МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

С.А. Ус

Методи прийняття рішень

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2012

УДК 519.81(075.8)
ББК 22.18я73
У74

Рекомендовано редакційною радою НГУ як навчальний посібник з дисципліни «Системи й методи прийняття рішень» для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 2 від 14.02. 2011).

Рецензенти:

О.Г. Байбуз, д-р техн. наук, проф. (Дніпропетровький національний університет ім. О. Гончара, завідувач кафедри математичного забезпечення ЕОМ);

В.Б. Говоруха, канд. фіз.-мат. наук, доц. (Академія митної служби України, завідувач кафедри вищої математики й інформатики).

Ус, С.А.

У74 Методи прийняття рішень [Текст]: навч. посібник / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2012. – 212 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою курсу “Системи й методи прийняття рішень” для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Розглянуто основні поняття теорії прийняття рішень, методи прийняття рішень за умов коли задано переваги на множині альтернатив, або існує багато критеріїв чи мають місце нечіткі вихідні дані.

Книгу розраховано на осіб, які опанували математику в межах вузівського курсу, й призначено для студентів спеціальності «Системний аналіз». Вона може бути корисна всім, хто застосовує методи прийняття рішень до розв’язування практичних задач.

УДК 519.216/217(075.8)

ББК 22.171я73

Зміст

ВСТУП

Сучасне гірниче виробництво, зокрема шахти, рудні, кар'єри, збагачувальні фабрики – являють собою складні комплексні підприємства, обладнані потужною гірничою технікою. Управління такими підприємствами та планування їхньої роботи вимагають від керівника будь-якого рангу вміння швидко і правильно приймати рішення. При цьому необхідно враховувати вимоги зростання обсягів виробництва, перспективи розвитку техніки, підвищення вимог до максимального використання надр й охорони довкілля, соціальні, економічні та інші фактори.

У цих умовах рішення, що приймаються на основі особистого досвіду й інженерної інтуїції, можуть виявитися малоефективними, оскільки не враховують цілого ряду протилежних умов. Крім того, сучасне виробництво відзначається високою затратністю, що різко підвищує збитки від помилок у прогнозуванні й управлінні. Така ситуація вимагає застосування технології прийняття рішень, яка базується на кількісних оцінках варіантів і виключає або зменшує значення суб'єктивних факторів, і при цьому враховує вплив різних неточно або невизначено описаних параметрів.

Існують різні підходи до прийняття рішень, залежно від того, які поняття вважають за основні при його аналізі.

Наприклад, коли вважати, що прийняття рішень – це вибір найбільш переважної альтернативи з множини наявних, то задача описується парою (Ω, C), де Ω – множина можливих альтернатив, C – принцип оптимальності. Такий підхід відповідає теоретико-ігровій концепції.

При статистичному підході ситуація прийняття рішень описується трійкою: $(\varPhi, \Theta, F)$, де $\varPhi$ – множина можливих рішень особи, що приймає рішення, Θ – множина станів середовища, F – оцінний функціонал.

У даному посібнику прийняття рішень розглядається в межах теоретико-ігрової концепції.

В основу посібника покладено курс лекцій, читаний автором перед студентами спеціальності «Системний аналіз та управління». Мета посібника – навчити студентів формалізувати задачі планування, організації та управління, пов’язані з гірничим виробництвом, будувати економіко-математичні моделі й приймати рішення на основі отриманих оптимальних величин змінних в умовах визначеності й невизначеності. Передбачається, що читачі володіють методами математичного програмування й оптимізації.

Матеріал посібника поділено на п’ять розділів.

У першому розділі розглянуто загальні підходи до задач прийняття рішень (ЗПР), класифікацію цих задач, види невизначеності, що виникають в процесі прийняття рішень, та способи їх формалізації.

Другий розділ присвячено задачам вибору на множині альтернатив. Тут дано основні поняття теорії бінарних відношень і розглянуто їхнє використання в задачах прийняття рішень. Крім того розглянуто функції вибору й деякі елементи теорії корисності.

У третьому розділі розглянуто задачі прийняття рішень в умовах наявності багатьох критеріїв, зокрема задачі багатокритерійної оптимізації. Описано також методи розв'язування таких задач, включаючи методи врахуваня приоритетів критеріїв і методи нормалізації.

Четвертий і п'ятий розділи описують задачі прийняття рішень у нечітких умовах, у тому числі задачі нечіткого математичного програмування, їх класифікацію та методи розв'язування (розділ 4) і задачі вибору на основі нечітких відношень переваги (розділ 5).

РОЗДІЛ 1

ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ЇХНЯ КЛАСИФІКАЦІЯ

Мета розділу: ознайомлення з проблемою прийняття рішень, типовими її задачами та існуючими підходами до їх розв'язування, вивчення основних понять теорії прийняття рішень.

1.1. Приклади задач прийняття рішень та їхній поділ на класи

Розглянемо деякі задачі, метою яких є прийняття рішень.

- На підприємстві звільнилася посада головного інженера. Директор має призначити нового головного інженера, здійснивши вибір одного з можливих претендентів на цю посаду і враховуючи при цьому дані про їхню освіту, професіоналізм, досвід роботи, авторитет у колективі, вік, комунікабельність, стан здоров'я та інші чинники, кожен з яких до того ж має різну значимість при виборі.
- Деякі шахти і кар'єри повинні відвантажувати видобуте вугілля споживачам за кількома адресами. Відомо, скільки вугілля видобувають на кожному підприємстві й потреби кожного пункту споживання. Необхідно так організувати доставку даної сировини, щоб мінімізувати витрати на пробіг транспорту й перевезення вантажу.
- Припустимо, що на кар'єрі існує можливість задіяти для перевезення вантажів кілька видів транспорту. Необхідно здійснити розподіл кількості вугілля, видобутого в кожній лаві, за відвалами, видами транспорту та перевантажувальними пунктами, тобто визначити скільки вугілля і яким видом транспорту необхідно перевозити з кожної лави на кожний пункт прийому (відвал, перевантажувальний пункт).
- Проектуючи кар'єр, необхідно вибрати вид кар'єрного транспорту, який забезпечить мінімальні витрати на виконання робіт, за умови, що можливе використання автомобільного й залізничного транспорту та їх комбінацій. До того ж необхідно враховувати об'єм гірничої маси, яку необхідно перевозити, вартість та обсяги перевезення кожним видом транспорту, а в разі їх комбінації – розташування перевантажувального пункту.
- Шахті необхідно відвантажити певний об'єм руди протягом даного терміну, забезпечивши мінімальну кількість у ній домішок, виконання вимог до кондицій сировини, рівномірну завантаженість устаткування та мінімальні транспортні витрати.

Ця задача включає в себе такі підзадачі: планування видобутку корисної копалини з метою забезпечення необхідних вимог до її кондицій та об'єму; планування завантаженості устаткування; оптимізація перевезень.

- Розробка плану будівництва кар'єру з метою якнайшвидшого введення його в експлуатацію.
- Вибір місця розташування збагачувальної фабрики, що обслуговує групу шахт і кар'єрів, з огляду на мінімізацію транспортних витрат та з урахуванням соціальних й екологічних вимог.
- Визначення оптимального плану використання різноманітних ресурсів.
- Планування видобуткових робіт і управління ними в режимі усереднення. Задачу даного типу можна сформулювати у такий спосіб:

Корисні копалини, які видобуваються на окремих дільницях гірничого підприємства, мають різний вміст корисних і шкідливих компонентів, у той час як переробні підприємства (збагачувальні фабрики, металургійні заводи, електростанції) висувають до якості сировини досить жорсткі вимоги. Отже, необхідно спланувати видобуток корисної копалини на кожній дільниці таким чином, щоб загальний показник якості продукції відповідав вимогам споживачів, а виробничий процесс був найбільш ефективним.

- Розподілити завдання серед вибоїв з урахуванням плану видобутку, пропускної спроможності транспортних колій, потужності лави, необхідності проведення ремонтних і підготовчих робіт.
- Визначити план постачання на центральну збагачувальну фабрику вугілля з різних шахт, який забезпечує мінімальну вартість перевезень, безперебійну роботу фабрики й належну якість сировини.
- Розробити оптимальний план збагачення руди з кількох рудників на одній збагачувальній фабриці.
- Нехай існує обладнання кількох типів, яке можна використовувати на різних виробничих дільницях. Кількість обладнання кожного типу і його продуктивність (на кожній ділянці своя) відомі. Необхідно так розподілити устаткування, щоб загальний час його роботи, витрачений на виконання завдання, був мінімальним.
- Заводи гірничого машинобудування випускають різноманітне обладнання, що використовується в об'єднанні вугільної промисловості для видобутку вугілля різних марок. Випуск кожного виду виробів потребує певної кількості ресурсів (фінансових, трудових, сировинних, матеріальних) і, відповідно, кожен вид такої продукції має свою собівартість і ціну. В умовах, коли відома максимально можлива та мінімально необхідна кількість обладнання кожного виду, необхідно скласти найкращий план його випуску.
- Транспортування вантажів підприємств гірничої промисловості посідає значне місце у вантажообігу країни. Необхідно так спланувати перевезення та (або) будівництво нових гірничих підприємств, щоб транспортні витрати були мінімальними.
- На кар'єрі працює кілька вибоїв. Обсяги робіт на кожному з них відомі. Є також кілька відвалів, приймальна спроможність яких також відома. Потрібно так спланувати перевезення гірничої маси із вибоїв у відвали, щоб транспортні витрати були мінімальними.

- Необхідно вибрати маршрути транспортування вугілля (кожен маршрут характеризується такими параметрами: протяжність, завантаженість, рівень безпеки, наявність технічного обслуговування, заправних станцій та ін.) і розподілити транспортні одиниці між маршрутами, враховуючи наявний парк техніки, можливість залучення додаткових засобів, необхідність виконати замовлення у визначений термін та ін. (*задачі оптимальної організації перевезень*).
- Вибрати обладнання для проведення робіт з урахуванням його вартості, продуктивності, екологічних вимог, кваліфікації персоналу та ін. (задачі *вибору*)
- Розробити проект гірничого підприємства.
- Визначити оптимальні умови технологічних процесів на гірничому підприємстві.
- Розробити оптимальний план гірничих робіт на підприємстві.
- Задачі *розподілу*, наприклад:
  - розподілити екскаватори серед робочих місць (вибоїв, категорій порід) так, щоб мінімізувати витрати на вантажні операції;
  - розподілити машини між маршрутами;
  - розподілити службовців за видами робіт;
  - розподілити верстати серед робітників;
  - розподілити автомашини за екскаваторами

Усі перелічені задачі, як і багато інших, характеризуються тим, що прийняття рішень у них являє собою свідомий вибір однієї з можливих альтернатив (залежно від конкретного змісту їх називають стратегіями, планами, варіантами) на основі певного принципу (критерію) оптимальності.

Цей вибір робить *особа, яка приймає рішення* (ОПР). У ролі такої особи виступають окремі люди або групи людей, що мають право вибору і несуть відповідальність за його наслідки. Це може бути майстер, диспетчер, начальник зміни (цеху, відділу), керівник підприємства або рада директорів. Беручи за основу наявні дані (у тому числі й математичні розрахунки та дослідження), ОПР вибирає остаточний варіант рішення в межах своєї компетенції.

Отже, будь-який процес прийняття рішень можна охарактеризувати такими елементами:

1. Особа, що приймає рішення.
2. Множина змінних, значення яких вибирає ОПР (варіанти, стратегії, плани, керуючі дії).
3. Множина змінних, значення яких залежать від прийнятого рішення (результати, вихідні змінні ситуації прийняття рішень).
4. Множина змінних, значення яких ОПР не регулює (параметри і зовнішнє середовище).
5. Інтервал часу, протягом якого приймаються рішення.

6. Математична модель задачі прийняття рішення, що являє собою множину співвідношень між параметрами, керуючими діями і вихідними змінними.

7. Обмеження, що описують вимоги, викликані ситуацією прийняття рішення по відношенню до вихідних змінних задачі та керуючих дій.

8. Цільова функція або критерій оптимальності, за допомогою якого оцінюють якість вибраного рішення.

Кожен з цих елементів може характеризуватися різним ступенем невизначеності і залежно від цього будуть отримані різні класи задач прийняття рішень.

Якщо параметри й зовнішні збурення (середовище) залишаються незмінними в часі, то математична модель буде *статичною*. В іншому випадку модель ситуації прийняття рішень буде динамічною. Опис статичної моделі, можна подати у вигляді графіка, таблиці, функціональної залежності або алгоритму обчислення вихідних змінних. Динамічні моделі описують за допомогою різних класів диференціальних або різницевих рівнянь.

Якщо зовнішні збурення носять невипадковий характер, то маємо *детерміновану* модель прийняття рішення. Коли ж вони мають випадковий характер, то отримуємо *стохастичну* модель. У цьому випадку вихідні змінні також будуть випадковими, а їхній розподіл визначатиметься розподілом зовнішніх збурень.

У тому разі, коли множина можливих альтернатив і критерій оптимальності цілком визначені, проблема прийняття рішень зводиться до задачі *оптимізації*.

Коли ситуація потребує врахування кількох критеріїв – її описують за допомогою задачі багатокритерійної оптимізації.

Якщо множину альтернатив визначено, критерій оптимальності невідомий, але відомі відношення переваги, визначені на множині альтернатив, то маємо справу із *задачею вибору*. Це досить поширена ситуація, оскільки не завжди можна кількісно оцінити кожну альтернативу, але часто можна назвати стосовно всіх, або кількох пар альтернатив яка з них має переваги над іншою.

У випадку, коли деякі або всі елементи задачі мають невизначеність типу *нечіткість*, то маємо задачі *прийняття рішень в нечітких умовах* (зокрема задачі нечіткого математичного програмування, задачі вибору в нечітких умовах та інші).

Залежно від класу отриманої задачі вибирають і підхід до її розв’язування. Це можуть бути методи оптимізації, лінійного або нелінійного програмування, статистичні методи, аналітичні або числові методи розв’язування рівнянь різних класів.

Отже, в процесі прийняття рішень виникають ситуації, які мають той чи інший ступінь невизначеності, а тому якість рішення залежить від повноти врахування всіх чинників, що впливають на його наслідки. Нерідко ці чинники носять суб’єктивний характер, і це стосується як ОПР, так і самого процесу прийняття рішень. Крім того ОПР не завжди має у своєму розпорядженні всю інформацію, яка необхідна для її обґрунтованих дій.

Таким чином, можна виділити основні труднощі, що виникають у процесі прийняття рішень, а саме:

1. Наявність великого числа критеріїв, які не завжди погоджені між собою. Наприклад, під час проектування нового пристрою для літального апарата висуваються вимоги мінімальної маси, максимальної надійності й мінімальної вартості. Ці критерії суперечать один одному, тому виникає задача пошуку компромісного рішення, яке б ураховувало всі вимоги.

2. Висока міра невизначеності, зумовлена недостатньою інформацією для обґрунтованого прийняття рішення.

Такі ситуації потребують для свого опису спеціального математичного апарату, який містив би в собі можливість врахування цієї невизначеності.

Це можуть бути методи теорії ймовірностей, теорії ігор, статистичних рішень, нечітких множин або якісні методи системного аналізу. Схематично класифікацію задач прийняття рішень за кількістю критеріїв, залежністю від часу, випадкових факторів і дані про відповідний їм математичний апарат відображено на рис. 1.1. Схему подано за посібником [2].

1.2. Невизначеність у задачах прийняття рішень

Невизначеність у прийнятті рішень зумовлено недостатньою надійністю і кількістю інформації, на основі якої ОПР здійснює свій вибір.

Наведемо класифікацію невизначенності за типами та причини її виникнення.

1. Принципова невизначеність, зумовлена неможливістю отримати інформацію в принципі, наприклад, на даному рівні наукових знань.

2. Невизначеність, спричинена загальним числом об'єктів або елементів системи, приміром, коли їх число перевищує 10^9.

3. Невизначеність, спричинена браком інформації або її невірогідністю в силу технічних, соціальних або інших причин.

4. Невизначеність, породжена занадто високою або недоступною ціною за встановлення визначенності.

5. Невизначеність, яку створює особа, що приймає рішення, унаслідок її некомпетентності, недостатнього досвіду й знань про фактори, які впливають на процес.

6. Невизначеність як наслідок обмежень у системі прийняття рішень (обмеження за часом і елементами простору параметрів, що характеризують фактори прийняття рішень);

7. Невизначеність, спричинена неантагоністичною поведінкою супротивника, який має вплив на процес прийняття рішень.

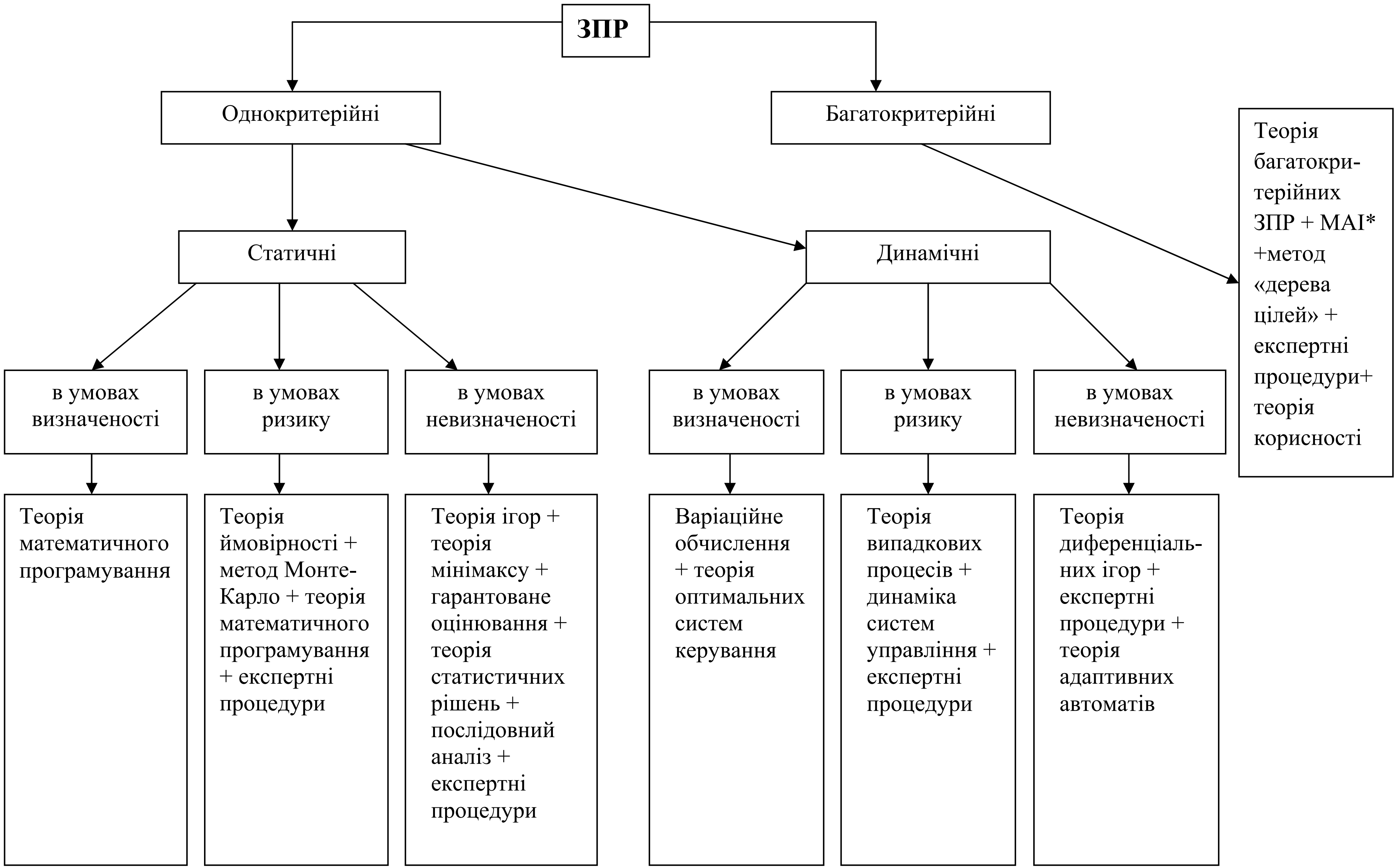


Рис. 1.1. Класифікація задач прийняття рішень і математичний апарат, що застосовується для їх розв’язування

* МАІ – метод аналізу ієрархії.

Інша класифікація невизначеностей включає такі типи:

– невідомість,
– неповнота,
– недостатність,
– неадекватність,
– недовизначеність.

Схематично співвідношення між цими типами зображено на рис.1.2.

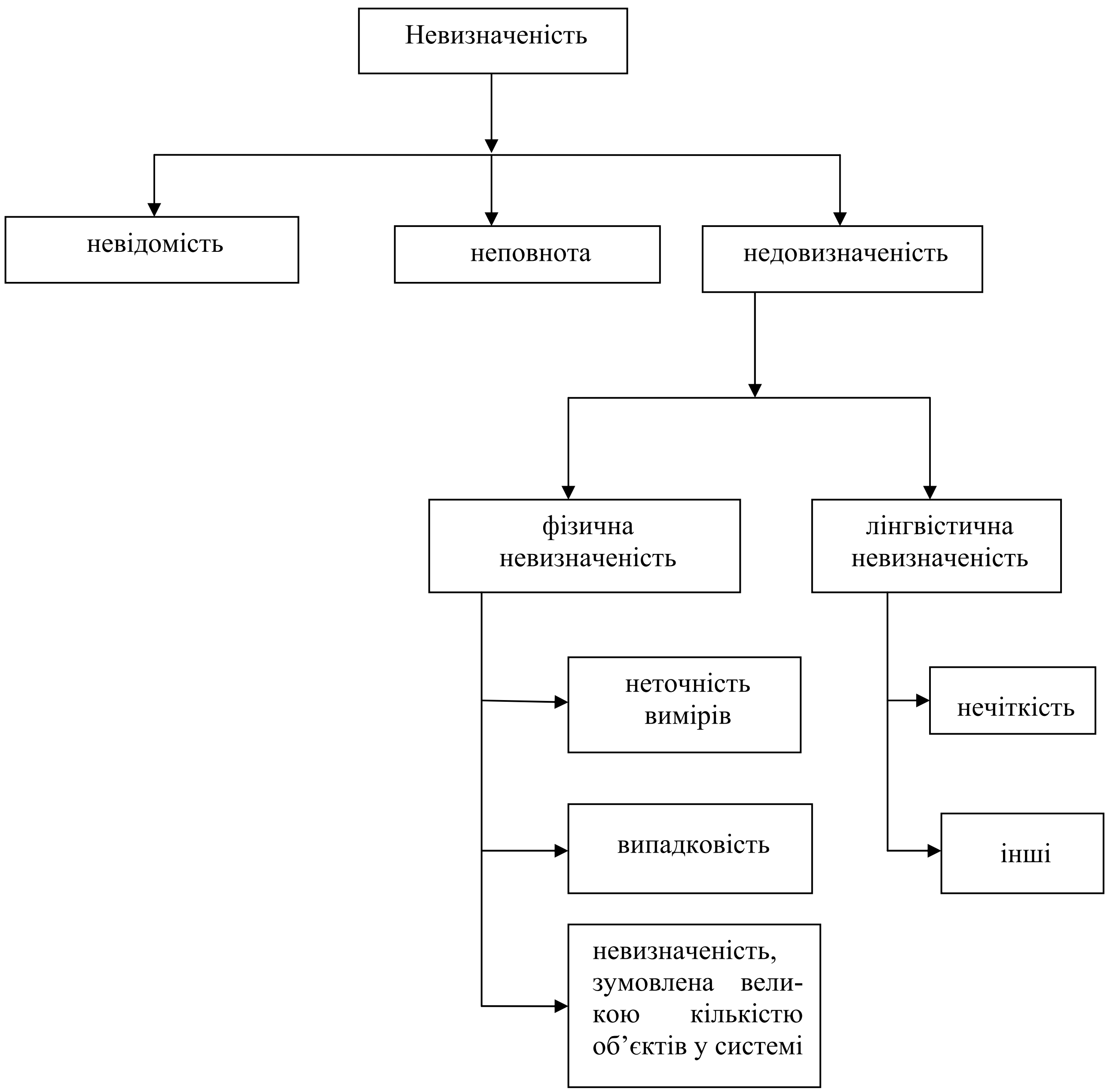


Рис. 1.2. Співвідношення між різними типами невизначеності

1.3. Теоретико-ігровий підхід до прийняття рішень

У теорії прийняття рішень розрізняють кілька підходів, залежно від того, які елементи вважають головними при аналізі процесу прийняття рішень.

Згідно з теоретико-ігровою концепцією, прийняття рішень являє собою вибір кращої альтернативи з множини доступних альтернатив.

Отже, невід'ємними компонентами такої моделі буде множина альтернатив та опис міркувань особи, яка приймає рішення. Зауважимо, що в реальних задачах альтернативи мають багато властивостей, які впливають на рішення.

Нехай деяка властивість альтернатив з множини Ω описується числом, тобто існує відображення $\varphi : \Omega \to E_1$. Тоді така властивість називається *критерієм*, а число $\varphi(x)$ – оцінкою альтернативи x за критерієм φ.

У задачах прийняття рішень критерії слугують для вираження «інтенсивності» істотних властивостей (ознак) рішень.

За своїм характером вони поділяються на кількісні та якісні. З кожним критерієм пов'язують множину допустимих перетворень Φ і говорять, що цей критерій має шкалу типу Φ.

Критерії, які мають шкалу, не менш досконалу, ніж інтервальна (тобто допустимими їх перетвореннями є множення на додатне число і додавання довільного числа r), називаються *кількісними*.

Критерії, що мають порядкову шкалу (до них віднесено всі монотонно зростаючі функції), називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати з іншими лише за відношеннями «більше», «менше», «дорівнює».

Одночасне врахування окремих властивостей альтернатив може бути складним. Тоді виділяють групи властивостей, які агрегують у вигляді аспектів.

Аспект являє собою складену властивість альтернатив, яка одночасно враховує всі властивості, що входять до певної групи. В окремому випадку аспект може бути критерієм.

П р и к л а д 1.1. Транспортній агенції необхідно перевезти заданий обсяг вантажів. Диспетчер має визначити маршрут перевезень.

У цій задачі альтернативами виступають різні маршрути. Диспетчеру необхідно врахувати такі їхні властивості: протяжність (довжина), завантаженість, рівень безпеки, усі витрати, пов’язані з перевезенням, особливості технічного обслуговування та ін.

Поняття «технічне обслуговування» включає в себе кількість і розташування станцій обслуговування, їх потужність, завантаженість і термін виконання ремонтних робіт. Таким чином ця характеристика являє собою аспект, що агрегує всі перелічені властивості.

Протяжність маршруту вимірюється в кілометрах, тобто виражається числом і тому його можна вважати критерієм.

У загальному випадку величина критерію залежить від двох груп факторів:

– контрольовані (керовані) фактори залежать від ОПР і являють собою її стратегію (вибір);

– неконтрольовані фактори, тобто ті, на які ОПР впливати не може, – це параметри задачі прийняття рішень, вони можуть бути, як зазначено вище, детермінованими, стохастичними або невизначеними.

Значення керованих факторів, зазвичай, лімітується низкою природних умов, наприклад обмеженістю ресурсів. Ці умови є основою формування *обмежень* для задачі прийняття рішень.

Якщо ж у процесі прийняття рішень необхідно враховувати кілька властивостей альтернатив, то виникає проблема багатокритерійного вибору.

Нехай усі властивості k_1, k_2 … , k_m альтернатив, що враховуються при розв'язуванні задачі, є критеріями. Поставимо у відповідність k_j-му критерію j-ту вісь простору E_m ($j = 1, \ldots , m$) і відображатимемо множину Ω в цьому просторі, поставивши у відповідність кожній альтернативі $x \in \Omega$ точку: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots , \varphi_m(x))$, простору E_m, де φ_j – оцінка за критерієм k_j ($j = 1, \ldots , m$).

Критерійним простором називається простір E_m, координати точок якого являють собою оцінки за відповідними критеріями.

Таким чином, у багатокритерійній задачі порівняння альтернатив за перевагами здійснюється шляхом використання заданих на Ω числових функцій $\varphi_1(x), \ldots , \varphi_m(x)$.

Для кожного критерію φ_j на числовій прямій (осі E_j) описують підмножину Y_j, з якої він набуває значень. Практично множину Y_j визначають відповідно до сенсу цього критерію.

Критерії φ_j (.) називаються частковими, або локальними. Вони утворюють векторний критерій: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots , \varphi_m(x))$.

Будемо вважати, що кожна альтернатива x повністю описується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $\varphi(x)$, тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини досяжних: $Y = Y(x) = \{y \in E_m | y = \varphi(x), x \in X\}$.

У реальних задачах множину Y часто побудувати неможливо, тому розглядається деяка ширша множина $Y' \subset E_m$, векторам з якої можна надати певного змісту.

У ситуації, коли наявної інформації недостатньо для кількісної оцінки кожної альтернативи, але стосовно деяких (або всіх) пар альтернатив існує можливість встановити, яка в кожній з них краща, тоді для їх порівняння використовують апарат бінарних відношень.

Висновки

Проблема прийняття рішень – одна з ключових у людській діяльності. Основні труднощі, які виникають у процесі прийняття рішень, це наявність великого числа не узгоджених між собою критеріїв і висока міра невизначеності, зумовлена браком інформації для обґрунтованого прийняття рішення.

Існують різні підходи до прийняття рішень: теоретико-ігровий, оптимізаційний, статистичний та інші залежно від того, які елементи вважають головними при аналізі даного процесу.

Методи, які використовують у прийнятті рішень, залежать від природи задачі, наявної інформації та обраного підходу до її розв'язування.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади задач прийняття рішень.
2. Дайте визначення критерія, аспекта, принципа оптимальності, обмеження в теорії прийняття рішень.
3. Які проблеми виникають у процесі прийняття рішень?
4. Від яких факторів залежить якість процесу прийняття рішень?
5. За якими ознаками класифікують задачі прийняття рішень?
6. Який математичний апарат застосовується до розв'язування задач прийняття рішень?
7. Які існують типи невизначеності ?
8. Які підходи застосовуються у розв'язуванні некласичних задач прийняття рішень?
9. Які положення включає теоретико-ігровий підхід до прийняття рішень?

Завдання до розділу 1

Завдання А

Опишіть множину допустимих альтернатив, параметри, обмеження та критерії у наведених нижче задачах.

1. Керівникові фірми потрібно вирішити, яку програму для бухгалтерського обліку з тих, що є на ринку (наприклад, 1С, «Парус», С2, «Бухгалтер – 3»; програма, виготовлена на замовлення), необхідно придбати, враховуючи такі чинники: вартість, захищеність інформації, можливість і гнучкість налаштування, вимоги до ресурсів та ін.

2. Серед клієнтів фірми необхідно визначити найперспективнішого для підписання довгострокових договорів.

3. Керівництво заводу вивчає перспективні проекти розвитку підприємства, здійснення кожного з яких вимагає певних ресурсів (кошти, сировина, термін реалізації, кадровий потенціал і т. ін.) Потрібно вибрати для втілення один або кілька проектів.

4. Враховуючи інформацію про наявні на підприємстві основні фонди, кадровий потенціал, сировину, інфраструктуру, а також про партнерів, конкурентів, ринкову кон’юнктуру, вплив державного регулювання, фінансову підтримку, необхідно здійснити вибір напряму його діяльності (розвиток основного виробництва, перепрофілювання, збільшення експорту, можливість виходу на ринки або відмови від них і т. ін.)

5. Визначити, які з корисних копалин доцільно видобувати в даному регіоні (рекомендовані варіанти: вугілля, залізна руда, фосфорити, вапно), враховуючи ефективність і вартість їхнього видобутку.

6. З пункту *А* в пункт *В* щодня вирушають пасажирські й швидкісні поїзди. У табл. 1.1 подано відомості про наявний парк вагонів різних типів, з яких можна комплектувати поїзди, і кількість пасажирів, яку можуть перевозити вагони кожного типу. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, що забезпечує максимальну кількість перевезених пасажирів.

Таблиця 1.1

Тип вагона	Парк вагонів	Поїзд		Кількість пасажирів
		швидкий	пасажирський	
Багажний	12	1	1	–
Поштовий	18	1	–	–
Твердий	89	5	8	58
Купейний	79	6	4	40
М'який	35	4	2	32

7. У роботі кар’єру можуть бути використані три види комбайнів I, II, і III, які здатні виконувати три види робіт *A*, *B*, і *C*. У табл. 1.2 відображено ресурси робочого часу кожного комбайна, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (в грн). Визначити оптимальне завантаження комбайнів, яке забезпечує максимальний сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх собівартість.

Таблиця 1.2

Вид комбайна	Продуктивність, $м^3$/год			Питома вартість, грн/год			Ресурс часу
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	
I	30	20	40	2	4	2	400
II	20	30	50	3	2	5	300
III	60	40	20	5	3	6	280

8. На шахті «Добропільська» функціонує три видобувних дільниці. Видобуте на кожній з них вугілля має має різний вміст сірки, різні показники вологості й зольності (табл. 1.3). Стосовно кожної з дільниць відомі значення максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку, а також витрати на видобуток однієї тонни сировини (табл. 1.3). Необхідно, з огляду на характеристики вугілля, що видобувається на кожній дільниці, скласти план робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними, його обсяг максимальним, і виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини (подано в табл. 1.4).

Таблиця 1.3

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис.т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис.т	1200	600	530

Таблиця 1.4

Якість вугілля	Зольність %	Вологість %	Вміст сірки %
Експлуатаційна	39,5	–	–
Середня	–	8,2	2,16
Не більше	47,4	9,8	2,6

9. Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром Ц і чотирма містами М1, М2, М3, М4 має у своєму розпорядженні три групи літаків. Перша група складається з 10 чотиримоторних, друга – з 25 двомоторних літаків нового зразка і третя – з 40 двомоторних літаків старого зразка. Дані про кількість пасажирів, що може бути перевезена одним літаком даного типу по кожному маршруту протягом одного місяця, і пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. грн) відображено в табл. 1.5. Кількість пасажирів, яких потрібно перевозити по кожному маршруту протягом місяця, становить відповідно 40, 50, 40, 30 тис. людей, а вартість одного квитка

дорівнює 200, 150, 180 і 300 грн. Необхідно розподілити літаки серед маршрутів, виходячи з умови досягнення максимального прибутку авіакомпаній та максимальної кількості перевезених пасажирів.

Таблиця 1.5

Тип літака	Кількість пасажирів / експлуатаційні витрати, тис. грн			
	Ц - М1	Ц - М2	Ц - М3	Ц - М4
I	320/1,2	300/0,8	190/1,5	250/1,6
II	200/1,4	250/1,5	170/2,0	260/2,9
III	225/1,0	300/1,1	200/1,8	320/1,7

10. Збагачувальна фабрика отримує 4 види вугілля у таких кількостях: 400, 250, 350 і 100 тис. т. Унаслідок змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти концентрату: *A* (1 : 1 : 1 : 1), *B* (3 : 1 : 2 : 1) і *C* (2 : 2 : 1: 3). Вартість 1 тис. т концентрату дорівнює 120, 100 і 150 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, що забезпечує досягнення її максимальної сумарної вартості та максимальної кількості.

11. На підприємство надійшло дві партії фанери, причому обсяг першої партії – 400, а другої – 250 листів. З них виготовляються комплекти, що складаються з 4 деталей 1-го типу, 3 деталей 2-го типу й 2 деталей 3-го типу. Один лист фанери з першої партії може розкроюватися трьома способами: *R*1, *R*2, *R*3; фанеру з другої партії можна розкроювати чотирма способами: *R*1, *R*2, *R*3, *R*4. Дані про кількість деталей кожного типу, які можна вирізати з одного листа тим або іншим способом, наведено в табл. 1.6. Необхідно розкроїти наявний матеріал таким чином, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів.

Таблиця 1.6

Тип деталей	Кількість деталей, шт.						
	Перша партія			Друга партія			
	*R*1	*R*2	*R*3	*R*1	*R*2	*R*3	*R*4
1-й	0	6	9	6	5	4	0
2-й	5	3	4	5	3	2	6
3-й	12	14	0	7	4	5	7

12. У роботі підприємства може бути задіяно п'ять технологічних процесів (*T*1, *T*2, *T*3, *T*4, *T*5), причому кількість одиниць продукції, випущених із застосуванням кожного з них за одиницю часу, відповідно дорівнює 300, 260,

320, 400 і 450 шт. У технологічному процесі враховуються такі виробничі чинники: кількість сировини, енергозатрати, витрати на заробітну платню й накладні витрати. Їх величини при роботі протягом одиниці часу в застосуванні до різних технологій зведено в табл. 1.7. Визначити виробничу програму, яка максимізує випуск продукції.

Таблиця 1.7

Виробничі ресурси	Витрати на різні технології					Ліміт ресурсу
	*T*1	*T*2	*T*3	*T*4	*T*5	
Сировина, т	15	20	15	14	18	2000
Електроенергія, кВт	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
Накладні витрати, грн	4	5	6	3	2	1000
Зарплатня, грн	6	3	4	6	3	1600

13. Механічний завод при виготовленні I, II та III типу деталей використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку деталей кожного типу можна вести трьома різними технологічними способами *T*1, *T*2 і *T*3. У табл. 1.8 подано норми часу для обробки деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також часові ресурси (у верстато-годинах) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 й 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального використання токарних вестатів.

