2 x + C_2' \sin x \cos x = 2 \dfrac{\cos x}{\sin x} \sin x\,. \end{cases}$$

Віднявши від першого друге, отримаємо:

$$C_1' \cos^2 x + C_1' sin^2 x = -2 \cos x,$$

$$C_1' (\cos^2 x + sin^2 x) = -2 \cos x,$$

$$C_1' = -2 \cos x.$$

Інтегруємо праву частину та отримуємо $C_1 = -2 \sin x + C$. Підставивши цей вираз в перше рівняння, маємо

$$-2 \cos x \cos^2 x + C_2' \sin x \cos x = 0,$$

$$-2 \cos^2 x + C_2' \sin x = 0,$$

$$C_2' \sin x = 2 \cos^2 x,$$

$$C_2' = \frac{2 \cos^2 x}{\sin x} = \frac{2(1 - \sin^2 x)}{\sin x} = 2 \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right).$$

Знайдемо інтеграл від $\frac{1}{\sin x}$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ \begin{array}{c} t = tg \dfrac{x}{2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1 + \mathrm{t}^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1 + \mathrm{t}^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1 + \mathrm{t}^2}} \frac{2dt}{1 + \mathrm{t}^2} = \int \frac{1}{t} dt = ln|t| = ln \left| tg \frac{x}{2} \right|.$$

Отже,

$$C_2 = 2 \left(ln \left| tg \frac{x}{2} \right| - \cos x \right) + D.$$

Тоді розв’язок рівняння прийме вигляд:

$$y = (-2 \sin x + C) \cos x + (2(ln \left| tg \frac{x}{2} \right| - \cos x) + D) \sin x.$$

Відповідь: $y = C \cos x + 2ln \left| tg \frac{x}{2} \right| \sin x + D \sin x$.

Практичні завдання

Розв'язати рівняння.

1. $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = x^2 + 1.}$
2. $\boldsymbol{y'' + 4y' + y = 5e^x}$
3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 4y = xe^{4x}.}$
4. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 10y = 4e^{2x}}$.
5. $\boldsymbol{y'' + 2y' - 5y = cos2x.}$
6. $\boldsymbol{y'' - y' - 5y = 8ctg2x}$
7. $\boldsymbol{y'' - 5y = sin4x}$
8. $\boldsymbol{y'' + 3y' + 5y = sin3x}$
9. $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 4ctgx}$
10. $\boldsymbol{y'' + 3y' + 4y = cosx}$

3.5. Рівняння Ейлера

Рівнянням Ейлера будемо називати рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad (3.8)$$

де a_i, $i = 1, \ldots, n$ – дійсні константи. Це рівняння є рівнянням зі змінними коефіцієнтами, але зробивши заміну

$$x = e^t, \text{ при } x > 0 \quad (x = -e^t, \text{ при } x < 0),$$

можна прийти до рівняння з постійними коефіцієнтами. Так, виходячи із заміни, маємо:

$$t = \ln x,$$

$$y'(x) = y'(t)\frac{dt}{dx} = y'(t)\frac{1}{x};$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(y'(t)\frac{1}{x}\right) = y''(t)\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - y'(t)\frac{1}{x^2} = \left(y''(t) - y'(t)\right)\frac{1}{x^2},$$

... і т.д.

Підставляючи отримані вирази в (3.8), отримаємо:

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} y' + b_n y = f(e^t),$$

що є лінійним звичайним рівнянням *n*-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Приклад 26. Розв'язати

$$x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16\,ln\,x}{x}.$$

Розв'язання. Нехай $x = e^t$, тоді

$$y'(x) = y'(t)\,\frac{1}{e^t},$$

$$y''(x) = (y''(t) - y'(t))\,\frac{1}{e^{2t}}.$$

Підставимо отримані вирази в початкове рівняння та отримаємо

$$e^{2t}\big(y''(t) - y'(t)\big)\frac{1}{e^{2t}} - e^t y'(t)\frac{1}{e^t} - 3y(t) = -\frac{16t}{e^t},$$

$$y'' - 2y' - 3y = -16te^{-t}$$

Отже, маємо звичайне лінійне рівняння *n*-го порядку з постійними коефіцієнтами. Знайдемо загальний розв'язок:

$$k^2 - 2k - 3 = 0,$$

$$D = 16, \quad k_1 = 3,\ k_2 = -1.$$

$$y_з = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}.$$

Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_1(t) = -16t, k = -1$. Оскільки $k = -1$ є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = te^{-t}\,(At + B) = At^2e^{-t} + Bte^{-t}.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_ч' = (AAt^2e^{-t} + Bte^{-t})' = 2Ate^{-t} - At^2e^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t},$$

$$y_ч'' = (2Ate^{-t} - At^2e^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t})' =$$

$$= 2Ae^{-t} - 2Ate^{-t} - 2Ate^{-t} + At^2e^{-t} - Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t} =$$

$$= 2Ae^{-t} - 4Ate^{-t} + At^2e^{-t} - 2Be^{-t} + Bte^{-t}$$

та підставимо їх в початкове рівняння ($y'' - 2y' - 3y = -16te^{-t}$):

$$2Ae^{-t} - 4Ate^{-t} + At^2e^{-t} - 2Be^{-t} + Bte^{-t} -$$

$$-2(2Ate^{-t} - At^2e^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}) -$$

$$-3(At^2e^{-t}+Bte^{-t})=-16te^{-t}.$$

Скоротимо вираз на e^{-t} та спростимо:

$$2A-4At+At^2-2B+Bt-4At+2At^2-2B+2Bt-3At^2-3Bt=-16t,$$

$$2A-8At-4B=-16t.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases}2A-4B=0,\\-8At=-16t,\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}A=2,\\B=1.\end{cases}$$

Отже, $y_ч=2t^2e^{-t}+te^{-t}$.

Загальний розв'язок прийме вигляд $y_з=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+2t^2e^{-t}+te^{-t}$.

З урахуванням заміни маємо $x=e^t$, $t=\ln x$. Тоді загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y_з=C_1x^3+\frac{C_2}{x}+\frac{2\ln^2x+\ln x}{x}.$$

Відповідь: $y_з=C_1x^3+\frac{C_2}{x}+\frac{2\ln^2x+\ln x}{x}$.

Приклад 27. Розв'язати рівняння:

$$x^2y''-xy'+y=8x^3.$$

Розв'язання. Нехай $x=e^t$, тоді

$$y'(x)=y'(t)\frac{1}{e^t},$$

$$y''(x)=(y''(t)-y'(t))\frac{1}{e^{2t}}.$$

Підставимо отримані вирази в початкове рівняння та отримаємо:

$$e^{2t}\big(y''(t)-y'(t)\big)\frac{1}{e^{2t}}-e^ty'(t)\frac{1}{e^t}+y(t)=8e^{3t},$$

$$y''-2y'+y=8e^{3t}.$$

Отже, маємо звичайне лінійне рівняння *n*-го порядку з постійними коефіцієнтами. Знайдемо загальний розв'язок:

$$k^2-2k+1=0,$$

$$D=0,\quad k_{1,2}=1,$$

$$y_з=C_1e^t+C_2te^t.$$

Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це – перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_1(t) = 8, k = 3$. Оскільки $k = 3$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$y_ч = Ae^{3t} .$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$y_ч' = (Ae^{3t})' = 3Ae^{3t},$$

$$y_ч'' = (3Ae^{3t})' = 9Ae^{3t},$$

та підставимо їх в початкове рівняння $y'' - 2y' + y = 8e^{3t}$:

$$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = 8e^{3t}.$$

Скоротимо вираз на e^{-t} та спростимо:

$$4A = 8, \qquad A = 2.$$

Отже, $y_ч = 2e^{3t}$.

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^t + C_2xe^t + 2e^{3t}.$$

З урахуванням заміни маємо $x = e^t,\ t = ln\, x$. Тоді загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y_з = C_1x + C_2x\, ln\, x + 2x^3.$$

Відповідь: $y_з = C_1x + C_2x\, ln\, x + 2x^3$.

3.6. Крайові задачі

На відміну від вже відомої нам задачі Коші, крайові задачі відрізняються наявністю значення функції не в одній точці, а одразу у декількох. За рахунок цього створюється відрізок, на якому необхідно знайти розв'язок.

Розглянемо крайову задачу для рівняння другого порядку:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{3.9}$$

$$y(a) = y_0, \ \ y(b) = y_1, \tag{3.10}$$

$$a \le x \le b.$$

Необхідно знайти такий загальний розв`язок рівняння (3.9), щоб задовольнялися умови (3.10).

Однорідними називають такі **крайові умови**, при яких значення $\boldsymbol{y_0}$ та $\boldsymbol{y_1}$ дорівнюють нулю. **Неоднорідними** називають такі крайові умови, при яких значення $\boldsymbol{y_0}$ та $\boldsymbol{y_1}$ відмінні від нуля.

Крайова задача називається **однорідною**, якщо саме диференційне рівняння, а також крайові умови є однорідними. Крайова задача називається **напіводнорідною**, якщо саме диференційне рівняння неоднорідне, а крайові умови, навпаки, однорідні. Крайова задача називається **неоднорідною**, якщо і диференційне рівняння, і крайові умови неоднорідні одночасно.

Розглянемо крайову задачу з однорідними крайовими умовами:

$$\boldsymbol{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0}, \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0}, \\ \boldsymbol{\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Щоб розв’язати таку задачу, необхідно спочатку знайти загальний розв’язок диференціального рівняння, а потім підібрати коефіцієнти таким чином, щоб виконувалися крайові умови.

Приклад 28. Розв’язати крайову задачу

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y(1) = e}, \\ \boldsymbol{y(0) - y'(0) = 1}. \end{cases}$$

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Корені такого рівняння $k_1 = 1, k_2 = -3$ – різні та дійсні. Тоді фундаментальна система розв’язків: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-3x}$.

Загальний розв’язок рівняння прийме вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$$y' = C_1e^x - 3C_2e^{-3x}.$$

Згідно з крайовими умовами маємо наступну систему:

$$\begin{cases} C_1e + C_2e^{-3} = e, \\ C_1e^0 + C_2e^0 - C_1e^0 + 3C_2e^0 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1e + C_2e^{-3} = e, \\ C_1 + C_2 - C_1 + 3C_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{4C_2 = 0}, \\ \boldsymbol{C_1e + 0 = e}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1 = 1}, \\ \boldsymbol{C_2 = 0}. \end{cases}$$

Таким чином, розв'язком крайової задачі є функція $\boldsymbol{y = e^x}$.

Приклад 29. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}, \\ \boldsymbol{y(0) - y'(0) = 1}. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 2 = 0.$$

Дискримінант такого рівняння від'ємний та дорівнює -4. Пара комплексних сполучених коренів $k = -1 \pm i$, і в підсумку маємо другу ситуацію. Тоді фундаментальна система розв'язків набуватиме вигляду $y_1 = e^{-x}cosx,\ y_2 = e^{-x}sinx$.

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1e^{-x}cosx + C_2e^{-x}sinx.$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$$\begin{aligned} y' &= -C_1e^{-x}cosx + C_1e^{-x}sinx - C_2e^{-x}sinx + C_2e^{-x}cosx \\ &= e^{-x}cosx(-C_1 + C_2) + e^{-x}sinx(C_1 - C_2). \end{aligned}$$

Згідно з крайовими умовами маємо наступну систему:

$$\begin{cases} C_1e^{-\frac{\pi}{2}}cos\frac{\pi}{2}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}sin\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}}, \\ C_1e^0cos0+C_2e^0sin0-e^0cos0(-C_1+C_2)+e^0sin0(C_1-C_2)=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{0}+\boldsymbol{C_2e^{-\frac{\pi}{2}}}=\boldsymbol{e^{-\frac{\pi}{2}}}, \\ \boldsymbol{C_1}+\mathbf{0}-(-\boldsymbol{C_1}+\boldsymbol{C_2})+\mathbf{0}=\mathbf{1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_2}=\mathbf{1}, \\ \mathbf{2}\boldsymbol{C_1}-\boldsymbol{C_2}=\mathbf{1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1}=\mathbf{1}, \\ \boldsymbol{C_2}=\mathbf{1}. \end{cases}$$

Таким чином, розв'язком крайової задачі є функція $\boldsymbol{y_з=e^{-x}cosx+e^{-x}sinx}$.