Таблиця 1.8

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

14. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, що мають різний склад і вартість (табл. 1.9). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, який містить олова – від 40 до 60 % і цинку – від 20 до 30 %.

Таблиця. 1.9

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

15. Розв'язати задачу 14 з урахуванням додаткових умов, за якими необхідно виготовити максимальну кількість сплаву, а наявні ресурси сплавів I – V становлять 20, 25, 15, 30, 20 кг відповідно.

16. Деталі *A*, *B*, *C* можна обробити на трьох верстатах (I, II, III). У табл. 1.10 подано норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, витрати на одну годину роботи верстата і граничний час роботи верстата. Вважаючи, що будь-яка деталь може оброблятися на будь-якому верстаті, визначити оптимальну виробничу програму за одним із таких критеріїв: максимум товарної продукції *T*; мінімальна собівартість продукції *B*.

Таблиця 1.10

Верстати	Норма часу обробки			Витрати на годину роботи, грн	Час роботи верстата, год
	A	*B*	*C*		
I	0,3	0,1	0,2	30	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40

17. Використовуючи дані табл. 1.10 і вважаючи, що кожна деталь послідовно обробляється на всіх верстатах, скласти виробничу програму, яка забезпечує максимальний випуск товарної продукції при мінімальних витратах.

Завдання В

Для задач 6 – 17 скласти математичні моделі лінійного програмування (моделі можуть мати як один, так і кілька критеріїв).

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧІ ВИБОРУ

Мета розділу : ознайомлення з апаратом бінарних відношень та його використанням у системах прийняття рішень; вивчення методів прийняття рішень на основі заданих відношень переваги, функцій вибору та функцій корисності; набуття навичок застосування цих методів на практиці.

2.1. Поняття про бінарні відношення

Найпростіша ситуація, в якій можна зробити обґрунтований вибір з кількох об'єктів, виникає, коли подано один "критерій якості", що дозволяє порівнювати будь-які два об'єкти, точно вказати, який з них кращий, і вибрати той (або ті), для якого цей критерій досягає максимального значення. Однак в більшості реальних ситуацій визначити один такий критерій доволі складно, а інколи взагалі не можливо. Але розглядаючи деякі пари об'єктів, можна назвати кращий з них. У таких випадках кажуть, що ці два об'єкти перебувають у *бінарному відношенні.* Це поняття дозволяє формалізувати операції попарного порівняння альтернатив, і тому воно широко використовується у теорії прийняття рішень.

Розглянемо деякі вислови, які виражають взаємозв'язки між об'єктами.

1. Тетяна старша за Ігоря.
2. Фірми A та B збиткові.
3. Київ розташований південніше від Москви.
4. Іван – брат Петра.
5. Залізо важче за воду.

Як бачимо, ці вислови описують відношення різного типу:

Наприклад, другий й четвертий означають, що два об'єкти віднесені до одного й того самого класу; перший, третій й п'ятий – відображають порядок об'єктів у системі. Крім того, у всіх п'яти прикладах чітко виділено назви об'єктів і назви відношень. Легко помітити, що коли замість однієї назви об'єкта поставити іншу, можливі такі ситуації:

1) відношення знову буде виконано (Київ розташований південніше від Мурманська);

2) відношення не буде виконуватися (Київ розташований південніше від Одеси);

3) відношення не буде мати сенсу (залізо розташоване південніше від води).

Отже, говорити про відношення ми можемо тільки тоді, коли вміємо виділяти множину об'єктів, на якій воно визначене.

Математично визначення відношення можна сформулювати таким чином:

В и з н а ч е н н я 2.1. *Відношенням* R на множині Ω називається підмножина декартового добутку $\Omega \times \Omega$, тобто $R \subset \Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega \times \Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Відношення R, задане на множині Ω, позначимо як: (R, Ω). Тут і далі записи типу: $x\,R\,y$ або $(x, y) \in R$, означають, що елементи x та y множини Ω перебувають у відношенні R.

2.2. Способи задання відношень

Для того, щоб задати відношення (R, Ω), необхідно задати всі пари елементів $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, які включено в множину R. Крім повного переліку всіх пар, існують три способи задання відношень: за допомогою матриці, графа й розрізів. Перші два способи застосовують, щоб задати відношення на скінченних множинах, задання відношення розрізами може бути застосовано й до нескінченних множин.

Опишемо названі способи задання відношень.

2.2.1. Задання відношення за допомогою матриці. Нехай множина Ω складається з n елементів, R – подане на цій множині бінарне відношення. Пронумеруємо елементи множини Ω цілими числами від 1 до n. Для того, щоб задати відношення, побудуємо квадратну таблицю розміром $n \times n$. Її i-й рядок відповідає елементу x_i множини Ω, j-й стовпчик – елементу x_j з множини Ω. На перетині i-го рядка та j-го стовпчика ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & x_i\,R\,x_j, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

П р и к л а д 2.1. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$, R – відношення “більше” на множині X. Тоді його можна описати у вигляді матриці таким чином:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Задання відношення за допомогою графа. Для того, щоб задати відношення за допомогою графа, поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1,...,x_n$ (за будь-якою нумерацією).

Провести дугу від вершини x_i до x_j, можна тоді й тільки тоді, коли елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, коли ж $i = j$, то дуга (x_i, x_j) перетворюється на петлю при вершині x_i.

П р и к л а д 2.2. Задамо відношення з прикладу 2.1 за допомогою графа.

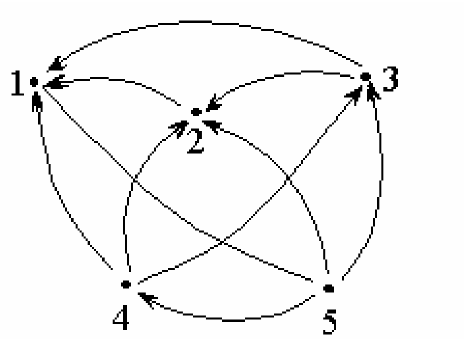


Рис. 2.1. Задання відношення “більше” на множині: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, за допомогою графа

Отже, коли задано будь-який орієнтований граф G, що має n вершин, і вибрано нумерацію на множині Ω, яка складається з n елементів, то тим самим на цій множині задано деяке відношення: $R = R(G)$, а саме, твердження $x_i \, R \, x_j$ буде справедливим тоді і тільки тоді, коли в графі G наявна дуга (x_i, x_j). Отже, граф виступає як геометричне зображення відношення.

2.2.3. Задання відношень за допомогою розрізів. Розглянемо відношення R на множині Ω.

В и з н а ч е н н я 2.2. *Верхнім розрізом* відношення (R,Ω) в елементі x, позначене через $R^+(x)$, називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких виконано умову: $(y,x) \in R$, тобто

$$R^+(x) = \{y \in \Omega | (y, x) \in R\}. \quad (2.1)$$

В и з н а ч е н н я 2.3. *Нижнім розрізом* $R^-(x)$ відношення (R,Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких $(x, y) \in R$, а саме:

$$R^-(x) = \{y \in \Omega | (x, y) \in R\}. \quad (2.2)$$

Отже, верхній розріз (множина R^{+}) являє собою множину всіх таких елементів *y*, що перебувають у відношенні R з фіксованим елементом x $(y\,R\,x)$. Нижній розріз (множина R^{-}) – це множина всіх таких елементів *y*, з якими фіксований елемент *x* перебуває у відношенні R $(x\,R\,\text{y})$.

Таким чином, для того, щоб задати відношення за допомогою розрізів, необхідно описати всі верхні або всі нижні його розрізи. Тобто відношення R буде задано, якщо для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^{+}(x)$ або для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^{-}(x)$.

П р и к л а д 2.3. Нехай задано множину: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Відношення R означає «бути дільником», тобто $x\,R\,y$, якщо x – дільник y. Задати це відношення можна в такий спосіб:

за допомогою верхніх розрізів:

$R^{+}(1) = \{1\}$,
$R^{+}(2) = \{1; 2\}$,
$R^{+}(3) = \{1; 3\}$,
$R^{+}(4) = \{1; 2; 4\}$,
$R^{+}(5) = \{1; 5\}$,
$R^{+}(6) = \{1; 2; 3; 6\}$
$R^{+}(7) = \{1; 7\}$,
$R^{+}(8) = \{1; 2; 4; 8\}$,
$R^{+}(9) = \{1; 3; 9\}$,
$R^{+}(10) = \{1; 2; 5; 10\}$;

або за допомогою нижніх розрізів:

$R^{-}(1) = \{1; 2, ..., 10\}$,
$R^{-}(2) = \{2; 4, ..., 10\}$,
$R^{-}(3) = \{3; 6; 9\}$,
$R^{-}(4) = \{4; 8\}$,
$R^{-}(5) = \{5; 10\}$,
$R^{-}(6) = \{6\}$,
$R^{-}(7) = \{7\}$,
$R^{-}(8) = \{8\}$,
$R^{-}(9) = \{9\}$,
$R^{-}(10) = \{10\}$.

Розглянемо відношення спеціального вигляду та описані вище способи їх задання.

Відношення називається *порожнім* (позначається $\varnothing$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$.

Для порожнього відношення справедливі такі твердження:

1. У матриці A ($\varnothing$) величини $a_{i,j}$ ($\varnothing$) = 0 для всіх значень i, j.
2. Граф $G(\varnothing)$ не має дуг.
3. $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \varnothing$ для всякого елемента $x \in \Omega$.

Відношення називається *повним* (позначається U), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$. Для повного відношення правильні такі ознаки:

1. У матриці $A(U)$ величини $a_{i,j}(U) = 1$ для всіх значень i, j.
2. У графі $G(U)$ дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *діагональним* або відношенням рівності (позначається E), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$, які складаються із збіжних елементів. Тобто $x\, E\, y$, якщо x та y – це один і той самий елемент множини Ω. Для діагонального відношення E мають місце такі твердження:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}(E) = \begin{cases} 1, \textit{якщо} & i = j, \\ 0 \ \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

2. У графі $G(E)$ наявні тільки петлі при вершинах, інші дуги відсутні.
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = x$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *антидіагональним* (позначається $\overline{E}$), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$, які складаються із незбіжних елементів. Для відношення $\overline{E}$ справедливі такі ознаки:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}(\overline{E}) = \begin{cases} 1, \textit{якщо} & i \neq j, \\ 0 \ \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

2. У графі $G(\overline{E})$ наявні всі дуги (x_i, x_j), якщо $i \neq j$ (відсутні тільки петлі при вершинах).
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

2.3. Операції над відношеннями

В и з н а ч е н н я 2.4. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1 \leq R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 $(R_1 < R_2)$, якщо $R_1 \leq R_2$ й $R_1 \neq R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1 \leq R_2$, то $a_{ij}(R_1) \leq a_{ij}(R_2)$, $i, j = \overline{1, n}$.

П р и к л а д 2.3. R_1 – відношення « $\leq$ » на множині дійсних чисел, R_2 – відношення « $<$ » на тій самій множині. Тоді $R_2 \leq R_1$.

В и з н а ч е н н я 2.5. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно пов'язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R} = \Omega^2 \setminus R . \qquad (2.3)$$

Тому в матричному записі $a_{ij}\left(\overline{R}\right)=1-a_{ij}(R),\ \ i,j=\overline{1,n}$.

У графі $G\left(\overline{R}\right)$ наявні ті і тільки ті дуги, що відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ справедливі такі твердження:

$$\overline{R}^{+}(x)=\Omega \setminus R^{+}(x),$$
$$\overline{R}^{-}(x)=\Omega \setminus R^{-}(x).$$

П р и к л а д 2.4. Нехай R – відношення «$\geq$», задане на множині дійсних чисел, тоді $\overline{R}$ – відношення «$<$», задане на тій самій множині.

В и з н а ч е н н я 2.6. *Перетином* відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2)=min\{a_{ij}(R_1),a_{ij}(R_2)\},\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.7. *Об'єднанням* відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

В матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2)=max\{a_{ij}(R_1),a_{ij}(R_2)\},\quad i,j=\overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.8. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x\,R^{-1}y \;\Leftrightarrow\; y\,R\;x . \qquad (2.4)$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}\left(R^{-1}\right)=a_{ji}(R).$$

П р и к л а д 2.5. Нехай R – відношення «$\geq$» на множині дійсних чисел. Тоді оберненим до нього відношенням R^{-1} буде відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел.

П р и к л а д 2.6. Нехай відношення R на множині: $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, задано матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно з визначенням 2.5 доповнення відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за визначенням 2.8, отже,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.9. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (позначається як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке будується за таким правилом:

$x\left(R_1 \cdot R_2\right) y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\, R_1\, z$ та $z\, R_2\, y$.

П р и к л а д 2.7. Розглянемо відношення R_1 та R_2, подані на множині дійсних чисел. Причому, R_1 – відношення «менше», R_2 – відношення «більше». Пара чисел $(x, y) \subset R_1 \cdot R_2$, коли існує число z, для якого виконано такі вимоги: $x < z$ та $z > y$. Вочевидь, ця умова виконується для всіх чисел x, y, а тому

$R_1 \cdot R_2$ – це повне відношення (тобто таке, яким пов'язані всі елементи даної множини).

П р и к л а д 2.8. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їх композицію.

Розв'язування

Згідно із визначенням 2.9 $x(R_1 \cdot R_2)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\, R_1\, z$ та $z\, R_2\, y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cdot R_2) = \max_{k=\overline{1,n}} \min\{a_{ik}(R_1), a_{kj}(R_2)\},$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

Тоді отримуємо, що

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.10. Відношення (R_1, Ω_1) називається *звуженням* відношення (R, Ω) на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subset \Omega$ та $R_1 = R \bigcap \Omega_1 \times \Omega_1$. Звуження відношення (R, Ω) на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

П р и к л а д 2.9. Відношення « >» на множині натуральних чисел є звуженням відношення « >» на множині дійсних чисел.

2.4. Властивості відношень

В и з н а ч е н н я 2.11. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\,R\,x$ для будь-якого елемента $x \in \Omega$.

Наприклад, відношення «бути схожими», «бути не старшим», «менше або дорівнює» – рефлексивні; «бути братом», «бути старшим», «більше» – не рефлексивні.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі твердження: $x \in R^{+}(x)$, $x \in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

В и з н а ч е н н я 2.12. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\,R\,y$ означає, що $x \neq y$ для $\forall x \in \Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i = j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x \notin R^{+}(x)$, $x \notin R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

В и з н а ч е н н я 2.13. Відношення R називається *симетричним*, якщо $R = R^{-1}$ $(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)$ для всіх $x \in \Omega$.

Симетричними є відношення рівності, «бути схожим», «вчитися в одній групі».

В и з н а ч е н н я 2.14. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\ R\ y$ та $y\ R\ x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j. Тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» та «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов'язкова умова асиметричності.

В и з н а ч е н н я 2.15. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути правильними одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

В и з н а ч е н н я 2.16. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (тобто, коли з тверджень $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає, що $x\,R\,y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Умова: $R^2 \leq R$, дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли відношення задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

В и з н а ч е н н я 2.17. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \bigcap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x\,R\,z_1$, $z_1\,R\,z_2$, ... , $z_{k-1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

В и з н а ч е н н я 2.18. Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

В и з н а ч е н н я 2.19. Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно одночасно транзитивне і від'ємно транзитивне.

Властивості ациклічності й транзитивності відіграють особливу роль у теорії прийняття рішень, оскільки вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт x у деякому сенсі не гірший за об'єкт y, а об'єкт y в тому самому сенсі не гірший за об'єкт z, то природно чекати, що об'єкт x буде не гіршим від об'єкта z (транзитивність), і в будь-якому разі об'єкт z не кращий за об'єкт x (ациклічність).

П р и к л а д 2.10. Визначити властивості такого відношення:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (тому що серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{13} = a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності обчислимо добуток даного відношення на себе, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$R^2 \not\subset R$, отже, вихідне відношення не є транзитивним.

2.5. Відношення еквівалентності, порядку, домінування й переваги

В и з н а ч е н н я 2.20. Відношення R є відношенням *еквівалентності* (*еквівалентністю*), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Позначимо його R_e , або символом $\sim$.

Прикладами відношеннями еквівалентності будуть такі:

– «учитися на одному курсі», «учитися в одній групі», задані на множині студентів факультету;

– «мати однакову остачу при діленні на 3» на множині натуральних чисел;

– відношення подібності на множині трикутників та інші.

Характерним для еквівалентності є те, що вона розподіляє елементи на класи. У першому прикладі – це курси або групи студентів факультету, у другому – множини чисел, що мають однакову остачу при діленні на 3, у третьому – множини подібних трикутників. Отже, задання еквівалентності на множині тісно пов’язане з її розбиттям на неперетинні підмножини. Розглянемо цю властивість еквівалентності докладніше.

Нехай задано деяке розбиття множини Ω. Тобто задано підмножини Ω_1, Ω_2,… Ω_N множини Ω, які задовольняють умову: $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i, j, = 1, 2, \ldots N$. Уведемо на множині Ω відношення R таким чином: $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина Ω_i, така, що $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$.

З а в д а н н я. Доведіть, що уведене таким чином відношення являє собою еквівалентність.

Як бачимо, задання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне розбиттю цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, будь-яке розбиття множини Ω визначає на ній відповідну йому еквівалентність.

В и з н а ч е н н я 2.21. Відношенням *нестрогого порядку* «$\leq$» (*нестрогим порядком*) називається відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

В и з н а ч е н н я 2.22. Відношенням *строгого порядку* «<» (*строгим порядком*) називається відношення, яке має властивості антирефлексивності, асиметричності й транзитивності.

Якщо на множині Ω задано відношення «$\le$», тобто деякий нестрогий порядок, то йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<» , що визначається за таким правилом: $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $x \le y$ та $x \ne y$. І навпаки, якщо «<» – відношення строгого порядку, задане на множині Ω, то йому можна поставити у відповідність відношення «$\le$» таким чином: $x \le y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Тобто за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Припустимо, що на деякій множині задано відношення порядку (для всіх, або деяких пар її елементів), тоді кажуть, що на цій множині задано *частковий порядок.*

Частковий порядок на множині Ω називається *лінійним порядком*, якщо для будь яких елементів $x, y \in \Omega$ справедливе одне з трьох тверджень: $x < y$, $x = y$ або $x > y$ (тобто ми можемо порівняти будь-які два елементи множини Ω).

В и з н а ч е н н я 2.23. Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності й асиметричності.

Будемо говорити, що елемент *x домінує* над елементом *y*, якщо *x* в якому-небудь сенсі кращий за *y*.

Таким чином, відношення строгого порядку являє собою окремий випадок відношення домінування, для якого характерна ще й транзитивність. У загальному ж сенсі при домінуванні як транзитивність так і ациклічність можуть не мати місця.

В и з н а ч е н н я 2.24. Два елементи можна порівняти за відношенням *R*, коли $x\,R\,y$ або $y\,R\,x$. В інших випадках елементи *непорівнянні*.

Якщо *R* – повне відношення на множині Ω, то будь-які два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо, які порядки можна задати на *m*-вимірному просторі E_m:

1. $a \ge b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \ge b_i$, $i = 1,2,\ldots m$;
2. $a \ge b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \ge b_i$, $i = 1,2,\ldots m$, та $a \ne b$;
3. $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i > b_i$, $i = 1,2,\ldots m$;
4. $a \mathrel{\overline{>}} b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або $a_i > b_i$ хоча б для одного значення $i \in \{1,2,\ldots m\}$;
5. $a = b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$, $i = 1,2,\ldots m$.

Відношення 1 являє собою частковий порядок, воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне).

Відношення 2 і 3 – це строгі часткові порядки. Вони антирефлексивні, асиметричні й транзитивні.

Відношення 4 є рефлексивним, але воно не буде ні симетричним ні транзитивним.

Зв'язок між цими відношеннями схематично зображено на рис. 2.2.

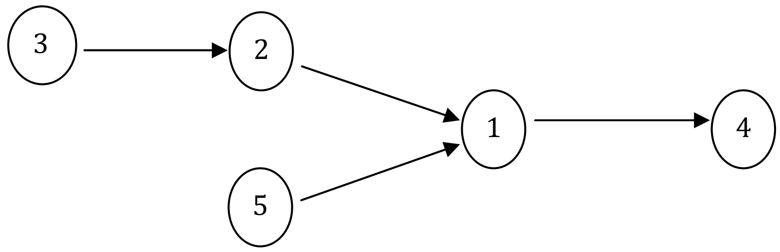


Рис. 2.2. Схема взаємозв'язку між відношеннями у просторі E_m

Для опису переваги зазвичай використовують такі бінарні відношення, задані на множині альтернатив Ω: строгої переваги, байдужості та нестрогої переваги.

Відношення строгої переваги R^S означає, що один об'єкт (строго) переважає над іншим (тобто один об'єкт кращий від іншого).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і коли обмежити вибір цими двома об'єктами, не важливо, який з них буде вибрано.

Відношення нестрогої переваги означає, що один об'єкт не менш переважний, ніж інший (тобто один об'єкт не гірший від іншого).

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів було визначено відношення нестрогої переваги R на множині допустимих альтернатив X.

Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $(x, y) \subset X \times X$ можлива одна із таких ситуацій:

1) об'єкт x не гірший від об'єкта y, тобто $x > y$, інакше кажучи $(x, y) \in R$;

2) об'єкт y не гірший за об'єкт x, тобто $y \geq x$, або $(y, x) \in R$;

3) об'єкти x та y не порівнянні між собою, тобто $(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$.

Ця інформація дозволяє звузити клас варіантів раціонального вибору, включивши в нього лише ті альтернативи, над якими не домінує жодна інша альтернатива множини X.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відповідні відношенню переваги R відношення строгої переваги R^S і відношення однаковості (байдужості) I.

Будемо говорити, що альтернатива x строго краща від альтернативи y (має строгу перевагу над альтернативою y), якщо одночасно $x \geq y$ та $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \quad \text{і} \quad (y, x) \notin R .$$

Сукупність усіх таких пар назвемо *відношенням строгої переваги* R^S на множині X.

Легко переконатись, що це відношення має задовольняти такі властивості:

1) антирефлексивність,

2) асиметричність.

Для більш компактного запису відношення R^S використаємо визначення відношення R^{-1}, оберненого до *R*, а саме, врахуємо, що $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Тоді відношення строгої переваги може бути записано в такому вигляді:

$$R^S = R \setminus R^{-1}.$$

Відношення однаковості, що відповідає відношенню переваги *R*, можна визначити таким чином: $(x, y) \in R^I$ тоді і тільки тоді, коли або не виконується жодна з умов: $x \geq y$ і $y \geq x$, або одночасно мають місце обидві: $x \geq y$ та $y \geq x$. Інакше кажучи, $(x, y) \in R^I$, коли інформація, яку ми маємо, недостатня для обґрунтованого вибору між альтернативами *x* та *y*.

Математично відношення R^I можна записати такою формулою:

$$R^I = \left[(X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1}\right)\right] \cup \left(R \bigcap R^{-1}\right).$$

Легко побачити, що чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужчим виявляється відношення однаковості.

П р и к л а д 2.11. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, на ній подано відношення нестрогої переваги *R*:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому відношення еквівалентності, строгої переваги, однаковості.

Розв'язування

Згідно з визначенням, $R^e = R \bigcap R^{-1}$. Побудуємо спочатку відношення R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо відношення еквівалентності, а саме:

$$R^e = R \bigcap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як видно з цієї матриці, елементи x_1, x_4 еквівалентні.

Тепер відповідно до визначення знайдемо відношення R^S таким чином:

$$R^S = R \setminus R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що елемент x_1 строго переважає елемент x_2, елемент x_2 в свою чергу переважніший за x_4, елемент x_3 переважає x_2, а x_4 кращий від x_3 відповідно.

Відношення байдужості знаходимо за такою формулою:

$$R^I = \left[(X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1} \right) \right] \cup \left(R \bigcap R^{-1} \right).$$

Матриця цього відношення набуває такого вигляду:

$$R^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це відношення означає, що серед елементів $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_3, x_4\}$ можна вибирати будь-який, тобто інформації для того, щоб здійснити обгрунтований вибір між елементами кожної пари, недостатньо.

Коли $(x, y) \in R^S$, то будемо говорити, що альтернатива x домінує над альтернативою y $(x > y)$.

В и з н а ч е н н я 2.25. Альтернативу $x \in X$ назвемо *недомінованою* на множині X за відношенням *R*, якщо $(y, x) \notin R^S$, $\forall y \in X$. Тобто якщо альтернатива *x* – недомінована, то в множині *X* не має жодної альтернативи, яка домінувала б над альтернативою *x*.

У наведеному вище прикладі недомінованою виявилась альтернатива x_1.

Якщо деякі альтернативи у певному сенсі недоміновані, то їх вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах наявної інформації.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги дозволяє звузити клас раціональних рішень на множині X до множини недомінованих альтернатив, яка має такий вигляд:

$$X^{н.д.} = \left\{ x \;\middle|\; x \in X,\ (y,x) \in R \setminus R^{-1}, \forall x \in X \right\}.$$

2.6. Поняття *R*-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів

Розгянутий вище матеріал мав на меті дати формальний опис попарного порівняння альтернатив, що є необхідною умовою для виділення найкращого елемента (або кількох кращих) з всієї множини альтернатив *X*. Тепер формалізуємо саме поняття «кращий», використавши для цього апарат бінарних відношень.

Елемент x^* множини X будемо називати *найкращим* за відношенням *R*, якщо $x^* \, R \, x$ справедливе для всякого елемента $x \in X$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* за відношенням *R*, якщо $x \, R \, x_*$ для всіх $x \in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не є повним, як у наведеному нижче прикладі.

П р и к л а д 2.12. Розглянемо множину: $B = \{a,b,c\}$, і відношення *R* на ній, яке подано таким чином: $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$. Визначити найкращі та найгірші за даним відношенням елементи множини *B*, якщо такі існують.

Зобразимо описане відношення за допомогою графа (див. рис. 2.3)

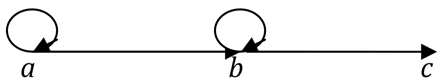


Рис. 2.3. Граф відношення *R* (до прикладу 2.12)

Як бачимо, це відношення не має найкращих і найгірших елементів, бо елементи *a* та *c* непорівнянні.

Уведемо поняття максимального елемента.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^S на множині *X*, якщо для абиякого елемента $x \in X$ має місце твердження $x_{\max} \, R^S \, x$, або $x_{\max}$ непорівняний з x.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних за відношенням R елементів множини X позначається $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* відносно R^S на множині X, якщо для всіх $x \in X$ або $x\, R^S x_{\min}$, або x непорівняний з $x_{\min}$. Отже не існує елемента $x \in X$ який був би гіршим за $x_{\min}$; немає жодного елемента x, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

У наведеному вище прикладі максимальним буде елемент a, мінімальним – елемент c.

Множина мінімальних за відношенням R елементів множини X позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, протилежна ситуація не буде справедливою.

Отже, якщо треба обрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природним буде її вибір із множини максимальних (недомінованих) альтернатив.

П р и к л а д 2.13. Нехай відношення R подано у вигляді графа G (рис. 2.4). Знайти найкращі, найгірші, максимальні та мінімальні за відношенням R^S елементи.

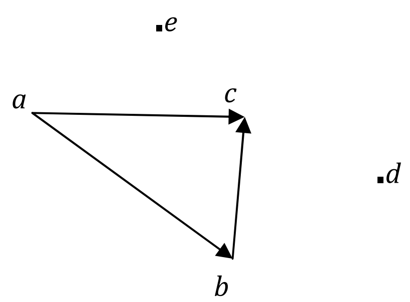


Рис. 2.4. Граф відношення R (до прикладу 2.13)

Найкращих елементів не існує, оскільки елемент e не порівнянний з іншими; найгірших елементів також немає. Максимальними за відношенням R^S є елементи a, d, e. Мінімальними – c, d, e.

Зверніть увагу, що елементи d, e – максимальні й мінімальні одночасно. Це пояснюється тим, що вони непорівнянні з іншими, тобто у нас не має інформації про переваги цих елементів.

Розв'язування

Множина $max_R X$ максимальних за відношенням R об'єктів множини X є *внутрішньо стійкою* в тому сенсі, що коли $a, b \in \max_R X$, то не може виконуватись жодне з тверджень: $a\,R\,b$ та $b\,R\,a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного немаксимального елемента $a \in X$ знайдеться більш переважний від нього елемент серед максимальних. Тобто буде справедливим твердження: $a^0 R\, a$ для деякого елемента $a^0 \in \max_R X$.

Внутрішньо та зовнішньо стійка множина $\max_R X$ називається *ядром* відношення R у множині X.

Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $\max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент має бути вибраний саме з цієї множини. Якщо ж вона не є зовнішньо стійкою, то для обмеження нею вибору немає підстав.

Якщо виникає потреба вибрати не один, а кілька кращих елементів, або впорядкувати всі об'єкти за перевагами, то поняття максимального елемента і ядра відношення втрачають своє значення.

П р и к л а д 2.14. Припустимо, що множина $B = \{a, b, c\}$, і на ній задане відношення: $R = \{(a, c)\}$. Тут множина максимальних елементів $\max_R B = \{a, b\}$. Однак при виборі двох кращих елементів не можна не брати до уваги наявність елемента *c,* оскільки коли з'явиться інформація, що він переважніший, ніж *b*, то шуканими будуть елементи *a* та *c*.

Числова функція φ, визначена на множині *X* називається *зростаючою* (*неспадною*) за відношенням *R*, коли з умови $a\,R\,b$ випливає, що $\varphi(a) > \varphi(b)$ [відповідно $\varphi(a) \geq \varphi(b)$] для всіх елементів $a, b \in X$.

Має місце таке твердження.

Лема 2.1. Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ надає неспадній за відношенням *R* на множині *B* функції Ψ найбільшого на ній значення. Для того, щоб об'єкт a^0 був максимальним за відношенням *R* на множині *B*, достатньо виконання однієї з таких умов:

1. Ψ зростає за відношенням *R* на множині *B.*
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму функції Ψ на множині *B.*

Доведення

Припустимо, що елемент a^0 не є максимальним за відношенням *R*. Тоді в множині *B* знайдеться елемент *a*, який переважає a^0 за відношенням *R*, тобто $a\,R\,a^0$. Але тоді має виконуватись нерівність: $\Psi(a) \geq \Psi(a^0)$, причому ця нерівність строга, якщо функція Ψ зростає за відношенням *R* на множині *B*. Але строга нерівність суперечить тому, що елемент a^0 – точка максимуму функції Ψ, а нестрога нерівність – тому що a^0 являє собою єдину точку максимуму Ψ на множині *B*. Доведення закінчено.

При моделюванні реальних систем можуть мати місце такі ситуації, коли в ОПР або в експертів немає чіткого уявлення про переваги між альтернативами, але їм конче необхідно подати конкретні висновки про те, які з альтернатив є кращими. У цьому випадку експерти змушені певним чином "огрубляти" свої знання та уявлення, і відповідна математична модель буде менш адекватною реальній ситуації.

Більш гнучким способом формалізації таких уявлень є можливість для експертів визначити міру свого переконання в перевазі альтернативи використовуючи числа з інтервалу [0;1], тобто описати свої думки за допомогою *нечіткого відношення переваги*, коли кожній парі альтернатив (x, y) відповідає число з інтервалу [0,1], яке відображає міру правильності переваги: $x \geq y$. Методи прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги буде розглянуто далі в розділі 5.

Зауважимо, що характерна особливість «мови» бінарних відношень – це припущення про те, що результат порівняння за перевагами двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак у деяких випадках така залежність має місце, і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, основана на використанні функцій вибору.

2.7. Поняття функції вибору. Класи функцій вибору

У реальних ситуаціях вибору на множині альтернатив Ω особа, що приймає рішення, вибирає деяку альтернативу керуючись своєю особистою думкою про кращі альтернативи. У різних людей уявлення про одну й ту саму ситуацію може істотно відрізнятися, але логічно припустити, що в схожих ситуаціях одна й та сама людина буде діяти однаково, і тому є можливість сформулювати правило, за яким буде здійснено вибір.

Розглянемо таку ситуацію: нехай Ω – множина альтернатив, серед яких проводиться вибір, а множини альтернатив *X* являють собою її підмножини.

Позначимо через $C(X)$ множину альтернатив, яку виділяє ОПР, з множини *X*.

Наприклад, Ω – множина всіх груп у вищому навчальному закладі, *X* – довільна підмножина Ω (це може бути множина груп ІІІ курсу, множина груп факультету і под.). Вважатимемо, що $C(X)$ – найкраща група з множини груп *X*. Незалежно від того, хто приймає рішення (вибирає найкращу групу) природно вважати, що найкраща група закладу буде найкращою групою свого курсу, свого факультету тощо.

Математично це можна записати так: якщо $X' \subset X$ і $x \in C(X) \bigcap X'$, то $x \in C(X')$.

Тобто всілякий вибір у конкретній ситуації можна вважати логічно обґрунтованим, якщо відомі рішення в інших ситуаціях, пов’язаних із даною. Це означає, що множини $C(X)$ виявляються залежними при різних множинах *X*, якщо вибір здійснює одна й та сама ОПР. Для формалізації цієї залежності використовують поняття функції вибору.

Функцією вибору $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

$C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з множини *X*.

Зауважимо, що в цьому визначенні немає ніяких апріорних обмежень на функції вибору, зокрема не виключена можливість пустого вибору, тобто ситуації, коли $C(X) = \varnothing$.

Ця ситуація називається *відмовою від вибору*.

Її прикладом може бути випадок, коли покупець йде з магазину, нічого не купивши.

В окремому випадку, зокрема, коли відоме відношення строгої переваги R на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = \max_R X.$$

П р и к л а д 2.15. Нехай на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, матрицею задано відношення переваги R, а саме:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідну цьому відношенню функцію вибору.

Розв'язування

Побудуємо відношення строгої переваги: $R^S = R \setminus R^{-1}$, яке відповідає даному відношенню:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер задамо функцію вибору за таким правилом: $C(X) = \max_R X$. Для цього розглянемо всі можливі підмножини даної множини $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і визначимо максимальні елементи за звуженням відношення R на відповідні підмножини.

Розглянемо спочатку одноелементні підмножини. Вибір із одного елемента буде тим самим елементом, тому

$$C(\{x_1\}) = \max_R \{x_1\} = x_1,$$

$$C(\{x_2\}) = \max_R \{x_2\} = x_2,$$

$$C(\{x_3\}) = \max_R \{x_3\} = x_3,$$

$$C(\{x_4\}) = \max_R \{x_4\} = x_4.$$

Далі розглянемо двоелементні підмножини. Звуження даного відношення на множину $\{x_1, x_2\}$ дає можливість зробити висновок, що елемент x_1 більш переважний, ніж x_2, тому максимальним елементом для цієї множини буде x_1, і тоді

$$C\left(\left\{x_1, x_2\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_2\right\}=x_1 .$$

Аналогічно для інших двоелементних множин

$$C\left(\left\{x_1, x_3\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_3\right\}=\left\{x_1, x_3\right\},$$

$$C\left(\left\{x_1, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_4\right\}=\left\{x_1, x_4\right\},$$

$$C\left(\left\{x_2, x_3\right\}\right)=\max_R\left\{x_2, x_3\right\}=\left\{x_3\right\},$$

$$C\left(\left\{x_2, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_2, x_4\right\}=\left\{x_2, x_4\right\},$$

$$C\left(\left\{x_3, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_3, x_4\right\}=\left\{x_4\right\},$$

і так само

$$C\left(\left\{x_1, x_2, x_3\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_2, x_3\right\}=\left\{x_1, x_3\right\},$$

$$C\left(\left\{x_1, x_2, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_2, x_4\right\}=\left\{x_1, x_4\right\},$$

$$C\left(\left\{x_1, x_3, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_3, x_4\right\}=\left\{x_1, x_4\right\},$$

$$C\left(\left\{x_2, x_3, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_2, x_3, x_4\right\}=\left\{x_4\right\},$$

$$C(X)=C\left(\left\{x_1, x_2, x_3, x_4\right\}\right)=\max_R\left\{x_1, x_2, x_3, x_4\right\}=\left\{x_1, x_4\right\} .$$

Отже, функцію вибору задано.

Зауважимо, що існують також інші способи задання функцій вибору.

Таким чином, за відношенням переваги ми можемо побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відповідне їй відношення переваги.

П р и к л а д 2.16. Функцію вибору задано таким чином:

$C(\{x_1\})=x_1$, $C(\{x_2\})=x_2$, $C(\{x_3\})=x_3$,

$C(\{x_1, x_2\})=x_1$, $C(\{x_1, x_3\})==\{x_1, x_3\}$,

$C(\{x_2, x_3\})=\{x_2\}$, $C(\{x_1, x_2, x_3\})=\{x_1, x_3\}$.

Як бачимо, дві останні умови суперечать одна одній, тому відношення побудувати неможливо.

П р и к л а д 2.17. Функцію вибору задано таким чином:

$C(\{x_1\})=x_1$, $C(\{x_2\})=x_2$, $C(\{x_3\})=x_3$,

$C(\{x_1, x_2\})=x_1$, $C(\{x_1, x_3\})==\{x_1, x_3\}$, $C(\{x_2, x_3\})=\{x_3\}$,

$C(\{x_1, x_2, x_3\})=\{x_1, x_3\}$.

Відповідним даній функції буде таке відношення строгої переваги:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

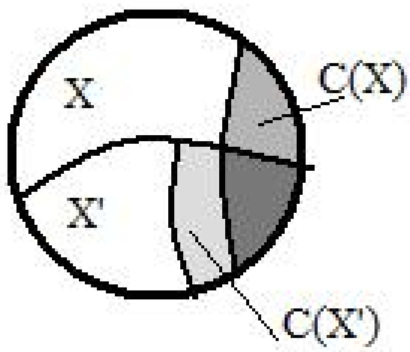
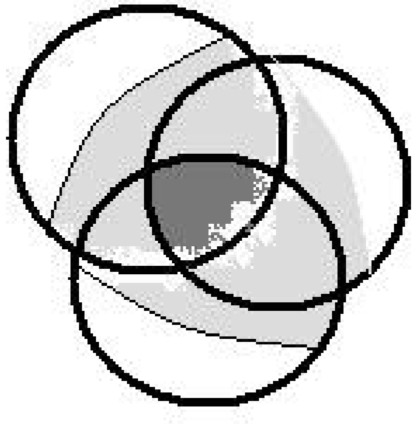
Функції вибору зручно класифікувати відповідно до тих умов, які зазвичай використовують при їх вивченні.

Приклади таких умов наведено в таблиці 2.1.

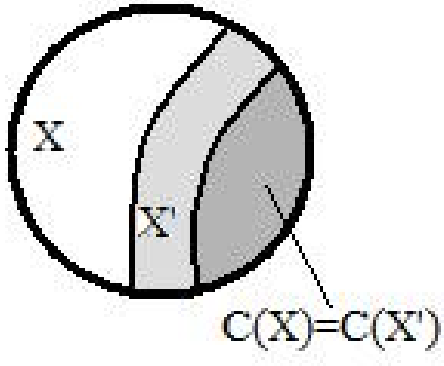
Таблиця 2.1

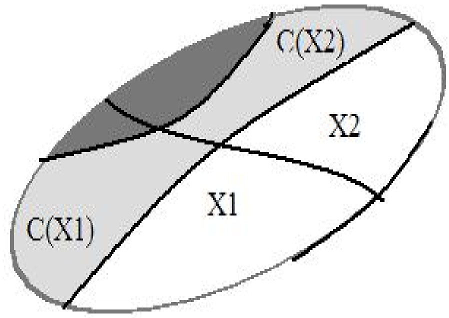
Класифікація функцій вибору

<table>
<tr><th colspan="2">1. Умова наслідування</th></tr>
<tr><td>Якщо $X' \subset X$, то $C(X') \supset C(X) \cap X'$.

Сенс цієї умови такий: якщо розглянути вибір з довільної множини і вибір з деякої її підмножини, то всі альтернативи, які були вибрані з вихідної множини і ввійшли до підмножини, що розглядається, будуть також вибрані з цієї підмножини. Наприклад, якщо проводився міжнародний конкурс і переможцем став проект з Болгарії, то він повинен бути і серед переможців болгарського конкурсу</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Умова згоди</th></tr>
<tr><td>$\bigcap_i C(X_i) \subset C\left(\bigcup_i X_i\right)$
Ця умова означає, що альтернативи, які були вибрані з кожної множини X_i, будуть вибрані також і з їх об’єднання</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3. Умова незалежності від нехтуваних альтернатив</td></tr>
<tr><td>Якщо $C(X) \subset X' \subset X$, то $C(X) = C(X')$

Зміст цієї умови такий: коли розглянути довільну множину X', яка містить усі альтернативи, вибрані з множини X, то вибір з X' буде такий самий, як і вибір з множини X
Наприклад, коли під час конкурсу проект x не був включений до кращих, то в іншому конкурсі, де беруть участь усі ті проекти, що й у попередньому, за винятком x, склад переможців не зміниться</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Умова Плотта (незалежність від вибору шляху)</td></tr>
<tr><td>$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2))$

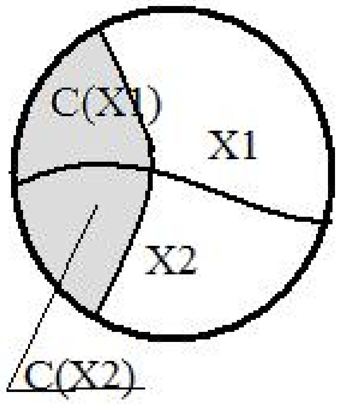
Умова Плотта передбачає, що вибір альтернатив із об’єднання виборів, які в свою чергу зроблені з кожної множини, точно відповідає вибору із об’єднання виборів, які зроблені з кожної множини окремо
Наприклад, для проведення міжнародного конкурсу можна спочатку відібрати переможців національних конкурсів, а потім уже влаштовувати змагання серед них</td><td>
</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 2.1.

<table>
<tr><td colspan="2">5. Умова суматорності</td></tr>
<tr><td>

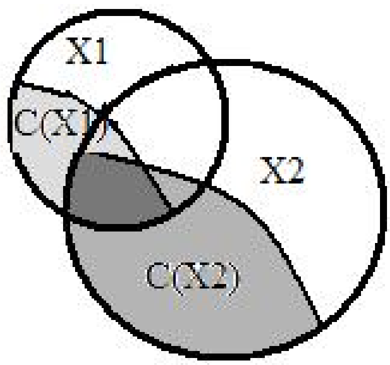
$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2).$$

Ця умова означає, що вибір з об’єднання множин дорівнює об’єднанню виборів з кожної множини окремо

Наприклад, на районній дошці пошани відзначено людей, обраних у різних організаціях
</td><td>


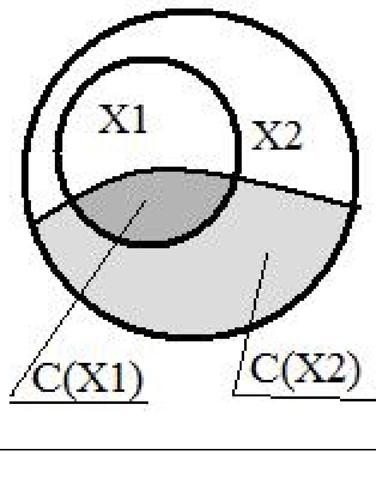
</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Умова мультиплікаторності</td></tr>
<tr><td>

$$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2).$$

За цієї умови вибір із перетину двох множин буде дорівнювати перетину виборів
</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Умови монотонності</td></tr>
<tr><td>

Якщо $X' \subset X$, то $C(X') \supset C(X)$,

тобто вибір з більш широкої множини буде ширшим
</td><td>


</td></tr>
</table>

2.8. Функції корисності

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна використовувати деяку кількісну міру їхніх властивостей, за значеннями якої можна порівняти альтернативи між собою та вибрати найкращу. Правила (процедури) прийняття рішень на основі цієї міри використовують теорію корисності, розроблену Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном [14]. Математичною основою даної теорії виступає система аксіом, у яких стверджується існування деякої міри цінності, що дозволяє впорядкувати альтернативи (результати рішень). Така міра називається *функцією корисності*, або *корисністю* результатів.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах:

1. Результат (альтернатива) x_i є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ – значення корисності альтернатив x_i і x_j відповідно.

2. Якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$ (транзитивність).

3. Якщо x_1, x_2 – деякі альтернативи, то $u(x_1,\ x_2) = u(x_1) + u(x_2)$ (адитивність).

Аналогічно, коли є n результатів $x_1, x_2, \dots\ x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x).$$

Іншими словами, корисність кількох результатів, які досягаються одночасно дорівнює сумі значень їхніх корисностей.

Визначимо із застосуванням понять функції корисності (цільової функції) $f(x)$ такі відношення на множині альтернатив X:

– відношення слабкої (нестрогої) переваги «не гірше», яке позначається символом $\geq$,

– відношення рівноцінності, що позначається символом $\sim$,

– відношення строгої переваги, що позначається символом $>$.

В и з н а ч е н н я. Для двох альтернатив x_1, x_2 можна стверджувати, що

$x_1 \geq x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) > f(x_2)$.

Символи $\geq$ і $<$ при порівнянні значень цільових функцій для різних альтернатив беруться залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Методика визначення корисності можливих результатів розроблена в посібнику [1].

Розглянемо кілька варіантів застосування цієї методики в різних ситуаціях.

I. Наявні тільки два результати.

У цьому разі методика обчислення корисності така:

1. Встановлюємо, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Припустимо, що $x_1 > x_2$, тобто альтернатива x_1 краща, ніж альтернатива x_2.

2. Потім визначаємо таку ймовірність α, при якій досягнення результату x_1 буде еквівалентне результату x_2, отриманому з імовірністю 1.

3. Оцінюємо співвідношення між значеннями корисності результатів x_1 і x_2.

Для цього приймемо, що корисність $u(x_2) = 1$,

тоді $\alpha u(x_1) = u(x_2)$; $u(x_1) = 1/\alpha$.

II. Існує n можливих альтернатив $x_1, x_2, \ldots x_n$, між якими встановлено переваги: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

У цьому випадку методика визначення корисності така:

1. Визначаємо величину α_1 із умови, що $\alpha_1 u(x_1) = u(x_2)$.

2. Аналогічно обчислюємо, що

$$\alpha_2 u(x_2) = u(x_3);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1}) = u(x_n).$$

3. Вважаючи, що корисність найменш переважного результату дорівнює 1, знаходимо значення корисності для інших результатів, а саме:

$$u(x_n) = 1;$$

$$u(x_{n-1}) = 1/\alpha_{n-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u(x_1) = \frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1}.$$

III. Наявні якісні критерії. За таких умов маємо інформацію про переваги між окремими альтернативами та їхніми групами. Тоді може застосовуватися методика, побудована на алгоритмі, який запропонували Р. Акоф і Р. Черчмен [1].

Припустимо, що існує n альтернатив: $x_1, x_2, \ldots x_n$. Методика визначення корисності передбачає такі етапи:

1. Упорядковують усі альтернативи за зменшенням переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їхню перевагу над окремими результатами $x_1, x_2, \ldots x_n$ (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

1	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_n$	$n + 1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$	$n + 2$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2}$	$n + 3$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-3}$
…	. . .	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Інформацію про переваги результатів зазвичай отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремим результам $u_0(x_1)$, $u_0(x_2)$, ... , $u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення табл. 2.2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

У протилежному випадку проводять корекцію корисності так, щоб дане співвідношення задовольнялось.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції триває до тих пір, поки не утвориться система оцінок $u^*(x_1)$, $u^*(x_2)$, … $u^*(x_n)$, яка задовольнятиме всі перелічені в таблиці співвідношення. Корекцію належить проводити таким чином, щоб було необхідно змінювати мінімальну кількість оцінок результатів.

Приклад 2.18. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \ldots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;
3) $x_1 > x_2 + x_3 + x_5$;
4) $x_1 > x_2 + x_3$;
5) $x_2 > x_3 + x_4 + x_5$;
6) $x_2 > x_3 + x_4$;
7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно оцінити корисність результатів так, щоб задовольнити всі нерівності.

Для розв’язування цієї задачі підставляємо початкові оцінки в нерівність 7, тобто

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5\,.$$

Отже, нерівність 7 не задовольняється.

Змінимо корисність результату x_3: $u_1(x_3) = 3$, і перевіримо нерівність 6. Отже,

$$u_0(x_2) = 4 < u_1(x_3) + u_0(x_4) = 4{,}5.$$

Ця нерівність також не задовольняється.

Приймемо, що $u_1(x_2) = 5$. Тоді нерівність 5 задовольняється.

Звертаємося до нерівності 4:

$$u_0(x_1) = 7 < u_1(x_2) + u_1(x_3) = 8.$$

Вона не виконується.

Тому приймемо, що $u_1(x_1) = 8{,}5$. Тепер нерівності 3, 2, 1 задовольняються.

Перевіряємо ще раз нерівності 6 і 7 при змінених значеннях корисності альтернатив:

$$5 > 3 + 1{,}5,$$
$$3 > 1{,}5 + 1.$$

Таким чином, обидві нерівності виконуються.

Отже, випишемо остаточні оцінки корисності результатів:

$u_1(x_1) = 8{,}5$; $u_1(x_2) = 5$; $u_1(x_3) = 3$; $u_1(x_4) = 1{,}5$; $u_1(x_5) = 1$.

Зауважимо, що описану методику визначення корисності можна застосовувати, коли кількість результатів обмежена, а саме $n < 6$ або 7.

У випадках, коли $n > 7$, запропоновано модифікований спосіб корекції оцінок [1].

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5 – 7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад x_1. Потім приписують початкові значення корисності всім альтернативам, причому корисність спільного результату x_1 має бути однаковою у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності окремо до кожної з підмножин, враховуючи обмеження: $u(x_1) = const$. Унаслідок цього отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин $u(x_1)$.

Після того, як відповідно до описаної методики функцію корисності всіх альтернатив визначено, вирішальне правило вибору найкращої з них в умовах визначеності записується таким чином: знайти таку альтернативу x_0, щоб $f(x_0) = \max f(x)$

Очевидно, що цільова функція, на підставі якої проводиться вибір шуканої альтернативи, може бути побудована різними способами.

В и з н а ч е н н я. Цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що характеризують одну й ту саму властивість рішення, яке вибирається, і визначені на одній множині допустимих альтернатив, називатимемо *еквівалентними*, якщо вони задають на ній одне й те саме відношення слабкої переваги, тобто, коли для будь-яких двох альтернатив x_1 і x_2 з твердження: $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$, випливає, що $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ і, навпаки, коли з твердження: $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, виходить, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$. Тут індекс f_i над знаком слабкої переваги вказує на функцію, за допомогою якої це відношення задано.

З даного визначення виходить, що еквівалентні цільові функції задають на множині X одні й ті самі відношення строгої переваги й еквівалентності. Доведена нижче проста теорема встановлює, які властивості мають задовольняти еквівалентні цільові функції [12].

Т е о р е м а 2.1. Для того, щоб цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ були еквівалентними, достатнє існування монотонного перетворення $w(z)$, здатного переводити область значення функції $f_2(x)$ в область значень функції $f_1(x)$. Тобто $f_1(x) = w(f_2(x))$ для всієї множини допустимих альтернатив. При цьому, якщо обидві цільові функції максимізувалися, то перетворення $w(z)$ повинне являти собою монотонно зростаючу функцію, а якщо ні, то $w(z)$ має бути монотонно спадною функцією.

Доведення

Розглянемо випадок, коли критерії максимізуються і перетворення $w(z)$ – монотонно зростаюче, оскільки інші випадки доводяться аналогічно. Тоді, якщо $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, тобто $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$, то $w(f_2(x_1)) \geq w(f_2(x_2))$. Отже, $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$.

Твердження: $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, випливає з того, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ через монотонність оберненого перетворення.

Теорему доведено.

Наведемо приклади еквівалентних максимізованих цільових функцій:

$$f_1(x) = af_2(x) + b, \quad \text{де } a > 0,$$

$$f_1(x) = \ln f_2(x) + b, \quad \text{якщо } f_2(x) > 0.$$

Висновки

Поняття бінарного відношення дозволяє формалізувати операції попарного порівняння об’єктів й математично обґрунтувати вибір одного або кількох об’єктів у тому разі, коли неможливо задати критерій на множині альтернатив, але можна оцінити переваги однієї альтернативи над іншою.

Бінарні відношення можна задавати за допомогою матриці, графа, або розрізів. До них застосовують операції перетину, об’єднання, доповнення та інші.

У теорії прийняття рішень важливе значення мають такі властивості відношень як рефлексивність, симетричність (асиметричність), транзитивність.

Функції вибору використовуються для задання правила вибору альтернатив. Залежно від природи задачі такі функції можуть мати різні властивості. Користуючись даним відношенням переваги, можна побудувати відповідну йому функцію вибору, але не навпаки.

Функції корисності являють собою кількісну міру, за допомогою якої можна порівняти альтернативи між собою.

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Як задати відношення за допомогою розрізів?
6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.
7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?
8. Які математичні операції виконують над відношеннями?
9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?
11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від'ємно транзитивними?
12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?
13. Які властивості характерні для відношення переваги?
14. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.
15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за даним відношенням переваги?
16. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?
17. Дайте визначення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.
18. Як за даним відношенням нестрогої переваги побудувати відповідні йому відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності?
19. Що означає властивість зовнішньої та внутрішньої стійкості множини?
20. Дайте визначення функції вибору?
21. Як можна побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги?
22. Чи завжди за даною функцією вибору можна побудувати відповідне їй відношення переваги?
23. За якими властивостями класифікують функції вибору?
24. Наведіть приклади умов, за якими класифікують функції вибору.
25. Що означає умова наслідування? Суматорності? Плотта?
26. Що являє собою функція корисності?

27. Яким чином визначають корисність альтернатив за даними перевагами на множині альтернатив?

28. Сформулюйте алгоритм побудови функції корисності на множині альтернатив, коли присутні якісні критерії.

29. Які цільові функції називають еквівалентними?

30. Які властивості мають задовольняти еквівалентні цільові функції ?

31. Наведіть приклади еквівалентних перетворень цільових функцій.

Завдання до розділу 2

Завдання А

1. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Задати відношення «менше або дорівнює» на множині цілих чисел від одного до десяти за допомогою матриці.

4. На множині: $X = \{a, b, c, d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.5). Задати його *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

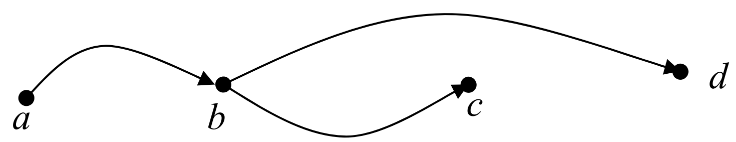


Рис. 2.5. Граф відношення R

5. На множині: $X=\{a,b,c,d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.6). Задати його *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

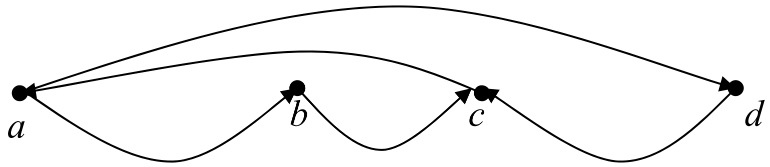


Рис. 2.6. Граф відношення R

6. Перевірити властивості записаних нижче відношень.

$$a)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix};\qquad б)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix};$$

$$в)\ R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix};\qquad г)\ R=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

7. Користуючись умовами завдання 6, $a-г$, визначити додаткові та обернені відношення.

8. Визначити перетин та об'єднання поданих нижче відношень.

$$R_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix};\qquad R_2=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

9. Користуючись умовами завдання 6, $a-г$, побудувати відношення строгої переваги, еквівалентності, байдужості.

10. Знайти найбільший, найменший, максимальний і мінімальний елементи за відношеннями із завдвння 6, $a-г$ (якщо такі існують).

11. Побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги.

$$a)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix};\qquad б)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

12. Оцінити корисність результатів за даними перевагами, якщо $x_1 > x_2 > \ldots > x_5$, і задано переваги результатів: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1{,}5$.

13. Побудувати відношення переваги, відповідне записаній нижче функції вибору (якщо це можливо).

$$a)\ C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{b\}, C(\{a,c\})=\{a\},$$
$$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{c,b\};$$

$$б)\ C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{a\}, C(\{a,c\})=\{a\},$$
$$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{a\}.$$

14. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \ldots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 10$; $u_0(x_2) = 5$; $u_0(x_3) = 3$; $u_0(x_4) = 2$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4$;

$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_5$;

$x_1 \ge x_2 + x_3$;

$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5$;

$x_2 \ge x_3 + x_4$;

$x_3 \le x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів.

15. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \ldots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 8$; $u_0(x_2) = 6$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_5$;
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_3 \leq x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів вибору.

Завдання В

1. Опишіть за допомогою матриці відношення «об'єкт x вживає в їжу об'єкт y» на множині A = {людина, тигр, шуліка, щука, баран, газель, пшениця, кабан, конюшина, польова миша, змія, жолудь, карась}. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентністю? Відношенням порядку?

2. Задайте за допомогою матриці або графа відношення «операція x має виконуватись після операції y» на множині ремонтних робіт. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентністю? Відношенням порядку?

РОЗДІЛ 3

БАГАТОКРИТЕРІЙНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета розділу: вивчення особливостей задач прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв; оволодіння методами багатокритерійної оптимізації.

3.1. Загальна постановка багатокритерійної задачі оптимізації

Як вже було сказано вище, однією із проблем у прийнятті рішень є наявність великого числа критеріїв, які не завжди погоджені між собою, що зумовлює побудову відповідних математичних моделей і застосування певних математичних методів. Одним із способів формалізації таких проблем є використання багатокритерійних оптимізаційних моделей.

У даному розділі будуть розглянуті скінченновимірні багатокритерійні задачі, тобто ті, в яких множина допустимих альтернатив X належить скінченновимірному простору E_m і задано векторний критерій:

$$f(x) = (f_1(x), \dots f_M(x)).$$

Множина X зазвичай виділяється з деякої ширшої множини D за допомогою спеціальних обмежень, які найчастіше подають у вигляді нерівностей, а саме:

$$X = \{x \in D | g_1(x) \geq 0, \dots, g_k(x) \geq 0\},$$

де g_i ($i = 1, 2, \dots k$) – числові функції, визначені на множині D, що утворюють вектор-функцію обмежень.

Залежно від структури множини X (або D) і властивостей цільових функцій $f_j(x)$ (а також g_i) для зручності дослідження виділяють різні класи багатокритерійних задач. Якщо множина X скінченна, то задача називається скінченною, коли ж ця множина скінченна або ж лічена, то задачі відносять до дискретних, якщо ж усі компоненти x_i альтернатив $x \in X$ є цілими числами – то задачу називають цілочисловою. Відповідно визначаються булеві, а також лінійні, увігнуті та інші задачі багатокритерійної оптимізації.

Ми розглянемо таку задачу.

Нехай задано множину допустимих альтернатив X, властивості яких описуються сукупністю цільових функцій: $f = \{f_i(x)\}$, $i \in I$, $x \in X$, де I – множина індексів, $I = \{1, 2, \dots, M\}$. Вважатимемо, що m перших цільових функцій максимізуються, а інші $(M - m)$ мінімізуються. Позначимо через I_1 множину індексів, для яких цільові функції максимізуються, тобто $I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$; через I_2 – множину індексів, для яких цільові функції мінімізуються:

$I_2 = \{m+1, m+2, \dots M\}$. Тоді багатокритерійна задача може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max,\ i \in I_1, \\ &f_i(x) \to \min,\ i \in I_2, \\ &\quad x \in X. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2. Поняття ефективної альтернативи

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації (3.1).

З огляду на цільові функції, альтернативи x_1 і x_2 можна порівнювати таким чином:

– альтернатива x_1 не гірша за альтернативу x_2 ($x_1 \geq x_2$), коли

$$\begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2),\ i \in I_1, \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2),\ i \in I_2; \end{cases}$$

– альтернатива x_1 еквівалентна альтернативі x_2 ($x_1 \sim x_2$), коли

$$f_i(x_1) = f_i(x_2), \forall i \in I;$$

– альтернатива x_1 строго переважає альтернативу x_2 ($x_1 > x_2$), коли

$$\begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2), i \in I_1, \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2), i \in I_2, \end{cases}$$

і хоча б одна нерівність виконується як строга.

Вочевидь, не всяку пару альтернатив можна порівняти між собою.

П р и к л а д 3.1. Нехай $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, причому функція $f_1(x)$ максимізується, а функція $f_2(x)$ мінімізується на дискретній множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. У табл. 3.1 подано значення цільових функцій на множині X.

Таблиця 3.1

Значення функції: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
x_1	7	5
x_2	6	2
x_3	5	4
x_4	6	6
x_5	4	1

У цій задачі $x_1 > x_4$, $x_2 > x_4$, $x_2 > x_3$, а про інші альтернативи взагалі нічого не можна сказати.

В и з н а ч е н н я 3.1. Альтернатива x_0 називається *ефективною*, якщо на множині допустимих альтернатив X не існує жодної альтернативи x, яка задовольняє такі нерівності:

$$f_i(x) \geq f_i(x_0), \quad i \in I_1,$$
$$f_i(x) \leq f_i(x_0), \quad i \in I_2,$$

причому хоча б одна з них виконується як строга.

Іншими словами, ніяка інша альтернатива не може «поліпшити» значення жодної цільової функції, не погіршивши при цьому значення деякої іншої. Тому іноді ефективні альтернативи називають *непокращуваними* за множиною цілей, або *оптимальними за Парето*.

Серед множини оптимальних за Парето альтернатив і слід шукати розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації. Проте, яку саме альтернативу потрібно вибирати, сказати не можна, необхідне додаткове дослідження.

З визначення ефективних альтернатив випливає, що вони можуть бути непорівнянними між собою. У зв’язку з цим справедливе таке твердження:

Л е м а 3.1. Дві ефективні альтернативи або еквівалентні, або непорівнянні між собою.

Доведення

Якщо x_0 – ефективна альтернатива, то для будь-якої альтернативи x', порівнянної із x_0 за множиною цільових функцій або справедливими будуть n рівностей: $f_i(x') = f_i(x_0), \forall i \in I$, і тоді альтернатива x' еквівалентна x_0, або знайдеться такий індекс $s \in I$, для якого $f_S(x_0) \geq f_S(x')$, коли $s \in I_1$, або ж $f_S(x_0) \leq f_S(x')$, якщо $s \in I_2$, тоді альтернатива x', не може бути ефективною.

Лему доведено.

Із цієї леми виходить, що коли існує лише одна ефективна альтернатива, то вона дає оптимум кожному з критеріїв.

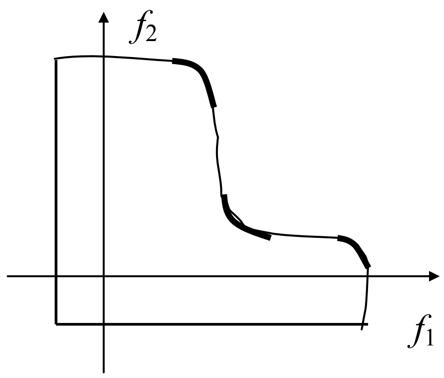


Рис. 3.1. Графічне подання множини допустимих рішень та множини Парето

За наявності двох або трьох критеріїв множину ефективних альтернатив можна зобразити графічно.

Наприклад, розглянемо задачу з двома критеріями, кожен з яких максимізується, а множина допустимих альтернатив у критерійному просторі має вигляд, зображений на рис. 3.1.

Множина Парето в цьому випадку (якщо $m = 2$) є, образно кажучи, північно-східною межею множини допустимих рішень, без тих її частин, які паралельні осямкоординат або лежать у досить глибоких і крутих провалах (на рисунку цю множину показано товстою лінією).

В и з н а ч е н н я 3.2. Альтернатива (рішення) називається *слабко ефективною*, а також *слабко оптимальною за Парето*, або *оптимальною за Слейтером*, коли не існує іншої альтернативи (рішення), для якої

$$f_i(x) > f_i(x_0), \quad i \in I_1,$$
$$f_i(x) < f_i(x_0), \quad i \in I_2.$$

Слабко ефективна альтернатива являє собою оцінку, максимальну за відношенням « > », на відміну від ефективних альтернатив, які максимальні за відношенням « ≥ ».

Зауважимо, що усяка ефективна альтернатива є і слабко ефективною, і, відповідно, множина ефективних альтернатив $P(Y)$ міститься в множині слабко ефективних альтернатив $S(Y)$.

Множина ефективних альтернатив $P(Y)$ [слабко ефективних альтернатив $S(Y)$] називається *зовнішньо стійкою*, якщо для будь-якого елемента $y \in Y \backslash (P(Y)$ $[y \in Y \backslash S(Y)]$, знайдеться така оцінка $y^0 \in P(Y)$ [відповідно $y^0 \in S(Y)$], для якої $y^0 \geq y$ $(y^0 > y)$.

Якщо множина Y складається із скінченного числа оцінок, то множини $P(Y)$ і $S(Y)$ будуть зовнішньо стійкими. Коли ж множина Y нескінченна, то множини ефективних альтернатив $P(Y)$ і $S(Y)$ можуть і не бути зовнішньо стійкими. Проте при звичайних для оптимізаційних задач припущеннях (X – компакт, функція f – напівнеперервна зверху) ці множини будуть зовнішньо стійкими.

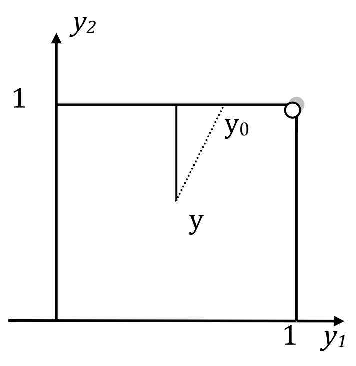


Рис. 3. 2. Графічне подання множини альтернатив, оптимальних за Слейтером

П р и к л а д 3.2. Нехай Y – одиничний квадрат, з якого «вилучено» праву верхню вершину (рис. 3.2).

Для такої множини Y множина $P(Y)$ вочевидь пуста, а множина $S(Y)$ утворюється правою і верхньою сторонами квадрата [без точки (1,1)]. Множина $S(Y)$ очевидно зовнішньо стійка, оскільки кожній точці $y \in Y$, в якій $y_1, y_2 < 1$, можна поставити у відповідність, наприклад, точку: $y_0 = ((y_1 + 1)/2, 1)$, причому $y_0 > y$.

Визначення (слабко) ефективного розв’язку є статичним у тому сенсі, що воно ґрунтується на попарному порівнянні допустимих розв’язків і не виявляє спільності з питанням про те, чи можливо «плавно» перейти від одного розв'язку до іншого, кращого, з додатною швидкістю збільшуючи кожен критерій. А саме можливість такого переходу в деяких моделях виявляється дуже цікавою.

Прикладом може слугувати економічна модель чистого обміну, коли кожен споживач бере участь в обміні, прагнучи придбати сукупність товарів найбільшої корисності, тобто максимізувати свою функцію цінності. Такого роду моделі досліджували у XIX столітті Ф. Ешварт і В. Парето. Ефективним в цій моделі є стан (розподіл товарів між споживачами), який не може бути покращений шляхом перерозподілу товарів між учасниками обміну без «ураження інтересів» деяких інших учасників.

Таким чином, оптимальність за Парето відображає ідею економічної рівноваги: коли стан економіки не є ефективним, то буде відбуватися обмін, який зумовить перехід до ефективного стану.

3.3. Теоретичне й практичне значення ефективного розв'язку

Поняття ефективного розв'язку являє собою пряме узагальнення поняття точки максимуму числової функції на випадок, коли розглядається кілька функцій.

Як правило, у прикладних задачах множина таких альтернатив виявляється не порожньою і, більше того, зовнішньо стійкою, а тому оптимальні розв'язки мають бути вибрані саме серед ефективних альтернатив.

Проте, якщо в однокритеріальній задачі за оптимальний можна брати будь-який розв'язок, внаслідок якого критерій досягає максимуму (оскільки оптимальні розв'язки еквівалентні), то в багатокритерійній задачі, як правило, множина ефективних альтернатив виявляється дуже багатою на нееквівалентні (і за змістом суттєво різні) розв'язки, а тому осмислений вибір оптимального розв'язку неможливий без залучення більш повної інформації про переваги альтернатив.

Тим не менше поняття ефективного розв'язку відіграє найважливішу роль у теорії багатокритерійної оптимізації.

Хоча ефективний розв'язок зазвичай буває далеко не єдиним, але все ж таки множина ефективних альтернатив значно вужча, ніж вихідна множина всіх розв'язків. З огляду на це побудова множини ефективних розв'язків (або їх оцінок) є першим етапом здійснення великої кількості процедур і методів багатокритерійної оптимізації.

Оскільки в разі наявності лише двох або трьох критеріїв множину ефективних оцінок можна зобразити графічно, то при аналізі дво-, а інколи й трикритерійних задач нерідко найзручніше вибирати оптимальний розв'язок безпосередньо на основі розгляду графіка ефективних оцінок.

На такому підході базується, наприклад, метод «вартість – ефективність».

Один з варіантів цього методу полягає в тому, що

– кожен зразок оцінюється за двома критеріями: вартості виробництва B і ефективності вирішення поставлених завдань E, значення цих критеріїв розраховуються за спеціально розрахованими методиками;

– будується графік оцінок, відповідних усім даним зразкам, і в ньому виділяються зразки, серед яких вибирається оптимальний;

– остаточний вибір здійснює ОПР на підставі аналізу графіка, оскільки він показує, якою ціною досягається підвищення ефективності.

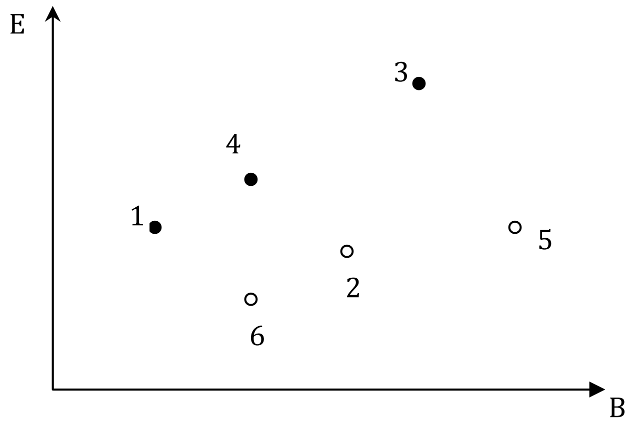


Рис. 3.3. Графік оцінок проектів у методі «вартість – ефективність»

П р и к л а д 3.3. Нехай необхідно порівняти 6 проектів за критеріями вартості та ефективності. Графічне зображення оцінок проектів наведено на рис. 3.3.

Оскільки критерій B (вартість) бажано мінімізувати, а критерій E (ефективність) – максимізувати, то, як видно з графіку, перевагу мають проекти 1, 4, 3.

Звуження множини вибору до множини ефективних розв'язків (або деякої її підмножини) важливе не лише саме по собі, але ще й тому, що на вужчій підмножині можуть виконуватися різного роду припущення, які спрощують подальший аналіз. Крім того ефективні розв'язки можуть мати цікаві й практично важливі властивості, яких немає в інших.

П р и к л а д 3.4. Нехай існує n галузей, зайнятих виробництвом n предметів (продуктів) споживання. Кожна галузь може виробляти один продукт, але за допомогою кількох виробничих процесів.

Позначимо через Λ_i множину виробничих процесів, доступних i-й галузі, множину Λ_i будемо вважати скінченною.

Якщо прийняти загальну кількість трудових ресурсів за одиницю, то інтенсивність роботи i-ї галузі можна охарактеризувати величиною: $u_i \geq 0$, яка показує частку наявних трудових ресурсів, що використовуються в цій галузі. Таким чином, вектор: $u = (u_1, u_2, \dots , u_n)$, описує ефективність роботи всіх галузей. Ясно, що при повному використанні трудових ресурсів $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$. Якщо складові вектора u невід'мні та в сумі дорівнюють одиниці, то його називають здійсненним.

Нехай $a_{ij}^{\lambda_k}$ – кількість j-го продукту, що виробляється i-ю галуззю, коли вона функціонує з одиничним рівнем інтенсивності ($u_i = 1$) і при цьому застосовується процес $\lambda_k \in \Lambda_i$.

Припускаємо, що $a_{ij}^{\lambda_k} \le 0$, коли $i \ne j$, але $a_{ii}^{\lambda_k} > 0$. Від'ємні значення $a_{ij}^{\lambda_k}$ інтерпретуються як кількість матеріалів (продуктів), що витрачаються у виробництві.

Висловлене припущення про знаки означає, що кожна галузь може використовувати всі види матеріалів, у той час як виробляє лише один продукт.

Вектор: $a_{ij}^{\lambda_k} = (a_{i_1}^{\lambda_k}, a_{i_2}^{\lambda_k}, \dots a_{i_n}^{\lambda_k})$, називається вектором-процесом i-ї галузі.

Кожному виробничому процесу x_k відповідає свій вектор-процес.

Коли для кожної галузі вибрано виробничий процес, тобто якщо зафіксовано набір процесів: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, то чистий випуск продукту j усією системою $c_j = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^{\lambda_i}$.

Квадратну матрицю, рядками якої є вектор-процеси, $a_i^{\lambda_k}$, $i = 1, 2, \dots n$, позначатимемо через A^λ. Тоді j-та компонента вектора: $c = uA^\lambda$, являє собою чистий випуск продукту j для фіксованого набору процесів λ і здійсненного вектора u.

Нехай A – множина матриць A^λ, кожна з яких відповідає певному набору процесів: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, де $\lambda_i \in \Lambda_i$. Вектор (векторна оцінка): $c = (c_1, c_2 \dots, c_n)$ називається реалізованим (або досяжним), якщо $c = uA^\lambda$ для деякої матриці A^λ і здійсненного вектора u.

Особливо цікавими є реалізовані вектори: $c = (c_1, c_2 \dots, c_n)$, які мають додатні компоненти. Дійсно, якщо існує реалізований вектор c, причому $c_j > 0$, $j = 1, 2, \dots n$, то це свідчить про можливість так організувати виробництво всіх продуктів, що кожна галузь випускатиме продукту більше, ніж його потрібно для споживання всіма іншими галузями.