Розглянемо деякі методи розв'язування крайових задач.

Перепишемо рівняння (3.11) у вигляді

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0}. \qquad (3.13)$$

Функція Гріна. Функцією Гріна крайової задачі (3.11) – (3.12) будемо називати таку функцію $\boldsymbol{G(x,s)}$, яка визначена на $\boldsymbol{x\in[a,b], s\in(a,b)}$ та при кожному фіксованому $\boldsymbol{s\in(a,b)}$ буде задовольняти наступним умовам:

- однорідному диференціальному рівнянню $(\mathbf{3.11})$ при $\boldsymbol{x\neq s}$;

- однорідним крайовим умовам $(\mathbf{3.12})$ при $\boldsymbol{x=a, x=b}$;

- при $\boldsymbol{x=s}$ функція $\boldsymbol{G(x,s)}$ є неперервною на $\boldsymbol{x}$;

- при $\boldsymbol{x=s}$ частинна похідна $\boldsymbol{G'_x(x,s)}$ має скачок:

$$\boldsymbol{G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}}.$$

В тому випадку, коли вдалося знайти функцію Гріна $\boldsymbol{G(x,s)}$, розв'язок задачі (3.9), (3.10) можна знайти за формулою:

$$\boldsymbol{y(x)=\int_a^b G(x,s)\,f(s)ds}. \qquad (\mathbf{3.11})$$

Приклад 30. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі:

$$y''-4y=f(s),$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція Гріна $\boldsymbol{G(x,s)}$ має задовольняти однорідному рівнянню, тому складемо для нього характеристичне рівняння

$$k^2 - 4 = 0.$$

Розв'язком рівняння є пара коренів $k_1 = 2, k_2 = -2$, а його фундаментальна система розв'язків приймає вигляд $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$.

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Функцію Гріна будемо шукати у вигляді:

$$\boldsymbol{G(x,s)} = \begin{cases} \boldsymbol{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}, & \boldsymbol{0 \le x \le s}, \\ \boldsymbol{C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}}, & \boldsymbol{s \le x \le 1}. \end{cases}$$

Форма запису (3.13) заданого рівняння така: $(y')' - 4y = f(s)$, тому $p(x) = 1$.

Задовольняючи функцією Гріна крайові умови, та додаючи умови неперервності $\boldsymbol{G(x,s)}$ і умови розриву першого роду її похідної за x, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих констант:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_3 e^2 + 2C_4 e^{-2} = 0, \\ C_1 e^{2s} + C_2 e^{-2s} = C_3 e^{2s} + C_4 e^{-2s}, \\ 2C_3 e^{2s} - 2C_4 e^{-2s} - 2C_1 e^{2s} + 2C_2 e^{-2s} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо: $C_2 = -C_1$; $C_4 = -\boldsymbol{C_3} e^4$. Виключаємо з двох останніх рівнянь C_2 і C_4, знаходимо:

$$\begin{cases} C_1(e^{2s} - e^{-2s}) - C_3(e^{2s} - e^{4-2s}) = 0, \\ -C_1(e^{2s} + e^{-2s}) + C_3(e^{2s} + e^{4-2s}) = 1/2. \end{cases}$$

Застосовуючи метод Крамера, знайдемо розв'язок цієї системи:

$C_1 = \frac{sh(2s-2)}{4sh2}$; $C_3 = \frac{sh(2s)}{4e^2 sh2}$. А, отже, $C_2 = -\frac{sh(2s-2)}{4sh2}$; $C_4 = -\frac{e^2 sh(2s)}{4sh2}$.

Функцію Гріна запишемо у вигляді:

$$\boldsymbol{G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sh(2s-2)}{4sh2}(e^{2x}-e^{-2x}), & 0\le x\le s,\\ \dfrac{sh(2s)}{4e^2sh2}e^{2x}-\dfrac{e^2sh(2s)}{4sh2}e^{-2x}, & s\le x\le 1;\end{cases}}$$

або

$$\boldsymbol{G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sh(2s-2)sh2x}{2sh2}, & 0\le x\le s,\\ \dfrac{sh(2s)sh(2x-2)}{2sh2}, & s\le x\le 1.\end{cases}}$$

Приклад 31. Знайти функцію Гріна крайової задачі

$$y''-y'=e^{2x},$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}(-1)=0,\\ \boldsymbol{y}(1)=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2-k=0.$$

Розв'язком рівняння є пара коренів $k_1=1, k_2=0$. Тоді фундаментальна система розв'язків прийме вигляд $y_1=e^x,\ y_2=1$.

Загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$y_з=C_1e^x+C_2.$$

Функцію Гріна будемо шукати у вигляді:

$$\boldsymbol{G(x,s)=\begin{cases}C_1e^x+C_2, & 0\le x\le s,\\ C_3e^x+C_4, & s\le x\le 1.\end{cases}}$$

Форма запису (3.13) заданого рівняння така: $(y')'-y'=e^{2x}$, тому $p(x)=1$. Задовольняючи функцією Гріна крайові умови, та додаючи умови неперервності $G(x,s)$ і умови розриву першого роду її похідної за x, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих констант:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_3e+C_4=0,\\ C_1e^s+C_2=C_3e^s+C_4,\\ C_3e^s-C_1e^s=1.\end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо: $C_2=-C_1$; $C_4=-C_3e$. Виключаємо з двох останніх рівнянь C_2 і C_4, знаходимо:

$$\begin{cases} C_1(e^s - 1) - C_3(e^s - e) = 0, \\ -C_1 + C_3 = e^{-s}. \end{cases}$$

Застосовуючи метод Крамера, знайдемо розв'язок цієї системи:

$C_1 = \frac{1-e^{1-s}}{e-1}$; $C_3 = \frac{1-e^{-s}}{e-1}$. А, отже, $C_2 = -\frac{1-e^{1-s}}{e-1}$; $C_4 = -\frac{1-e^{-s}}{e-1}$.

Функцію Гріна запишемо у вигляді:

$$\boldsymbol{G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{1-s}}{e-1}(e^x - 1), & 0 \le x \le s, \\ \dfrac{1-e^{-s}}{e-1}(e^x - e), & s \le x \le 1; \end{cases}}$$

або

$$\boldsymbol{G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{(e-1)}(1-e^{1-s})(e^x - 1), & 0 \le x \le s, \\ \dfrac{e}{e-1}(1-e^{-s})(e^{x-1} - 1), & s \le x \le 1. \end{cases}}$$

Відповідь: $\boldsymbol{G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{(e-1)}(1-e^{1-s})(e^x - 1), & 0 \le x \le s, \\ \frac{e}{e-1}(1-e^{-s})(e^{x-1} - 1), & s \le x \le 1. \end{cases}}$

Зведення до двох задач Коші. Ідея цього методу полягає в тому, що розв'язок $\boldsymbol{y(x), x \in [a,b]}$, крайової задачі:

$$\boldsymbol{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),} \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = A, \\ \beta_0 y'(a) + \beta_1 y(a) = B \end{cases}} \tag{3.15}$$

можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{y = Cu(x) + v(x),} \tag{3.16}$$

де невідомі функції $\boldsymbol{v(x), u(x)}$ знаходять, розв'язуючі водночас дві задачі:

- перша задача – для знаходження $\boldsymbol{v(x)}$:

$$\boldsymbol{a_2(x)v'' + a_1(x)v' + a_0(x)v = f(x);}$$

- друга задача – для знаходження $\boldsymbol{u(x)}$:

$$\boldsymbol{a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0.}$$

Для функції $\boldsymbol{u(x)}$ обираємо початкові умови так, щоб при будь-якому значенні константи $\boldsymbol{C}$ виконувалася перша умова (3.15):

$$\boldsymbol{\alpha_0\big(Cu'(a)+v'(a)\big)+\alpha_1\big(Cu(a)+v(a)\big)=A,}$$

$$\boldsymbol{C\big(\alpha_0 u'(a)+\alpha_1 u(a)\big)+\alpha_0 v'(a)+\alpha_1 v(a)=A.}$$

Тоді:

$$\boldsymbol{\alpha_0 u'(a)+\alpha_1 u(a)=0,} \qquad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\alpha_0 v'(a)+\alpha_1 v(a)=A} \qquad (3.18)$$

Виберемо такі значення $\boldsymbol{u(a)}$ та $\boldsymbol{u'(a)}$, щоб виконувалася умова (3.17):

1. Якщо $\boldsymbol{\alpha_1 \neq 0}$, тоді

$$\boldsymbol{u'(a)=k,}$$

$$\boldsymbol{u(a)=-\frac{\alpha_0 k}{\alpha_1}.}$$

2. Якщо $\boldsymbol{\alpha_0 \neq 0}$, тоді

$$\boldsymbol{u(a)=k,}$$

$$\boldsymbol{u'(a)=-\frac{\alpha_1 k}{\alpha_0}.}$$

Виберемо такі значення $\boldsymbol{v(a)}$ та $\boldsymbol{v'(a)}$, щоб виконувалася умова (3.18):

1. Якщо $\boldsymbol{\alpha_1 \neq 0}$, тоді

$$\boldsymbol{v'(a)=\xi,} \qquad (3.19)$$

$$\boldsymbol{v(a)=\frac{A-\alpha_0\xi}{\alpha_1}.} \qquad (3.20)$$

2. Якщо $\boldsymbol{\alpha_0 \neq 0}$, тоді

$$\boldsymbol{v(a)=\xi,} \qquad (3.21)$$

$$\boldsymbol{v'(a)=\frac{A-\alpha_1\xi}{\alpha_0}.} \qquad (3.22)$$

Таким чином, $\boldsymbol{y=Cu(x)+v(x)}$ за умови, що:

$\boldsymbol{u(x)}$: $\boldsymbol{a_2u''+a_1u'+a_0u=0}$ за умови (3.19) або (3.20),

$\boldsymbol{v(x)}$: $\boldsymbol{a_2v''+a_1v'+a_0v=f(x)}$ за умови (3.21) або (3.22).

Константу $\boldsymbol{C}$ обирають таким чином, щоб рівняння $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cu}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ задовольняло другій умові (3.15):

$$\boldsymbol{\beta_0\big(Cu'(b) + v'(b)\big) + \beta_1\big(Cu(b) + v(b)\big) = B},$$

$$\boldsymbol{C\big(\beta_0 u'(b) + \beta_1 u(b)\big) + \beta_0 v'(b) + \beta_1 v(b) = B},$$

$$\boldsymbol{C = \frac{B - \beta_0 v'(b) - \beta_1 v(b)}{\beta_0 u'(b) + \beta_1 u(b)}}.$$

Приклад 32. Розв'язати крайову задачу за допомогою зведення до задачі Коші:

$$y'' + y = 1,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}(0) = 1, \\ \boldsymbol{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок будемо шукати у вигляді: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cu}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

Згідно умови маємо, що $\boldsymbol{\alpha_0} = 0, \boldsymbol{\alpha_1} = 1$; $\boldsymbol{\beta_0} = 0, \boldsymbol{\beta_1} = 1$.