Розглянемо геометричну інтерпретацію цієї моделі.

Кожен вектор-процес $a_{ij}^{\lambda_k}$ можна подати у вигляді точки простору E^n. Матриці A^λ відповідає n таких точок (по одній для кожної галузі).

Вектор $c = uA^\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i_1}^{\lambda_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} u_i a_{i_n}^{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\lambda_i}$, тобто він являє собою точку опуклої оболонки n векторів-процесів.

Таким чином, множина реалізованих векторів c є об'єднанням опуклих оболонок векторів $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \dots, a_n^{\lambda_n}$, які створюють матриці $A^\lambda \in A$.

Для ілюстрації розглянемо простий приклад з числовими даними.

П р и к л а д 3.5. Нехай у наведеній вище задачі $n = 2$,

$\Lambda_1 = \{1,2\}$, $\Lambda_2 = \{1,2,3\}$,

$a_1^1 = (2; -1)$, $a_1^2 = (3/2; -2)$,

$a_2^1 = (-1; 1/2)$, $a_2^2 = (-2; 3)$, $a_2^3 = (-4; 4)$.

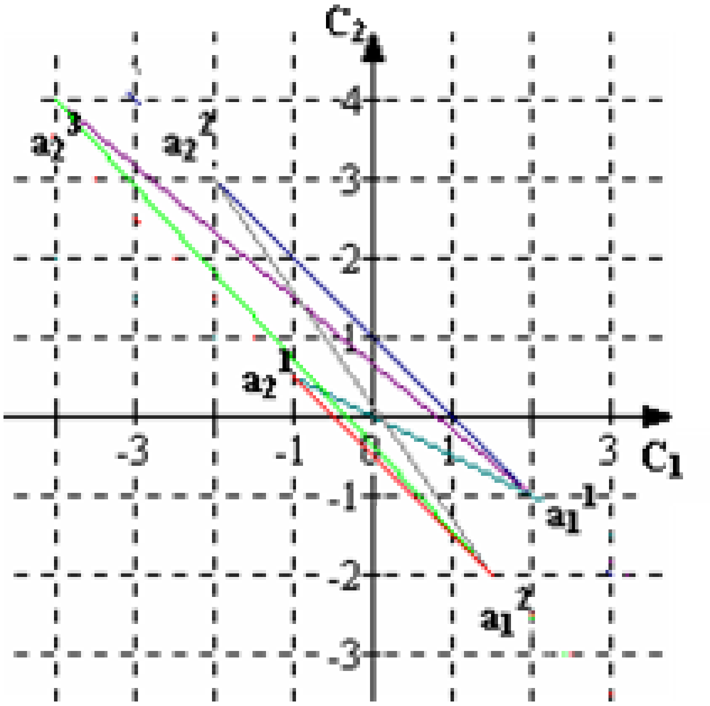


Рис. 3.4. Графічна інтерпретація прикладу 3.5

Задача визначення найкращого варіанта використання виробничих і трудових ресурсів полягає в тому, щоб забезпечити якомога більший випуск усіх продуктів, що виробляються галузями.

Розв'язування

Зобразимо на графіку (рис. 3.4) точки, які відповідають векторам-процесам $a_i^{\lambda_i}$. У нашому прикладі вони такі: $a_1^1 = (2; -1)$, $a_1^2 = (3/2; -2)$, $a_2^1 = (-1; 1/2)$, $a_2^2 = (-2; 3)$, $a_2^3 = (-4; 4)$.

Опуклим оболонкам цих векторів (тобто векторам c) відповідають відрізки, які з'єднують ці точки.

Реалізованим векторам c відповідають ті відрізки, що розташовані в першій чверті координатної площини.

Очевидно, що максимум випуску продукції буде досягнуто, якщо $\lambda' = (1, 2)$, тобто перша галузь використовує перший процес, а друга галузь – другий процес. Тоді будь-який ефективний план виробництва можна визначити парою (λ', u), тут $u = (u_1, u_2)$, $0{,}5 < u_1 < 0{,}75$, $u_2 = 1 - u_1$ (ці умови забезпечують реалізованість вектора c).

Таким чином, план $x = \{\lambda, u\}$ (тут λ – виробничі процеси, u – здійсненний вектор), характеризується векторним критерієм: $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$, де c_j – чистий випуск j-го продукту.

План x^* називається *ефективним*, якщо не існує здійсненного вектора u і матриці A^*, для яких $c_j(x) \geq c_j(x^*)$, причому принаймні одна з цих нерівностей строга. Вектор $c(x^*)$, що відповідає ефективному плану x^*, також називається *ефективним.*

Структура ефективних векторів із додатними компонентами характеризується таким твердженням: *якщо існує реалізований вектор із додатними компонентами, то всі ефективні вектори з додатними компонентами лежать в опуклій оболонці векторів-процесів* $a_{ij}^{\lambda_k}$, *які утворюють матрицю* $A' \in A$, *і кожна точка цієї опуклої оболонки, що розташована в додатному октанті, є ефективним вектором.*

Тобто, коли є допустимий план, що забезпечує надлишковий випуск кожного продукту, то для кожної галузі існує певний виробничий процес (він входить у набір λ'), який дозволяє отримати всі ефективні вектори з додатними компонентами лише за рахунок перерозподілу трудових ресурсів.

Іншими словами, будь-який ефективний план, який забезпечує надлишковий випуск кожного продукту, або має вигляд (λ', u), де u – деякий здійсненний вектор, або еквівалентний плану названого виду.

3.4. Властивості ефективних альтернатив і способи їх пошуку

Візьмемо для розгляду задачу багатокритерійної оптимізації:

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max,\ i \in I_1, \\ &f_i(x) \to \min,\ i \in I_2, \\ &x \in X, \end{aligned}$$

і дослідимо властивості множини ефективних альтернатив, але формулюватимемо їх не для первинного векторного критерію, а для деякого безрозмірного векторного критерію, що складається з монотонних перетворень окремих функцій, які зводять їх до безрозмірного вигляду і до задачі мінімізації (способи такого перетворення буде розглянуто нижче в цьому пункті та в п. 3.6). Отже, маємо таку вихідну задачу:

$$\begin{aligned} &W_i(x) \to \min,\ i \in I, \\ &x \in X, \end{aligned}$$

при цьому всі функції $W_i(x) \ge 0$ і зведені до безрозмірного вигляду.

Т е о р е м а 3.1. Якщо множина допустимих альтернатив X випукла, а цільові функції $W_i(f(x)), i \in I$, увігнуті на допустимій множині X, то для будь-якої ефективної альтернативи x^* існує такий числовий вектор:

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_M),\ \ c_i \ge 0,\ \ \sum_{i \in I} c_i = 1,$$

при якому лінійний критерій

$$F(x) = \sum_{i \in I} c_i W_i(x)\,, \tag{3.2}$$

досягає мінімуму на множині X, коли $x = x^*$.

Т е о р е м а 3.2. Нехай x^* – ефективна альтернатива множини цільових функцій: $W = \{W_i(x)\}$, $W_i(x) \ge 0$, $i \in I$. Тоді існує такий числовий вектор: $c = (c_1, c_2, \ldots, c_M)$, $c_i \ge 0$, $\sum_{i \in I} c_i = 1$, для якого критерій

$$F(x) = \max_{i \in I} c_i W_i(x), \tag{3.3}$$

досягає мінімуму на множині допустимих альтернатив X, якщо $x = x^*$.

За компонент c_i можна, наприклад, узяти числа $\frac{\lambda_i}{\lambda}$, тут $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$, $\lambda_i = \frac{1}{w_i(x^*)}$.

Т е о р е м а 3.3. Якщо x^* – ефективна альтернатива множини ціольових функцій f, то для будь-якого індекса $l \in I_1$

$$\begin{aligned} & f_l(x^*) = \max_x f_l(x), \\ & f_i(x^*) \geq f_i(x), \ \forall i \in I_1,\ i \neq l, \\ & f_i(x^*) \leq f_i(x), \ \forall i \in I_2, \end{aligned}$$

або для будь-якого індекса $l \in I_2$

$$\begin{aligned} & f_l(x^*) = \min_x f_l(x), \\ & f_i(x^*) \geq f_i(x), \ \forall i \in I_1, \\ & f_i(x^*) \leq f_i(x), \ \forall i \in I_2, i \neq l. \end{aligned}$$

Згідно з описаними властивостями можна побудувати три способи визначення ефективних альтернатив.

Розглянемо ці способи.

Перший спосіб (*базується на теоремі 3.1*)

Пошук усієї множини ефективних альтернатив X^* зводиться до розв'язування такої задачі параметричного програмування:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} c_i W_i(x), \tag{3.4}$$

$$\gamma_i \in \Gamma^+ = \left\{ \gamma_i : \gamma_i \geq 0, \forall i \in I, \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \gamma_i = 1 \right\}, \tag{3.5}$$

де для всіх індексів $i \in I$ функції $W_i(x)$ є увігнутими та неперервними, а область допустимих альтернатив X являє собою випуклу замкнену множину.

У тому випадку, коли функції не є увігнутими або множина допустимих альтернатив не випукла, задача (3.4), (3.5) не дозволяє відшукати всієї множини альтернатив.

П р и к л а д 3.6. Нехай область допустимих альтернатив задано обмеженнями такого вигляду:

$$X = \left\{ x_i \geq 0, i = 1,2; 0{,}5 \leq x_1 \leq 3; 0{,}5 \leq x_2 \leq 5; x_2 \geq 4 - x_1^2 \right\},$$

а цільові функції

$$x_1 \to \min,$$
$$x_2 \to \max.$$

У даній задачі множиною ефективних альтернатив є дуга AB (див. рис. 3.5). Проте, оскільки область не випукла, то внаслідок мінімізації критерію: $F(x) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$, на множині X, $\forall$ $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, буде знайдено не більше двох ефективних альтернатив.

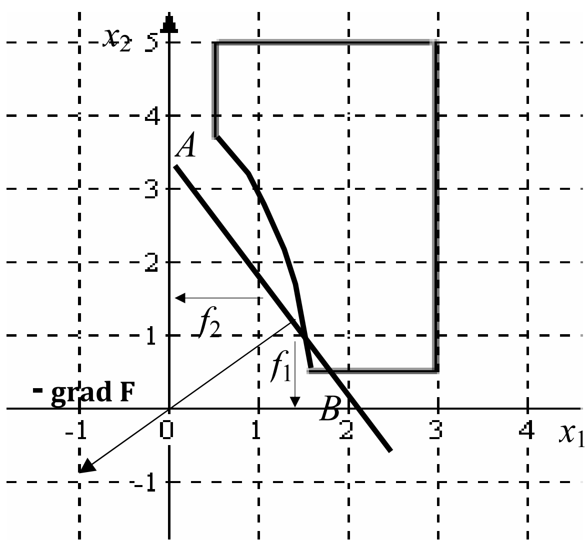


Рис. 3.5. Графічна ілюстрація до прикладу 3.6

Другий спосіб (*базується на теоремі 3.2*)

Пошук усієї множини X^* зводиться до розв'язування такої задачі параметричного програмування:

$$\min_{x \in X} \max_{i \in I} \gamma_i W_i(x), \tag{3.6}$$

$$\gamma_i \in \Gamma^+ = \left\{ \gamma_i : \gamma_i \geq 0, \forall i \in I, \sum_{i \in I} \gamma_i = 1 \right\}, \tag{3.7}$$

де $W_i(x)$ – монотонні перетворення цільової функції $f_i(x)$.

У даному випадку вимоги увігнутості й неперервності для цільових функцій а також опуклості множини допустимих альтернатив не висуваються, але слід враховувати, що в разі існування дійсного розв'язку задачі (3.6), (3.7) не всі знайдені альтернативи можуть бути ефективними.

П р и к л а д 3.7. Нехай задано дискретну множину допустимих альтернатив: $X = \{ x_j,\ j = 1, \dots, 5 \}$. Значення цільових функцій $w_1(x)$, $w_2(x)$ наведено в табл. 3.2. Обидві функції мінімізуються.

Таблиця 3.2

x_j \ w_i	$w_1(x)$	$w_2(x)$
x_1	2	5
x_2	4	3
x_3	4	2
x_4	5	2
x_5	6	1

Тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}5$, мінімум критерію (3.6) досягається на альтернативах x_2, x_3, тобто розв'язок не буде єдиним. Проте очевидно, що $x_3 > x_2$, оскільки x_3 має краще значення другої функції, тобто ефективним є лише варіант x_3.

На відміну від першого способу цей метод є більш загальним (до цільових функцій та множини альтернатив висуваються менші вимоги), але тоді, коли задача (3.6), (3.7) має кілька розв'язків, може бути потрібний додатковий аналіз.

Помітимо, що для різних монотонних перетворень W_i при одних і тих самих значеннях параметрів будуть знайдені різні ефективні альтернативи. Проте, якщо перебрати всі значення параметрів $\gamma_i \in \Gamma^+$, отримані множини ефективних альтернатив будуть однаковими.

П р и к л а д 3.8. Нехай задано множину допустимих альтернатив: $X = \{x_i \ge 0, i = 1{,}2; x_1 + x_2 \le 1000, 5x_1 + 3x_2 \ge 3500 \}$ (її зображено на рис. 3.6) і цільові функції:

$$f_1(x) = 37{,}5x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$f_2(x) = 50x_1 + 25x_2 \to \min.$$

Визначимо множину ефективних альтернатив, використовуючи різні перетворення цільових функцій.

Розглянемо два перетворення:

$$w^1 = \left\{ \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max} - f_1^{\min}}; \frac{f_2(x) - f_2^{\min}(x)}{f_2^{\max} - f_2^{\min}} \right\} \quad \text{та} \quad w^2 = \left\{ \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max}}; \frac{f_2(x) - f_2^{\min}(x)}{f_2^{\min}} \right\},$$

де $f_i^{\max}, f_i^{\min}$ – максимальні й мінімальні значення функцій f_i відповідно.

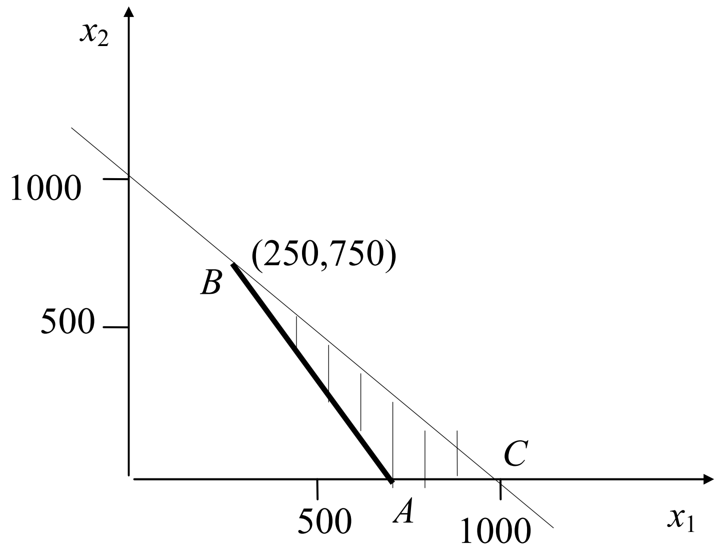


Рис. 3.6. Графічна інтерпретація прикладу 3.8

Знайдемо максимальні й мінімальні значення функцій f_1 і f_2 на множині обмежень, а саме:

$f_1^{\max}$ досягається в точці (1000,0), $f_1^{\max} = 37500$,

$f_1^{\min}$ досягається в точці (700,0), $f_1^{\min} = 26250$,

$f_2^{\max}$ у точці (1000,0), $f_2^{\max} = 50000$,

$f_2^{\min}$ у точці (250, 750), $f_2^{\min} = 31250$.

Побудуємо цільові функції відповідно до перетворень w^1 і w^2, тобто

$$w^1 = \left\{ \frac{37500 - 37{,}5x1 - 30x2}{11250}; \frac{50x1 + 25x2 - 31250}{18750} \right\},$$

$$w^2 = \left\{ \frac{37500 - 37{,}5x1 - 30x2}{37500}; \frac{50x1 + 25x2 - 31250}{31{,}250} \right\}$$

і розглянемо задачі параметричного програмування:

$$\min_{\substack{x\in X \\ \gamma\in\Gamma^+}} \sum_{i=1,2}\gamma_i w_i^1(x) \tag{3.8}$$

та

$$\min_{\substack{x\in X \\ \gamma\in\Gamma^+}} \sum_{i=1,2}\gamma_i w_i^2(x)\,. \tag{3.9}$$

При цьому, якщо $\gamma_1 = 0{,}8$, $\gamma_2 = 0{,}2$, то мінімум критерію w^1 (задача 3.8) досягається в точці C, а мінімум критерію w^2 (задача 3.9) – в усіх точках ребра BC (рис. 3.6).

Коли ж $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 1/3$, то мінімум критерію w^1 (задача 3.9) досягається в усіх точках ребра BC, а мінімум критерію w^2 (задача 3.6) – у точці B (рис. 3.6).

Третій спосіб (*базується на теоремі 3.3*)

Множина ефективних альтернатив для цільових функцій f може бути знайдена шляхом розв'язування такої задачі параметричного програмування відносно параметрів $z\in Z^{M-1}$:

$$\begin{aligned}&\max_x f_l(x),\\ &f_i(x)\ge z_i,\ \forall i\in I_1,\ i\ne l,\\ &f_i(x)\le z_i,\ \forall i\in I_2,\\ &x\in X,\end{aligned}$$

де Z^{M-1} – $(M-1)$-вимірний паралелепіпед;
$Z^{M-1}=\prod\limits_{\substack{i\in I_1\\ i\ne l}}[f_{i(\min)}, f_i^{opt}]\times\prod\limits_{i\in I_2}[f_i^{opt}, f_{i(\max)}]$, тут f_i^{opt} – оптимальне значення відповідної цільової функції, $f_{i(min)}$ – найменше значення цільової функції, якщо вона максимізується, і $f_{i(max)}$ – найбільше значення цільової функцій, якщо вона мінімізується.

Зауважимо, що за основну оптимізовану функцію необхідно вибирати таку цільову функцію, оптимум якої досягається тільки в ефективних точках.

Як і в другому випадку, не всі альтернативи, отримані цим способом, можуть бути ефективними, а тому виникає потреба в додатковому аналізі.

3.5. Загальна проблема пошуку компромісних рішень

Після побудови множини ефективних альтернатив X^*, групі експертів надається право вибору найкращого в деякому розумінні рішення. Вони видають свої рекомендації ОПР і вона або робить вибір одного із запропонованих ними рішень, або бере їхній усереднений результат.

Вибір з множини ефективних рішень єдиного рішення являє собою досить складну задачу, оскільки не виключена можливість, що альтернатива, яке не оптимальна за жодним з критеріїв, буде найкращою в конкретній ситуації прийняття рішення.

Розглянемо можливі принципи компромісу, які застосовуються при виборі рішення з множини ефективних альтернатив. При цьому вважатимемо, що розглядається нормальна задача без пріоритетів, тобто критерії рівноцінні й нормалізовані. Будемо також вважати, що всі критерії максимізуються на множині допустимих альтернатив.

3.5.1. Принципи рівномірності

У тому разі, коли критерії нормалізовані й однакові за важливістю, цілком природним є прагнення рівномірно та гармонійно підвищувати якість усіх часткових (локальних) критеріїв. Саме в цьому й полягає сенс принципу рівномірності, але в той же час сам принцип може бути реалізований різними способами. Розглянемо деякі із них, вважаючи, що альтернативи оцінюються за n критеріями: $y_1, y_2, \dots y_n$ і всі критерії максимізуються.

Принцип рівності. Згідно з цим принципом максимізація здійснюється за умови, що рівні всіх критеріїв однакові. Тобто вибирається ефективна альтернатива, для якої значення всіх критеріїв рівні: $y_1 = y_2 = \dots = y_n$. Проте цей принцип є надмірно жорстким. Він може приводити до вибору альтернатив, які лежать за межами області компромісу і навіть зовсім не давати розв'язків, особливо коли йдеться про дискретні задачі. Приклади таких ситуацій у разі максимізації двох критеріїв: y_1, y_2 зображено на рис. 3.7.

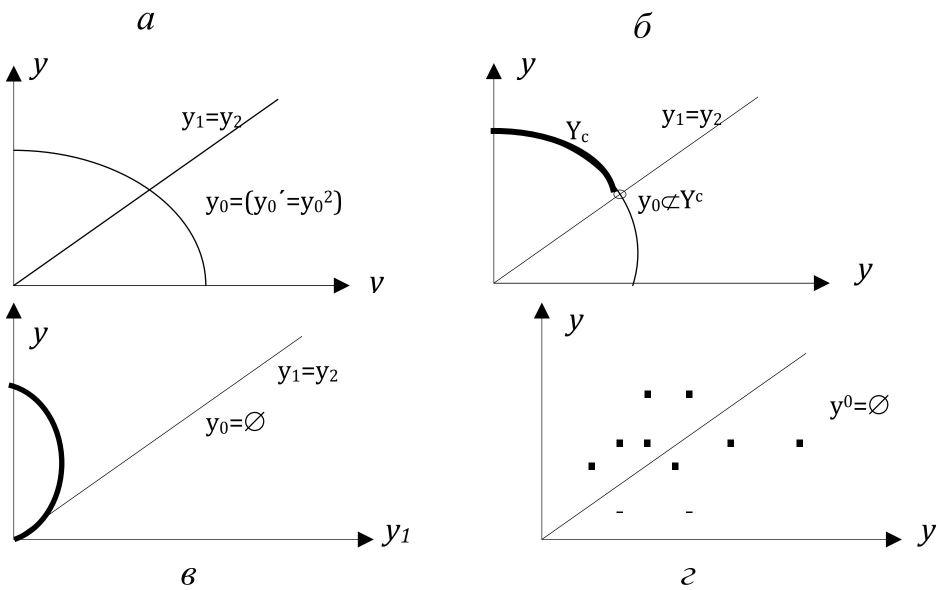


Рис. 3.7. Графічна інтерпретація ситуацій прийняття рішень на основі принципу рівності: *а* – наявне ефективне рішення; *б* – рішення перебуває за межами області компромісу; *в* – немає рішень (неперервний випадок); *г* – немає рішень (дискретний випадок)

Принцип рівномірності (*максиміну*). Даний принцип передбачає рівномірне підвищення рівня всіх критеріїв шляхом «підтягування» «найгіршого» критерію, тобто критерію з найменшим рівнем. Окрім рівномірності, цей принцип має також інший важливий сенс – забезпечення гарантованого рівня мінімального критерію min y_j. Часто його називають принципом максиміну (або мінімаксу в задачах мінімізації).

Цей принцип в умовах наявності двох критеріїв проілюстровано на рис. 3.8. Тут обидва критерії максимізуються. Ефективними будуть альтернативи, розташовані на північно-східній межі множини допустимих рішень. Згідно з принципом рівномірності необхідно вибрати таке рішення, що надає максимального значення критерію з найменшим рівнем. У даному випадку це критерій y_1. Тому раціональним буде вибір рішення: y_0 = max min y_1.

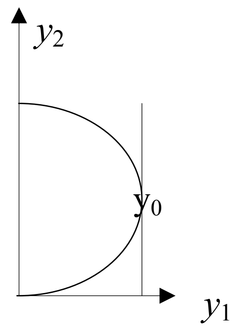


Рис. 3.8. Ілюстрація до використання принципу рівномірності (максиміну)

Принцип найкращої рівномірності. У цьому випадку відбувається деяке посилення ідеї рівномірності порівняно із попередньою моделлю, а саме: якщо в результаті застосування критерію максиміну отримано кілька рішень, то визначають другий мінімум і проводять його максимізацію (рис. 3.9).

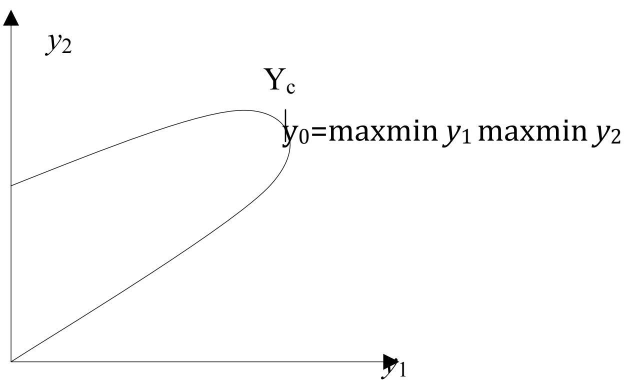


Рис. 3.9. Графічна інтерпретація використання принципу найкращої рівномірності

Принцип квазірівності. Тут здійснюється максимізація всіх локальних критеріїв за умови, що їхній рівень не відрізнятиметься один від одного більш ніж на задану величину δ, тобто відбувається деяке послаблення занадто жорсткого принципу рівності.

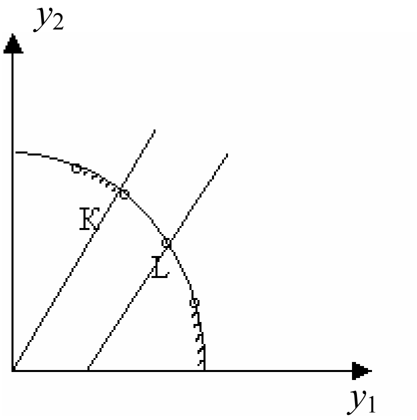


Рис. 3.10. Графічна інтерпретація використання принципу квазірівності: $KL = Y^0 = \{y: |y_1 – y_2| \le \delta\}$

Ідея принципів рівномірності дуже приваблива. Гармонійне підвищення якості всіх критеріїв – це ідеал оптимізації. Проте часто навіть незначний відхід від цих принципів дозволяє істотно підвищити рівень одного або кількох критеріїв і тим покращити розв’язок задачі.

Принцип вирівнювання якості. В основі цього принципу лежать теореми про середні величини вищих ступенів. Математично ця модель записується в такому вигляді:

$$\min_{y \in Y^c} \sum_{j=1}^{m} y_j^{-S},$$

тут $S \in (1, S^*)$, $S^* = (\log m) / \log(1+\varepsilon)$.

Із збільшенням значення параметра S, починаючи від одиниці, здійснюється вирівнювання значень критеріїв, і коли $S > S^*$, то отримуємо ідеальне вирівнювання, еквівалентне моделі послідовного максиміну.

3.5.2. Принципи справедливої поступки

Принцип абсолютної поступки. В основі цієї моделі лежить такий принцип: справедливим вважається компроміс, при якому сумарний абсолютний рівень зниження одного або кількох критеріїв не перевищує сумарного абсолютного рівня підвищення інших критеріїв, тобто

$$\underset{y \in Y^c}{opt}\, y \equiv \left\{ y : \sum_{j \in I^+} \Delta y_j \ge \sum_{j \in I^-} \Delta y_j \right\} \bigcap Y^c,$$

де I^+ – підмножина локальних критеріїв, рівень яких покращено ($\Delta y_j > 0$);

I^- – підмножина локальних критеріїв, рівень яких погіршено ($\Delta y_j < 0$), а Δy_j – величина приросту (або зменшення) критерію y_j під час переходу від розв'язка y' до y, $\Delta y_j = \Delta y_j(y', y)$.

П р и к л а д 3.9. Розглянемо випадок, коли мають місце два критерії y_1, y_2. Припустимо, що вони обидва максимізуються. Порівняємо розв'язки y (2; 4) та y' (3; 1), (див. рис. 3.11).

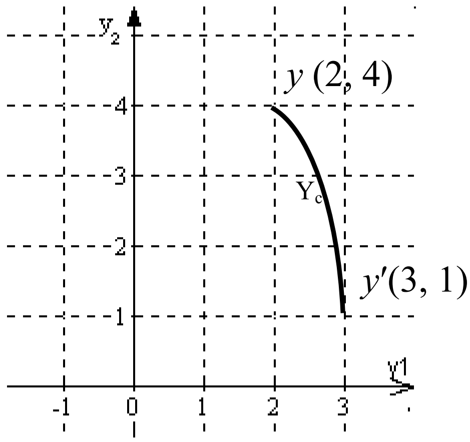


Рис. 3.11. Графічна інтерпретація принципу абсолютної поступки (приклад 3.9)

При переході від розв'язку y' до y критерій y_1 зменшується на таку величину:

$$\Delta y_1 = y'_1 - y_1 = 3 - 2 = 1,$$

а критерій y_2 збільшується на таку:

$$\Delta y_2 = y_2 - y'_2 = 4 - 1 = 3.$$

Тобто, при переході від розв'язку y' до розв'язку y ми за першим критерієм робимо поступку: $\Delta y_1 = 1$, проте з позицій другого критерію виграємо більшу величину: $\Delta y_2 = 3$ (рис. 3.11).

Отже, оскільки абсолютне збільшення критеріїв Δy_2 перевищує їх абсолютне зменшення Δy_1, то розв'язок y' вважитиметься кращим від y ($y' > y$).

Цьому принципу відповідає модель максимізації суми критеріїв (модель інтегральної ефективності):

$$\text{opt } y \equiv \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} y_j \, .$$

Серйозним недоліком принципу абсолютної поступки є те, що він не виключає різкої диференціації рівнів окремих критеріїв, тобто високе значення узагальненого критерію може досягатися за рахунок одного або групи критеріїв при дуже низькому рівні інших. Проте цей принцип має важливу перевагу – він зручний для реалізації.

Принцип відносної поступки. Припустимо, що всі локальні критерії, які створюють вектор ефективності, мають однакову важливість. Тоді справедливим вважатимемо такий компроміс, при якому сумарний відносний рівень зниження якості розв'язку за одним або кількома критеріями не перевищує сумарного відносного рівня підвищення його якості за рештою критеріїв (тобто він менший або дорівнює). Відповідну даному принципу справедливості модель називають моделлю справедливої *відносної поступки*. Вона записується в такому вигляді:

$$\text{opt } y = \left\{ y : \sum_{j \in I^+} \eta_j \geq \sum_{j \in I^-} \eta_j \right\} \bigcap Y^c,$$

де η_j – відносна зміна, «ціна поступки», яка обчислюється за такою формулою:

$$\eta_j = \frac{\Delta y_j(y', y)}{\max\{y', y\}}.$$

Розглянемо математичну інтерпретацію описаного принципу.

Приклад 3.10. Нехай в зоні компромісів Y^c дано дві альтернативи: y (2; 7) та y' (3; 5) (рис. 3.12), якість яких оцінюється критеріями y_1 і y_2 (обидва вони максимізуються). Альтернатива y краща від альтернативи y' за критерієм y_1, але поступається їй за критерієм y_2. Необхідно порівняти ці дві альтернативи й вибрати найкращу в сенсі принципу справедливого компромісу.

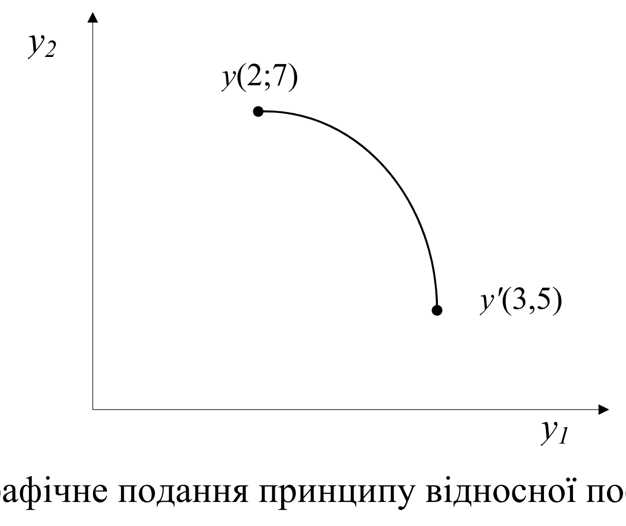


Рис. 3.12. Графічне подання принципу відносної поступки (приклад 3.10)

Для порівняння цих альтернатив введемо міру відносного зниження якості останніх за кожним з критеріїв при переході від альтернативи y до y' і навпаки, тобто ціну поступки $\eta_j(y, y')$, а саме:

$$\eta_1 = \frac{\Delta y_1(y', y)}{\max\{y_1', y_1\}},$$

$$\eta_2 = \frac{\Delta y_2(y, y')}{\max\{y_2', y_2\}}.$$

Тут Δy_1 і Δy_2 – абсолютна величина зниження рівня критеріїв при переході від розв'язку y' до розв'язку y (для критерію y_1) і при зворотному переході (для критерію y_2). Якщо відносна величина зниження рівня критерію y_1 більша від зниження критерію y_2, то слід віддати перевагу розв'язку y. Це випливає з порівняння величин ціни поступки за кожним із критеріїв.

У розглянутому прикладі $\Delta y_1 = 1$, $\Delta y_2 = 2$. Згідно з принципом абсолютної поступки, розв'язок y кращий за розв'язок y', але за принципом відносної поступки, навпаки кращим виявляється альтернатива y', оскільки $\eta_1 = 1/3$, $\eta_2 = 2/7$, тобто $\eta_1 > \eta_2$.

Розглянемо випадок неперервної зміни розв'язків. Тоді ціна поступки має вигляд логарифмічної похідної:

$$\eta_j(x) = \frac{1}{y}\left|\frac{dy_j(x)}{dx}\right|.$$

Припустимо, що збільшення x зумовлює збільшення критерію y_1 і зменшення критерію y_2. Відносна інтенсивність їх зміни залежно від x характеризується ціною поступки $\eta_1(x)$ і $\eta_2(x)$ (рис. 3.13). Як видно з графіків, коли x змінюється від 0 до x_0, то відносне збільшення критерію y_1 буде більшим, ніж зменшення критерію y_2.

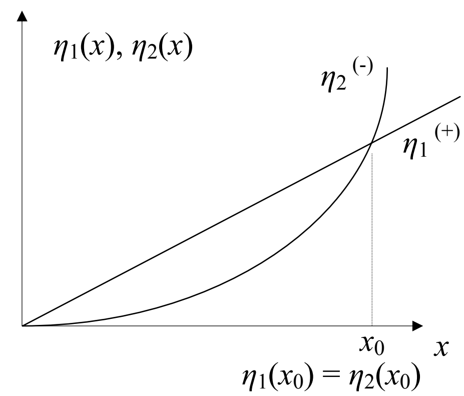


Рис. 3.13. Графічна інтерпретація принципу відносної поступки (неперервний випадок)

Принципу відносної поступки відповідає скалярна модель оптимізації з критерієм у вигляді добутку локальних критеріїв, а саме:

$$\text{opt}\, y \equiv \max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j .$$

Для зручності обчислень замість цієї моделі можна скористатися також еквівалентною моделлю такого вигляду:

$$\text{opt}\, y \equiv \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} \log y_j .$$

Зауважимо, що цей принцип можна застосовувати за умови, що всі локальні критерії мають однакову важливість. Якщо ж це припущення не виявляється чинним, то в модель слід внести корективи за допомогою вагового вектора: $\alpha = (\alpha_1, \ldots , \alpha_m)$, і визначити оптимальні розв'язки на основі такої моделі:

$$\max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j^{\alpha_j} .$$

У цій моделі принцип справедливого компромісу дещо порушується, проте це відбувається відповідно до міри важливості критеріїв і практично виливається в штучну диференціацію величини поступки.

Порівнюючи два розглянуті вище принципи справедливої поступки, можна зробити такі висновки:

Принцип справедливого компромісу на основі поступки має вельми чітку ідею справедливості, на основі якої здійснюється вибір компромісного оптимального розв'язку.

Принцип абсолютної поступки не залежить від дійсної величини критеріїв і тому може допускати велику розбіжність у їхніх рівнях. Тому він може бути використаний лише разом з одним із принципів рівномірності.

Принцип відносної поступки дуже чутливий до величини критеріїв, причому за рахунок відносності поступки відбувається автоматичне зниження її ціни по відношенню до критеріїв з більшою величиною і навпаки. Унаслідок цього відбувається значне згладжування рівнів критеріїв. Важливою перевагою принципу відносної поступки також можна вважати його інваріантність до масштабу виміру критеріїв.

Якщо має місце неоднакова важливість критеріїв, то ідея справедливого компромісу на основі оцінки поступок втрачає свою ясність, оскільки аргументація вибору вагового вектора важливості критеріїв α виявляється досить сумнівною, особливо тоді, коли наявна велика кількість критеріїв.

3.5.3. Інші принципи оптимальності

Принцип головного критерію. Згідно з цим принципом один із локальних критеріїв вибирається як головний і проводиться його скалярна оптимізація за умови, що рівень інших критеріїв не гірший допустимого, тобто

$$\text{opt}\, y \equiv \max_{y \in Y'} y_1 ,$$

тут $Y' = \{y \,|\, y_j \geq y_j^{\gamma}, j \in \{2, 3, \ldots m\}\} \bigcap Y^c$, y_j^{γ} – заданий допустимий рівень критерію y^{γ}.

При цьому головним може бути вибрано будь-який критерій. Проте краще брати той, для якого складно визначити допустимий рівень.

Взагалі, за допомогою цієї моделі можна реалізувати будь-яку схему компромісу й отримати будь-який оптимальний розв'язок в зоні компромісів. Проте аргументація вибору допустимого рівня критеріїв y_j^{γ} найчастіше неможлива.

Принцип максимізації зваженої суми критеріїв. Цей принцип являє собою модифікацію моделі абсолютної поступки, для випадка, коли задано пріоритети критеріїв α_j , $j = 1, 2, \ldots, m$. Його записують у такому вигляді:

$$\text{opt}\; y = \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} \alpha_j y_j ,$$

тут $\alpha_j \in [0,1]$, $j \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\sum_{j \in I} \alpha_j = 1$.