Знайдемо значення функції $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$**:**

$$v'' + v = 1,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(0) = 0, \\ \boldsymbol{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Це – лінійне неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 1 = 0.$$

Очевидно, що маємо пару комплексних сполучених коренів $k = \pm i$, тоді загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$v_з = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Розглянемо рівняння $v'' + v = 1$. Це рівняння має праву частину вигляду $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, а отже, це – перший випадок методу невизначених коефіцієнтів. Тут $P_0(x) = 1, k = 0$. Оскільки $k = 0$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд:

$$v_ч = e^{kx}B_n(x) = e^0 B_0(x) = A.$$

Знайдемо похідні частинного розв'язку:

$$v_ч' = 0,$$

$$v_ч'' = 0$$

та підставимо їх у початкове рівняння ($v'' + v = 1$):

$$0 + A = 1.$$

Звідси маємо:

$$A = 1.$$

Отже, $v_ч = 1$.

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$v = C_1 cosx + C_2 sinx + 1.$$

З урахуванням умов маємо

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(0) = 0, \\ \boldsymbol{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + 1 = 0, \\ C_2 + 1 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, $v = 1 - cosx - sinx$.

Знайдемо значення функції $\boldsymbol{u(x)}$**:**

$$u'' + u = 0,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(0) = 1, \\ \boldsymbol{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Це – лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 1 = 0.$$

Очевидно, що маємо пару комплексних сполучених коренів $k = \pm i$, тоді загальний розв'язок рівняння прийме вигляд:

$$u = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

З урахуванням умов маємо

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(0) = 1, \\ \boldsymbol{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{1}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, □ = □□□□ + □□□□. Знайдемо константу $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{0} - (\mathbf{1} - \boldsymbol{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}})}{\boldsymbol{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

Таким чином, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 1 - cosx - sinx$.

Відповідь: $y = 1 - cosx - sinx$.

Практичні завдання

Розв'язати крайові задачі:

1. $y'' - y' = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}(1) = 1$

2. $y'' = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 0,\ \boldsymbol{y}(1) = 0$

3. $y'' + 2y = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}(1) = -1$

4. $y'' + 3y' = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}'(1) = 1$

5. $y'' + 5y' + y = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}'(1) = 1$

6. $y'' - y' = 0,\ ,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}'(1) = 1$

7. $y'' = 0,\ \ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}'(1) = 1$

8. $y'' + 2y = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}(1) = -1$

9. $y'' + 3y' = 0, \boldsymbol{y}(0) = 0,\ \boldsymbol{y}(1) = 0$

10. $y'' + 5y' + y = 0,\ \boldsymbol{y}(0) = 1,\ \boldsymbol{y}(1) = 1$

3.7. Системи лінійних диференціальних рівнянь

3.7.1. Загальні поняття

Системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку будемо називати сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких є лінійним відносно невідомої функції:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(x)y_i(x) + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(x)y_i(x) + f_2(x), \\ \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}(x)y_i(x) + f_n(x). \end{cases} \tag{3.21}$$

Якщо $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$,

векторна форма запису системи (3.21) прийме вигляд:

$$\frac{dY(x)}{dx} = AY(x) + F(x). \tag{3.22}$$

Часто в якості незалежної змінної x виступає часова змінна (t).

Системи (3.21) та (3.22) називають **однорідними** в тому випадку, коли вектор $F(x) = 0$. Якщо $F(x) \neq 0$, то системи називають **неоднорідними**.

Задачею Коші для системи (3.21) називають пошук такого розв'язку системи, який би задовольняв початковим умовам:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10}, \\ y_2(x) = y_{20}, \\ \qquad \dots \\ y_n(x) = y_{n0}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Теорема 2. Якщо вектори $A_{ij}(x)$ та $F_i(x)$ неперервні на певному інтервалі (a, b), існує єдиний розв'язок задачі Коші для системи (3.21) при початкових умовах (3.22).

Нехай відомо m розв'язків лінійної однорідної системи:

$$y^1(x) = \begin{pmatrix} {y^1}_1(x) \\ {y^1}_2(x) \\ \dots \\ {y^1}_n(x) \end{pmatrix}, \quad y^2(x) = \begin{pmatrix} {y^2}_1(x) \\ {y^2}_2(x) \\ \dots \\ {y^2}_n(x) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad y^m(x) = \begin{pmatrix} {y^m}_1(x) \\ {y^m}_2(x) \\ \dots \\ {y^m}_n(x) \end{pmatrix}.$$

Лінійна комбінація цієї системи функцій є функцією виду:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i\, y^i(x),$$

де C_i – певні константи.

Теорема 3. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків лінійної однорідної системи також є розв'язком системи:

$$\frac{dY(x)}{dx} = AY(x), \qquad (3.24)$$

Оскільки $y^i(x)$ – розв'язок системи (3.24), тоді $\frac{dy^i(x)}{dx} = Ay^i(x)$.

Система функцій $y^1(x), y^2(x), ..., y^m(x)$ називається лінійно залежною на інтервалі (a, b), якщо можна знайти такі значення констант $C_1, C_2, \ldots, C_m$, які одночасно не дорівнюють нулю та при яких виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\, y^i(x) = 0, \qquad x \in (a, b).$$

Вектори $y^1(x), y^2(x), ..., y^m(x)$ називаються лінійно незалежними, якщо при будь-якому наборі констант $C_1, C_2, \ldots, C_m$, серед яких хоча б одна не нульова, можна вказати такі значення x з інтервалу (a, b), що

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\, y^i(x) \neq 0, \qquad x \in (a, b).$$

Розглянемо критерій лінійної незалежності системи вектор-функцій $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$. **Визначником Вронського** (вронскіаном) цієї системи функцій називають визначник виду:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \ldots & y_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 4. Якщо вектор-функції $y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)$ – лінійно залежні, визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.

Теорема 5. Якщо вектор-функції $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ є сукупністю розв'язків однорідної системи (3.24), а складений з них визначник Вронського дорівнює нулю хоча б в одній з точок $x_0 \in (a, b)$, система вектор-функцій $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ є лінійно залежною.

Наслідок 1. Якщо визначник Вронського складається з n розв'язків однорідної системи (3.24) і дорівнює нулю хоча б в одній точці $x \in (a, b)$, то він тотожно дорівнює нулю.

Наслідок 2. Визначник Вронського, складений з n розв'язків однорідної системи (3.24), або тотожно дорівнює нулю, або відмінний від нуля в усіх точках інтервалу, на якому розглядається система рівнянь.

Теорема 6. Для того, щоб система функцій $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$, які представляють собою розв'язок однорідної системи (3.24), була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб складений з неї визначник Вронського був відмінний від нуля у всіх точках інтервалу (a, b).

Теорема 7. Якщо n розв'язків $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$, $a < x < b$, однорідної системи (3.24) є лінійно незалежні, то її загальний розв'язок представлений у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y^i(x),$$

де C_i – довільні константи.

3.7.2. Розв'язування однорідної системи рівнянь

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (3.24) є вектор-функція

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \\ \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{pmatrix},$$

яка задовольняє певним умовам:

1) при будь-яких значеннях констант вектор-функція $\psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ є розв'язком системи (3.21);

2) довільні розв'язки системи можна отримати при певних значеннях констант.

Іноді систему диференціальних рівнянь можна звести до диференціального рівняння n-го порядку з однією невідомою функцією. Такий підхід називається **методом виключення**. Для цього необхідно диференціювати одне з рівнянь і залишити тільки одну невідому, виключивши всі інші. Метод виключення зручно використовувати, коли в одному з рівнянь певна змінна має одиничний коефіцієнт.

Приклад 33. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = 4x + y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. По-перше, зазначимо, що оскільки система має похідну від x, y, обидві ці функції залежать від змінної t. Виразимо з першого рівняння $(x' = 4x - y)$ y та знайдемо його похідну:

$$y = x' - 4x,$$

$$y' = x'' - 4x'.$$

Підставимо отримані значення в друге рівняння системи та отримаємо:

$$x'' - 4x' = 3x + 2(x' - 4x),$$

$$x'' - 4x' - 3x - 2x' + 8x = 0,$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Маємо однорідну систему рівнянь другого порядку, для якої побудуємо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 5 = 0$. Коренями цього рівняння є значення $k_1 = 1,\ k_2 = 5$. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$x_з = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Знайдемо відповідний розв'язок для y:

$$y_з = x' - 4x = (C_1 e^t + C_2 e^{5t})' - 4(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) =$$

$$= C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 4C_1e^t - 4C_2e^{5t} = -3C_1e^t + C_2e^{5t}.$$

Отже, маємо розв'язок рівняння вигляду:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y = -3C_1e^t + C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Приклад 34. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язання. По-перше, зазначимо, що оскільки система має похідну від x, y, обидві ці функції залежать від змінної t. Виразимо з першого рівняння $(x' = 2x - y)$ змінну y та знайдемо його похідну:

$$y = 2x - x',$$

$$y' = 2x' - x''.$$

Підставимо отримані значення в друге рівняння системи та отримаємо:

$$2x' - x'' = -2x + 6x - 3x',$$

$$x'' - 2x' - 2x - 3x' + 6x = 0,$$

$$x'' - 5x' + 4x = 0.$$

Маємо однорідну систему рівнянь другого порядку, для якої побудуємо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Коренями цього рівняння є значення $k_1 = 4,\ k_2 = 1$.

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$x_з = C_1e^{4t} + C_2e^t.$$

Знайдемо відповідний розв'язок для y:

$$y_з = 2x - x' = 2(C_1e^{4t} + C_2e^t) - (C_1e^{4t} + C_2e^t)' =$$

$$= 2C_1e^{4t} + 2C_2e^t - (4C_1e^{4t} + C_2e^t) = -2C_1e^{4t} + C_2e^t.$$

Отже, маємо розв'язок рівняння вигляду:

$$\begin{cases} x = C_1e^{4t} + C_2e^t, \\ y = -2C_1e^{4t} + C_2e^t. \end{cases}$$

Відповідь: $x = C_1e^{4t} + C_2e^t, y = -2C_1e^{4t} + C_2e^t$.

Як можна бачити з прикладу, метод виключення доцільно використовувати для нескладних систем.

Для розв'язування лінійних системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (3.24) використовують наступний підхід. Спочатку складають характеристичне рівняння (3.24) вигляду:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо воно має прості дійсні корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, кожному з них відповідає певний розв'язок вигляду $C_i v^i e^{\lambda_i x}$, де v^i – власний вектор матриці A, який відповідає цьому λ_i.

Якщо для кореня λ кратності m існує така ж кількість лінійно незалежних власних векторів $v^1, v^2, \dots, v^m$, то йому відповідає розв'язок $Y^\lambda(x) = C_1 v^1 e^{\lambda x} + C_2 v^2 e^{\lambda x} + \dots + C_m v^m e^{\lambda x}$.

Якщо для кореня λ кратності m існує лише p $(p < m)$ лінійно незалежних власних векторів $v^1, v^2, \dots, v^p$, то розв'язок, який відповідає цьому λ, можна шукати у вигляді добутку многочлена степені $(m-p)$ на $e^{\lambda x}$, тобто

$$Y^\lambda(x) = C_1 v^1 e^{\lambda x} + C_2 v^2 e^{\lambda x} + \dots + C_m v^m e^{\lambda x}.$$

$$\begin{cases} y_1(x) = (a + bx + \dots + r x^{m-p}) e^{\lambda x}, \\ \dots \\ y_n(x) = (l + sx + \dots + q x^{m-p}) e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Аби знайти коефіцієнти $a, b, \dots r, l, s \dots q$, потрібно підставити ці вирази в систему (3.24). Прирівнюючи коефіцієнти подібних членів праворуч і ліворуч в рівняннях, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a, b, \dots r, l, s \dots q$. Загальний розв'язок цієї системи мають залежати від m довільних констант (m – кратність кореня λ).

Коли для усіх коренів λ_i характеристичного рівняння знайдені розв'язки $Y^{\lambda_i}(x)$ зазначеного вище вигляду, сумуємо їх і отримуємо загальний розв'язок системи (3.24).

Розв'язок **неоднорідної** системи можна представити у вигляді загального розв'язку однорідної системи та деякого частинного розв'язку неоднорідної системи.

Приклад 35. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y, \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$$

Отже, маємо корені $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7$. Знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{cases} (4-\lambda)\alpha + 3\beta = 0, \\ 5\alpha + (2-\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\beta = 0, \\ 5\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Отже, маємо, що $5\alpha + 3\beta = 0$, відповідно, в якості власного вектору можна взяти вектор $v_1 = (-3{,}5)$.

Аналогічним чином знайдемо другий власний вектор $v_2 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_2 = 7$.

$$\begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0, \\ 5\alpha - 5\beta = 0. \end{cases}$$

Отже, маємо, що $-3\alpha + 3\beta = 0$, відповідно, в якості власного вектору можна обрати вектор $v_2 = (1{,}1)$.

Оскільки різним власним значенням відповідають різні власні вектори, маємо розв'язок вигляду:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = -3C_1 e^{-1t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 5C_1 e^{-1t} + C_2 e^{7t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = -3C_1 e^{-1t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 5C_1 e^{-1t} + C_2 e^{7t}. \end{cases}$

Приклад 36. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0.$$

Корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha + 2\beta = 0, \\ 2\alpha + (-2-\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0, \\ 2\alpha - 4\beta = 0. \end{cases}$$

Отже, маємо, що $\alpha = 2\beta$, відповідно, в якості власного вектору можна обрати вектор $v_1 = (2,1)$.

Аналогічним чином знайдемо власний вектор $v_2 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Маємо $2\alpha = -\beta$, в якості власного вектору можна взяти вектор $v_2 = (-1,2)$.

Оскільки різним власним значенням відповідають різні власні вектори, маємо розв'язок вигляду:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{-3t}. \end{cases}$

Приклад 37. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Його корені: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_1 = 2 + i$:

$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha - \beta = 0, \\ \alpha + (2-\lambda)\beta = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha i - \beta = 0, \\ \alpha - \beta i = 0. \end{cases}$$

Помноживши друге рівняння на $-i$, можна побачити, що рівняння є лінійно залежними. Отримаємо одне співвідношення $\alpha = \beta i$, відповідно, в якості власного вектору можна взяти вектор $v_1 = (i, 1)$. Маємо частинний розв'язок системи: $x = ie^{(2+i)t}$, $y = e^{(2+i)t}$.

Оскільки коефіцієнтами системи є дійсні числа, для другого кореня можна не шукати власний вектор, оскільки він буде сполучений із знайденим розв'язком. Аби отримати два дійсних розв'язки, потрібно виділити дійсну та уявну частини знайденого комплексного розв'язку. Позаяк $e^{(2+i)t} = e^{2t}(cost + isint)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}\left(ie^{(2+i)t}\right) = -e^{2t}sint, \\ y_1 = \mathrm{Re}\left(e^{(2+i)t}\right) = e^{2t}cost, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \mathrm{Im}\left(ie^{(2+i)t}\right) = e^{2t}cost, \\ y_2 = \mathrm{Im}\left(e^{(2+i)t}\right) = e^{2t}sint. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 = e^{2t}(C_2cost - C_1sint), \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{2t}(C_1cost + C_2sint). \end{cases}$$

Відповідь: $x = e^{2t}(C_2cost - C_1sint)$, $y = e^{2t}(C_1cost + C_2sint)$.

Приклад 38. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = -5x + y, \\ y' = -x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 \\ -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0.$$

Отже, маємо корені $\lambda_{1,2} = -5 \pm i$. Знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_1 = -5 + i$.

$$\begin{cases} (-5-\lambda)\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha + (-5-\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha - 2i\beta = 0. \end{cases}$$

Помноживши друге рівняння на $-i$ та додавши до нього перше, отримаємо $0 = 0$, що свідчить про лінійну залежність двох рівнянь системи. Отже, в якості власного вектору можна взяти вектор $v_1 = (1, i)$. Відповідний йому частинний розв'язок системи записується у вигляді $x = e^{(-5+i)t}$, $y = ie^{(-5+i)t}$.

Для другого кореня власний вектор не шукаємо, оскільки він буде сполучений із знайденим розв'язком. Аби отримати два дійсних розв'язки, виділимо дійсну та уявну частини знайденого комплексного розв'язку. Позаяк $e^{(-5+i)t} = e^{-5t}(cost + isint)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}\left(e^{(-5+i)t}\right) = e^{-5t}cost, \\ y_1 = \mathrm{Re}\left(ie^{(-5+i)t}\right) = -e^{-5t}sint, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \mathrm{Im}\left(e^{(-5+i)t}\right) = e^{-5t}sint, \\ y_2 = \mathrm{Im}\left(ie^{(-5+i)t}\right) = e^{-5t}cost. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 = e^{-5t}(C_1cost + C_2sint), \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{-5t}(-C_1sint + C_2cost). \end{cases}$$

Відповідь: $x = e^{-5t}(C_1cost + C_2sint),\ y = e^{-5t}(-C_1sint + C_2cost)$.

Приклад 39. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Це рівняння має кратний корінь $\lambda_{1,2} = 3$. Знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_{1,2} = 3$. Визначимо кількість лінійно незалежних власних векторів. Для цього складемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що порядок цієї матриці $n = 2$, а ранг $r = 1$, відповідно, кількість лінійно незалежних власних векторів $n - r = 1$, тоді різниця між кратністю коренів та кількість лінійно незалежних векторів $m = 2 - 1 = 1$. Відповідно, маємо

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_3 + C_4 t)e^{3t} \end{cases}$$

Підставляємо отримані значення в початкову систему та отримаємо:

$$\begin{cases} \left((C_1 + C_2 t)e^{3t}\right)' = 4\left((C_1 + C_2 t)e^{3t}\right) - \left((C_3 + C_4 t)e^{3t}\right), \\ \left((C_3 + C_4 t)e^{3t}\right)' = \left((C_1 + C_2 t)e^{3t}\right) + 2\left((C_3 + C_4 t)e^{3t}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + 3C_2 t e^{3t} = 4C_1 e^{3t} + 4C_2 t e^{3t} - C_3 e^{3t} - C_4 t e^{3t}, \\ 3C_3 e^{3t} + C_4 e^{3t} + 3C_4 t e^{3t} = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + 2C_3 e^{3t} + 2C_4 t e^{3t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 - C_2 t = -C_3 - C_4 t, \\ C_3 + C_4 + C_4 t = C_1 + C_2 t. \end{cases}$$

Прирівняємо відповідні коефіцієнти та отримаємо:

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = -C_3, \\ -C_2 = -C_4, \\ C_3 + C_4 = C_1, \\ C_4 = C_2. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = C_2 + C_3, \\ C_4 = C_2. \end{cases}$$

Отже, коефіцієнти C_2, C_3 можна обирати довільними. Загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = (C_2 + C_3 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_3 + C_2 t)e^{3t} \end{cases}$$

У випадку існування кореня характеристичного рівняння, для якого кількість лінійно незалежних власних векторів менша за його кратність, можна застосувати інший спосіб. Він передбачає використання так званих жорданових ланцюгів. Суть цих ланцюгів полягає у тому, що для будь-якого власного значення λ матриці A існують такі вектори $h_i,\ i = 1, \dots, s$, що

$$Ah_1 = \lambda h_1,\ h_1 \neq 0,$$

$$Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,$$

$$\dots$$

$$Ah_s = \lambda h_s + h_{s-1}.$$

Тут h_1 називається власним вектором, h_i, $i = 2, \dots, s$ – приєднаними векторами, s – довжина жорданового ланцюга, яка дорівнює порядку матриці. Розв'язок системи шукають у вигляді:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{kx} h_1, \\ y_2(x) = e^{kx}(\frac{x}{1!} h_1 + h_2), \\ y_3(x) = e^{kx}(\frac{x^2}{2!} h_1 + \frac{x}{1!} h_2 + h_3), \\ \dots \end{cases}$$

Загальне число усіх таких розв'язків дорівнює сумі порядків усіх ланцюгів жорданової форми, тобто порядку матриці. Вони складають фундаментальну систему розв'язків системи $\dot{x} = Ax$.

Розв'яжемо попередню систему у цей спосіб. Спочатку знайдемо власний вектор $v_1 = (\alpha, \beta)$ для характеристичного кореня $\lambda_{1,2} = 3$.

$$\begin{cases} (4 - \lambda)\alpha - \beta = 0, \\ \alpha + (2 - \lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

Отже, маємо, що $\alpha - \beta = 0$, відповідно, в якості власного вектору можна взяти вектор $v_1 = (1,1)$. Тепер знайдемо приєднаний вектор $h_2 = (\alpha, \beta)$ з урахуванням, що $Ah_2 = \lambda h_2 + h_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Звідси маємо, що $\alpha - \beta = 1$, відповідно, $h_2 = (1,0)$. Отже, розв'язок системи виглядає наступним чином:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} h_1 + C_2 e^{3t}(th_1 + h_2)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$ або

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2(t+1)e^{3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = (C_2 + C_3 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_3 + C_2 t)e^{3t} \end{cases}$

3.7.3. Розв'язування неоднорідної системи рівнянь

Нехай дана система лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.21), в якій функції $f_i(x), i = 1, .., n$ є неперервними на проміжку (a, b).

Теорема 8. Загальний розв'язок неоднорідної системи (3.21) дорівнює сумі загального розв'язку $x_з$ однорідної системи та частинного розв'язку $x_ч$ неоднорідної системи:

$$x = x_з + x_ч.$$

Загальним способом знаходження частинних розв'язків неоднорідної системи є метод Лагранжа або (в окремих випадках) метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад 40. Розв'язати систему

$$\begin{cases} {y_1}' = 4y_1 + 3y_2 + e^{3x}, \\ {y_2}' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Перший спосіб. Зведемо систему до одного рівняння другого порядку. Для цього диференціюємо друге рівняння і виключимо з нього y_1' та y_1:

$$y_2'' = y'_1 + 2y'_2,$$

$$y_1 = y_2' - 2y_2.$$

Підставимо його в перше рівняння:

$$y_2'' - 2y_2' = 4(y_2' - 2y_2) + 3y_2 + e^{3x},$$

$$y_2'' - 2y_2' = 4y_2' - 8y_2 + 3y_2 + e^{3x},$$

$$y_2'' - 6y_2' + 5y_2 = e^{3x}.$$

Розв'язок однорідного рівняння

$$y_2'' - 6y_2' + 5y_2 = 0$$

має вигляд:

$$y_{2_з} = C_1e^x + C_2e^{5x}.$$

Права частина неоднорідного рівняння другого порядку має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, де $P_1(x) = 1, k = 3$. Оскільки $k = 3$ не є розв'язком характеристичного рівняння, частинний розв'язок прийме вигляд

$$y_{2_ч} = e^{kx}B_n(x), B_1(x) = Ax + B,$$

$$y_{2_ч} = e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}Ax + e^{3x}B.$$

Для пошуку невідомого $Ax + B$ знайдемо похідні частинного розв'язку та підставимо їх в початкове рівняння ($y_2'' - 6y_2' + 5y_2 = e^{3x}$):

$$y_{2_ч}' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} + 3Be^{3x}, \qquad y_ч'' = 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Be^{3x},$$

$$3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Be^{3x} - 6(Ae^{3x} + 3Axe^{3x} + 3Be^{3x}) +$$

$$+5(e^{3x}Ax + e^{3x}B) = e^{3x}.$$

Спростимо вираз та скоротимо його на e^{3x}:

$$-4Ax - 4B = 1.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} -4B = 1, \\ -4Ax = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Отже, $y_{2_ч} = -\frac{1}{4}e^{3x}$. Загальний розв'язок прийме вигляд

$$y_2 = C_1e^x + C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Тоді, підставляючи y_2 у вираз $y_1 = y_2{}' - 2y_2$, маємо

$$y_2' = C_1e^x + 5C_2e^{5x} - \frac{3}{4}e^{3x},$$

$$y_1 = C_1e^x + 5C_2e^{5x} - \frac{3}{4}e^{3x} - 2\left(C_1e^x + C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}\right) =$$

$$= C_1e^x + 3C_2e^{5x} - \frac{3}{4}e^{3x} - 2C_1e^x + \frac{2}{4}e^{3x} =$$

$$= -C_1e^x + 3C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи вигляду:

$$\begin{cases} y_1 = -C_1e^x + 3C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}, \\ y_2 = C_1e^x + C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}. \end{cases}$$

Другий спосіб. Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи. Для цього складемо характеристичне рівняння для системи:

$$\begin{cases} y_1{}' = 4y_1 + 3y_2 \\ y_2{}' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Воно прийме вигляд:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$$

Отже, маємо корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Власний вектор для характеристичного кореня $\lambda_1 = 1$ $v_1 = (-1,1)$; для характеристичного кореня $\lambda_2 = 5$ – вектор $v_2 = (3,1)$.