Проте певною мірою цей принцип має також універсальне значення. Наприклад, при розв'язуванні багатокритерійних задач опуклого програмування за допомогою даної моделі можна визначити множину компромісних розв'язків (теорема 3.1).

Зауважимо, що так само як і в попередніх випадках, аргументувати вибір вагових коефіцієнтів α_j для реалізації якого-небудь принципу компромісу практично неможливо.

Принцип максимізації ймовірності досягнення ідеальної якості. Часто в стохастичних векторних задачах може бути визначене ідеальне, бажане значення всіх локальних критеріїв y_j^u, а отже, ідеальна якість y^u. Тоді задача оптимізації може бути подана в скалярній формі з критерієм, який означає ймовірність досягнення складної події $P(y \geq y^u)$, а саме:

$$\text{opt}\; y \equiv \max_{y \in Y^c} P(y \geq y^u) .$$

Практично ж методи обчислення ймовірності подій, навіть якщо їх дві або три, дуже складні. Тому даний метод може бути використаний лише в деяких конкретних випадках, коли кількість подій $m \le 3$, а обчислення ймовірності $P(y \ge y^u)$ здійснюється досить просто.

3.6. Методи нормалізації критеріїв

Модель відносної поступки інваріантна до масштабу вимірювання критеріїв, проте в більшості випадків доводиться використовувати інші моделі, що мають сенс лише в нормалізованому просторі критеріїв, оскільки найчастіше масштаби виміру критеріїв неоднакові, і тому виникає необхідність виконувати *нормалізацію* критеріїв, тобто штучно зводити їх до єдиної міри.

Більшість методів нормалізації ґрунтується на введенні поняття «ідеальної якості», тобто вектора, який має ідеальне значення ефективності: $y^u = (y_1{}^u, \dots, y_m{}^u)$. Тоді вибір оптимального рішення стає рівнозначним найкращому наближенню до цього ідеального вектора. Різні методи нормалізації виходять залежно від того, що вважати ідеальним вектором і в якому сенсі розуміти «найкраще наближення».

Часто замість дійсної величини критеріїв розглядаються або їх відхилення від ідеального значення: $\Delta y_j = y_j^u - y_j$, $j = 1, 2, \dots m$, або безрозмірна величина критерію: $\bar{y}_j = \dfrac{y_j}{y_j^u}$, вочевидь $\bar{y}_j \in [0,1]$, $j = 1, 2, \dots m$.

При розв'язуванні багатокритерійних задач оптимізації використовуються обидва способи перетворення масштабу. Проте для нормалізації може бути використаний лише другий, оскільки він не залежить від масштабу вимірювання критеріїв, не применшує значущості жодного з них і зводить усі критерії до єдиного масштабу [0,1].

Залежно від способу вибору ідеального вектора y^u розглянемо основні способи нормалізації.

Спосіб 1. За ідеальний вектор якості беруть задані величини критеріїв: $y^u = y^з = \left(y_1^з, y_2^з, \dots y_m^з\right)$.

Цей випадок досить рідкісний, бо визначення заданої величини критеріїв, як правило, пов'язане із серйозними труднощами, а його аргументація дуже упереджена, що приводить до суб'єктивного оптимального розв'язку.

Спосіб 2. Як ідеальний вектор ефективності береться той, компонентами якого виступають оптимальні значення локальних критеріїв. Наприклад, у задачі, де всі критерії максимізуються, ідеальний вектор потрібно вибирати в такому вигляді:

$$y^u = (\max_{y \in Y} y_1, \max_{y \in Y} y_2, \dots, \max_{y \in Y} y_m).$$

І потім замість абсолютної величини критеріїв вводиться їх відносна безрозмірна величина:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y \in Y} y_j}, \ j = 1, 2, \ldots m.$$

Недоліком цього способу нормалізації є те, що він суттєво залежить від максимального можливого рівня критеріїв, який визначається умовами задачі. За таких обставин перевага автоматично віддається критерію з найбільшою величиною локального оптимуму, а рівноправність критеріїв порушується.

Той самий недолік має також спосіб Севіджа (*принцип найменшої шкоди*). Тут ідеальний вектор має такий самий вигляд, але простір критеріїв трансформується в простір відхилень, а саме:

$$\Delta y_j = \max_{y \in Y} y_j - y_j, \ j = 1, 2, \ldots m,$$

і подальший вибір здійснюється на основі принципу мінімаксу. Цей спосіб також суттєво залежить від масштабу вимірювання критеріїв.

Спосіб 3. При його використанні компонентами ідеального вектора слугують точні верхні межі (sup) [або для задач мінімізації – точні нижні межі (inf)] локальних критеріїв, що визначені на просторі рішень *Y*, тобто

$$y^u = (\sup_{y \in Y} y_1, \sup_{y \in Y} y_2, \ldots, \sup_{y \in Y} y_m).$$

Відносні критерії тут визначають за такими формулами:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y \in Y} y_j}, \ j = 1,2, \ldots m.$$

Цей спосіб нормалізації – найбільш справедливий бо не порушує рівноправності жодного з критеріїв, до того ж він об'єктивний і не залежить від масштабу їх вимірювання. Незважаючи на це, його застосування часто буває неможливим, оскільки межею критеріїв виступає нескінченність. Правда, за таких умов можлива наближена реалізація цього способу шляхом задання деякого, достатньо високого рівня критеріїв.

Спосіб 4. Тут компонентами y^u виступають максимально можливі відхилення критеріїв з урахуванням умов вихідної задачі, а саме:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y \in Y} y_j - \min\limits_{y \in Y} y_j}, \ j = 1, 2, \ldots m,$$

або, коли розглядається задача без обмежень, то

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y\in Y} y_j - \inf\limits_{y\in Y} y_j}, \; j = 1, 2, \ldots m.$$

Зауважимо, що цей спосіб нормалізації вимагає спеціальної перевірки умов інваріантності відносно початку координат і масштабів вимірювання критеріїв, принаймні для деяких принципів компромісу.

Спосіб 5. У його межах нормалізація проводиться на одиничному гіперкубі таким чином:

вважають, що $\min\limits_{y\in Y} y_j = 0,\; \max\limits_{y\in Y} y_j = 1, j\in I,$

або $\inf\limits_{y\in Y} y_j = 0,\; \sup\limits_{y\in Y} y_j = 1,\; j\in I.$

При цьому також можливі порушення умов інваріантності стосовно початку координат і масштабу вимірювання критеріїв для цілого ряду моделей.

Як бачимо, успішне вирішення проблеми нормалізації багато в чому залежить від того, наскільки точно та об'єктивно вдається визначити ідеальну якість розв’язку, а нормалізація, по суті справи, зводиться до певної трансформації простору критеріїв, тобто до вибору зручної та «справедливої» топології, у якій задача вибору альтернативи за кількома критеріями набуває строгого й зрозумілого сенсу.

Таким чином, перетворення, мають задовольняти такі вимоги:

– враховувати необхідність мінімізації відхилень від оптимальних значень за кожною цільовою функцією;

– мати спільний початок відліку й один і той самий порядок зміни значень на всій множині допустимих альтернатив;

– зберігати відношення переваги на всій множині альтернатив, порівнянних за вихідними цільовими функціями.

Найбільш поширеними, виходячи з вищевикладених способів, є наведені нижче перетворення:

$$w_i^1(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_2; \end{cases} \tag{3.10}$$

$$w_i^2(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max}}, \forall i \in I_2, \end{cases} \qquad (3.11)$$

тут $f_i^{\max}$ – максимальне, а $f_i^{\min}$ – мінімальне значення критерію $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \in I_1 \bigcup I_2$.

Зауважимо, що розглянуті способи нормалізації описано за умов, що критерії мають однакову важливість, але в більшості випадків вони нерівнозначні, і тому необхідно враховувати їхні пріоритети.

3.7. Способи врахування пріоритету критеріїв

Усі методи врахування пріоритетів критеріїв можна умовно поділити на дві групи. Розглянемо більш детально кожну з них.

3.7.1. Методи врахування жорсткого пріоритету

Методи жорсткого пріоритету базуються на тому, що критерії впорядковані за важливістю: $y_1 > y_2 \ \dots > y_m$, на основі чого і виконують їх послідовну оптимізацію.

Принцип послідовної оптимізації на основі жорсткого пріоритету полягає в тому, що не допускається підвищення рівня менш важливих критеріїв, якщо це викликає хоча б незначне зниження рівня важливішого критерію.

На практиці це означає, що спочатку відшукують локальний оптимум для найбільш важливого критерію на всій множині допустимих альтернатив *X*, який фіксується у вигляді додаткового обмеження. Потім шукають локальний оптимум другого за важливістю критерію, але вже для нової допустимої множини X^{01} і так далі. Таким чином, відбувається поступове звуження допустимої множини до єдиного оптимального розв’язку або оптимальної підмножини, тобто

$$X \supset X^{01} \supset X^{02} \supset \dots \supset X^{0m} = X^0,$$

$$X^{0j} = \left\{ x \mid y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) \right\} \bigcap X^{0(j-1)}.$$

Такий принцип упорядковування векторної множини називається *лексикографічним*.

Труднощі застосування цього методу полягають у тому, що

1) у разі, коли є групи рівнозначних критеріїв, необхідно для цих груп проводити локальне впорядковування на основі одного з принципів рівномірності;

2) для розв'язування багатьох практичних задач цей метод непридатний, оскільки максимізація за першим критерієм дає єдиний розв'язок і задача фактично зводиться до скалярної, бо неголовні критерії зовсім не враховуються.

Проте цей принцип дає добрі результати при використанні *квазіоптимального* підходу, за яким на кожному етапі проводиться квазіоптимізація, тобто відшукують не єдиний оптимум, а деяку область, близьку до нього, а саме:

$$X^{0j} = \left\{ x \middle| y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) - \Delta y_j \right\} \bigcap X^{0(j-1)},$$

де Δy_j – допустимі відхилення j-го критерію від точного оптимуму.

При цьому рівень допустимого відхилення від оптимуму визначають з урахуванням важливості критеріїв, точності постановки задачі та деяких практичних міркувань.

Зауважимо, що такий підхід на останньому етапі дає не один оптимальний розв'язок, а деяку досить вузьку квазіоптимальну підмножину, а єдиний розв'язок обирає ОПР.

Переваги методу жорсткого пріоритету полягають у тому, що при його використанні не існує потреби в кількісних характеристиках важливості критеріїв, достатньо лише їхнього впорядкування за значущістю.

3.7.2. Методи врахування гнучкого пріоритету

Методи врахування гнучкого пріоритету потребують задання кількісних характеристик пріоритету, що дозволяє при виборі рішення лише певною мірою надавати перевагу важливішим критеріям. Кількісні оцінки пріоритетів задаються, як правило, у вигляді такого вектора:

$$\alpha = (\alpha_1, \underset{j}{\alpha_2}, \; \ldots \;, \alpha_n), \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in I, \; \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

Залежно від того, який спосіб компромісу буде застосовано, отримують різні варіації методів урахування пріоритетів.

Принцип рівномірності з пріоритетом. Оптимізація проводиться відповідно до однієї з таких вимог:

opt $y = (\alpha_1 y_1 = \alpha_2 y_2 = \ldots = \alpha_n y_n)$ – являє собою принцип рівності з урахуванням пріоритету;

opt $y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j} \alpha_j y_j$ (принцип рівномірності з пріоритетом);

opt $y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j}{}_1 (\alpha_j) y_j \max \min\limits_{j}{}_2 (\alpha_j) y_j \ldots$ (принцип найкращої рівномірності з пріоритетом);

Принцип справедливої поступки з пріоритетом. Оптимізацію виконують відповідно до такої вимоги:

$$\text{opt}\, y = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} \alpha_j y_j \quad \text{або} \quad \text{opt}\, y = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} \alpha_j \log y_j .$$

Інші принципи оптимальності з пріоритетом. Оптимізацію здійснюють за таким правилом:

$$\text{opt}\,(y) = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} (\alpha_j y_j)^{-S} .$$

Перевагою методів гнучкого врахування пріоритетів є те, що вони дозволяють у розумних межах надавати перевагу більш значущим критеріям, враховуючи міру їхньої важливості.

Недолік цих методів – складність знаходження числових значень пріоритетів. Як правило, такі оцінки суб’єктивні.

Зауваження 1. Проводячи перетворення простору за допомогою вектора α, необхідно враховувати, який саме принцип оптимальності буде застосований для вибору одного з ефективних розв’язків задачі.

Зауваження 2. Різну важливість критеріїв можна враховувати і при нормалізації. У цьому випадку нормалізація проводиться з урахуванням характеристик пріоритету, наприклад, вагового вектора, а саме:

$$\bar{y}_j = \frac{\alpha_j y_j}{y_j^{u}} .$$

У той же час з міркувань чіткості аргументації врахування пріоритету краще проводити після нормалізації критеріїв.

3.8. Методи розв’язування багатокритерійних задач оптимізації

3.8.1. Методи зведення до узагальненого критерію (методи згортки)

Розглянемо методи розв’язування, що полягають у зведенні початкової багатокритерійної задачі до скалярної шляхом введення деякого узагальненого критерію. В основі кожного з цих методів лежить така схема:

1. Усі критерії нормують, тобто зводять до порівнянного безрозмірного вигляду.

2. Їх «згортають» в одну цільову функцію, формуючи так званий узагальнений критерій, у якому враховано відносну важливість кожного з критеріїв за допомогою вагових коефіцієнтів:

$$\alpha = \left(\alpha_1, \underset{j}{\alpha_2}, \dots , \alpha_n\right), \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in I, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 .$$

Унаслідок цього вихідна багатокритерійна задача зводиться до звичайної задачі оптимізації з одним критерієм.

Найбільш поширеними видами згортки є такі:

1. Узагальнені критерії на основі середньозваженої функції

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i^s \right)^{1/S} ,$$

тут k_i, $i = 1, 2, \dots m$ – нормовані локальні критерії;

α_i, $i = 1, 2, \dots m$ – вагові коефіцієнти.

Серед цієї групи особливо виділяють узагальнений критерій такого вигляду:

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i ,$$

що являє собою лінійну згортку локальних критеріїв. Він зручний у використанні, бо дозволяє зберігати лінійність вихідних функцій. Іншими словами, якщо вихідні критерії лінійні, то результуючий критерій також буде лінійним.

2. Мультиплікативна згортка $\Phi_\pi = \prod_{i=1}^{m} k_i^{\alpha_i}$.

3. У задачах, де мають місце одночасно критерії, що мінімізуються, і критерії, які максимізуються, дуже часто використовують критерій такого вигляду:

$$F = \frac{\sum_{i \in I_1} f_i(x)}{\sum_{i \in I_2} f_i(x)} .$$

Тут у чисельнику записано суму критеріїв, які максимізуються, а в знаменнику – суму критеріїв, які мінімізуються.

Недолік цього критерію полягає в тому, що він базується на явному припущенні про те, що недостатній рівень одного показника може компенсуватися за рахунок іншого; наприклад низька продуктивність виробництва компенсується низькою вартістю виробів.

Пригадаємо популярний «критерій оцінки людини». Він має вигляд дробу, де в чисельнику оцінка гідності особи іншими, а в знаменнику її думка про себе.

4. Часто використовують і такий критерій:

$$F(x) = \min_{y \in Y^c} \left(\frac{f_i(x)}{\alpha_i} \right),$$

Згідно з ним замість багатокритерійної задачі розглядається максимінна задача із скалярним критерієм.

На практиці значного поширення також набув метод *цільового програмування*.

У його основі – теж зведення всіх критеріїв в один узагальнений, який означає відстань від даної векторної оцінки до недосяжної ідеальної точки: $b^* = (b_1^*, \ldots \ b_m^*)$.

Найчастіше застосовують узагальнений критерій такого вигляду:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (f_i(x) - b_i^*)$$

Він дозволяє відшукати оптимальні розв'язки лінійних детермінованих задач за допомогою симплекс-методу.

П р и к л а д 3.11. Розв'язати подану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом згортки, якщо пріоритети критеріїв: $\alpha_1 = 0{,}7$ та $\alpha_2 = 0{,}3$. Критерії вважати нормалізованими.

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 \ge -4,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 24,\\
&20x_1 - 5x_2 \le 100,\\
&5x_1 + 20x_2 \ge 100,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Розв'язування

Оскільки за умовами задачі критерії нормовані, то проводити їх нормалізацію непотрібно. Проведемо згортку критеріїв, враховуючи задані їх пріоритети й напрям оптимізації. Оскільки вихідні критерії лінійні, то будемо застосовувати лінійну згортку, а саме:

$$F(x_1, x_2) = \alpha_1 f_1(x_1, x_2) + \alpha_2 f_2(x_1, x_2).$$

Тоді результуючий критерій за нашими даними набуде такого вигляду:

$$F(x_1, x_2) = 0{,}7(3x_1 + 2x_2) + 0{,}3(-x_1 + 2x_2) = 2{,}1x_1 + 1{,}4x_2 - 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 = 1{,}8x_1 + 2x_2.$$

І ми отримуємо таку скалярну задачу:

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2) = 1{,}8x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 \ge -4,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 24,\\
&20x_1 - 5x_2 \le 100,\\
&5x_1 + 20x_2 \ge 100,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Для розв'язування цієї задачі можна використовувати симплекс-метод, або розв'язати її графічно.

У результаті розв'язування маємо: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, а значення інтегрального критерію: $F(x_1, x_2) = 26$, вихідні критерії: $f_1(x_1, x_2) = 26$, $f_2(x_1, x_2) = 2$.

3.8.2. Метод головного критерію

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації, у якій усі критерії мінімізуються, й упорядковані за важливістю:

$$\begin{gathered}
f_i(x) \to \min,\ i \in I,\\
x \in X,\\
f_1(x) \ge f_2(x) \ge \ldots \ge f_M(x).
\end{gathered}$$

Головна ідея методу полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача оптимізації замінюється однокритерійною задачею із додатковими обмеженнями, які дозволяють у певному сенсі врахувати вимоги, описувані іншими критеріями.

Наведемо схему методу.

1. Вибирають один головний критерій $f_1(x)$, за яким буде проводитися оптимізація.

2. Для менш важливих критеріїв $f_2(x), \ldots f_M(x)$ обчислюють допустимі значення $\bar{f}_2, \ldots \bar{f}_M$.

3. Критерії $f_2(x), \ldots f_M(x)$ замінюють на обмеження такого вигляду:

$$f_i(x) \le \bar{f}_i, \text{ коли } i \in I.$$

4. Замість вихідної, розглядають таку скалярну задачу:

$$\begin{aligned} &f_1(x) \to \min, \\ &f_i(x) \le \bar{f}_i, \quad i \in I, \\ &x \in X. \end{aligned}$$

Перевагою описаного методу є те, що для його реалізації не потрібна кількісна оцінка пріоритетів критеріїв. А недоліком – складність встановлення допустимих рівнів значень критеріїв. У більшості випадків вони вибираються суб'єктивно. Тому, якщо критерії рівнозначні, за головний може бути обраний будь-який з них, але краще вибирати той, для якого задати допустимі значення найскладніше.

Зауважимо також, що розв'язок, отриманий за допомогою цього методу, завжди буде слабко ефективним, а тоді, коли він єдиний, то й сильно ефективним.

Метод головного критерію може бути застосований також і до розв'язування задач, в яких критерії максимізуються. В цьому випадку додаткові обмеження будуть мати такий вигляд: $f_i(x) \ge \bar{f}_i$.

У загальному випадку отримана скалярна задача буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} &f_1(x) \to opt, \\ &f_i(x) \ge \bar{f}_i, \quad i \in I_1, \\ &f_i(x) \le \bar{f}_i, \quad i \in I_2, \\ &x \in X. \end{aligned}$$

де I_1 – множина індексів для яких цільові функції максимізуються;
I_2 – множина індексів для яких цільові функції мінімізуються.

П р и к л а д 3.12. Методом головного критерію розв'язати таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо пріоритети критеріїв задані таким чином: $f_3 > f_1 > f_2$, і відомі граничні значення для критеріїв: $f_1^* = 20$, $f_2^* = 5$.

Розв'язування

Виберемо за головний той критерій, що має найбільшу важливість. У даному випадку це критерій f_3. Для інших двох критеріїв задамо обмеження, використовуючи відомі граничні значення. Оскільки критерій f_1 потрібно мінімізувати, то відповідне йому обмеження буде мати вигляд: $f_1(x_1, x_2) \le 20$, тобто $2x_1 + 3x_2 \le 20$. Для критерію f_2 (який максимізується) обмеженням буде: $f_2(x_1, x_2) \ge 5$, або в конкретизованому вигляді: $x_1 - 3x_2 \ge 5$, і, таким чином, вихідну багатокритерійну задачу зведено до такої скалярної задачі:

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \le 20, \\ 4x_1 - x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю задачу, отримуємо, що $x_1 = \dfrac{20}{3}$, $x_2 = 0$, а значення критеріїв на цьому розв'язку: $f_3 = -6\dfrac{2}{3}$, $f_1 = 20$, $f_2 = 26\dfrac{2}{3}$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію описаного розв'язування задачі.

Для цього спочатку побудуємо область допустимих розв'язків вихідної задачі – вона являє собою багатокутник *ABCDE*, і зобразимо цільові функції вихідної задачі (рис. 3.14).

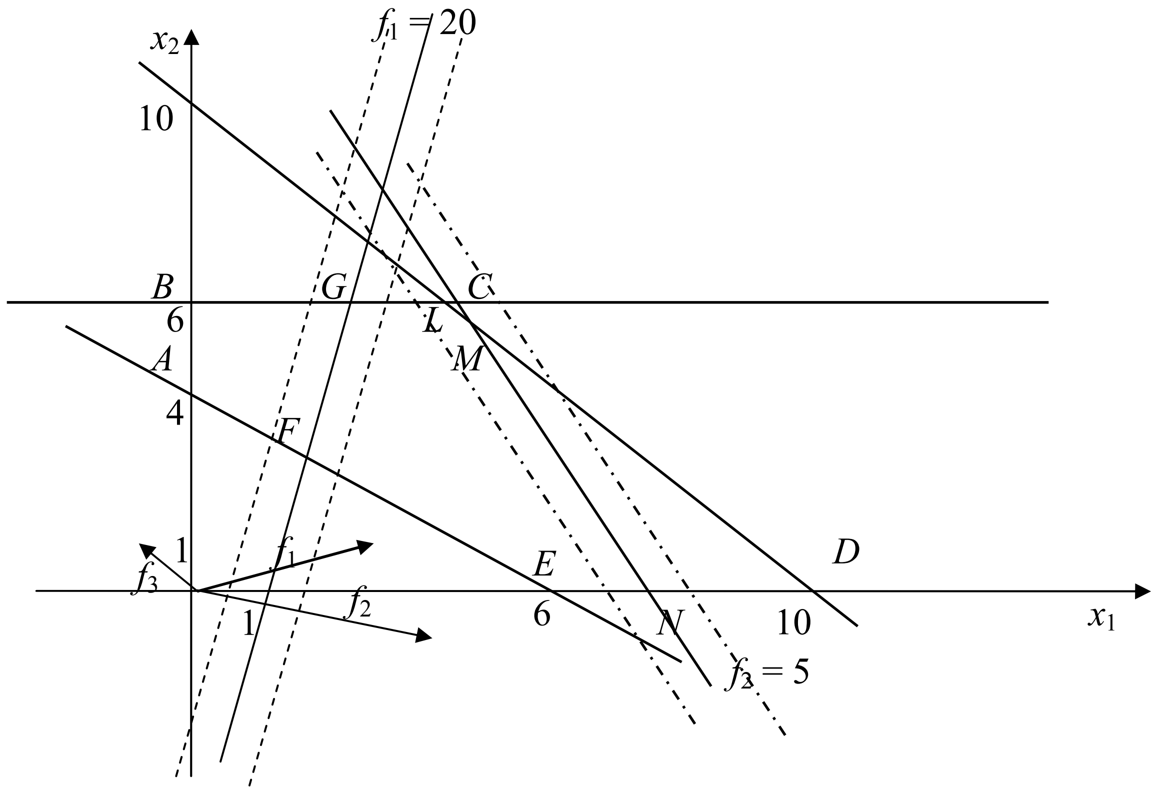


Рис. 3.14. Геометрична інтерпретація розв'язку багатокритерійної задачі до прикладу 3.12

Додаткові обмеження змінюють цю область до множини *EFGLMN*, відкидаючи всі розв'язки, неприйнятні за критеріями f_1, f_2. Зміна граничних значень критеріїв змінює й відповідну область допустимих розв'язків отриманої скалярної задачі. На рис. 3.14 це показано пунктирними і штрихпунктирними лініями. Для даної задачі, вочевидь, обмеження, що відповідає другому критерію, не впливають на розв'язок скалярної задачі, а активним є обмеження, яке відповідає першому критерію. Якщо змінити порогові значення цього критерію, то зміниться й розв'язок задачі. При різних значеннях ми отримуємо різні розв'язки, кожний з яких буде слабко ефективним. Таким чином, змінюючи порогові значення критеріїв, можна отримати всі слабко ефективні розв'язки вихідної багатокритерійної задачі оптимізації.

3.8.3. Метод послідовних поступок

Цей метод, так само, як і метод головного критерію, застосовується в тих випадках, коли критерії впорядковані за важливістю, але невідомі кількісні оцінки їх пріоритетів. Опишемо його в застосуванні до розв'язування задачі такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
& f_i(x) \to \min, i \in I, \\
& x \in X, \\
& f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x).
\end{aligned}
$$

Сутність методу послідовних поступок полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача замінюється послідовністю однокритеріальних задач, область допустимих розв'язків яких звужується від задачі до задачі за допомогою додаткових обмежень, які враховують вимоги до критеріїв. При формулюванні кожної задачі стосовно важливішого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі й оптимального розв'язку за цим критерієм.

Опишемо схему методу.

1. Розв'язують скалярну задачу оптимізації за найважливішим критерієм на всій множині допустимих альтернатив *X*, тобто

$$
\begin{aligned}
& f_1(x) \to \min, \\
& x \in X.
\end{aligned}
$$

В результаті цього отримуємо оптимальне значення критерію $f_1(x)$: f_1^{min}.

2. Розв'язують задачу оптимізації, керуючись наступним за важливістю критерієм та враховуючи додаткове обмеження: $f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1$, де Δ_1 – допустима поступка за першим критерієм. Цю задачу можна записати таким чином:

$$
\begin{aligned}
& f_2(x) \to \min, \\
& f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1, \\
& x \in X.
\end{aligned}
$$

У результаті її розв'язування отримуємо оптимальне значення критерію $f_2(x)$: f_2^{min}.

Нехай після здійснення k кроків було отримано оптимальні значення критеріїв: $f_1^{\min}, f_2^{\min}, \ldots, f_k^{\min}$, тоді на $(k + 1)$-му кроці розв'язують таку задачу:

$$
\begin{aligned}
& f_{k+1}(x) \to \min, \\
& f_1(x) \leq f_1^{min} + \Delta_1 \\
& f_2(x) \leq f_2^{min} + \Delta_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f_k(x) \leq f_k^{min} + \Delta_k, \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

й одержують оптимальне значення критерію f_{k+1}^{min}.

Після розгляду всіх критеріїв задачу буде розв’язано. Оптимальним розв’язком багатокритерійної задачі буде розв’язок останньої скалярної задачі.

Таким чином, початкову багатокритерійну задачу було зведено до послідовного розв’язування ряду скалярних задач, кількість яких буде дорівнювати числу критеріїв.

Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв і не допустити підвищення їхніх значень більше, ніж на деякий допустимий рівень (у разі, коли критерії максимізуються, не допустити зниження їхнього рівня нижче певного допустимого рівня). Складність його застосування зумовлено суб'єктивністю у визначенні допустимих рівнів. Зазвичай допустима поступка встановлюється експертами з огляду на оптимальне значення критерію та умови задачі .

Зауваження. Якщо критерій максимізується, то відповідне йому обмеження формулюють таким чином: $f_i(x) \geq f_i^{\max} - \Delta_i$, де Δ_i – допустима поступка за цим критерієм.

Для ілюстрації методу послідовних поступок розв’яжемо задачу.

П р и к л а д 3.13. Розв’язати методом послідовної поступки задачу багатокритерійної оптимізації:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,\\
&f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min x,\\
&f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,\\
&\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15,\\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6,\\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Вважати, що критерії впорядковано за важливістю.

Розв’язування

Застосовуючи описаний метод, спочатку розв’язуємо задачу оптимізації за критерієм, який має найвищий пріоритет (у даному випадку це перший критерій) на вихідній множині допустимих альтернатив. Вона має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,\\
&\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15,\\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6,\\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі будуть значення: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, при цьому оптимальне значення критерію на цьому розв'язку $f_1^* = 17$.

Припустимо, експерти визначили, що допустима поступка за першим критерієм $\Delta_1 = 2$. Тоді друга задача формулюється за таким правилом: оптимізація проводиться відповідно до наступного за важливістю критерію, а до існуючих обмежень додається ще одне, отримане із врахуванням попереднього критерію. Оскільки за першим критерієм проводилася максимізація, то обмеження буде мати такий вигляд:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x \ge f_1^* - \Delta_1,$$

тобто

$$x_1 + 7x \ge 17 - 2 = 15.$$

Тоді задача другого етапу набуває такого вигляду:

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 7x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв'язком цієї задачі буде пара (x_1, x_2): $x_1 = \frac{15}{8}$, $x_2 = \frac{15}{8}$, а оптимальне значення критерію при цьому $f_2^* = \frac{15}{8}$.

Тепер робимо поступку за другим критерієм, припустивши, що за рішенням експертів $\Delta_2 = \frac{1}{8}$. Враховуючи, що другий критерій мінімізується, відповідне йому додаткове обмеження формулюється таким чином: $f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \le f_2^* + \Delta_2$, а саме:

$$-2x_1 + 3x_2 \le \frac{15}{8} + \frac{1}{8} = 2.$$

Отже, третя задача набуває такого вигляду:

$$f_3(x_1,x_2)=x_1+x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1+5x_2 \le 15, \\ 2x_1+3x_2 \ge 6, \\ x_1-x_2 \le 1, \\ x_1+7x_2 \ge 15, \\ -2x_1+3x_2 \le 2, \\ x_1,x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї задачі (а значить, і вихідної) буде пара (x_1, x_2): $x_1=\frac{31}{17}$, $x_2=\frac{32}{17}$, а значення критеріїв при цьому: $f_1^*=15$, $f_2^*=2$, $f_3^*=\frac{63}{17}$.

Таким чином, розв'язавши три скалярні задачі, отримали розв'язок вихідної багатокритерійної задачі оптимізації. Варіюючи щоразу значення поступки, можна отримати також інші розв'язки цієї задачі.

Зауважимо, що більшість методів багатокритерійної оптимізації передбачають виділення оптимального розв'язку безпосередньо із множини всіх наявних розв'язків. З огляду на це корисно проаналізувати отримані результати, щоб з'ясувати, чи завжди вони зумовлюють отримання ефективного розв'язку, а якщо ні, то спеціально передбачити можливість його поліпшення до ефективного.

Для ілюстрації цього факту розглянемо такий приклад:

Існує оригінальний метод багатокритерійної оптимізації для лінійних задач, який можна описати таким чином: спочатку знаходять точки оптимуму кожного критерію окремо, а потім оптимальний розв'язок y_0 отримують у вигляді опуклої комбінації точок y^i ($y^\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y^i$, де $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$), що забезпечує мінімальне значення максимального із нормованих відхилень значень критеріїв f_i від відповідного оптимуму, тобто

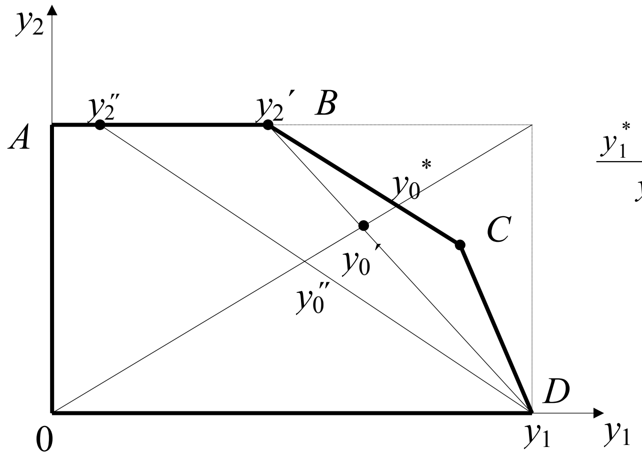
$$\max_{i\in M}\frac{y_i^*-f_i(y^0)}{\left|y_i^*\right|}=\min_{\lambda}\max_{i\in M}\frac{y_i-f_i(y^\lambda)}{\left|y_i^*\right|},$$

тут $M=\{1, 2, \dots, m\}$, y_i^* – оптимальне значення i-го критерію.

Таке визначення оптимального розв'язку має суттєві недоліки.

По-перше, якщо деякий критерій має кілька точок оптимуму на множині X, то не зрозуміло, яку з них слід використовувати, оскільки кожній точці y^i відповідатиме свій розв'язок y_0.

По-друге, отриманий таким шляхом оптимальний розв'язок, як правило, не буде навіть слабко ефективним.



$$\frac{y_1^* - y_1}{y_1^*} = \frac{y_2^* - y_2}{y_2^*}$$

Рис. 3.15. Графічна інтерпретація визначення розв’язку багатокритерійної задачі

Цю ситуацію проілюстровано на рис. 3.15. Тут обидва критерії y_1 та y_2 максимізуються, область допустимих рішень *OABCD* показано товстою лінією. Вочевидь, оптимальним розв’язком задачі за критерієм y_1 буде точка: $D = (y_1, 0)$, за критерієм y_2 оптимальними будуть усі точки на відрізку *AB*. Якщо вибрати за оптимальний розв’язок згідно з цим критерієм точку y_2'' , то описаний метод дає розв’язок багатокритерійної задачі y_0'', відповідно, якщо обрати за оптимум точку y_2' – отримаємо розв’язок y_0'. Проте жоден з них не буде ефективним, оскільки розв’язок y_0^* буде кращим будь-якого з них, причому відразу за обома критеріями.

Пізніше це визначення було вдосконалене: оптимальним запропоновано вважати розв’язок y^*, який описано такою умовою:

$$\max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x^{0*})}{\left|y_i^*\right|} = \min_{x \in X} \max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x)}{\left|y_i^*\right|}.$$

3.9. Поняття про розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації при заданих перевагах на множині критеріїв

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації:

$$w_i(x) \to \min, \quad i \in I,$$
$$x \in X,$$

тут $0 < w_i(x) < 1$, $i \in I$ і задано переваги на множині цільових функцій W.

Л е м а 3.2. Для кожної допустимої альтернативи $x \in X$, характерної ознаками: $0 < w_i(x) < 1$, коли $i \in I$, у просторі $W \subset E^M$ існують вектор p, що відповідає співвідношенням:

$$p = (p_1,\ p_2,\ \dots p_M) = \{p\colon p_i > 0,\ \forall\, i \in I,\ \sum_{i \in I} p_i = 1\}, \tag{3.12}$$

і число: $k_0 > 0$, такі, що альтернатива $x \in X$ задовольняє одночасно рівності:

$$p_i\, w_i(x) = k_0, \quad i \in I. \tag{3.13}$$

Доведення

Оскільки $w_i(x) > 0$, коли $i \in I$, то, поділивши обидві частини виразу (3.13) на $w_i(x)$, отримаємо, що

$$p_i = k_0 / w_i(x)\ . \tag{3.14}$$

Але оскільки величини p_i повинні задовольняти умову (3.12), то підставивши в співвідношення: $\sum_{i \in I} p_i = 1$, вираз (3.14), отримаємо, що

$$k_0 = \frac{1}{\sum_{i \in I} 1/w_i(x)} = \frac{\prod_{i \in I} w_i(x)}{\sum_{q \in I} \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq q}} w_i(x)}\ , \tag{3.15}$$

тоді, відповідно,

$$p_i = \frac{\prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} w_j(x)}{\sum_{q \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq q}} w_j(x)}\ . \tag{3.16}$$

Це і доводить лему.

З а у в а ж е н н я. Вираз (3.15), що визначає параметр k_0, є монотонно зростаючою функцією за кожною із змінних $w_i(x)$ на інтервалі (0,1), при цьому $k_0 \in (0;\ 1/M)$.

Л е м а 3.3. Якщо для двох нееквівалентних альтернатив x^* та x^{**} із множини X вектори p^* і p^{**} збігаються ($p_i^* = p_i^{**}$, $\forall\, i \in I$), то $w_i(x^*) = \gamma w_i(x^{**})$, $\forall\, i \in I$ і $k_0(x^*) = \gamma k_0(x^{**})$, де γ – коефіцієнт пропорційності, $\gamma \neq 1$.

Доведення

Альтернатива x^* задовольняє p_i^*, тобто $p_i^* w_i(x^*) = k_0\,(x^*)$, для всіх значень $i \in I$, x^{**} задовольняє p_i^{**}, тобто $p_i^{**} w_i(x^{**}) = k_0\,(x^{**})$, $\forall\, i \in I$, звідси

$$p_i^* = \frac{k_0\left(x^*\right)}{w_i\left(x^*\right)} \quad \text{і} \quad p_i^{**} = \frac{k_0\left(x^{**}\right)}{w_i\left(x^{**}\right)}.$$

Тепер враховуючи, що $p_i^* = p_i^{**}$, $\forall\, i \in I$, можемо записати:

$$\frac{w_i(x^*)}{w_i(x^{**})} = \frac{k_0(x^*)}{k_0(x^{**})} = \gamma, \qquad \forall i \in I,$$

це і доводить лему.