Оскільки різним власним значенням відповідають різні власні вектори, маємо загальний розв'язок вигляду:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1e^x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{5x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} y_1 = -C_1e^x + 3C_2e^{5x}, \\ y_2 = C_1e^x + C_2e^{5x}. \end{cases}$$

Складемо систему алгебраїчних рівнянь згідно з методом варіації постійних:

$$\begin{cases} y_1{}' = 4y_1 + 3y_2 + e^{3x} \\ y_2{}' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$y_1{}' = (-C_1e^x + 3C_2e^{5x})' = -C_1{}'e^x + 3C_2{}'e^{5x} - C_1e^x + 15C_2e^{5x},$$

$$y_2{}' = (C_1e^x + C_2e^{5x})' = C_1'e^x + C_2'e^{5x} + C_1e^x + 5C_2e^{5x},$$

$$\begin{cases} -C_1'e^x + 3C_2'e^{5x} - C_1e^x + 15C_2e^{5x} = 4(-C_1e^x + 3C_2e^{5x}) + \\ \qquad +3(C_1e^x + C_2e^{5x}) + e^{3x} \\ C_1'e^x + C_2'e^{5x} + C_1e^x + 5C_2e^{5x} = -C_1e^x + 3C_2e^{5x} + 2(C_1e^x + C_2e^{5x}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1'e^x + 3C_2'e^{5x} - C_1e^x + 15C_2e^{5x} = -4C_1e^x + 12C_2e^{5x} + 3C_1e^x + \\ \qquad +3C_2e^{5x} + e^{3x} \\ C_1'e^x + C_2'e^{5x} + C_1e^x + 5C_2e^{5x} = -C_1e^x + 3C_2e^{5x} + 2C_1e^x + 2C_2e^{5x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1'e^x + 3C_2'e^{5x} = e^{3x} \\ C_1'e^x + C_2'e^{5x} = 0. \end{cases}$$

За методом Крамера знаходимо:

$$C_1' = -\frac{1}{4}e^{2x},$$

$$C_2' = \frac{e^{3x}}{2e^{5x}} = \frac{1}{4}e^{-2x},$$

звідки

$$C_1 = -\frac{1}{8}e^{2x} + B_1$$

$$C_2 = -\frac{1}{8}e^{-2x} + B_2.$$

Підставивши отримані значення в загальний розв’язок, отримаємо:

$$\begin{cases} y_1 = -(-\frac{1}{8}e^{2x} + B_1)e^x + 3(-\frac{1}{8}e^{-2x} + B_2)e^{5x}, \\ y_2 = (-\frac{1}{4}e^{2x} + B_1)e^x + (-\frac{1}{4}e^{-2x} + B_2)e^{5x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{8}e^{3x} - B_1e^x - \frac{3}{8}e^{3x} + 3B_2e^{5x}, \\ y_2 = -\frac{1}{8}e^{3x} + B_1e^x - \frac{1}{8}e^{3x} + B_2e^{5x}. \end{cases}$$

Тоді розв'язок системи прийме вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = -B_1e^x + 3B_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}, \\ y_2 = B_1e^x + B_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}. \end{cases}$$

Практичні завдання

Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = y_1 + 2y_2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = 2y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = -2y_1 + 2y_2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 + y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = y_1 + 2y_2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 - 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = -y_1 + 5y_2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 + y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = y_1 + y_2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = 2y_1 + 3y_2 + e^x} \\ \boldsymbol{y_2' = -2y_1 + 2y_2 + e^{2x}} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = 4y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = y_1 + 2y_2 + sin2x} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 - 3y_2 + sinx} \\ \boldsymbol{y_2' = -y_1 + 5y_2 + cosx} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = y_1 - 3y_2 + cosx} \\ \boldsymbol{y_2' = -y_1 + 5y_2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = 4y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = y_1 + 2y_2 + e^{5x}} \end{cases}$

3.8. Загальні поняття теорії стійкості

Під час розв'язування реальних задач часто виникають ситуації, коли необхідно не тільки вирішити якусь конкретну математичну задачу, але й дослідити певним чином отримані розв'язки. У такому випадку недостатньо просто розв'язати диференційне рівняння, яке описує конкретне явище, бо треба ще додатково мати змогу певним чином охарактеризувати його відповідний розв'язок. Особливо гостро питання певної характеристики розв'язку виникає в тих випадках, коли з тих чи інших причин немає можливості безпосередньо знайти цей самий розв'язок. В таких випадках звертаються до теорії стійкості.

Розглянемо систему диференційних рівнянь виду

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots y_n) \tag{3.25}$$

з початковими умовами виду

$$y_i(x_0) = y_{01}. \tag{3.26}$$

Математична задача називається **коректно поставленою**, згідно з твердженнями Ж.Адамару, якщо виконуються наступні умови:

– задача має розв'язок;
– розв'язок єдиний;
– розв'язок неперервно залежить від початкових умов (**стійкість розв'язку**).

Розглянемо той випадок, коли умова (3.26) була отримана в ході експерименту, і тому не може вважатися точною. В такому випадку важливим є наявність зміни в розв'язку при зміні в початкових умовах. Так, якщо при невеликих змінах в початкових умовах розв'язок задачі значно змінюється, спиратися на такі розв'язки недоцільно, адже наявність великих відхилень говорить про ненадійність отриманих результатів. Тому важливими є умови, які будуть забезпечувати малі зміни результатів розв'язку при незначних змінах початкових даних.

Для початку розглянемо питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші для звичайного диференційного рівняння першого порядку.

Теорема 8. Якщо права частина диференційного рівняння

$$\boldsymbol{y' = f(x, y)} \tag{3.27}$$

неперервна і має обмеження виду (рис. 3.1):

$$\boldsymbol{\Pi = \{(x, y): x_0 - a \le x \le x_0 + a;\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}},$$

задовольняє умові Ліпшиця за змінною $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad N > 0},$$

де $\boldsymbol{N}$ – обмежує похідну та не залежить від $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}$, тоді існує єдиний розв'язок $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ на проміжку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{H}]$, де $\boldsymbol{H} = \mathbf{min}(\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{M})$, якщо $\boldsymbol{M} = \max\limits_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Pi} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$.

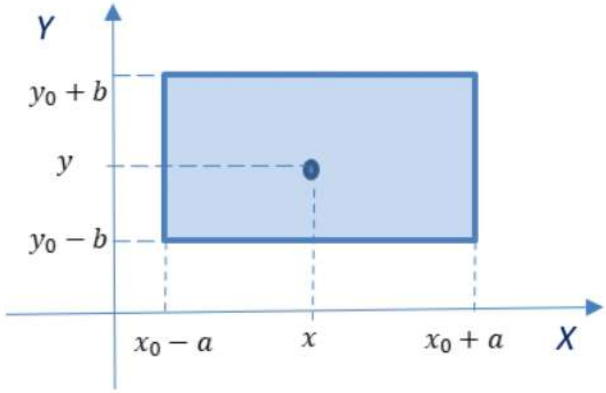

Рисунок 3.1 – Теорема про існування та єдність розв'язку

Зазначимо, що аналогічне твердження справедливе і для умови (3.27).

Розв'язок $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\varphi_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi_2}(\boldsymbol{x}), \dots \boldsymbol{\varphi_n}(\boldsymbol{x}))$ системи диференційних рівнянь (3.27) називається **стійким за Ляпуновим**, якщо для будь-якого $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ існує таке $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) > \mathbf{0}$, що для будь-якого розв'язку $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y_2}(\boldsymbol{x}), \dots \boldsymbol{y_n}(\boldsymbol{x}))$ тієї самої системи рівнянь, початкові значення якого задовольняють нерівності

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\| < \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

при всіх $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{x_0}$ виконується також нерівність

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Розв'язок стійкий за Ляпуновим називається **асимптотично стійким**, якщо додатково для нього виконується наступна умова:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\| = \mathbf{0}.$$

Якщо розв'язок $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ не є стійким, він називається **нестійким**.

Приклад 41. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$y' = 4x^3 + 2x, y(0) = 0.$$

Розв'язання. Це – рівняння з роздільними змінними, а отже, маємо

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2x,$$

$$dy = (4x^3 + 2x)dx,$$

$$y = x^4 + x^2 + C.$$

В такому випадку розв'язком задачі Коші є:

$$\mathbf{0 = 0 + 0 + \boldsymbol{C}},$$

$$\boldsymbol{C} = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{y = x^4 + x^2}.$$

Тепер розглянемо умову $\boldsymbol{\tilde{y}(0) = y_0}$, тоді

$$\boldsymbol{y_0 = 0 + 0 + C},$$

$$\boldsymbol{C = y_0},$$

$$\boldsymbol{\tilde{y} = x^4 + x^2 + y_0}.$$

Отже, перевіримо рівняння на стійкість:

$$\boldsymbol{\left|x^4 + x^2 - x^4 - x^2 - y_0\right| \le |0 - 0.1|}.$$

Тому, якщо $\boldsymbol{|0.1| < \delta = \varepsilon}$, розв'язок $\boldsymbol{y = x^4 + x^2}$ можна вважати стійким за Ляпуновим.

Зазначимо, що досліджувати стійкість певного розв'язку таким чином часто незручно, тому таке дослідження можна звести до дослідження стійкості тривіального розв'язку $\boldsymbol{y(x) \equiv 0}$ іншої системи. Для цього необхідно перейти до нових змінних $\boldsymbol{z(x) = y(x) - \varphi(x)}$.

Теорема 8. Розв'язок системи (3.27) вважається стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли стійкий за Ляпуновим тривіальний розв'язок системи.

При розв'язуванні системи зі сталими коефіцієнтами необхідно з'ясувати, який знак має дійсна частина коренів характеристичного рівняння. В свою чергу дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні тоді, коли додатними є всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_5} & \boldsymbol{a_7} & \dots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a_0} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_4} & \boldsymbol{a_6} & \dots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a_0} & \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_5} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}.$$

Приклад 42. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок:

$$y''' + 4y'' + y' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^3 + 4k^2 + k + 2 = 0.$$

З рівняння маємо, що $\boldsymbol{a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 2}$.

Складемо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_3} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a_0} & \boldsymbol{a_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Знайдемо усі діагональні мінори матриці Гурвіца:

$\Delta_1 = \boldsymbol{a_1 = 4 > 0}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 2 > 0}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{4 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 - 4 = 4 > 0}.$$

За критерієм Гурвіца, тривіальний розв'язок можна вважати стійким за Ляпуновим.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Індивідуальна робота № 1

Задача 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння у вигляді $\psi(x, y) = C$.