Зауважимо, що напрямок, визначуваний вектором $p \in P^+$, задається для альтернатив, що перебувають у додатному октанті простору W значень функції w.

Довільний вектор вагових коефіцієнтів $p \in P^+$, що задовольняє умови (3.12), інтерпретуватимемо як надання переваги одній цільовій функції над іншою, виражене кількісно.

Визначимо напрямок, породжений вектором p в просторі W. Задамо цей напрямок кутами β_i $(i \in I)$ між осями координат і радіусом-вектором p, а саме:

$$\cos\beta_i = \frac{(w^*, e_i)}{\left\|w^*\right\| \cdot \left\|e_i\right\|} = \frac{w_i^*}{\sqrt{\sum_{i \in I} w_i^{*2}}}, \qquad \forall i \in I,$$

тут $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – орт на осі w_i, а $w^* = \{w_i^*\}$ – точка, що розташована в просторі W на промені p.

Беручи до уваги це співвідношення й умову нормування, запишемо систему лінійно незалежних рівнянь, з яких легко можуть бути знайдені невідомі напрямні косинуси:

$$\frac{\cos\beta_i}{\cos\beta_j} = \frac{w_i^*}{w_j^*}, \qquad \forall i, j \in I, \quad i \neq j,$$

$$\sum_{i \in I} \cos^2 \beta_i = 1.$$

З іншого боку через лему 3.2 для будь-якої точки w^* виконується система рівностей (3.13), звідси отримуємо, що

$$\frac{w_i^*}{w_j^*} = \frac{p_j}{p_i}, \qquad \forall i, j \in I, \; i \neq j,$$

а значить

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\beta_i}{\cos\beta_j} = \dfrac{p_j}{p_i}, & i, j \in I, i \neq j, \\ \sum\limits_{i \in I} \cos^2 \beta_i = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо таку формулу для визначення напрямних косинусів вектора p:

$$\cos\beta_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} p_j}{\sqrt{\sum\limits_{q \in I} \prod\limits_{j \in I} {p_j}^2}}, \quad \forall i \in I. \tag{3.17}$$

Вважатимемо цільові функції рівноцінними, якщо $p_i = 1 / M$, $\forall i \in I$, тоді напрямні косинуси вектора p в просторі W визначатимуться за такими формулами:

$$\cos\beta_i = \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad \forall i \in I.$$

Отже, задання кількісних переваг на множині цільових функцій за допомогою співвідношення (3.12) показує напрям пошуку розв'язків у просторі W вибраних перетворень.

Тому розв'язком задачі векторної оптимізації будемо вважати таку компромісну альтернативу, що належить множині ефективних альтернатив і перебуває на заданому напрямку, встановленому вектором $p \in P^+$, у просторі W вибраних перетворень функцій.

Якщо для деякої альтернативи x і заданого вектора $p \in P^+$ виконується співвідношення: $p_i w_i(x) = k_0$, $i \in I$, то будемо говорити, що альтернатива x лежить на напрямку, визначеному вектором $p \in P$.

Знайдемо, яке значення параметра k_0 відповідає ефективній альтернативі, що лежить у заданому напрямку, встановленому вектором p.

Т е о р е м а 3.4. Якщо x_0 – ефективна альтернатива для заданого вектора $p \in P^+$, то їй відповідає найменше значення параметра k_0, при якому система рівностей (3.13) виконується одночасно для всіх значень $i \in I$.

Якщо за перетворення $w_i(f_i(x))$, $i \in I$, вибрати перетворення, що має вигляд (3.10), то з урахуванням цієї теореми розв'язок задачі векторної оптимізації можна визначити таким чином: *під розв'язком задачі векторної оптимізації для заданого вектора переваг $p \in P^+$ розуміється компромісна альтернатива $x \in X$, яка забезпечує однакові мінімальні зважені відносні втрати: $\widetilde{w}_i(x) = p_i w_i(x)$, за всіма критеріями одночасно.*

3.10. Метод обмежень при пошуку компромісних розв'язків у задачах векторної оптимізації

Для обґрунтування обчислювальної процедури відшукування визначеного вище компромісного розв'язку доведемо таку теорему.

Т е о р е м а 3.5. Для того, щоб альтернатива $x^* \in X$, характерна такими ознаками: $w_i(x^*) > 0,\ \forall i \in I$, була ефективною при заданому векторі переваг $p \in P^+$, достатньо, щоб вона являла собою єдиний розв'язок системи нерівностей:

$$p_i w_i(x^*) \le k_0, \quad \forall i \in I, \tag{3.18}$$

для мінімального значення параметра k_0^*, з яким ця система сумісна.

Доведення

Припустимо протилежне, тобто, що альтернатива x^*, яка являє собою єдиний розв'язок системи (3.18), коли параметр $k_0 = k_0^*$, не є ефективною. Тоді існує альтернатива $x' \in X$, для якої $w_i(x') \le w_i(x^*)$, $\forall i \in I$, і хоча б одна нерівність виконується як строга. Помноживши ці нерівності на $p_i > 0,\ \forall i \in I$, отримаємо, що

$$p_i w_i(x') \le p_i w_i(x^*) \le k_0^*,$$

і хоча б одна нерівність виконується строго. Отже, маємо протиріччя. Альтернатива x' задовольняє систему (3.18) із значенням параметра k_0, не більшим від k_0^*. Тим самим теорему доведено.

Із цієї теореми виходить, що визначений раніше компромісний розв'язок може бути знайдений як єдиний розв'язок системи нерівностей (3.18) при мінімальному значенні параметра k_0, з яким ця система сумісна.

У просторі рішень компромісній альтернативі відповідає точка перетину променя, напрямні косинуси якого визначаються заданим вектором переваг $p \in P^+$ за формулами (3.17), з областю ефективних альтернатив.

Із існування точок перетину випливає наявність компромісного розв'язку, для якого мінімально можливі зважені втрати за всіма критеріями однакові $[p_i w_i(x) = k_{0(min)},\ \forall i \in I]$. Якщо такої точки не існує, то для компромісної альтернативи виконуватиметься система нерівностей, і цій альтернативі відповідатиме точка, найближча до заданого променя.

Для знаходження компромісного розв'язку побудуємо ітераційний процес з параметром $k_0 \in (0;\ 1/M)$, на кожному кроці якого перевіряється сумісність системи нерівностей (3.15) для $x \in X$ і заданого вектора p.

Параметр $k_0 \in (0;\ 1/M)$ обмежує відносні втрати $w_i(x) = w_i(f_i(x)),\ \forall i \in I$. Якщо $k_0 \to 0$, то відносні втрати прямують до 0, тобто цільові функції $f_i(x)$ прямують до своїх оптимальних значень, а коли $k_0 \to 1/M$, то нерівності (3.18) задовольняються на всій множині допустимих альтернатив X.

Зменшуючи параметр k_0 і тим самим зменшуючи зважені втрати за всіма цільовими функціями, ми наближаємося до альтернативи, що забезпечує мінімальні втрати за всіма критеріями $f_i(x)$, тобто до компромісної альтернативи.

Ітераційний процес зупиняється, коли найменше значення $k_0(l)$ (l – номер кроку), при якому система нерівностей (3.18) на множині допустимих альтернатив ще сумісна, відрізняється від найближчого значення $k_0(l+1)$, для якого система вже не сумісна, не більше, ніж на величину: $\varepsilon \geq 0$. Величина ε задається наперед із міркувань прийнятного часу розв'язування задачі. При цьому, якщо розв'язок системи нерівностей єдиний, то це і є шукана компромісна альтернатива. Якщо ж він не єдиний, то для отриманих альтернатив відносні втрати еквівалентні з точністю ε. Єдину компромісну альтернативу можна визначити, оптимізуючи на множині еквівалентних із точністю до ε альтернатив який-небудь узагальнений критерій. Наприклад, можна знайти лінійну згортку критеріїв:

$$F(x) = \sum_{i \in I} p_i w_i(x) \;, \tag{3.19}$$

мінімізувати на множині:

$$X' = \{x : p_i w_i(x) \leq k_{0(min)}, \forall i \in I, x \in X\}. \tag{3.20}$$

Такий узагальнений критерій завжди дає змогу відшукати ефективні розв'язки.

Розглянемо геометричну інтерпретацію цього методу.

П р и к л а д 3.14. Нехай задано рівноцінні критерії, і множина допустимих альтернатив лінійна (див. рис. 3.16). Тут G – область значень перетворених критеріїв w_1 і w_2 на множині обмежень, Γ – межа цієї множини, Ω_j – частина області значень критеріїв w_1 і w_2, у якій вони не перевищують значення параметра k_0^j.

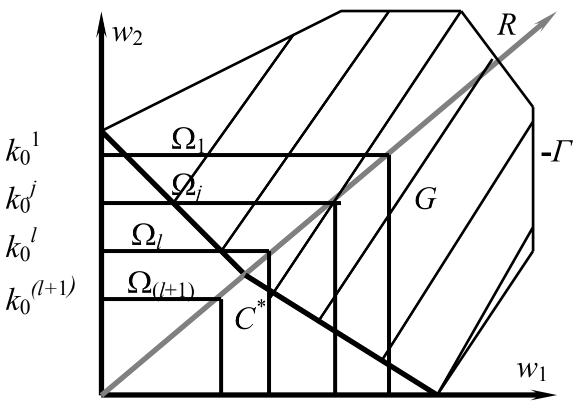


Рис. 3.16. Графічне подання ітераційного процесу пошуку компромісної альтернативи

Критерії w_1 і w_2 визначено співвідношеннями (3.10), тобто вони зведені до безрозмірного вигляду й мінімізуються.

Оскільки критерії рівноцінні, то $p_1 = p_2 = 1/2$, і $\cos(\beta_1) = \cos(\beta_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тобто напрямок R – бісектриса координатного кута $w_1 0 w_2$. Розв'язки, що забезпечують мінімальні відносні відхилення від оптимальних значень, розташовані в області G на промені, який виходить із початку координат у напрямку R.

Компромісним розв'язком, що забезпечує мінімальні відхилення, буде точка C^* (перетин променя із областю ефективних альтернатив). Щоб її знайти, визначимо послідовно таке найменше значення k_0^l, при якому перетин множин Ω_l та G не пустий.

Якщо вектор, знайдений відповідно до формули (3.16), не перетинається із областю ефективних точок, то в область Ω_l, відповідну мінімальному значенню k_0, при якому система (3.18) ще сумісна, обов'язково потрапить деяка множина точок і серед них обов'язково буде ефективна, якнайкраще відповідна перевазі, заданій ваговим вектором, тобто найближча до променя R.

Проаналізуємо з цих позицій деякі узагальнені критерії.

Розглянемо критерій такого вигляду:

$$\min_{x \in X} F(x) = \min_{x \in X} \max_{i \in I} p_i w_i(x), \tag{3.21}$$

тут $w_i(x)$, $i \in I$ описуються співвідношеннями (3.10).

Цей метод дозволяє знайти таку альтернативу, для якої або виконується система рівностей: $p_i w_i(x^*) = k_0$, $\forall i \in I$ і мінімального значення параметра k_0, або для деяких значень параметра рівності не виконуються і $p_i w_i(x^*) < k_{0(min)}$.

Якщо така альтернатива єдина, то це й буде шуканий компромісний розв'язок, в іншому разі необхідно застосовувати додатковий критерій (3.19).

Таким чином, запропонований метод, базований на пошуку додаткових альтернатив системи нерівностей (3.18) при мінімальному значенні k_0, можна розглядати як спосіб розв'язування задачі (3.21).

Метод мінімізації критеріїв, що мають вигляд згортки (3.19) на множині X, не дозволяє домогтися описаного вище розв'язку з таких причин:

– він істотно залежить від вибору виду перетворення $w_i(x)$, оскільки різний порядок величин $w_i(x)$ приводить до зміни переваг, і доданки можуть ставати порівнянними за величиною при малих значеннях p_i;

– коли порядок критеріїв $w_i(x)$, $i \in I$, однаковий, то переваги можуть змінюватися за рахунок несиметричної поведінки функцій $f_i(x)$;

– якщо функції $f_i(x)$ лінійні, а допустима множина являє собою багатогранник, то розв'язок за критерієм (3.19) лежатиме у вершині багатогранника, у той час, коли компромісний розв'язок буде розміщуватись на ребрі.

Якщо в ролі можливого перетворення взяти формули (3.10), то задачу знаходження єдиної альтернативи (3.19), (3.20) можна сформулювати у такий спосіб:

Знайти розв'язок задачі параметричного програмування відносно параметра k_0 при заданому векторі переваг p:

$$\min_x \left[F(x) = \sum_{i \in I_1} p_i \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} + \sum_{i \in I_2} p_i \frac{f_i(x) - f_i^{\max}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \right], \tag{3.22}$$

враховуючи такі обмеження:

$$\begin{gathered} x \in X, \\ f_i(x) \geq f_i^* = \frac{k_0}{p_i}\left(f_i^{\max} - f_i^{\min}\right), \quad \forall i \in I_1, \\ f_i(x) \leq f_i^* = \frac{k_0}{p_i}\left(f_i^{\max} - f_i^{\min}\right), \quad \forall i \in I_2. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Результатом розв’язування задачі (3.22), (3.23) при мінімально можливому значенні параметра $k_0 \in (0;\, 1/M)$ і буде шукана компромісна альтернатива.

Цей метод називається *методом обмежень*.

Опишемо його алгоритм.

1. Відшукується мінімально можливе значення параметра k_0 при якому система обмежень (3.23) буде сумісною.
2. Якщо розв’язок системи єдиний, то він і буде шуканим розв’язком задачі багатокритерійної оптимізації.
3. Якщо розв’язок цієї системи нерівностей не єдиний, то подальший вибір здійснюється за допомогою критерію (3.22).

Зауважимо, що цей метод не залежить від виду функцій $f_i(x)$ і множини допустимих альтернатив X. Необхідно лише мати ефективні способи перевірки на сумісність системи нерівностей (3.23).

3.11. Метод обмежень у багатокритерійній задачі лінійного програмування

Нехай задано деяку множину лінійних цільових функцій:

$$F = \{f_i(x)\}, \quad i \in I,$$

тут $f_i(x) = c^i x = c_1^i x_1 + c_2^i x_2 + \ldots + c_n^i x_n$, $i \in I$, причому m перших функцій максимізуються, а решта $(M - m)$ – мінімізуються.

Для змінних: $x = \{x_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, визначено лінійні обмеження, що мають вигляд:

$$Ax \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Застосуємо для розв'язування цієї задачі метод обмежень. Згідно з ним, необхідно спочатку виконати перетворення цільових функцій. Вони матимуть такий вигляд:

$$w_i(f_i(x)) = \frac{c^i x_i^0 - c^i x}{c^i x_i^0 - c^i x_{i\min}}, \quad \forall i \in I_1,$$

$$w_i(f_i(x)) = \frac{c^i x \; - c^i x_i^0}{c^i x_{i\max} - c^i x_i^0}, \quad \forall i \in I_2,$$

де $x_i^o = \left(x_{i1}^o, x_{i2}^o, \ldots x_{ij}^o, \ldots x_{in}^o\right)$ – розв'язок, який належить множині обмежень та оптимізує i-ту цільову функцію; $x_{i\max} = \left(x_{i1\max}, x_{i2\max}, \ldots x_{ij\max}, \ldots x_{in\max}\right)$, $x_{i\min} = \left(x_{i1\min}, x_{i2\min}, \ldots x_{ij\min}, \ldots x_{in\min}\right)$ – розв'язки, що забезпечують мінімальне та максимальне значення i-го критерію відповідно.

Компромісним розв'язком буде такий, для якого зважені відносні втрати будуть однаковими й мінімальними, тобто $p_1 w_1(x) = \ldots = p_m w_m(x) = k_{0\,min}$.

Згідно з методом обмежень, цей розв'язок може бути знайдений із системи нерівностей (3.23), яка в даному випадку може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} & c^i x \ge c^i x_i^o - \frac{k_0}{p_i}\left(c^i x_i^o - c^i x_{i\,min}\right), \quad \forall i \in I_1, \\ & c^i x \le c^i x_i^o + \frac{k_0}{p_i}\left(c^i x_{i\,max} - c^i x_i^o\right), \quad \forall i \in I_2, \\ & Ax \le b, \quad x_i \ge 0, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Розв'язування системи (3.24) буде еквівалентно розв'язуванню сформульованої нижче задачі лінійного програмування:

$$\min_x \{k_0 = x_{n+1}\}$$

за таких обмежень:

$$\begin{aligned} & d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n + d_{1n+1}x_{n+1} + d_1 \ge 0, \\ & d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n + d_{2n+1}x_{n+1} + d_2 \ge 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & d_{M1}x_1 + d_{M2}x_2 + \ldots + d_{Mn}x_n + d_{Mn+1}x_{n+1} + d_M \ge 0, \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 \le 0, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 \le 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n - b_p \le 0, \\ & x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots n, \end{aligned}$$

тут
$$d_{ij} = \begin{cases} p_i c_j^i, & \forall j = \overline{1,n}, \forall i \in I_1, \\ -p_i c_j^i, & \forall j = \overline{1,n}, \forall i \in I_2, \end{cases}$$

$$d_{i,n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j^i (x_{ij}^0 - x_{ij\min}), \forall i \in I_1, \\ \sum_{j} c_j^i (x_{ij\max} - x_{ij}^0), \forall i \in I_2, \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} -p_i \sum_{j=1}^{n} c_j^i x_{ij}^0, & \forall i \in I_1, \\ p_i \sum_{j=1}^{n} c_j^i x_{ij}^0, & \forall i \in I_2. \end{cases}$$

Висновки

Однією із проблем у прийнятті рішень є наявність великого числа критеріїв, які не завжди погоджені між собою. Така ситуація може бути описана математичними моделями задач багатокритерійної оптимізації.

Розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації необхідно шукати серед множини ефективних, тобто непокращуваних, альтернатив. Оскільки ефективні альтернативи або еквівалентні, або непорівнянні між собою, то для вибору однієї з них належить використовувати певні принципи компромісу.

Критерії можуть мати різну важливість, а їх пріоритети можуть бути задані кількісно – у вигляді вектора пріоритетів: $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$, $\alpha_i \geq 0,\ \ i \in I,\ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, або якісно – відношенням переваги на множині цільових функцій: $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x)$. Залежно від того, як задано пріоритети критеріїв, який саме принцип компромісу обрано і який вигляд має область допустимих альтернатив та цільові функції, використовують різні методи для відшукування множини ефективних альтернатив і відповідні їм методи розв'язування задач багатокритерійної оптимізації. Охарактеризуємо коротко найбільш поширені з них.

Метод головного критерію полягає в заміні багатокритерійної задачі однокритерійною із додатковими обмеженнями. Цей метод не вимагає нормалізації критеріїв і кількісного задання їх пріоритетів, але необхідно мати інформацію про порогові значення неголовних критеріїв.

Методи згортки базуються на введенні інтегрального критерію і подальшому зведенні вихідної багатокритерійної задачі до скалярної, вони зручні у використанні, але мають кілька обмежень. Зокрема, ці методи передбачають нормалізацію критеріїв і кількісне задання їх пріоритетів, крім того вони можуть бути застосовані тільки до увігнутих функцій та опуклої множини допустимих альтернатив.

Метод послідовної поступки не потребує нормалізації критеріїв і кількісного задання їх пріоритетів. Вихідна багатокритерійна задача замінюється послідовністю скалярних задач. Величина поступки за кожним критерієм визначається ОПР, залежно від величини його оптимуму й сенсу задачі.

Оскільки не завжди альтернативи, отримані внаслідок розв’язування задачі багатокритерійної оптимізації, будуть ефективними, корисно проаналізувати отримані результати, щоб з'ясувати, чи вдалося вибрати ефективний розв’язок, і якщо ні, то спеціально передбачити можливість поліпшення такого розв’язку до ефективного.

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритерійної оптимізації.
2. Які альтернативи називають ефективними за Парето? Ефективними за Слейтером?
3. Які властивості ефективних альтернатив ви знаєте?
4. Сформулюйте й доведіть лему про еквівалентність ефективних альтернатив.
5. Сформулюйте теореми про властивості ефективних альтернатив.
6. Які методи знаходження ефективних альтернатив Ви знаєте?
7. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв’язуванні багатокритерійних задач?
8. Які способи нормалізації критеріїв Ви знаєте?
9. У чому полягає задача пошуку компромісних рішень?
10. Яка сутність принципів рівномірності при пошуку компромісних рішень.
11. Які принципи рівномірності при пошуку компромісних рішень ви знаєте?
12. У чому полягає сутність принципів поступки при пошуку компромісних рішень?
13. Які принципи поступки при пошуку компромісних рішень ви знаєте?
14. Поясніть сутність інших принципів оптимальності при пошуку компромісних рішень.
15. Які з інших принципів оптимальності при пошуку компромісних рішень Ви знаєте?

16. У чому полягають методи згортки в застосуванні до розв’язування багатокритерійних задач?

17. Назвіть етапи методів згортки.

18. Які види згорток ви знаєте?

19. Назвіть переваги й недоліки методів типу згортки.

20. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методів згортки?

21. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методів згортки?

22. У чому полягає сутність методу головного критерію розв’язування багатокритерійних задач?

23. Перелічіть переваги й недоліки застосування методу головного критерію.

24. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методу головного критерію до розв’язування багатокритерійних задач?

25. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу головного критерію в розв’язуванні багатокритерійних задач?

26. Яка сутність методу послідовної поступки розв’язування багатокритерійних задач?

27. Які існують переваги і в чому полягають труднощі застосування методу послідовної поступки до розв’язування багатокритерійних задач?

28. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методу послідовної поступки?

29. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу послідовної поступки?

30. Чи визначають методи згортки, послідовної поступки та головного критерію єдиний оптимальний розв’язок багатокритерійної задачі ?

31. Чи визначають ці методи один з ефективних розв’язків багатокритерійної задачі?

32. Які методи врахування пріоритету критеріїв ви знаєте?

33. Назвіть методи врахування жорсткого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

34. Назвіть методи врахування гнучкого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

35. Який сенс має розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації при заданому відношенні переваги?

36. У чому полягає сутність методу обмежень при пошуку компромісних розв’язків задачі векторної оптимізації?

Завдання до розділу 3

Завдання А

1. Побудувати множину ефективних альтернатив задачі багатокритерійної оптимізації:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Розв’язати сформульвану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом головного критерію, якщо переваги критеріїв задано таким чином: $f_3 > f_1 > f_2$.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3. Розв’язати подану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом згортки, якщо переваги критеріїв дорівнюють 0,3; 0,2; 0,5 відповідно.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

4. На множині критеріїв задано жорсткі пріоритети: $f_3 > f_1 > f_2$. Які методи багатокритерійної оптимізації можуть бути застосовані? Розв’язати за цих умов таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

5. Нехай на множині альтернатив: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$, задано п’ять критеріїв, причому критерії f_1, f_4 , f_5 максимізуються, а f_2, f_3 – мінізуються. Значення критеріїв на множині X задано в табл. 3.3. Визначити множину ефективних альтернатив.

Таблиця 3.3

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
x_1	1	3	3	6	2
x_2	2	5	2	7	3
x_3	6	3	5	5	4
x_4	3	2	3	6	5
x_5	9	7	8	5	4
x_6	3	4	5	2	4
x_7	6	4	5	7	5
x_8	3	2	1	4	2
x_9	5	7	4	3	4
x_{10}	7	4	2	5	6

Завдання В

Сформулювати математичні моделі поданих нижче задач багатокритерійної оптимізації.

1. Підприємство «Ранок» має 7 пунктів, серед яких магазини й склад продукції. Щоденно здійснюється доставка товару зі складу до магазинів. Відомо, як розташовані магазини і які існують можливі шляхи перевезень між ними. Необхідно скласти оптимальний маршрут для розвезення продуктів зі складу до магазинів, враховуючи вартість перевезення, час доставки, довжину маршруту, його завантаженість, якість доріг, якщо перевезення виконуються одним автомобілем і в кожний з магазинів товар завозять один раз на добу.

2. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі видобутку залізної руди застосовують закладку, що твердіє, вона складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем для приготування закладної суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітний матеріал (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Завдання полягає у визначенні такого складу суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність максимальною. При цьому повинні виконуватись такі технологічні умови: вміст води в суміші дорівнює 20 % від в'яжучих складових; вміст цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску має становити відповідно 65, 9, 35, і 18 % від інертних компонентів суміші.

Залежність міцності суміші від її складових описується функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

3. На шахті «Добропільська» функціонує три видобувних дільниці. Видобуте на кожній з них вугілля має має різний вміст сірки, вологість і зольність (табл. 3.4). Стосовно кожної з дільниць відомі значення максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку, а також витрати на видобуток однієї тонни сировини (табл. 3.4). Плановий обсяг видобутку продукції на шахті становить 3000 тис. т. Необхідно, з огляду на можливості кожної дільниці, так скласти план видобувних робіт, щоб витрати були мінімальними, обсяг видобутку був максимальним і зольність отриманої сировини не перевищувала 39,5 % .

Таблиця 3.4

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	№ дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184210	1381777	1083515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

4. Механічний завод, виготовляючи деталі трьох типів, використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами *Т*1, *Т*2 і *Т*3. У табл. 3.5 подано норми часу при обробці деталі на відповідному верстаті за кожним технологічним способом, а також ресурси (верст.-год) кожної групи верстатів.

Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 і 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального часу використання токарних верстатів.

Таблиця 3.5

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

Завдання С

Розв’язати наведені в завданні В задачі багатокритерійної оптимізації методами згортки, головного критерію, послідовної поступки.

РОЗДІЛ 4

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ Й НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ

Мета розділу: ознайомлення з поняттями нечіткої множини й нечіткого відношення, їх властивостями та використанням у теорії прийняття рішень.

4.1. Поняття належності

Нехай E – деяка множина, A – її підмножина, тобто $A \subset E$, x – деякий елемент множини E, причому $x \in A$. Для опису цієї належності можна використовувати *характеристичну функцію* $\mu_A(x)$, значення якої свідчать про те, належить елемент x множині A чи ні, а саме:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{4.1}$$

П р и к л а д 4.1. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і нехай $A = \{x_2, x_3, x_5\}$. Випишемо для кожного елемента множини E його ступінь належності множині A:

$$\mu_A(x_1) = 0, \quad \mu_A(x_2) = 1, \quad \mu_A(x_3) = 1, \quad \mu_A(x_4) = 0, \quad \mu_A(x_5) = 1.$$

Таким чином, всі елементи множини A можна подати через елементи множини E, супроводжуючи кожен з них значенням його ступеня належності, а саме:

$$A = \{ (x_1|0), \ (x_2|1), \ (x_3|1), \ (x_4|0), \ (x_5|1) \}.$$

П р и к л а д 4.2. Нехай множина $E = [0,5]$, $A = [1,2]$, тоді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2], \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2,5], \end{cases}$$

і множину A можна записати таким чином: $A = \{x \in E : \mu_A(x) = 1\}$.

Нехай $\overline{A}$ – доповнення множини A відносно E, тобто $\overline{A} \subset E$, $A \cup \overline{A} = E$, і $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Якщо $x \in A$, то $x \notin \overline{A}$, і ми можемо записати, що коли $\mu_A(x) = 1$, то $\mu_{\overline{A}}(x) = 0$.

За цих умов для даних прикладу 4.1 одержимо такі значеня ступеня належності елементів множини $\overline{A}$:

$\mu_{\overline{A}}(x_1) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_2) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_3) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_4) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_5) = 0$, й $\overline{A} = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}$.

Для умов прикладу 4.2

$$\mu_{\overline{A}} = \begin{cases} 1, x \in [0;1) \cup (2;5], \\ 0, x \in [1;2], \end{cases}$$

і $\overline{A} = \{x \in E, \mu_{\overline{A}}(x) = 1\}$.

Тепер розглянемо операції об'єднання й перетину множин, користуючись термінологією характеристичних функцій.

Візьмемо дві множини A та B, характеристичні функції яких

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

відповідно.

Характеристичною функцією їх перетину буде функція $\mu_{A \cap B}(x)$, яку визначено за такими правилами:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cap B. \end{cases}$$

Її можна записати у вигляді такої формули:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),$$

або

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Аналогічно для об’єднання множин $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cap B, \end{cases}$$

тобто $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x)$, де $\oplus$ – булеве додавання,

або $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

П р и к л а д 4.3. Розглянемо таку множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, та дві її підмножини:

$A = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$ та $B = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Знайдемо їх об’єднання й перетин:

$$A \cap B = \{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\},$$

$$A \cup B = \{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\},$$

а також доповнення отриманих підмножин:

$$\overline{A \cap B} = \{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0)\},$$

$$\overline{A \cup B} = \{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}.$$

4.2. Визначення нечіткої множини та пов’язана з нею термінологія

У всіх прикладах з попереднього підрозділу елементи множини E або належать або не належать підмножині A і характеристична функція цієї підмножини набуває значення 0 або 1. Тепер припустимо, що вона може набувати будь-яких значень із інтервалу [0;1]. Згідно з цим припущенням, елемент x множини E може не належати множині A, тоді $\mu_A(x)=0$, може бути елементом A незначною мірою [коли значення $\mu_A(x)$ близьке до 0], може належати множині A більшою чи меншою мірою [коли величина $\mu_A(x)$ не дуже близька до 0 та до 1], може бути елементом A значною мірою, при цьому $\mu_A(x)$ близьке до 1 або, нарешті, може бути елементом множини A – і тоді $\mu_A(x)=1$. Таким чином, ми отримуємо узагальнення поняття належності, яке дозволяє нам ввести поняття нечіткої множини.

В и з н а ч е н н я 4.1. Нехай E – деяка множина (у звичайному уявленні). *Нечіткою підмножиною* A в E назвемо сукупність пар такого вигляду: $(x,\mu_A(x))$, де $x \in E$, функція $\mu_A : E \to [0;1]$. При цьому $\mu_A(x)$ називається *функцією належності* нечіткої підмножини A.

Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного елемента x називається *ступенем належності* цього елемента до нечіткої підмножини A.

Позначаємо нечітку підмножину $\widetilde{A}$, або $\widetilde{A} \subset E$, коли ж ясно, що мова йде саме про нечіткі підмножини, то пишемо просто: $A \subset E$.

Належність елемента до нечіткої підмножини позначається таким чином:

$$x \underset{0,2}{\in} \widetilde{A},\ y \underset{1}{\in} \widetilde{A},\ z \underset{0}{\in} \widetilde{A},$$

де $\underset{0}{\in}$ позначає $\notin$, $\underset{1}{\in}$ еквівалентне $\in$.

П р и к л а д 4.4. Нехай $\widetilde{A} = \{(x_1|0,2),(x_2|0),(x_3|0,3),(x_4|1),(x_5|0,5)\}$ – нечітка підмножина універсальної множини: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Це означає, що нечітка підмножина $\widetilde{A}$ містить елементи x_1, x_3 незначною мірою, x_2 не містить, повною мірою включає елемент x_4, а x_5 належить їй значною мірою.

Таким чином, у нас є можливість створити математичну структуру, деякий об'єкт, що дозволяє оперувати з відносно неповно визначеними елементами, належність яких даній підмножині тільки деякою мірою ієрархічно впорядкована.

Наведемо приклади подібних структур:

– множина *дуже високих* людей у деякій множині людей;

– підмножина *темно-зелених* кольорів у множині всіх кольорів;

– підмножина чисел , які *приблизно дорівнюють* даному дійсному числу;

– підмножина цілих чисел, *дуже близьких* до 0;

– якщо a – матеріальне число, а x – *невелике* додатне число, то числа $a + x$ утворюють нечітку підмножину в множині матеріальних чисел.

Зауважимо, що потрібно розрізняти ймовірність і нечіткість. Коли мова йде про імовірність, то мають на увазі належність або неналежність елемента до чіткої, цілком визначеної множини під впливом випадкових умов. Наприклад, з ймовірністю p певний студент складе сесію на відмінно, тобто буде належати до множини відмінників. Множина відмінників являє собою цілком визначену, чітку множину. Нечіткість же припускає, що саму множину не визначено повною мірою, тобто немає можливості встановити точно її межі. Прикладом такої множини є «множина людей, які гарно співають». Невизначеним тут виступає саме поняття «гарного співу». У наведених вище прикладах нечітких множин курсивом виділено елементи, що зумовлюють їхню нечіткість. Насправді, одна та й сама людина може вважатися «дуже високою» і в той же час ні, оскільки немає можливості чітко визначити межу цієї множини, а формулювання «приблизно дорівнює» в кожній ситуації може розумітися по-різному.

Людина легко використовує поняття, які не можна чітко описати, і апарат нечітких множин призначено саме для того, щоб надати математичної форми якісним поняттям, формалізувати операції з такими поняттями.

Як випливає з визначення 4.1, нечітка підмножина цілком описується своєю функцією належності, тому нижче ми будемо інколи використовувати функцію належності для позначення нечіткої множини.

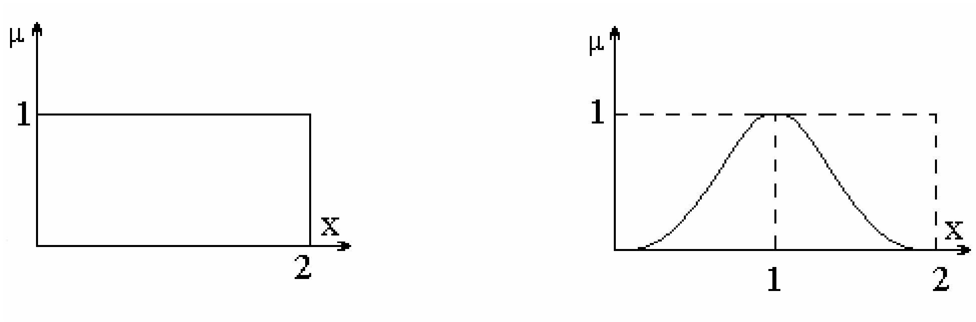
Звичайні множини утворюють підклас класу нечітких множин. Це ті множини, функції належності яких набувають значень тільки 0 або 1.

П р и к л а д 4.5. Розглянемо звичайну підмножину чисел: $B = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, та нечітку підмножину чисел: $\widetilde{C} = \{x \mid \text{"}x \text{ близьке до } 1\text{"}\}$.

Графіки функцій належності цих множин зображено на рис. 4.1. Зауважимо, що вигляд функції належності μ_C нечіткої підмножини $\widetilde{C}$ залежить від сенсу, якого в даній конкретній ситуації, набуває поняття «близький».

Нечітка підмножина називається *пустою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині E, тобто

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0, \quad \forall x \in E. \tag{4.1}$$



а *б*

Рис. 4.1. Графіки функцій належності: *а* – звичайної множини B; *б* – нечіткої підмножини $\widetilde{C}$

Універсальну множину E можна описати функцією належності такого вигляду:

$$\mu_E(x) = 1, \quad \forall x \in E \ . \tag{4.2}$$

В и з н а ч е н н я 4.2. *Носієм* нечіткої підмножини A (позначається як $\operatorname{supp} A$) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (у звичайному сенсі), що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} A = \{x | x \in E,\ \mu_A(x) \geq 0\}. \tag{4.3}$$

П р и к л а д 4.6. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, її підмножина $A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}5), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Тоді $\operatorname{supp} A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

В и з н а ч е н н я 4.3. Нечітка підмножина A називається *нормальною*, якщо виконується така рівність: $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$. В іншому випадку нечітка підмножина називається *субнормальною*.

Наприклад, нечітка підмножина $\widetilde{C}$ з прикладу 4.2 – нормальна. Субнормальним часто буває перетин нечітких підмножин. Субнормальну нечітку множину A можна перетворити в нормальну (нормалізувати). Для цього потрібно поділити функцію належності цієї множини на величину $\sup\limits_{x \in A} \mu(x)$. Однак слід пам'ятати, що застосовуючи таке перетворення в будь-якій задачі, необхідно чітко уявляти собі його «фізичний сенс».

В и з н а ч е н н я 4.4. Нехай $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ нечіткі підмножини в множині E, а $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ їхні функції належності відповідно. Будемо говорити, що $\widetilde{A}$ містить у собі $\widetilde{B}$ (тобто $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$), якщо для будь-якого елемента $x \in E$ буде справедливою така нерівність:

$$\mu_B(x) \le \mu_A(x). \tag{4.4}$$

Зауважимо, що коли $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$, то $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$.

В и з н а ч е н н я 4.5. Множини A та B збігаються (еквівалентні), якщо

$$\mu_B(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in E.$$

П р и к л а д 4.7. Нехай задано універсальну множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Розглянемо дві її підмножини:

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}2)\}.$$

Оскільки $\max\limits_{x \in A} \mu_A(x) = 1$, нечітка підмножина A – нормальна; для множини B $\max\limits_{x \in B} \mu_B(x) = 0{,}5 < 1$, тому множина B – субнормальна. Крім того $B \subset A$, оскільки $\mu_B(x_i) \le \mu_A(x_i), \ \forall x_i \in E$.