1 $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

2 $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

3 $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

4 $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

5 $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$

6 $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$

7 $(e^{2x}+5)dy + y\,e^{2x}\,d\,x = 0.$

8 $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$

9 $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

10 $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0.$

11 $y(4+e^x)dy - e^x\,d\,x = 0.$

12 $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx.$

13 $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$

14 $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$

15 $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx.$

16	$x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$
17	$(e^x + 8)dy - y\, e^x\, dx = 0.$
18	$\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$
19	$y(1 + ln\, y) + xy' = 0.$
20	$y\, ln\, y + xy' = 0.$
21	$(1 + e^x)y' = y\, e^x.$
22	$\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$
23	$\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$
24	$(1 + e^x)yy' = e^x.$
25	$(3 + e^x)yy' = e^x.$
26	$\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0.$
27	$xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$
28	$3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0.$
29	$2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$
30	$2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0.$

Задача 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$	16	$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
2	$xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$	17	$xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$
3	$y' = \dfrac{x + y}{x - y}.$	18	$3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4.$
4	$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$	19	$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$
5	$2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3.$	20	$y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$
6	$xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$	21	$y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6.$
7	$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$	22	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$
8	$xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$	23	$y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$
9	$2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8.$	24	$xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$
10	$y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$	25	$y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12.$
11	$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$	26	$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$
12	$xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$	27	$y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$
13	$4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5.$	28	$xy' = \dfrac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$
14	$y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$	29	$y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
15	$xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$	30	$xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y.$

Задача 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}.$	16	$y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}.$
2	$y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}.$	17	$y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}.$
3	$y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}.$	18	$y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}.$
4	$y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}.$	19	$y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}.$
5	$y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$	20	$y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$
6	$y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}.$	21	$y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}.$
7	$y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}.$	22	$y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}.$
8	$y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}.$	23	$y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}.$
9	$y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}.$	24	$y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}.$

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
10	$y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$	25	$y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$
11	$y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$	26	$y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$
12	$y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$	27	$y' = \frac{y}{2x+2y-2}.$
13	$y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$	28	$y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$
14	$y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$	29	$y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$
15	$y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$	30	$y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$

Задача 4. Знайти розв'язок задачі Коші.

1 $y' - \frac{2y}{(x+1)} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}.$

2 $y' - 4xy = -4x^3, \; y(0) = -\frac{1}{2.}$

3 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \; y(1) = 1.$

4 $y' + y\, tg\, x = cos^2 x\,, \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2.}$

5 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{ln\, x}{x}, \; y(1) = 1.$

6 $y' + \frac{y}{x} = \sin x\,,\ \ y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

7 $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2},\ \ y(0) = \frac{2}{3}.$

8 $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ \ y(1) = e.$

9 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3},\ \ y(1) = 4.$

10 $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ \ y(1) = 1.$

11 $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1,\ \ y(1) = 1.$

12 $y' + 2xy = -2x^3,\ \ y(1) = e^{-1}.$

13 $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3},\ \ y(1) = 1.$

14 $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ \ y(0) = 3.$

15 $y' - \frac{y}{x = x^2,}\ \ y(1) = 0.$

16 $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \ y(0) = 0.$

17 $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ \ y(-1) = \frac{3}{2}.$

18 $y' - \frac{y}{x} = x\sin x\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

19 $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ \ y(1) = 1.$

20 $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5,\ \ y(2) = 4.$

21	$y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x},\ \ y(1) = 1.$
22	$y' + \frac{2}{x}y = x^3,\ \ y(1) = -\frac{5}{6}.$
23	$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ \ y(1) = 3.$
24	$y' + xy = -x^3,\ \ y(0) = 3.$
25	$y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},\ \ y(0) = \frac{2}{3}.$
26	$y' - y\cos x = \sin 2x,\ \ y(0) = -1.$
27	$y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ \ y(0) = 1.$
28	$y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2,\qquad y(0) = 1$
29	$y' + 2xy = x\,e^{-x^2}\sin x,\qquad y(0) = 1.$
30	$y' - 3x^2y = x^2\frac{(1+x^3)}{3},\ \ y(0) = 0.$

Задача 5. Розв’язати задачу Коші.

№ з/п	Завдання
1	$y^2dx + (xy - 1)dy = 0,\ y(1) = e.$
2	$2(4y^2 + 4y - x)y' = 1,\ y(0) = 0.$
3	$(x\cos^2 y - y^2)y' = y\cos^2 y,\ y(\pi) = \frac{\pi}{4}.$

№ з/п	Завдання
4	$(104y^3 - x)y' = 4y,\ y(8) = 1.$
5	$(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y,\ y(16) = \frac{\pi}{4}.$
6	$(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy,\ y(4) = e^2.$
7	$2(x + y^4)y' = y,\ \ y(-2) = -1.$
8	$dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0,\ y(-1) = 0.$
9	$2y\sqrt{y}dx - \left(6x\sqrt{y} + 7\right)dy = 0,\ \ y(-4) = 1.$
10	$2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y,\ y(\frac{3}{2}) = \frac{5\pi}{4}.$
11	$(y^2 + 2y - x)y' = 1,\ y(2) = 0.$
12	$\left(2xy + \sqrt{y}\right)dy + 2y^2 dx = 0, y(-\frac{1}{2})\ = 1.$
13	$(y^4 e^y + 2x)y' = y, \qquad y(0) = 1$
14	$8(4y^3 + xy - y)y' = 1,\ y(0) = 0.$
15	$e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy, y(0) = 0.$
16	$dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0.$
17	$(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y\,, y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$
18	$y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, y(\frac{\pi}{8}) = 2.$
19	$\left(xy + \sqrt{y}\right)dy + y^2 dx = 0,\ \ y(-\frac{1}{2}) = 4.$
20	$4y^2 dx + \left(e^{\frac{1}{(2y)}} + x\right)dy = 0,\ y(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}$

№ з/п	Завдання
21	$dx=(\sin y+3\cos y+3x)dy,\ \ y(e^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi}{2}.$
22	$(2y+x\,tg\,y-y^2\,tg\,y)dy=dx, y(0)=\pi.$
23	$(x+\ln^2 y-\ln y)y'=\frac{y}{2},\ \ y(2)=1.$
24	$2(y^3-y+xy)dy=dx,\ y(\text{-}2)=0.$
25	$y^2dx+\left(e^{2/y}+x\right)dy=0,\ y(\mathrm{e})=2$
26	$ydx+(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y)dy=0, y(\frac{3}{2})=\frac{\pi}{4}.$
27	$(13y^3-x)y'=4y,\ \ y(5){=}1.$
28	$2y^2dx+\left(x+e^{\frac{1}{y}}\right)dy=0,\ \ y(\mathrm{e})=0$
29	$\sin 2y dx=(\sin^2 2y-2\sin^2 y+2x)dy,\ y(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$
30	$y^3(y-1)dx+3xy^2(y-1)dy=(y+2)dy, \mathrm{y}(\frac{1}{4})=2.$

Задача 6. Знайти розв'язок задачі Коші.

№ з/п	Завдання
1	$y'+xy=(1+x)\,e^{-x}\,y^2\,, y(0)=1.$
2	$3(xy'+y)=y^2\ln x\,, y(1)=3.$
3	$xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x\,, y(1)=1.$
4	$2y'+3y\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)\,y^{-1}, y(0)=1.$

№ з/п	Завдання
5	$y' + 4x^3y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3)$, $y(0) = -1.$
6	$2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}.}$
7	$y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}.$
8	$4y' + x^3y = (x^3 + 8)\, e^{-2x}\, y^2, y(0) = 1.$
9	$y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}.$
10	$2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)\, e^{2x}\, y^{-1}, y(0) = 2.$
11	$y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$
12	$y' + xy = (x - 1)\, e^x\, y^2$, $y(0) = 1.$
13	$y' - y = xy^2$, $y(0) = 1.$
14	$y' - y\, tg\, x = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin x$, $y(0) = 1.$
15	$2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2.$
16	$xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$
17	$y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)\, e^{-4x}\, y^2, y(0) = 1$
18	$2(y' + xy) = (1 + x)\, e^{-x}\, y^2, y(0) = 2.$
19	$2y' + y\cos x = y^{-1} \cos x\,(1 + \sin x), y(0) = 1.$
20	$3y' + 2xy = 2xy^{-2}\, e^{-2x^2}$, $y(0) = -1.$
21	$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$
22	$3(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 3.$

№ з/п	Завдання
23	$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3,\ \ y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}.}$
24	$xy' + y = y^2 \ln x\,,\ \ y(1) = 1.$
25	$2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$
26	$2(y' + y) = xy^2,\ \ y(0) = 2.$
27	$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3,\ \ y(1) = \sqrt{2}.$
28	$2(xy' + y) = y^2 \ln x\,,\ \ y(1) = 2.$
29	$2(y' + xy) = (x - 1)\,e^x\,y^2\,, y(0) = 2.$
30	$xy' + y = xy^2,\ \ y(1) = 1.$

Задача 7. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання
1	$3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$
2	$(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$
3	$\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy = 0.$
4	$\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0.$
5	$(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$
6	$\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

№ з/п	Завдання
7	$(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0.$
8	$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$
9	$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0.$
10	$\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$
11	$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$
12	$\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$
13	$\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0.$
14	$\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0.$
15	$\left(x\,e^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$
16	$\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0.$
17	$\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0.$
18	$e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$
19	$(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$
20	$xe^{y^2}dx + \left(x^2y\,e^{y^2} + tg^2\,y\right)dy = 0.$

№ з/п	Завдання
21	$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0.$
22	$(cos(x + y^2) + sin\,x)dx + 2y\,cos(x + y^2)\,dy = 0.$
23	$(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$
24	$\left(sin\,y + y\,sin\,y + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\,cos\,y - cos\,x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$
25	$\left(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0.$
26	$\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0.$
27	$2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$
28	$(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$
29	$xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$
30	$xdx + ydy + \frac{(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)} = 0.$

Задача 8. Для заданого диференціального рівняння методом ізоклін побудувати інтегральну криву, що проходить через точку M.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y' = y - x^2,\ \ M(1, 2).$	16	$yy' = -2x,\ \ M(0, 5).$
2	$y' = 2 + y^2,\ \ M(1, 2).$	17	$yy' + x = 0,\ \ M(-2, -3).$
3	$y' = \frac{2x}{3y},\ \ M(1, 1).$	18	$y' = (y - 1)x,\ \ M\left(1, \frac{3}{2}\right).$

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
4	$y' = 3 + y^2,\ \ M(1,2).$	19	$xy' = 2y,\ \ M(2,3).$
5	$y'(x^2 + 2) = y,\ \ M(2,2).$	20	$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,\ \ M(2,1).$
6	$y' = y - x,\ \ M\left(\frac{9}{2},1\right).$	21	$y' = x^2 - y,\ \ M\left(1,\frac{1}{2}\right).$
7	$y' = xy,\ \ M(0,-1).$	22	$y' = xy,\ \ M(0,1).$
8	$yy' = -\frac{x}{2},\ \ M(4,2).$	23	$2(y + y') = x + 3,\ \ M\left(1,\frac{1}{2}\right)$
9	$y' = x + 2y,\ \ M(3,0).$	24	$xy' = 2y,\ \ M(1,3).$
10	$3yy' = x,\ \ M(-3,-2).$	25	$y' = y - x^2,\ \ M(-3,4).$
11	$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,\ \ M(-2,1).$	26	$y' = y - x,\ \ M(2,1).$
12	$yy' = -x,\ \ M(2,3).$	27	$y' = y - x,\ \ M(4,2).$
13	$y' = x^2 - y,\ \ M\left(2,\frac{3}{2}\right).$	28	$y' = x(y - 1),\ \ M\left(1,\frac{1}{2}\right).$
14	$3yy' = x,\ \ M(1,1).$	29	$y' = x^2 - y,\ \ M(0,1).$
15	$y' = 3y^{\frac{2}{3}},\ \ M(1,3).$	30	$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,\ \ M(-2,-1).$

Задача 9.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 і має ту властивість, що в будь-якій її точці M нормальний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Oy має довжину, рівну a, і утворює гострий кут з додатним напрямком осі Oy.

1 $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

3 $M_0(12, 2)$, $a = 20$.

2 $M_0(9, 3)$, $a = 15$.

4 $M_0(6, 4)$, $a = 10$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок будь-якої її нормалі, укладений між осями координат, ділиться точкою у відношенні $a{:}\,b$ (рахуючи від осі Oy).

5 $M_0(1, 1)$, $a{:}\,b = 1{:}\,2$.

7 $M_0(-2, 3)$, $a{:}\,b = 1{:}\,3$.

6 $M_0(0, 1)$, $a{:}\,b = 2{:}\,3$.

8 $M_0(1, 0)$, $a{:}\,b = 3{:}\,2$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю абсцис у відношенні $a{:}\,b$ (вважаючи від осі Oy).

9 $M_0(2, -1)$, $a{:}\,b = 1{:}\,1$.

11 $M_0(1, 2)$, $a{:}\,b = 2{:}\,1$.

10 $M_0(-1, 1)$, $a{:}\,b = 3{:}\,1$.

12 $M_0(2, 1)$, $a{:}\,b = 1{:}\,2$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок будь-якої її дотичної, укладений між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $a{:}\,b$ (вважаючи від осі Oy).

13 $M_0(1, 2)$, $a{:}\,b = 1{:}\,1$.

15 $M_0(2, 1)$, $a{:}\,b = 1{:}\,2$.

14 $M_0(1, 3)$, $a{:}\,b = 2{:}\,1$.

16 $M_0(2, -3)$, $a{:}\,b = 3{:}\,1$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 і має ту властивість, що в будь-якій її точці M дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Ox має проекцію на вісь Ox, обернено пропорційну абсцисі точки M. Коефіцієнт пропорційності дорівнює a.

17 $M_0(1, e)$, $a = \dfrac{1}{2}$

18 $M_0\left(1, \dfrac{1}{e^2}\right)$, $a = \dfrac{1}{4}$.

19 $M_0\left(-1, \sqrt{e}\right)$, $a = \dfrac{1}{2}$

20 $M_0\left(2, \dfrac{1}{e}\right)$, $a = \dfrac{1}{4}$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 і має ту властивість, що у будь-якій її точці М дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, рівну a.

21 $M_0(1, 2)$, $a = -1$.

22 $M_0(1, 5)$, $a = -2$.

23 $M_0(1, 6)$, $a = 3$.

24 $M_0(1, 4)$, $a = -2$.

25 $M_0(1, 3)$, $a = -4$.

26 $M_0(1, 1)$, $a = 1$.

Індивідуальна робота № 2

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y'''x \ln x = y''$.	16	$x^2y'' + xy' = 1$.
2	$xy''' + y'' = 1$.	17	$y''' ctg\, 2x + 2y'' = 0$.
3	$2xy''' = y''$.	18	$x^3y''' + x^2y'' = 1$.
4	$xy''' + y'' = x + 1$.	19	$tg\, x \cdot y''' = 2y''$.
5	$tg\, x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.	20	$xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.
6	$x^4y'' + x^3y' = 1$.	21	$xy''' + 2y'' = 0$.
7	$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.	22	$x^5y''' + x^4y'' = 1$.
8	$xy''' + y'' = \sqrt{x}$.	23	$xy''' + y'' + x = 0$.
9	$y''' tg\, x = y'' + 1$.	24	$y''' tg\, 5x = 5y''$.
10	$x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$.	25	$2xy''' - y'' = 1$.
11	$(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$.	26	$(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.
12	$xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.	27	$-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$.
13	$y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$.	28	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot y^{IV} = y'''$.
14	$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.	29	$x^4y'' + x^3y' = 4$.
15	$y''' \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = 2y''$.	30	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} y'' + y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Задача 2. Знайти розв'язок задачі Коші.

№ з/п	Завдання
1	$4y^3y'' = y^4 - 1,\ \ y(0) = \sqrt{2},\ \ y'(0) = \frac{1}{(2\sqrt{2})}.$
2	$y'' = 128y^3,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 8.$
3	$y''y^3 + 64 = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 2.$
4	$y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$
5	$y'' = 32\sin^3 y\cos y\,,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 4.$
6	$y'' = 98y^3,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 7.$
7	$y''y^3 + 49 = 0,\ \ y(3) = -7,\ \ y'(3) = -1.$
8	$4y^3y'' = 16y^4 - 1,\ \ y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
9	$y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$
10	$y'' = 72y^3,\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = 6.$
11	$y''y^3 + 36 = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2.$
12	$y'' = 18\sin^3 y\cos y\,,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 3.$
13	$4y^3y'' = y^4 - 16,\ \ y(0) = 2\sqrt{2},\ \ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
14	$y'' = 50y^3,\ \ y(3) = 1,\ \ y'(3) = 5.$
15	$y''y^3 + 25 = 0,\ \ y(2) = -5,\ \ y'(2) = -1.$
16	$y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3.$

№ з/п	Завдання
17	$y'' = 8\sin^3 y \cos y,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 2.$
18	$y'' = 32y^3,\ \ y(4) = 1,\ \ y'(4) = 4.$
19	$y''y^3 + 16 = 0,\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = 2.$
20	$y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4.$
21	$y'' = 50\sin^3 y \cos y,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 5.$
22	$y'' = 18y^3,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 3.$
23	$y''y^3 + 9 = 0,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 3.$
24	$y^3y'' = 4(y^4 - 1),\ \ y(0) = \sqrt{2},\ \ y'(0) = \sqrt{2}.$
25	$y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5.$
26	$y'' = 3y^3,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$
27	$y''y^3 + 4 = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = -2.$
28	$y'' = 2\sin^3 y \cos y,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 1.$
29	$y^3y'' = y^4 - 16,\ \ y(0) = 2\sqrt{2},\ \ y'(0) = \sqrt{2}.$
30	$y'' = 2y^3,\ \ y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 1.$

Задача 3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$	16	$y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$
2	$y''' - y' = x^2 + x.$	17	$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
3	$y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2.$	18	$y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$
4	$y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$	19	$y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$
5	$3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$	20	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$
6	$y''' + y'' = 5x^2 - 1.$	21	$y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$
7	$7y''' - y'' = 12x.$	22	$y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$
8	$y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$	23	$y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$
9	$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$	24	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$
10	$y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$	25	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$
11	$y''' + y'' = 49 - 24x^2.$	26	$y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$
12	$y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$	27	$y^{IV} + y''' = x.$
13	$y''' - y'' = 6x + 5.$	28	$y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$
14	$y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$	29	$y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$
15	$y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$	30	$y^{IV} + y''' = 12x + 6.$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

№ з/п	Завдання
1	$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)\, e^{-x}.$
2	$y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)\, e^{x}.$
3	$y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)\, e^{2x}.$

№ з/п	Завдання
4	$y''' - 2y'' + y' = (2x+5)\,e^{2x}$.
5	$y''' - 3y'' + 4y = (18x-21)\,e^{-x}$.
6	$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)\,e^{x}$.
7	$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)\,e^{x}$.
8	$y''' + 2y'' + y' = (18x+21)\,e^{2x}$.
9	$y''' + y'' - y' - y = (8x+4)\,e^{x}$.
10	$y''' - 3y' - 2y = -4x \cdot e^{x}$.
11	$y''' - 3y' + 2y = (4x+9)\,e^{2x}$.
12	$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)\,e^{x}$.
13	$y''' - y'' - 2y' = (6x-11)\,e^{-x}$.
14	$y''' + y'' - 2y' = (6x+5)\,e^{x}$.
15	$y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)\,e^{x}$.
16	$y''' - 3y'' - y' + 3y = (4-8x)\,e^{x}$.
17	$y''' - y'' - 4y' + 4y = (7-6x)\,e^{x}$.
18	$y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)\,e^{-x}$.
19	$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20-16x)\,e^{-x}$.
20	$y''' - 4y'' + 3y' = -4x \cdot e^{-x}$.
21	$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x-32)$.
22	$y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^{x}$.
23	$y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x-12)\,e^{x}$.

№ з/п	Завдання
24	$y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x+4)\,e^{x}$.
25	$y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x+20)\,e^{x}$.
26	$y''' - 2y'' - 3y' = (8x-14)\,e^{-x}$.
27	$y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)\,e^{x}$.
28	$y''' + 6y'' + 9y' = (16x+24)\,e^{x}$.
29	$y''' - y'' - 9y' + 9y = (12-16x)\,e^{x}$.
30	$y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)\,e^{-x}$.

Задача 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1 $y'' + 2y' = 4\,e^{x}(\sin x + \cos x)$

2 $y'' + 2y' = -2\,e^{x}(\sin x + \cos x)$.

3 $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

4 $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$.

5 $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.

6 $y'' + 2y' = 10\,e^{x}(\sin x + \cos x)$.

7 $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

8 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

9 $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.

10 $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.

11 $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$.

12 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

13 $y'' + 2y' = 3\,e^{x}(\sin x + \cos x).$

14 $y'' - 4y' + 4y = -\,e^{2x}\sin 6\,x.$

15 $y'' + y = 2\cos 7\,x + 3\sin 7\,x.$

16 $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$

17 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3\,x.$

18 $y'' + y = 2\cos 3\,x - 3\sin 3\,x.$

19 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5\,x.$

20 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6\,x.$

21 $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2\,x.$

22 $y'' + 2y' = 6\,e^{x}(\sin x + \cos x).$

23 $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

24 $y'' + y = 2\cos 7\,x - 3\sin 7\,x.$

25 $y'' - 4y' + 4y = -\,e^{2x}\sin 4\,x.$

26 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4\,x.$

27 $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x).$

28 $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x).$

29 $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-3\sin x + 4\cos x).$

30 $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x).$

Задача 6. Розв'язати диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами.

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y'' - y' = 2e^{2x}\cos e^{x}.$	16	$y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}.$
2	$y'' - y' = e^{x}/(1 + e^{x}).$	17	$y'' - 2y' + y = e^{x}/(x^2 + 3).$
3	$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(\cos x + x).$	18	$y'' + y = 1/(1 + cos^2 x).$
4	$y'' + 2y' + y = e^{-x}/x.$	19	$y'' + 4y = 1/\sin 2x.$
5	$y'' - 4y' = xe^{2x} - \sin x + 3x^2.$	20	$y'' - y = 1/(e^{x} + 2).$
6	$y'' + y = \sin x + 1/\sin x.$	21	$y'' - 2y' + y = e^{x}/x.$
7	$y'' - 2y' + y = e^{x}/(2x^2).$	22	$y'' + y = 1/\cos x.$
8	$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}/x.$	23	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}/x^2.$
9	$y'' + 2y' + y = xe^{x} + 1/xe^{x}.$	24	$y'' - y = 4\sqrt{x} - \sqrt{x^{-3}}.$
10	$y'' - 2y' + y = (x^2 + 2x + 2)/x^3.$	25	$y'' + y' = x^2/e^{x} + 1.$
11	$y'' + y = \cos x^{-3/2}.$	26	$y'' + 2y' + y = 3e^{x}\sqrt{1 + x}.$
12	$y'' - 2y' = 4x^2 e^{x^2}.$	27	$y'' + y = \cos x + 1/\sin x.$
13	$y'' + 4y = 2tg\, x + 2\sin x.$	28	$y'' + 2y' + y = \sqrt{1 + x}.$
14	$y'' - y' = e^{x}\sqrt{e^{x} - 1}.$	29	$y'' - 2y' + 2y = e^{x} + xcos\, x.$
15	$y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$	30	$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x - 3x^2.$

Задача 7. Розв'язати задачу з початковими умовами.

1 $y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5{,}5$.

2 $y^{(3)} - y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

3 $y^{(3)} + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 1$.

4 $y^{(3)} + y'' = x^2 + 2 + 3xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5 $y'' + 3y' = 3e^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6 $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

7 $y'' + 9y = 5\sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

8 $y'' + 4y = \cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

9 $y^{(3)} - y = 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

10 $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

11 $y'' + y = xsin\, x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = y'(0) = 2$.