П р и к л а д 4.8. Розглянемо нечіткі підмножини:
$A = \{x|$ “величина x близька до 1”$\}$, $B = \{x|$ “величина x дуже близька до 1”$\}$.

Ясно, що $B \subset A$, тоді функції належності цих підмножин повинні задовольняти таку нерівність: $\mu_B(x) \le \mu_A(x), \ \forall x \in E$. Графічно ці функції можуть виглядати так, як це зображено на рис. 4.2.

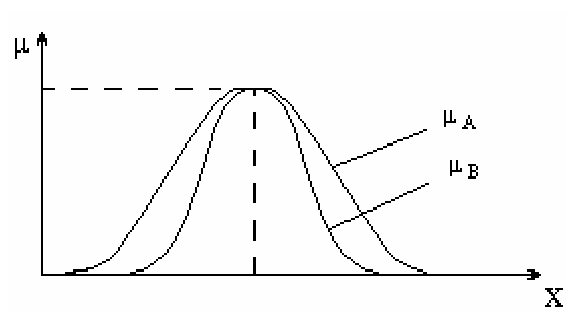


Рис. 4.2. Графіки функцій належності множин A та B, де $B \subset A$

4.3. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини являють собою розширення класу звичайних множин, то операції, які визначено над звичайними множинами, також можна виконувати в класі нечітких множин, але для них існують і спеціальні, тільки їм властиві операції. Розглянемо спочатку звичайні операції над нечіткими множинами і їх властивості.

Стосовно нечітких множин звичайні операції, наприклад об'єднання і перетин, можна визначити багатьма способами. Нижче ми приведемо кілька з них. Вибір конкретного способу визначення операції залежить від сенсу, якого вона набуває в рамках поданої задачі. Але, оскільки звичайні множини являють собою підклас нечітких множин, то природною вимогою при визначенні цих операцій є те, що вони повинні правильно виконуватись стосовно чітких множин.

Визначення 4.6. Об'єднанням нечітких підмножин A та B називається нечітка підмножина $A \bigcup B$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \tag{4.5}$$

Якщо $\{A_y\}$ являє собою скінченну або нескінченну сім'ю нечітких підмножин з функціями належності $\mu_{A_y}(x, y)$, де $y \in Y$ – параметр сім'ї, то об′єднання: $C = \bigcup\limits_y A_y$, множин цієї сім'ї являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_C(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{A_y}(x, y), \; x \in X. \tag{4.6}$$

Графічну інтерпретацію цього визначення подано на рис. 4.3. Тут нечіткі підмножини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ зображено графіками їх функцій належності, товста лінія відображає функцію належності об′єднання цих множин за визначенням 4.6.

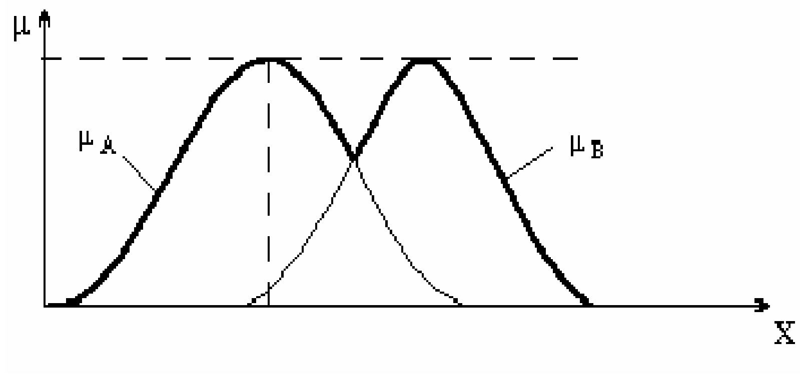


Рис. 4.3. Графік функції належності об'єднання нечітких множин A та B, коли $\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(\mathrm{x})\}, \quad x \in E$

П р и к л а д 4.9. Нехай на універсальній множині: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, подано нечіткі множини: $A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}2), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$ та $B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2), (x_5|0)\}$. Знайти їх об'єднання.

Розв'язування

Згідно з визначенням 4.6. отримуємо, що

$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$.

В и з н а ч е н н я 4.6, *а*. Об′єднання нечітких підмножин *A* та *B* можна визначати також, використовуючи обмежену суму їх функцій належності, а саме:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Цю формулу інакше можна записати таким чином:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}. . \tag{4.8}$$

Графічну інтерпретацію об′єднання, за визначенням 4.6, *а*, нечітких підмножин *A* та *B* з функціями належності μ_A й μ_B відповідно зображено на рис. 4.4.

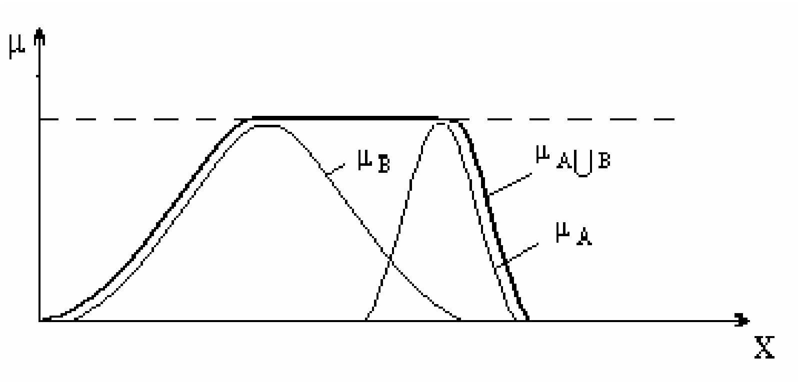


Рис. 4.4. Графік функції належності об'єднання нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.6, *а*

П р и к л а д 4.10. Узявши підмножини з прикладу 4.9, знайдемо їх об′єднання за визначенням 4.6, *а*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}7), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.6, *б*. Об′єднання нечітких множин можна знайти також через їх алгебраїчну суму, тобто об′єднання нечітких множин *A* та *B* являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \tag{4.9}$$

Графічне зображення функції належності об′єднання нечітких підмножин A та B за визначенням 4.6, *б*, якщо їх функціями належності є $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відповідно, подано на рис. 4.5.

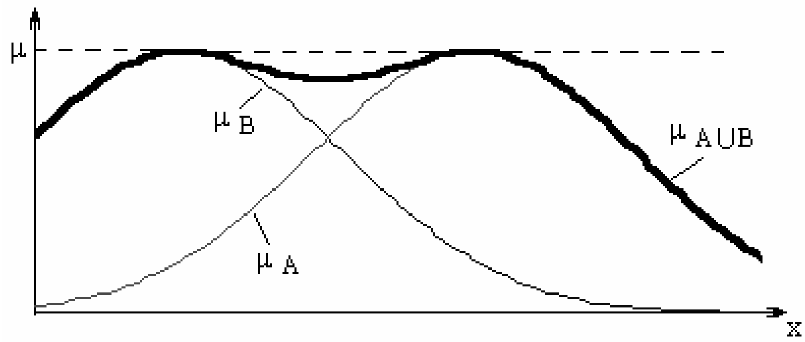


Рис. 4.5. Графік функції належності об'єднання нечітких множин A та B за визначенням 4.6, *б*

П р и к л а д 4.11. Знайдемо об′єднання підмножин A та B з прикладу 4.9 за визначенням 4.6, *б*. Отже,

$$A \bigcup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}6), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}6), (x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.7. Перетином нечітких підмножин A та B універсальної множини E називається нечітка підмножина з функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \qquad (4.10)$$

Її графік подано на рис. 4.6.

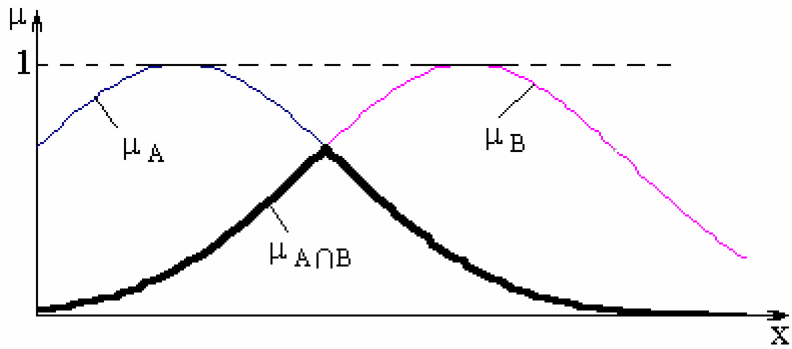


Рис. 4.6. Графік функції належності перетину нечітких множин A та B за визначенням 4.7

П р и к л а д 4.12. Визначимо перетин $A \bigcap B$ нечітких підмножин A та B універсальної множини E, використовуючи визначення 4.7, якщо

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}.$$

Отже, $A \bigcap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}$.

Якщо $\{A_y\}$ – скінченна або нескінченна сім'я нечітких підмножин, характерна функціями належності $\mu_{A_y}(x, y)$, де $y \in Y$ – параметр сім'ї, то перетин: $C = \bigcap\limits_y A_y$, її множин являє собою нечітку множину, функція належності якої

$$\mu_C(x) = \inf_{y \in Y} \mu_{A_y}(x, y), \quad x \in E. \tag{4.11}$$

Перетин нечітких підмножин можна визначити також іншим способом.

В и з н а ч е н н я 4.7, *а*. Перетин нечітких підмножин A та B – це обмежений добуток їхніх функцій належності, тобто

$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}. \tag{4.12}$$

Графічну інтерпретацію такого перетину бачимо на рис. 4.7. Тут $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відображають функції належності нечітких підмножин A та B відповідно. Товстою лінією зображено функцію належності перетину A та B.

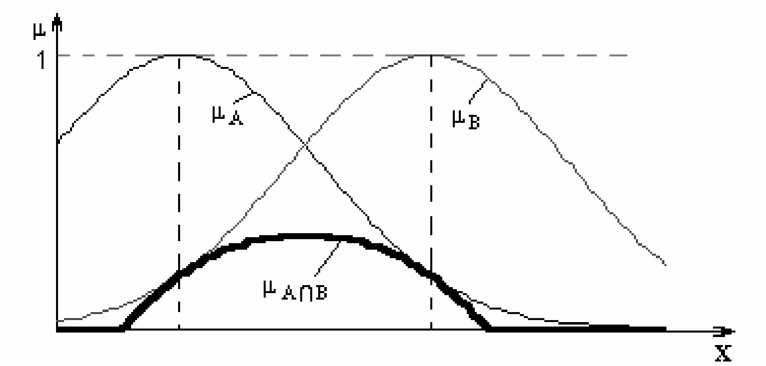


Рис. 4.7. Графік функції належності перетину нечітких множин за визначенням 4.7, *а*

Ще одне визначення перетину можна сформулювати, використовуючи алгебраїчний добуток їхніх функцій належності.

В и з н а ч е н н я 4.7, *б*. Перетином нечітких множин *A* та *B* назвемо нечітку множину, функція належності якої дорівнює алгебраїчному добутку функцій належності даних множин, тобто

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_{\mathrm{A}}(x)\mu_B(x). \tag{4.13}$$

Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ нечітких множин *A* і *B*, та їх перетину за визначенням 4.7, *б* зображено на рис. 4.8. Товста лінія графіка відповідає функції належності перетину.

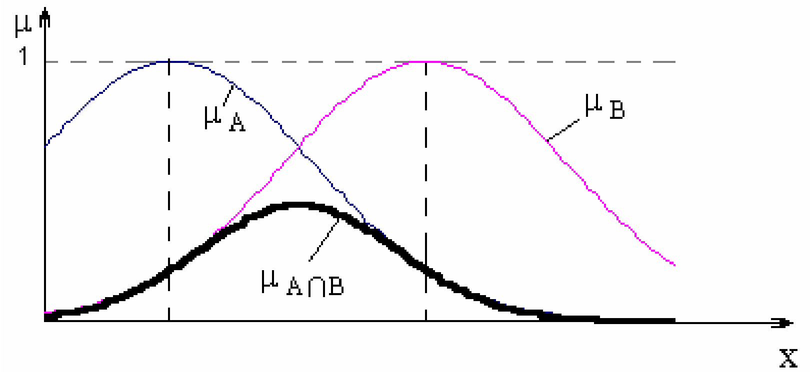


Рис. 4.8. Графік функції належності перетину нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.7, *б*

П р и к л а д 4.13. Знайдемо перетин нечітких підмножин *A* та *B*, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\},$$

Тоді за визначеннями 4.7, *а* отримуємо:

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}1), (x_5|0)\},$$

а за визначеннями 4.7, *б*:

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}28), (x_5|0)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.8. *Доповненням* нечіткої множини *A* в *E* називається нечітка множина $\overline{A}$, характерна такою функцією:

$$\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x),\ x \in E. \tag{4.14}$$

Зауважимо, що властивість: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, яка за всіх умов виконується для звичайних множин, не завжди справедлива стосовно нечітких множин.

Наприклад, якщо доповнення нечіткої множини визначити, як описано вище, а перетин обчислено за правилом 4.7 або 4.7, *б*, то $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$, але при обчисленні перетину за правилом 4.7, *а* властивість: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, буде мати місце. Який саме варіант перетину та об'єднання використовувати, обирає дослідник залежно від того, які властивості операцій істотні для розв'язуваної задачі.

П р и к л а д 4.18. Розглянемо таку нечітку підмножину: A = {множина чисел, що значно більші за 0}, її функцію належності зображено на рис. 4.9 суцільною кривою. Доповненням множини A буде нечітка множина чисел, які не набагато перевищують нуль. Цій множині відповідає функція належності, графік якої зображено на рис. 4.9 пунктирною лінією.

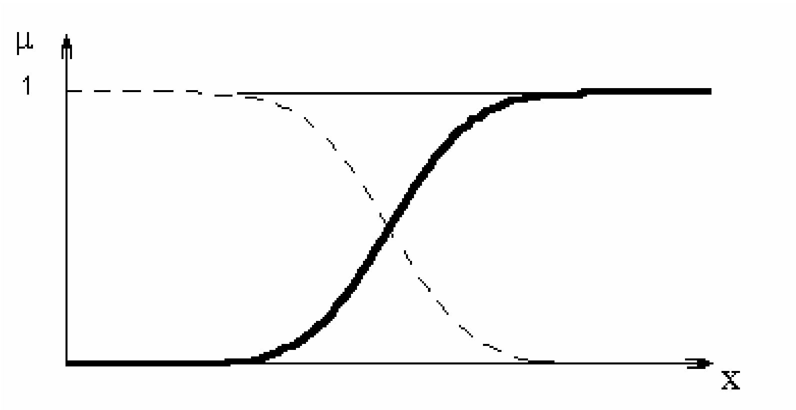


Рис. 4.9. Графіки функцій належності нечіткої множини A та її доповнення (до прикладу 4.18)

Непустий перетин множин A та $\overline{A}$ в цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, які «значно більші від нуля і не набагато перевищують нуль» одночасно. Непустота цієї нечіткої множини відображає той факт, що саме поняття «бути значно більшим» описано нечітко, тому деякі числа можуть певною мірою належати одночасно до обох множин. У деякому сенсі цей перетин ми можемо вважати «нечіткою межею» між множинами A та $\overline{A}$.

В и з н а ч е н н я 4.9. *Різницею* підмножин A та B універсальної множини E назвемо нечітку множину $A \backslash B$, характерну такою функцією належності:

$$\mu_{A \backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{коли } \mu_A(x) \geq \mu_B(x), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{4.15}$$

тобто

$$\mu_{A \backslash B}(x) = \max\{\mu_{\mathrm{A}}(x) - \mu_B(x), 0\}. \tag{4.16}$$

Знайдемо різницю нечітких підмножин A та B, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1),(x_2|0{,}4),(x_3|0),(x_4|0{,}7),(x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0{,}2),(x_4|0{,}4),(x_5|0)\},$$

Тоді за визначеннями 4.9, *а* отримуємо:

$$A \cap B = \{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|0{,}3),(x_5|0{,}8)\}.$$

4.4. Відстань між нечіткими підмножинами

Відстань Хеммінга. Спочатку згадаємо поняття відстані Хеммінга у застосуванні до звичайних підмножин.

Нехай A і B – дві звичайні підмножини скінченної множини: $E = \{x_1, \ldots, x_7\}$, причому

$$B = \{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|0),(x_6|1),(x_7|1)\},$$

$$A = \{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0),(x_6|1),(x_7|0)\}.$$

Під *відстанню Хеммінга* між A та B розуміють таку величину:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \qquad (4.17)$$

У нашому прикладі

$$d(A,B) = |1-0| + |0-1| + |0-0| + |1-0| + |0-0| + |1-1| + |0-1| = 4.$$

Відстань Хеммінга задовольняє всі аксіоми метрики, а саме:

1. $d(X,Y) \ge 0$,

2. $d(X,Y) = d(Y,X)$,

3. $d(X,Z) \le d(X,Y) + d(Y,Z)$,

4. $d(X,X) = 0$.

З а в д а н н я. Перевірити виконання цих аксіом по відношенню до відстані Хеммінга.

Для скінченої множини E, потужність якої $m(E) = n$ (тобто n – число елементів множини E), визначимо також відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\delta(A,B) = \left(\frac{1}{n}\right) d(A,B). \tag{4.18}$$

Для поданих вище підмножин A та B $\delta(A,B) = \frac{1}{7} \cdot d(A,B) = \frac{4}{7}$.

Очевидно, що завжди $0 \le \delta(A, B) \le 1$.

Узагальнення поняття відстані Хеммінга.

Розглянемо тепер три нечіткі підмножини A, B, $C \subset E$, тут E − скінченна множина потужності n, а саме:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \dots a_n}, \tag{4.19}$$

$$B = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid \dots b_n}, \tag{4.20}$$

$$C = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid \dots c_n}. \tag{4.21}$$

Припустимо, що ми визначили відстань $D(a_i, b_i)$ між a_i та b_i, $i = \overline{1,n}$, а також між (b_i, c_i) та (a_i, c_i), $i = \overline{1,n}$. Ці відстані будуть відповідати таким нерівностям:

$$D(a_i,c_i) \le D(a_i,b_i) + D(b_i,c_i), \ \forall\, i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.22}$$

Крім того, ми можемо записати, що

$$\sum_{i=1}^{n} D(a_i,c_i) \le \sum_{i=1}^{n} D(a_i,b_i) + \sum_{i=1}^{n} D(b_i,c_i), \tag{4.23}$$

а

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i,c_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i,b_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(b_i,c_i)}. \tag{4.24}$$

Ці дві формули дають дві оцінки відстані між підмножинами, зокрема вираз (4.23) дає лінійну оцінку, а (4.24) – квадратичну.

Розглянемо випадок, коли функції належності нечітких підмножин набувають своїх значень в інтервалі [0,1], тобто, коли у виразах (4.19) – (4.21) величини a_i, b_i, $c_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots n$.

Припустимо, що $D(a_i,b_i)=|a_i-b_i|$, $D(b_i,c_i)=|b_i-c_i|$, $D(a_i,c_i)=|a_i-c_i|$. Визначимо два типи відстаней.

Визначення 4.10. Узагальнена відстань Хеммінга або *лінійна відстань* обчислюється за такою формулою:

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|. \qquad (4.25)$$

Очевидно, що

$$0 \le d(A,B) \le n. \qquad (4.26)$$

Визначення 4.11. *Евклідову* або *квадратичну* відстань розраховують у такий спосіб:

$$e(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}. \qquad (4.27)$$

Ця відстань задовольняє умову:

$$0 \le e(A,B) \le \sqrt{n}. \qquad (4.28)$$

Визначимо також відносні відстані.

Узагальнена відносна відстань Хеммінга

$$\delta(A,B)=\frac{d(A,B)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|, \qquad (4.29)$$

для неї буде справедливою нерівність: $0 \le \delta(A,B) \le 1$.

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}, \qquad (4.30)$$

$$0 \le \varepsilon(A,B) \le 1.$$

Вибір тієї чи іншої відстані залежить від природи проблеми, про яку йдеться. Кожна з цих відстаней має свої переваги й недоліки, які стають зрозумілими при їхніх застосуваннях. Очевидно, що можна задати й інші відстані.

П р и к л а д 4.19. Визначити відстань між такими нечіткими множинами:

$$A = \frac{x_1}{0{,}7}\bigg|\frac{x_2}{0{,}2}\bigg|\frac{x_3}{0}\bigg|\frac{x_4}{0{,}6}\bigg|\frac{x_5}{0{,}5}\bigg|\frac{x_6}{1}\bigg|\frac{x_7}{0}, \quad B = \frac{x_1}{0{,}2}\bigg|\frac{x_2}{0}\bigg|\frac{x_3}{0}\bigg|\frac{x_4}{0{,}6}\bigg|\frac{x_5}{0{,}8}\bigg|\frac{x_6}{0{,}4}\bigg|\frac{x_7}{1}.$$

Розв'язування

$d(A, B) = |0{,}7 - 0{,}2| + |0{,}2 - 0| + |0 - 0| + |0{,}6 - 0{,}6| + |0{,}5 - 0{,}8| + |1 - 0{,}4| +$

$+ |0 - 1| = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}6 + 1 = 2{,}6.$

$$\delta(A, B) = \frac{1}{7} d(A, B) = \frac{2{,}6}{7} = 0{,}37.$$

$$e(A, B) = \sqrt{(0{,}7-0{,}2)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0-0)^2 + (0{,}6-0{,}6)^2 + (0{,}5-0{,}8)^2 + (1-0{,}4)^2 + (0-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}5)^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}6^2 + 1} = \sqrt{0{,}25 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}36 + 1} = \sqrt{1{,}74} = 1{,}32,$$

$e(A,B)$=1,32,

$$\varepsilon(A, B) = \frac{1}{7} \cdot 1{,}32 = 0{,}49.$$

Відстані $d(A, B)$, $e(A, B)$ можуть бути визначені й тоді, коли універсальна множина нескінченна (лічильна або ні), якщо відповідні суми й інтеграли збігаються. Якщо E – лічильна, то

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right|, \tag{4.31}$$

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}, \tag{4.32}$$

коли ці ряди збігаються.

Якщо $E = R$, то

$$d(A, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mu_A(x) - \mu_B(x)\right| dx \tag{4.33}$$

і

$$e(A, B) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}, \tag{4.34}$$

коли інтеграли збігаються.

Якщо ж $E \subset R$ обмежена зверху й знизу, то відповідні інтеграли завжди збігаються, а відстані $d(A, B)$ та $e(A, B)$ будуть скінченними. Тоді можна також визначити відносні відстані, а саме:

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{\beta - \alpha}, \tag{4.35}$$

$$\varepsilon(A,B) = \frac{e(A,B)}{\beta - \alpha}, \tag{4.36}$$

тут $d(A,B) = \int_{\alpha}^{\beta} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx$ і $e(A,B) = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$.

Розглянемо на прикладі геометричну інтерпретацію поняття відстані між нечіткими множинами. Нехай множини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ являють собою підмножини універсальної множини: $E \subset R^1$, $E = [\alpha, \beta]$, а графіки їхніх функцій належності $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ зображено на рис. 4.10. Тоді лінійна відстань між цими множинами відповідає площі заштрихованої фігури, яка обмежена кривими функцій $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$.

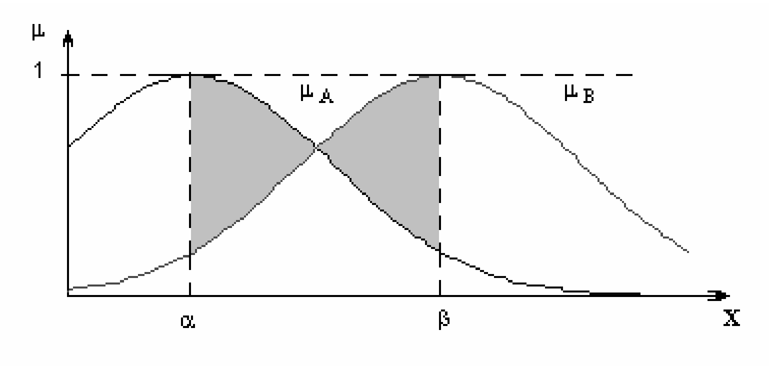


Рис. 4.10. Геометрична інтерпретація лінійної відстані між нечіткими множинами

4.5. Звичайна підмножина, найближча до нечіткої. Індекс нечіткості

Виникає питання, яка звичайна підмножина (або підмножини) перебуває на найменшій евклідовій відстані від даної нечіткої множини A. Легко бачити, що це буде звичайна підмножина (вона позначається $\underline{A}$), для якої

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0\text{, коли } \mu_A(x_i) < 0{,}5\text{,} \\ 1\text{, коли } \mu_A(x_i) > 0{,}5\text{,} \\ 0 \text{ або } 1\text{, коли } \mu_A(x_i) = 0{,}5\text{.} \end{cases} \tag{4.39}$$

Для визначеності приймемо, що $\mu_{\underline{A}}(x_i)=0$, коли $\mu_A(x_i)=0{,}5$. Отже, можна сформулювати визначення.

В и з н а ч е н н я 4.12. *Найближчою* до нечіткої множини A звичайною множиною називається множина $\underline{A}$, характерна такою функцією належності:

$$\mu_{\underline{A}}(x_i)=\begin{cases}0\,, \text{ коли } \mu_A(x_i)\le 0{,}5\,,\\ 1\,, \text{ коли } \mu_A(x_i)>0{,}5.\end{cases} \tag{4.40}$$

П р и к л а д 4.20. Нехай $E=\{\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \,\}$, $A\subset E$ та

$$A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0{,}9),(x_8|0{,}4)\}.$$

найближчою до множини A звичайною множиною буде така:

$$\underline{A}=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|1),(x_8|0)\}.$$

Використовуючи введені раніше поняття відстаней для нечітких підмножин, визначимо два *індекси нечіткості*.

Лінійний індекс нечіткості визначається через узагальнену відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}d(A,\underline{A}). \tag{4.41}$$

Квадратичний індекс нечіткості визначається через відносну евклідову відстань, а саме:

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}e(A,\underline{A}). \tag{4.42}$$

Множник 2 в чисельнику введено для того, щоб забезпечити утримання індексу нечіткості в таких межах:

$$0\le \nu(A,\underline{A})\le 1, \tag{4.43}$$

$$0\le \eta(A,\underline{A})\le 1. \tag{4.44}$$

Коли $E=[a,b]\subset R$, то лінійний індекс нечіткості обчислюють за такою формулою:

$$\nu(A,B)=\frac{2}{b-a}\int_a^b\left|\mu_A(x)-\mu_{\underline{A}}(x)\right|dx. \tag{4.45}$$

Геометричну інтерпретацію найближчої звичайної множини та індексу нечіткості бачимо на рис. 4.11. Тут товста лінія показує функцію належності найближчої звичайної множини $\underline{A}$ до нечіткої множини A, описуваної функцією належності μ_A. Лінійний індекс нечіткості відповідає нормалізованій площі заштрихованої фігури.

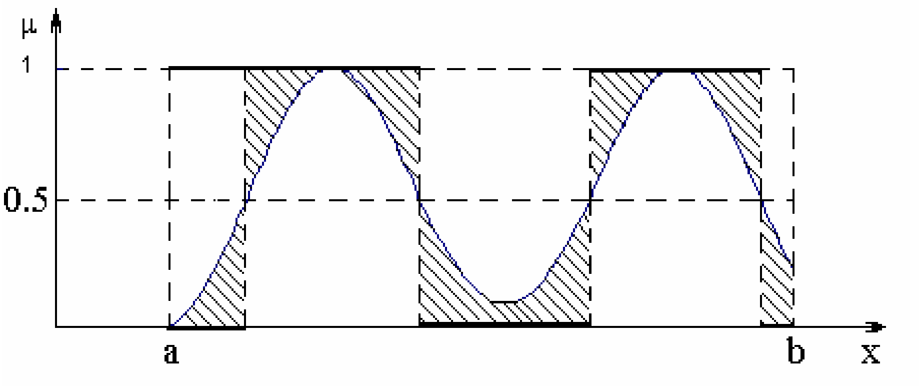


Рис. 4.11. Геометрична інтерпретація індексу нечіткості

Індекси нечіткості можна також визначити іншим способом, а саме:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i),\mu_{\overline{A}}(x_i)), \tag{4.46}$$

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A^2(x_i),\mu_{\overline{A}}^2(x_i)\}}. \tag{4.47}$$

Дійсно, для будь-якого елемента $x_i \in E$

$$\left|\ \mu_A(x_i)-\mu_{\underline{A}}(x_i)\ \right| = \mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \tag{4.48}$$

Тоді формулу (4.41) для обчислення лінійного індексу нечіткості можна переписати в зручному вигляді:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \tag{4.49}$$

З цього виразу 4.49 стає очевидним, що $\nu(A)=\nu(\overline{A})$.

П р и к л а д 4.21. Нехай $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $A\subset E$,

$$A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0{,}9),(x_8|0{,}4)\},$$

$$\overline{A}=\{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}7),(x_5|0),(x_6|1),(x_7|0{,}1),(x_8|0{,}6)\},$$

Обчислимо індекс нечіткості множини A. Для цього спочатку визначимо перетин поданих вище множин:

$$A\cap\overline{A}=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|0),(x_6|0),(x_7|0{,}1),(x_8|0{,}4)\}.$$

Тепер обчислимо лінійний індекс нечіткості:

$$\nu(A)=\frac{2}{8}(0{,}2+0{,}2+0{,}5+0{,}3+0+0+0{,}1+0{,}4)=0{,}425.$$

Нехай A та B – дві нечіткі підмножини E. З’ясуємо, як співвідносяться індекси нечіткості перетину $A\bigcap B$ та об′єднання $A\bigcup B$ цих нечітких підмножин із індексами нечіткості вихідних підмножин?

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 4.22. Нехай $E=\{x_1, x_2, x_3\}$, $A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}1)\}$, $B=\{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}8)\}$. Обчислимо індекси нечіткості вихідних множин та їх перетину:

$$\overline{A}=\{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}9)\},\quad \nu(A)=\frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}1)\approx 0{,}46.$$

$$\overline{B}=\{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\},\quad \nu(B)=\frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2)\approx 0{,}6\,.$$

$$A\bigcap B=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}1)\},\ \overline{A\bigcap B}=\{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}9)\},$$

$$\nu(A\bigcap B)=\frac{2}{3}(0{,}2+0{,}3+0{,}1)\approx 0{,}4\,.$$

Очевидно, що в цьому випадку індекс нечіткості перетину менший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

П р и к л а д 4.23. Нехай $E=\{x_1, x_2, x_3\}$, $A'=\{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}8)\}$, $B'=\{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\}$. Обчислимо індекси нечіткості цих множин та їх перетину:

$$\overline{A}'=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}2)\},\qquad \nu(A')=\frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}2)\approx 0{,}53\,,$$

$$\overline{B'}=\{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}8)\},\qquad \nu(B')=\frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2)=0{,}60\,,$$

$$A'\bigcap B'=\{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}2)\},\quad \overline{A'\bigcap B'}=\{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}8)\}$$

$$\nu(A'\bigcap B')=\frac{2}{3}(0{,}4+0{,}4+0{,}2)\approx 0{,}66\,.$$

У цьому прикладі індекс нечіткості перетину більший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

Таким чином, ми бачимо, що індекс нечіткості перетину підмножин A та B може бути як меншим, так і більшим від індексів нечіткості вихідних підмножин. Те саме можна сказати і про об′єднання нечітких підмножин. Сформульоване твердження буде справедливим також і для квадратичного індексу нечіткості.

4.6. Звичайна підмножина α-рівня нечіткої множини

Визначення 4.13. Нехай $\alpha \in [0,1]$. Підмножиною α-рівня нечіткої підмножини A (позначається A_α) будемо називати звичайну множину, яка включає тільки ті елементи множини A, функція належності яких не менша за α, тобто

$$A_\alpha = \{x \,|\, \mu_{\mathrm{A}}(x) \ge \alpha\}. \tag{4.50}$$

Приклад 4.24. Нехай нечітку множину A задано в такому вигляді:

$$A = \frac{x_1 \;|\; x_2 \;|\; x_3 \;|\; x_4 \;|\; x_5 \;|\; x_6 \;|\; x_7}{0{,}8 \;|\; 0{,}1 \;|\; 1 \;|\; 0{,}3 \;|\; 0{,}6 \;|\; 0{,}2 \;|\; 0{,}5}.$$

Визначимо множини рівня 0,3 та 0,5 цієї нечіткої підмножини, а саме:

$$A_{0,3} = \frac{x_1 \;|\; x_2 \;|\; x_3 \;|\; x_4 \;|\; x_5 \;|\; x_6 \;|\; x_7}{1 \;|\; 0 \;|\; 1 \;|\; 1 \;|\; 1 \;|\; 0 \;|\; 1}, \qquad A_{0,3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\},$$

$$A_{0,5} = \frac{x_1 \;|\; x_2 \;|\; x_3 \;|\; x_4 \;|\; x_5 \;|\; x_6 \;|\; x_7}{1 \;|\; 0 \;|\; 1 \;|\; 0 \;|\; 1 \;|\; 0 \;|\; 1}, \qquad A_{0,5} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}.$$

Приклад 4.25. Нехай універсальна множина $X = \{1, 2, \dots, 6\}$, а функцію належності нечіткої множини $A \subset X$ подано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Тоді для множини A можна виписати такі множини рівня:

$A_{0,1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,3} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A_{0,5} = \{3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,7} = \{4, 5, 6\}$,

$A_{0,9} = \{5, 6\}$, $A_1 = \{6\}$.

Приклад 4.26. Нехай $X = R^+$, графік функції належності μ_A нечіткої множини A зображено на рис. 4.12, *а*. Множини рівня α_1 та α_2 та графіки їхніх функцій належності зображено на рис. 4.12, *б* та 4.12, *в*.

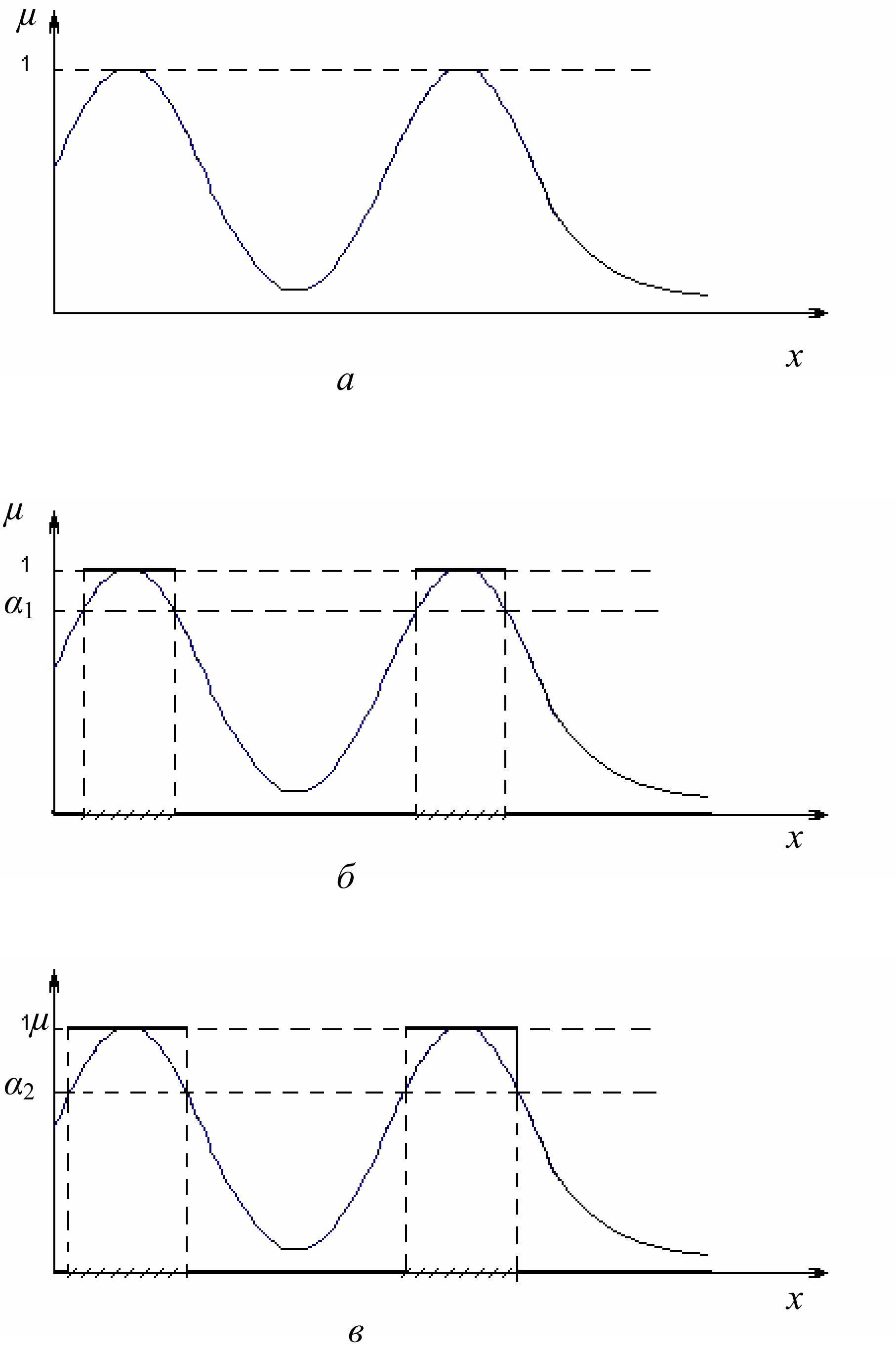


Рис. 4.12. Множини рівня та їх співвідношення

Як видно з цих прикладів, для всяких значень α_1 та α_2, що задовольняють такі умови: $0 < \alpha_1 \le 1$, $0 < \alpha_2 \le 1$ і $\alpha_2 < \alpha_1$, відповідні множини рівня A_{α_1} та A_{α_2} будуть пов'язані таким співвідношенням:

$$A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}.$$

Множинами рівня зручно користуватися для формулювання та аналізу деяких задач прийняття рішень, ми також будемо їх застосовувати при розв'язуванні задач нечіткого математичного програмування.