13 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$, $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.

14 $y^{(4)} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 0$.

15 $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

16 $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(0) = 0$.

17 $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18 $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x sin\, x),\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

19 $y'' + y = \sqrt{(sin^3 x\cos x)^{-1}},\ \ y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0.$

20 $y^{(4)} + y'' = 2\cos x\,,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = 0,\ \ y^{(3)}(0) = 0.$

21 $y^{(3)} - 3y' - 2y = 9e^{2x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -3,\ \ y''(0) = 3.$

22 $y'' + y = 4e^x,\ \ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$

23 $y^{(4)} - y = -8e^{-x} + x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -4,\ y^{(3)}(0) = 6.$

24 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} - 2x^2,\ \ y(0) = 7/2,\ y'(0) = 6.$

25 $y^{(3)} - y' = -2x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = 2.$

26 $y'' - y = x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1.$

27 $y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = x,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1.$

28 $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x},\ \ y(0) = y'(0) = 0.$

29 $y'' + 2y' - 3y = xe^x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$

30 $y'' + \dfrac{1}{\pi^2}y = \dfrac{1}{\pi^2\, cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)},\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0.$

Задача 8. Розв’язати систему диференціальних рівнянь виду

$$y' = Ay + f(t),$$

де матриця A та вектор f задані в таблиці нижче:

№ з/п	Завдання
1, 11, 21	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}e^{3t}+2e^{t}\\ 2e^{3t}+e^{t}\\ -e^{3t}\end{pmatrix}$
2, 12, 22	$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & -5\\ 3 & 2 & -3\\ 7 & 1 & -6\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}2e^{-2t}\\ -e^{-2t}\\ e^{-2t}+e^{-t}\end{pmatrix}$
3, 13, 23	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}-e^{2t}\\ 3e^{2t}\\ e^{2t}+1\end{pmatrix}$
4, 14, 24	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ -2\cos t\\ -\sin t+e^{t}\end{pmatrix}$
5, 15, 25	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}\cos t+e^{t}\\ 2\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}$
6, 16, 26	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}24\\ -e^{2t}\\ 2e^{2t}\end{pmatrix}$
7, 17, 27	$A=\begin{pmatrix}9 & 22 & -6\\ -1 & -4 & 1\\ 8 & 16 & -5\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}3e^{t}\\ -e^{t}-5e^{-t}\\ e^{t}\end{pmatrix}$
8, 18, 28	$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -5\\ 3 & -4 & 1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}1\\ -e^{4t}\\ 2\end{pmatrix}$
9, 19, 29	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -8 & 0 & 1\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}-e^{t}\\ 5e^{t}+1\\ 3e^{t}\end{pmatrix}$
10, 20, 30	$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}-e^{t}\\ e^{t}\\ 2e^{t}\end{pmatrix}$

Задача 9. Використовуючи метод варіації довільних сталих, знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

1, 11, 21 $\begin{cases} x' = -3x + y + \dfrac{2e^{-2t}\ln t}{t} \\ y' = -x - y \end{cases}$

2, 12, 22 $\begin{cases} x' = -x - 2y + e^{-3t}t^{-\frac{3}{2}} \\ y' = 2x - 5y - e^{-3t}t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

3, 13, 23 $\begin{cases} x' = -2x - 3y + \dfrac{e^t}{\sin t} \\ y' = 6x + 4y \end{cases}$

4, 14, 24 $\begin{cases} x' = -2x - 5y + \dfrac{5e^t}{\cos t} \\ y' = 2x + 4y - \dfrac{3e^t}{\cos t} \end{cases}$

5, 15, 25 $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = 3x + 4y - \dfrac{e^t}{t^2} \end{cases}$

6, 16, 26 $\begin{cases} x' = -4x + 3y - \dfrac{2e^{-2t}\ln t}{t} \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

7, 17, 27 $\begin{cases} x' = -2x + 13y \\ y' = -x + 4y - e^t \operatorname{ctg} 2t \end{cases}$

8, 18, 28 $\begin{cases} x' = -4x + 6y \\ y' = -3x + 2y + \dfrac{3e^{-t}}{\cos 3t} \end{cases}$

9, 19, 29 $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^{3t}\sqrt{t} \\ y' = 2x + y - \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}} \end{cases}$

10, 20, 30 $\begin{cases} x' = x + y + e^{2t}\ln t \\ y' = -x + 3y - e^{2t}\ln t \end{cases}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Ніколаєв О. Г. Диференціальні рівняння: підручник : [в 2 кн.]. / О. Г. Ніколаєв; М-во освіти і науки України, Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т". – Харків : ХАІ, 2019. Кн. 1. 2019. – 229 с.

2. Ніколаєв О. Г. Диференціальні рівняння: підручник : [в 2 кн.]. / О. Г. Ніколаєв; М-во освіти і науки України, Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т". – Харків : ХАІ, 2020. Кн. 2. 2020 – 303 с.

3. Мартиненко О.В. Диференціальні рівняння та системи рівнянь : навч. посіб. / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана, В.О. Герасименко; М-во освіти і науки України, Сумський держ. пед. ун-т ім. А.С. Макаренка. – Суми : СумДПУ. 2022. – 114 с.

4. Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання : навч. посіб. / Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, І.В. Щербина, О.Д. Онопрієнко, А.Г. Шпорта; М-во освіти і науки України, Дніпр. держ. аграр.-екон. ун-т. – Дніпро : ДДАЕУ, 2022. – 190 с.

5. Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум : навч. посіб. / О.В. Капустян, Н.В. Касімова, Ю.В. Ловейкін, А.В. Сукретна, Ю.В. Федоренко; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : КНУ, 2023. – 135 с.

6. Диференціальні рівняння та їх системи: практикум з дисциплін "Вища математика", "Математичний аналіз" для здобувачів освітнього ступеня бакалавра зі спеціальностей № 112,121, 122, 123, 124, 125, 126, 151 усіх форм навчання. Вид. 3-тє / [упоряд. А.І. Щерба, А.М. Нестеренко, М.В. Губар.]; М-во

освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2021. – 71 с.

7. Самкова Г. Є. Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь : навч.-метод. посіб. / Г.Є. Самкова, Н.В. Шарай, О.П. Мойсеєнок; М-во освіти і науки України, Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова. – Одеса : ОНУ, 2019. – 112 с.

8. Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики: навч.-метод. посіб. / уклад.: С. Г. Блажевський, О. М. Ленюк; М-во освіти і науки України, Чернівець. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. – Чернівці : ЧНУ ім. Юрія Федьковича, 2021. – 248 с.

9. Рего В.Л. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування : навч. посіб. Ч. І: / В.Л. Рего, Я.В. Варга; М-во освіти і науки України, Ужгород. нац. ун-т. – Ужгород : УжНУ, 2021 . – 124 с.

10. Рего В.Л.. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку: навч. посіб. Ч. ІІ / В.Л. Рего, Я.В. Варга, І.І. Король; М-во освіти і науки України, Ужгород. нац. ун-т. – Ужгород : УжНУ, 2022 р. – 124 с.

11. Гой Т.П. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / Т.П. Гой, О.В. Махней; М-во освіти і науки України; Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника. – Івано-Франківськ : ПНУ ім. В. Стефаника, 2021. – 357 с.

12. Богданський Ю.В. Диференціальні рівняння. Конспект лекц. : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз», освітньої програми «Системний аналіз фінансового ринку». Ч.1. / Ю.В. Богданський, О.О. Калюжний, А.Ю. Мальцев, Г.Б. Подколзін, Ю.А. Чаповський; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т України "Київсь. політех. ін-т ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 74 с.

13. Вдовенко Т.І. Диференціальні рівняння : навч.-метод. посіб. / Т.І. Вдовенко, В.І. Козак; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т України

“Київсь. політех. ін-т ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 106 с.

14. Лось В.М. Звичайні диференціальні рівняння : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 113 Прикладна математика / В.М. Лось, В.В. Мальчиков; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т України “Київсь. політех. ін-т ім. Ігоря Сікорського – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 66 с.

15. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посіб. / Г.В. Лиходєєва, К.Ю. Пастирєва ; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. Ч.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку. 2021. – 144 с.

16. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посіб. / Г. Лиходєєва, К.Ю. Пастирєва; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. Ч.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, системи звичайних диференціальних рівнянь. 2021. – 140 с.

17. Хусаїнов Д. Я. Диференціальні рівняння : підручник / Д.Я. Хусаїнов, А.В. Шатирко; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. – Київ : ВПУ "Київський університет", 2023. – 413 с.

Додаткова література

1. Собчук В.В. Розв’язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп’ютерної алгебри Mathematica / В.В. Собчук, І.В. Кальчук, О.В. Чичурін, Т.В. Жигалло; М-во освіти і науки України, Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки. – Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2021. – 323 с.

2. Богач І.В. Чисельні [числові] методи розв’язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD : навч. посіб. / І.В. Богач, Л.В. Краковецький, Л.В. Крилик; М-во освіти і науки України, Вінниць. нац. техн. ун-т. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 106 с.

3. Ластівка І.О. Вища математика : навч. посібн. / І.О. Ластівка, О.І. Безверхий, І.П. Кудзіновська; М-во освіти і науки України, Нац. авіац. ун-т. – Київ : НАУ, 2018. – 452 с

4. Копась І.М. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс] : навч. посіб. для інж. спец. / І.М. Копась; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т України "Київсь. політех. ін-т ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

5. Пріщенко О. П. Диференціальні рівняння та їх застосування : навч.-метод. посіб. / О.П. Пріщенко, Т.Т. Черногор; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т "Харк. політех. ін-т." – Харків : ХПІ, 2017. – 88 с.

6. Зюбанов О. Є. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / О.Є. Зюбанов; М-во освіти і науки України, Донець. нац. ун-т ім. В. Стуса. – Вінниця : ДонНУ, 2018. – 72 с.

7. Килимник І. М. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / І.М. Килимник, Д.С. Яримбаш; М-во освіти і науки України, Запорізь. нац. техн. ун-т. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 102 с.

8. Герасимчук В. С. Методи математичної фізики. Ч. 1. Вступ до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних : навч. посіб. / Укл. В.С. Герасимчук; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т України "Київсь. політех. ін-т ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 25 с.

9. Гаращенко Ф.Г. Диференціальні рівняння для інформатиків : підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. – Київ : ВПУ "Київський університет", 2008. – 352 с.

10. Щоголев С.А. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. / С.А. Щоголев, Н.Г. Дрік, Арк.О. Кореновський; М-во освіти і науки України, Одесь. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова. – Одеса : ОНУ, 2017. – 399 с.

11. Базилевич Ю.М. Розв'язання системи рівнянь першого порядку у частинних похідних методами декомпозиції / Ю.М. Базилевич, І.А. Костюшко, О.Д. Станіна // Кібернетика та системний аналіз. – 2023. – Т. 59. № 3. – С. 115 – 126.

12. Koriashkina L.S. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification / L.S. Koriashkina, A. Pravdivy, A.P. Cherevatenko. // Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems. – CRC Press/ Balkema – Taylor & Francis Group. – 2015. – P. 153 – 160.

13. Koriashkina L.S. The problem of multi-zone dynamics systems parametric identification / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // System technologies. 4 (99) – Dnipropetrovsk. – 2015.– P. 88 – 101.

14. Норець Р. М. SIR-модель розповсюдження [поширення] інфекції і маятникова міграція // Інформаційні технології: теорія і практика : Тези доповідей VI Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків. [Електронний ресурс] / Р. М. Норець, Л. С. Коряшкіна – Харків : ХНУМГ імені О.М.Бекетова, 2023. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – С. 59 – 61.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Staніна Ольга Дмитрівна
Шевченко Юлія Олександрівна

ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 27.06.2024 Авт. арк. 13,3

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.