Нехай $(A \bigcup B)_\alpha$ та $(A \bigcap B)_\alpha$ являють собою множини α-рівня об′єднання й перетину нечітких множин A та B відповідно. Розглянемо їхній зв'язок із множинами рівня A_α та B_α вихідних множин. Якщо для операцій перетину та об′єднання прийняти визначення 4.7 та 4.6. відповідно, то цей зв'язок буде таким:

$$(A \bigcup B)_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha = A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

При використанні визначень 4.6, *б* та 4.7, *а* буде справедливим лише включення, тобто

$$(A \bigcup B)_\alpha \supset A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha \subset A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

Для нечітких підмножин буде справедливою сформульована нижче теорема про декомпозицію.

Т е о р е м а 4.1. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на множини рівня, тобто подати її в такому вигляді:

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha, \tag{4.51}$$

причому функція належності множини αA_α: $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$, а об′єднання нечітких множин виконується за всіма значеннями $\alpha \in [0,1]$,

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \mu_A(x) \ge \alpha, \\ 0, \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

П р и к л а д 4.27. Для множини A та її множин рівня з прикладу 4.25 ми можемо записати, що

$$A = 0{,}1\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}3\{2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}5\{3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}7\{4, 5, 6\} \bigcup$$
$$\bigcup 0{,}8\{5, 6\} \bigcup 1\{6\}.$$

Формула розкладання буде правильною й тоді, коли універсальна множина має потужність континуума.

П р и к л а д 4.28. Нехай нечітка множина $A \subset R^+$ задана своєю функцією належності: $\mu_A(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}, x \in R^+$. Розглянувши відрізок $[\alpha, 1]$, де $0 < \alpha \le 1$, можемо записати, що

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1\,, \mu_A(x) \in [\alpha,1], \\ 0\,, \mu_A(x) \overline{\in} [\alpha,1], \end{cases}$$

таким чином, у цьому прикладі

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1\,, \ x \geq \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ 0\,, \ \ x < \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\,. \end{cases}$$

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу нечітких множин.

Розглянемо послідовність звичайних підмножин $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \subset A_n$, та задамо значення α_1 для множини A_1, α_2 для множини A_2 і т. д., α_n для A_n, причому $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, тоді, використовуючи формулу (4.51), одержимо нечітку підмножину A.

П р и к л а д 4.29. Нехай подано звичайну множину: $X = \{x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_{10}\}$, її підмножини:

$A_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_7, x_9\}$,

$A_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}$,

$A_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}$,

$A_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$,

а також числа: $\alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 0{,}4$, $\alpha_4 = 0{,}1$.

Використавши формулу (4.51), отримаємо нечітку множину A.
Побудуємо спочатку множини $\alpha_i A_i$, за такою формулою:

$$\mu_{\alpha_i A_i}(x_j) = \alpha_i \mu_{A_i}(x_j) = \begin{cases} \alpha_i\,, x_j \in A_i\,, \\ 0\,, \ \ x_j \overline{\in} A_i. \end{cases}$$

Тоді отримуємо такі підмножини:

$\alpha_1 A_1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,9	0	0	0,9	0,9	0	0,9	0	0,9	0

,

$\alpha_2 A_2 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,5	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0

,

$\alpha_3 A_3 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,4	0,4	0	0,4	0,4	0,4	0,4	0	0,4	0

,

$$\alpha_4 A_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{array}.$$

Об'єднавши ці нечіткі множини, отримаємо шукану нечітку множину:

$$A = \bigcup_{\alpha_i} \alpha_i A_i ,$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}9 & 0{,}4 & 0 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}.$$

4.7. Спеціальні операції над нечіткими множинами

Ми вже розглянули ряд операцій над нечіткими множинами. Вони були подібні до операцій із звичайними множинами, але, виступаючи в ролі нової структури, нечіткі множини мають і нові властивості, а тому стосовно них можуть бути введені нові операції, які не мають сенсу для звичайних множин.

Визначимо спочатку декартів добуток нечітких множин.

В и з н а ч е н н я 4.14. *Декартовим добутком* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ нечітких множин $A_i \subset X_i$, $i = 1, \dots , n$ буде нечітка множина A у декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1),..\mu_{An}(x_n)\}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X. \qquad (4.52)$$

П р и к л а д 4.30. Визначимо декартів добуток нечітких множин A та B, якщо $A = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \end{array}$, $B = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}$.

Відповідно до визначення 4.14. маємо, що

$$A \times B = \begin{array}{c|ccccc} \dfrac{x_i \in B}{x_i \in A} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ x_2 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_3 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_5 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$$

В и з н а ч е н н я 4.15. *Опуклою комбінацією* нечітких підмножин $A_1, \dots, A_n$ універсальної множини X називається нечітка множина A з функцією належності, що має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \tag{4.53}$$

тут $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,..,n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

По відношенню до звичайних множин, на відміну від декартового добутку, операція опуклої комбінації не має сенсу.

В и з н а ч е н н я 4.16. Операції концентрування (CON) й розтягування (DIL) задамо таким чином:

$$\text{CON}\, A = A^2, \tag{4.54}$$

$$\text{DIL}\, A = A^{0,5}, \tag{4.55}$$

при цьому

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x),\ x \in X,\ \alpha > 0. \tag{4.56}$$

П р и к л а д 4.31. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A \subset E$,

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}25 \mid 0{,}9 \mid 0{,}4 \mid 0{,}6 \mid 1 \mid 0}.$$

Визначимо множини: $B = \text{CON}\, A$, $C = \text{DIL}\, A$, а саме:

$$B = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}0625 \mid 0{,}81 \mid 0{,}16 \mid 0{,}36 \mid 1 \mid 0},$$

$$C = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}5 \mid 0{,}95 \mid 0{,}64 \mid 0{,}78 \mid 1 \mid 0}.$$

П р и к л а д 4.32. Нехай нечітку множину $A \subset R^1$ подано своєю функцією належності: $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1 + |x - a|}$, тоді $\mu_{A^2}(x) = \dfrac{1}{(1 + |x - a|)^2}$.

Графічно ці множини можна зобразити таким чином:

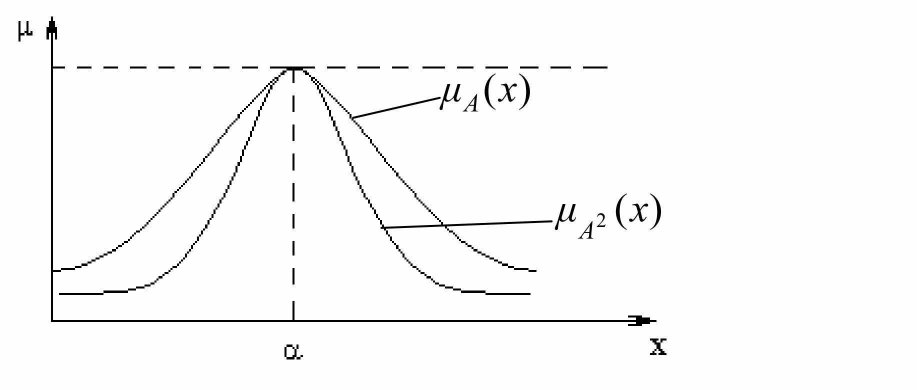


Рис. 4.13. Графіки функцій належності нечітких множин *A* та CON *A*.

Застосування операції концентрування до нечіткої множини означає зменшення її “нечіткості”. У реальних задачах це може означати надходження нової інформації, що дозволяє більш точно (чітко) описати подану нечітку множину. Аналогічно операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуацій, пов’язаних із втратою інформації.

4.8. Нечіткі відношення

В и з н а ч е н н я 4.17. Нечітким відношенням *R* на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$. Вона характеризується такою функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0,1]$.

Значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції показує міру або ступінь, з якою виконується відношення *R* між елементами *x* та *y*. Зрозуміло, що звичайні відношення ми можемо вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

П р и к л а д 4.32. Розглянемо два подібні відношення на інтервалі [0,1]. Це звичайне відношення «більше або дорівнює» *R* (≥) та нечітке відношення «значно більше» $\widetilde{R}$ $(>>)$. Пари, пов’язані відношенням *R*, зображено на рис. 4.14, а відношенням $\widetilde{R}$ – на рис. 4.15.

Ящо має місце нечітке відношення *R*, то існують пари елементів, для яких воно виконується чітко, є пари, для яких це відношення не виконується, а також деяка проміжна зона, де пари мають той чи інший ступінь належності, тобто для них відношення виконується лише певною мірою залежно від ситуації. Нечітку межу в цьому випадку зображено змінною щільності штрихування.

Так само як і при використанні звичайних відношень (див. розділ 2), нечіткі відношення можна задавати матрицею, графом або розрізами.

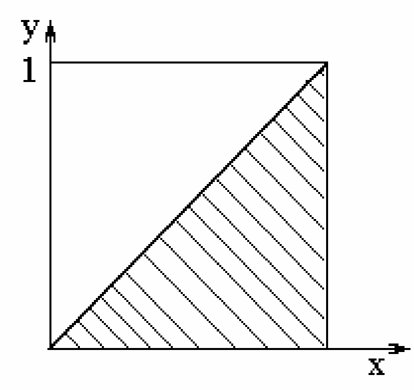


Рис. 4.14. Графічне зображення відношення «$\geq$»

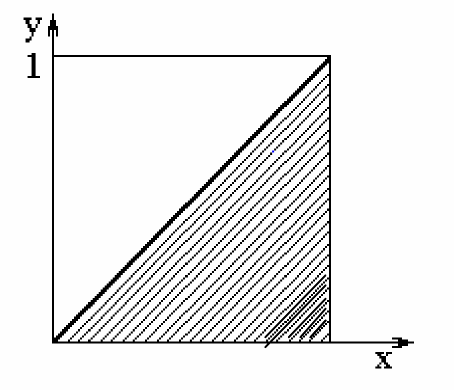


Рис. 4.15. Графічне зображення відношення «$>>$»

Матриця нечіткого відношення аналогічна матриці звичайного відношення, тільки її елементами можуть бути числа від 0 до 1.

Коли нечітке відношення задають за допомогою графа, то кожній його дузі присвоюється число з інтервалу [0,1], яке означає ступінь виконання нечіткого відношення для даної пари.

Верхні й нижні розрізи нечіткого відношення являють собою нечіткі множини, визначені таким чином:

$$R^{+}(x)=\{y|\mu_R(y,x):\ y\in X,\ \mu_R(y,x)>0\},$$

$$R^{-}(x)=\{y|\mu_R(x,y):\ y\in X,\ \mu_R(x,y)>0\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.18. Носієм нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку $X\times X$, що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} R=\{(x,y)|(x,y)\in X\times X,\ \mu_R(x,y)>0\}.$$

Носій нечіткого відношення можна розуміти як звичайне відношення на множині X, що пов'язує пари (x,y), для яких відношення R виконується з ненульовою мірою.

П р и к л а д 4.33. Нехай відношення R – «приблизно дорівнює». Задамо його на множині: $X=\{1,2,3,4,5\}$, за допомогою матриці. Вона може мати такий вигляд:

$$R=\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді носієм описаного нечіткого відношення буде таке звичайне відношення:

$$\operatorname{supp} R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що конкретний вигляд матриці відношення залежить від сенсу задачі й того, що розуміють під виразом «приблизно дорівнює».

4.9. Операції над нечіткими відношеннями

У попередніх підрозділах було розглянуто операції над нечіткими множинами та звичайними відношеннями. Операції над нечіткими відношеннями певною мірою поєднують у собі властивості і тих, і інших. Іншими словами, деякі з них являють собою аналоги відповідних операцій для звичайних відношень, але існують і такі, що притаманні лише нечітким відношенням. Наприклад, операції об'єднання та перетину нечітких відношень можна так само, як і для нечітких множин, визначити кількома способами.

В и з н а ч е н н я 4.19. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A та B, тобто в декартовому добутку X^2 подано дві нечіткі підмножини A та B. Тоді нечіткі множини: $C = A \cap B$ та $D = A \cup B$, назвемо відповідно *перетином* та *об'єднанням* нечітких відношень A та B на множині X.

П р и к л а д 4.34. Відношення A та B подано в такому вигляді:

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо перетин та об'єднання цих відношень, використовуючи визначення 4.6 та 4.7, а саме:

$$A \cap B = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{vmatrix}, \qquad A \cup B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 4.20. Нечітке відношення *B містить* нечітке відношення *A*, якщо для нечітких множин *B* та *A* має місце включення: $A \subset B$, тобто їх функції належності задовольняють нерівність:

$$\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y), \quad \forall x,y \in X .$$

Приміром, у розглянутому вище прикладі 4.32 відношення «≥» містить відношення «>>».

В и з н а ч е н н я 4.21. Якщо *R* – нечітке відношення на множині *X*, то нечітке відношення $\overline{R}$, функція належності якого $\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$, назвемо *доповненням* відношення *R* у множині *X*.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до *R* нечітке відношення R^{-1} на множині *X* визначається таким чином:

$$x\, R^{-1}\, y \;\Leftrightarrow\; y\, R\, x, \quad \forall x,y \in X ,$$

або з використанням термінології функцій належності

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x), \;\; \forall x,y \in X.$$

На відміну від звичайних відношень, добуток (або композицію) нечітких відношень можна визначити багатьма способами.

Розглянемо деякі з можливих визначень цієї операції.

В и з н а ч е н н я 4.22. *Максимінний* добуток нечітких відношень *A* та *B* на множині *X* визначається такою функцією належності:

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x,z),\ \mu_B(z,y)\}.$$

Якщо вихідні відношення задано на скінченій множині *X*, то матриця їх максимінного добутку дорівнює максимінному добутку матриць відношень *A* та *B*.

В и з н а ч е н н я 4.23. *Мінімаксний* добуток нечітких відношень *A* та *B* на множині *X* буде дорівнювати нечіткому відношенню, функція належності якого

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_A(x,z),\ \mu_B(z,y)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.24. *Максмультиплікативний* добуток нечітких відношень *A* та *B* характеризується функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \sup_{z \in X}\{\mu_A(x,z) \cdot \mu_B(x,z)\}.$$

П р и к л а д 4.34. Нехай за допомогою матриць задано нечіткі відношення A та B.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,2 \\ 0,7 & 1 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 1 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо композиції відношень A та B, користуючись визначеннями 4.22 – 4.24, тоді маємо:
максимінну композицію буде описано такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix},$$

мінімаксну композицію – матрицею такого вигляду:

$$A \cdot B_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0.7 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \end{vmatrix},$$

а максмультиплікативну композицію – такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\cdot} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,12 & 0,4 & 0 \\ 1 & 1 & 0,4 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

4.10. Властивості нечітких відношень

Розглянемо тепер, чим характерні нечіткі відношення.

В и з н а ч е н н я 4.25. Нечітке відношення R на множині X називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x, x) = 1.$$

Якщо рефлексивне відношення задано матрицею, то її головна діагональ включає тільки одиниці.

Прикладом рефлексивного відношення буде відношення «приблизно дорівнює», задане на множині чисел.

Визначення 4.26. Нечітке відношення R буде *антирефлексивним*, якщо $\mu_R(x,x)=0$, $\forall x \in X$.

Доповнення рефлексивного відношення буде антирефлексивним. Прикладом антирефлективного відношення на множині чисел може бути відношення «значно більше».

Визначення 4.27. Нечітке відношення R на множині X називається симетричним, якщо для будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x).$$

Матриця симетричного нечіткого відношення, поданого в скінченній множині, буде симетричною. Його прикладом буде відношення «сильно відрізнятися за величиною».

Визначення 4.28. Відношення R на множині X буде асиметричним, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x,y)>0, \Rightarrow \mu_R(y,x)=0, \text{ або } \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0, \qquad \forall x,y \in X,$$

іншими словами:

$$\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}=0, \quad \forall x,y \in X.$$

Асиметричним виступає відношення «значно більше».

Визначення 4.29. Відношення R на множині X буде антисиметричним, якщо виконується така умова:

$$\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}=0, \quad x \neq y.$$

Визначення 4.30. Нечітке відношення R на множині X називається транзитивним, якщо $R^2 \subset R$.

Очевидно, що властивість транзитивності залежить від способу визначення добутку відношень. Згідно з введеними раніше визначеннями можна назвати три її види: максимінна (max min), мінімаксна (min max) і максмультиплікативна (max ·) транзитивність.

Легко побачити, що $R^2_{max\cdot} \subseteq R^2_{maxmin}$ Отже, з max min-транзитивності випливає максмультиплікативна транзитивність.

Прикладом max min-транзитивного є відношення «значно більше» на множині чисел.

Приклад 4.35. Перевірити на транзитивність нечітке відношення, що має такий вигляд:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Для перевірки даної властивості необхідно обчислити max min, min max та max-мультиплікативну композиції даного відношення.

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Оскільки $R^2_{\max\min} \subset R$, то нечітке відношення R є max min-транзитивним, отже, воно буде й max-мультиплікативно транзитивним. Перевіримо відношення на min max-транзитивність. Відповідна йому композиція

$$R^2{}_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2_{\min\max} \not\subset R$.

Отже, відношення R не буде min max-транзитивним.

В и з н а ч е н н я 4.31. *Транзитивним замиканням* нечіткого відношення R буде нечітке відношення $\hat{R}$, яке визначається за таким правилом:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

Вочевидь, при визначенні транзитивного замикання необхідно спочатку встановити тип операції добутку відношень.

Стосовно транзитивного замикання має місце таке твердження:

Т е о р е м а 4.2. Транзитивне замикання будь-якого бінарного відношення R являє собою найменше транзитивне бінарне відношення, що містить у собі R.

Зауважимо, що α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня вихідного нечіткого відношення, тобто

$$\left(\hat{R}\right)_{\alpha} = \hat{R}_{\alpha}, \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Наведемо формулювання двох теорем, які дозволяють побудувати транзитивне замикання в деяких випадках.

Т е о р е м а 4.3. Якщо існує число k, для якого $R^k = R^{k+1}$, то

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k.$$

Т е о р е м а 4.4. Якщо R являє собою нечітке відношення на скінченній множині E, причому $m(E) = n$, то $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n$ або існує число: $k \leq n$, для якого $R^k = R^{k+1}$.

П р и к л а д 4.36. Побудуємо транзитивне (max min) замикання нечіткого відношення R, заданого такою матрицею:

$$R = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Для цього обчислимо послідовно R^2, R^3, а саме:

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \qquad R^3_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Отримуємо, що $R^2 = R^3$, отже, $\hat{R} = R \cup R^2$ і набуває такого вигляду:

$$\hat{R} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

4.11. Класифікація нечітких відношень

Усі типи нечітких відношень, залежно від характених їм властивостей, можна поділити на три класи.

До першого класу належать симетричні відношення, більшість яких характеризують схожість або відмінність між об'єктами множини X. Такі відношення можна задавати за допомогою зваженого графа з неорієнтованими дугами.

Другий клас утворюють антисиметричні відношення. Ці відношення задають на множині відношення впорядкованості, домінування. Їм відповідають орієнтовні зважені графи з однобічною орієнтацією дуг.

Третій клас включає решту відношень.

Відношення кожного класу в свою чергу можуть бути поділені на підкласи, залежно від виконання умов рефлексивності або антирефлексивності. Схематично класифікацію нечітких відношень подано в таблиці 4.1, більш детальну класифікацію можна знайти в збірнику [15]. Розглянемо деякі з нечітких відношень.

Нечітким *відношенням передпорядку* називається бінарне нечітке відношення, що має властивості транзитивності й рефлексивності.

Якщо R являє собою передпорядок, то мають місце рівності:
$R = R^2 = ... = R^k = \hat{R}.$

Передпорядком на множині: $X = \{A, B, C, D, E\}$, буде, наприклад відношення, що має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нечіткий півпорядок – це транзитивне відношення, що не має властивості рефлексивності.

Симетричні, рефлексивні відношення називаються *відношеннями схожості.* Вони показують міру подібності («близькості») двох елементів.

Симетричні, антирефлексивні відношення називають відношеннями відмінності.

Для відношень схожості й відмінності має місце таке твердження: якщо R – нечітке відношення схожості, то $\overline{R}$ – відношення відмінності.

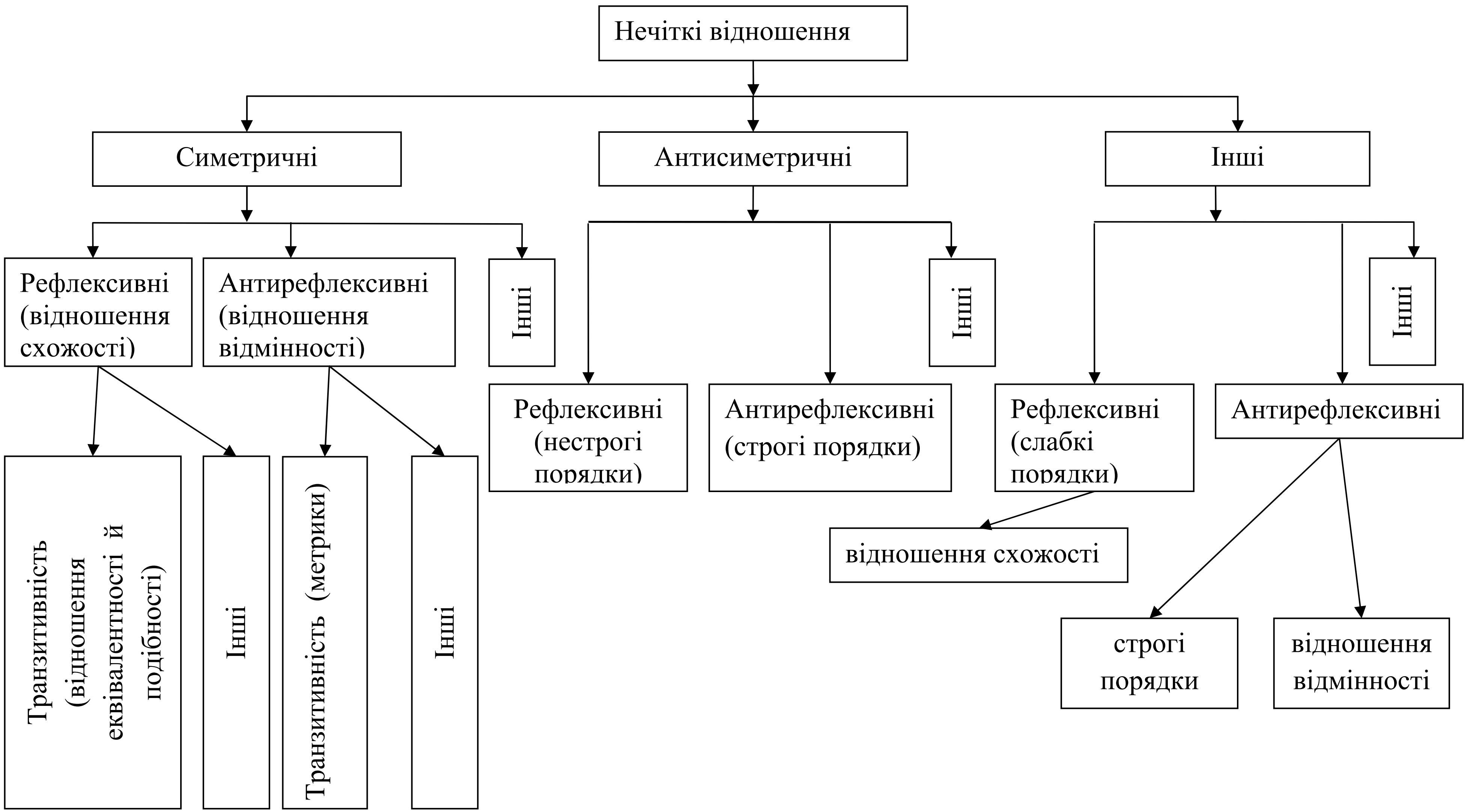
Серед відношень схожості особливо виділяють відношення подібності.

Визначення 4.32. *Відношенням подібності* або *еквівалентності* називається нечітке бінарне відношення, якому притаманні транзитивність, рефлексивність та симетричність.

Очевидно, що це відношення являє собою передпорядок.

Таблиця 4.1

Класифікація нечітких відношень



Наведемо приклади нечітких відношень подібності:

$$R_1 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ C & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ D & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ E & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{array}$$

а також

$$R_2 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & a & a & a & a \\ B & a & 1 & a & a & a \\ C & a & a & 1 & a & a \\ D & a & a & a & 1 & a \\ E & a & a & a & a & 1 \end{array},$$

коли $a \in [0,1]$, будуть відношеннями подібності

З а в д а н н я: перевірити транзитивність цих відношень.

П р и к л а д 4.40. Нечітке відношення $x\ R\ y$, де $x, y \in [0, +\infty)$, визначено такою функцією належності:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y < x, \quad k > 1, \\ 1, & y=x, \\ e^{-k(x+1)}, & y > x, \quad k>1. \end{cases}$$

З а в д а н н я. Перевірити самостійно, чи воно є відношенням подібності.

Кожен α-рівень нечіткого відношення подібності являє собою звичайне відношення еквівалентності. Нагадаємо, що всяке відношення еквівалентності задає на множині деяке розбиття. Отже, кожний α-рівень нечіткого відношення подібності також задає на цій множині розбиття. Із властивості α-рівнів нечіткого відношення випливає також вкладеність відповідних розбиттів множини X. Причому із зменшенням величини α відбувається укрупнення класів еквівалентності. Таким чином, нечітке відношення еквівалентності, на відміну від звичайного відношення схожості, задає на множині X ієрархічну сукупність її розбиттів на неперетинні класи еквівалентності. Це пояснюється тим, що умова транзитивності накладає досить сильні обмеження на значення ступенів належності $\mu(x, y)$. А саме, для нечіткого відношення подібності має місце така теорема.

Т е о р е м а 4.5. Нехай $R \subset E \times E$ – відношення подібності і x, y, z – три елементи множини E. Задамо, що

$$c = \mu_R(x, z) = \mu_R(z, x),$$

$$a = \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x),$$

$$c = \mu_R(y, z) = \mu_R(z, y).$$

Тоді $c \geq a = b$ або $a \geq b = c$, або $b \geq c = a$, тобто з величин a, b, c принаймні дві рівні між собою, а третя не менша від них.

В и з н а ч е н н я 4.33. Нечітке бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності й симетричності, називається *відношенням відмінності.*

Приклади відношень відмінності:

1. Відношення на множині $\{A, B, C, D, E\}$, задане матрицею такого вигляду:

	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

2. Нечітке відношення, задане такою функцією належності:

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+1)}, & y < x, \quad k > 1, \\ 0, & y = x, \\ 1 - e^{-k(x+1)}, & y > x, \quad k > 1, \end{cases}$$

являє собою відношення відмінності, воно утворюється внаслідок заміни: $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$, у прикладі 4.40.

Міру відмінності можна вважати відстанню між елементами множини (якщо додати транзитивність), причому різні види транзитивності задають відповідно різні види відстаней.

В и з н а ч е н н я 4.34. Нечітким *відношенням порядку* називається бінарне відношення, яке має властивості рефлексивності, транзитивності й антисиметричності.

Відрізняють відношення строгого й нестрогого порядку.

Строгий порядок являє собою антирефлексивне, асиметричне й транзитивне відношення.

Відношення нестрогого порядку – рефлексивні, антисиметричні й транзитивні.

4.12. Відображення нечітких множин. Принцип узагальнення

У багатьох задачах прийняття рішень виникає необхідність у розширенні області визначення X поданого відображення або відношення шляхом включення до неї поряд з окремими елементами множини X її довільних нечітких підмножин.

Наприклад, на множині керувань (керуючих впливів) U зафіксовано відображення $f: U \to V$, яке описує функціонування керованої системи. Для кожного керування $u \in U$ його образ: $v = f(u)$, відображає реакцію даної системи на вибір цього керування. Якщо вибране керування описано нечітко, наприклад, у формі нечіткої підмножини $\mu(u)$ множини U, то для відшукання реакції системи на нього необхідно визначити образ $\mu(u)$ при відображенні f.

Спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин називається *принципом узагальнення*.

Л.А. Заде запропонував принцип узагальнення, який базується на визначенні образу нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні.

Нехай подане відображення φ: $X \to Y$, і A – деяка підмножина множини X, що характеризується функцією належності $\mu_A(x)$.

В и з н а ч е н н я 4.35. Образ нечіткої множини A при відображенні φ визначається як нечітка підмножина множини Y, що являє собою сукупність пар:

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)), \qquad x \in X,$$

тут μ_B – функція належності образу, $\mu_B : Y \to [0,1]$.

Легко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати в такому вигляді:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \qquad y \in Y, \tag{4.57}$$

причому множина $\varphi^{-1}(y)$ для кожного фіксованого елемента $y \in Y$ визначається за таким правилом:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x | \, x \in X, \varphi(\mathrm{x}) = y\},$$

тобто являє собою множину всіх тих елементів $x \in X$, образом яких при відображенні φ буде y.

П р и к л а д 4.42. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, а множина $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$ задано таблицею:

$$\varphi = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

На множині X задамо нечітку підмножину

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}3 \mid 0{,}5 \mid 1 \mid 0 \mid 0{,}5 \mid 0{,}8 \mid 0{,}4}$$

Знайдемо образ B нечіткої підмножини A при відображенні φ. Відповідно до визначення 4.35

$$\mu_B(y_1) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_1)} \mu_A(x),$$

$$\varphi^{-1}(y_1) = \{x_1, x_4, x_6\},$$

тоді $\mu_B(y_1) = \sup\limits_{x \in \{x_1, x_4, x_6\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}3;\, 0;\, 0{,}8\} = 0{,}8$.

Аналогічно

$$\mu_B(y_2) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_2)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_2, x_3\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\, 1\} = 1,$$

$$\mu_B(y_3) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_3)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_5, x_7\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\, 0{,}4\} = 0{,}5.$$

Таким чином, образом множини A при відображенні φ буде нечітка множина $B \subset Y$, яка має такий вигляд:

$$B = \frac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{0{,}8 \mid 1 \mid 0{,}5}.$$

Застосуємо тепер принцип узагальнення для розширення області визначення нечіткого відображення.

Відображення множини X у множину Y назвемо *нечітким*, якщо кожному елементу $x \in X$ воно ставить у відповідність деяку нечітку підмножину множини Y. Описується нечітке відображення функцією належності $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;\ 1]$, причому функція $\mu_\varphi(x_0, y)$ для кожного фіксованого елемента: $x = x_0$, являє собою функцію належності нечіткої підмножини в множині Y, яка є образом елемента x_0 при відображенні φ.

Отже, нехай дано нечітке відображення $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ і $\mu_A(x)$ – нечітка підмножина в множині X. Якщо для відшукання образу цієї нечіткої множини при відображенні μ_φ застосувати принцип узагальнення за правилом (4.57), то отримаємо таку сукупність пар:

$$\left(\mu_\varphi(x, y), \mu_A(x)\right), \quad x \in X,$$

тут функція $\mu_\varphi(x, y)$ для кожного фіксованого елемента x задає нечітку підмножину множини Y.

У результаті можна зробити висновок, що образ нечіткої множини $\mu_A(x)$ в даному випадку є достатньо складним об'єктом, а саме нечітким підкласом усіх нечітких підмножин множини Y. Отже, виникає потреба ввести, принцип узагальнення в іншій формі.

В и з н а ч е н н я 4.36. Образом B нечіткої множини $A \subset X$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ називається нечітка підмножина множини Y, характерна такою функцією належності:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\}. \tag{4.58}$$

В основі цього визначення лежить максимінний добуток (композиція) нечітких відношень.

Коли φ – звичайне відображення, тобто $\mu_\varphi(x, y) = 1$, якщо $y = \varphi(x)$, то формула (4.58) перетворюється на (4.57).

У багатьох задачах вихідне нечітке відображення μ_φ залежить від n змінних, тобто має такий вигляд: $\mu_\varphi :\ X \times Y \to [0,1]$, тут $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Нехай у множині X подано нечітку підмножину μ_A. У загальному випадку функція належності цієї підмножини має такий вигляд:

$$\mu_A(x_1, \ldots, x_n) = \min\left(\mu_1(x_1), \ldots, \mu_n(x_n); \nu(x_1, \ldots, x_n)\right),$$

тут μ_i, $i = 1, \ldots, n$ та ν – відомі функції належності нечітких підмножин множини X_i, $i = 1, \ldots, n$ та X відповідно. Застосовуючи в цьому випадку принцип узагальнення згідно з правилом (4.58), отримуємо таку формулу для функції належності образу нечіткої підмножини μ_A:

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in X} \min\{\mu_1(x_1),\dots,\mu_n(x_n),\nu(x_1,\dots,x_n),\mu_\varphi(x_1,\dots,x_n,y)\}. \quad (4.59)$$

П р и к л а д 4.42. Маємо множини: $X = \{x_1,\dots,x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ і нечітку підмножину A множини X, яку задано таким чином:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}5 \mid 0{,}8 \mid 1 \mid 0 \mid 0{,}1 \mid 0{,}4 \mid 1}.$$

Крім того задано нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, функцію належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ подано таблицею:

$$\mu_\varphi = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0{,}3 & 0 & 0{,}8 \\ x_7 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{array}$$

Необхідно визначити образ $B \subset Y$ множини A при нечіткому відображенні φ.

Розв'язування

Будемо застосовувати визначення 4.36. Тоді для обчислення функції належності множини *B* використаємо максимінний добуток функцій μ_A та μ_φ. Отримані результати подано нижче.

$$(0.5; 0{,}8; 1; 0; 0{,}1; 0{,}4; 1) \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix} = (1; 0{,}8; 0{,}8).$$

Таким чином, $B = \dfrac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{1 \mid 0{,}8 \mid 0{,}8}.$

П р и к л а д 4.43. Поширимо область визначення арифметичної операції додавання на клас “нечітких чисел”, тобто на клас нечітких підмножин числової осі.

Операція додавання в множині чисел R^1 являє собою відображення $\varphi : R^1 \times R^1 \to R^1$, тобто $\varphi(r_1, r_2) = r = r_1 + r_2$.

Припустимо, що μ_1, μ_2 – два нечітких числа ($\mu_1, \mu_2 : R^1 \to [0;1]$). Образ пари (μ_1, μ_2) при відображенні φ назвемо їх сумою: $\mu_\Sigma = \mu_1 + \mu_2$. Тоді, використовуючи формулу (4.59), одержуємо, що

$$\mu_\Sigma(r) = \sup_{\substack{r_1, r_2 \in R^1 \\ r_1 + r_2 = r}} \min\{\mu_1(r_1), \mu_2(r_2)\}. \qquad (4.60)$$

Зокрема, коли нечіткі числа μ_1 та μ_2 являють собою інтервали $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$, то згідно з формулою (4.60) отримуємо, що

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, \mathrm{b}_1 + b_2].$$

В и з н а ч е н н я 4.37. Прообразом A нечіткої множини $B \subset Y$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$, називається об’єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині B.

Якщо образ нечіткої множини μ_φ позначити через $A{\cdot}\mu_\varphi$, то із включення $A{\cdot}\mu_\varphi \subset Y$ отримуємо таку умову для визначення прообразу множини:

$$\sup_{x \in X} \min\{\mu_2(x), \mu_\varphi(x, y)\} \le \mu_B(y), \qquad \forall y \in Y. \qquad (4.61)$$

Явний вираз для функції належності прообразу подає наведена нижче теорема. Для її формулювання уведемо такі множини:

$$N = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x, y) > \mu_B(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y, (x,y) \in N\},$$

$$N_y = \{x | x \in X, (x,y) \in N\},$$

$$X^\circ = \{x | x \in X, N_x \ne \varnothing\}.$$

Т е о р е м а 4.6. У введених вище позначеннях нечітка множина A (прообраз множини B) описується такою функцією належності:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), & x \in X^\circ, \\ 1, & x \in X \backslash X^\circ. \end{cases}$$

Легко перевірити, що коли відображення μ_φ чітке, тобто φ являє собою звичайне відображення $\varphi: X \to Y$ і функція належності

$$\mu_\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y = \varphi(x), \\ 0 \text{ для всіх інших пар } (x, y) \in X \times Y, \end{cases}$$

то $\mu_A(x) = \mu_B(\varphi(x)), \quad \forall x \in X$.

Висновки

Нечіткі множини виступають як узагальнення поняття звичайної множини в тих випадках, коли елемент може належати множині тільки певною мірою. Теорія нечітких множин дозволяє більш адекватно описувати ситуації невизначеності, зумовлені неможливістю чітко описати переваги або множину допустимих альтернатив.

Операції над нечіткими множинами можна визначити різними способами, залежно від конкретних задач, за умови, що вони будуть правильно виконуватись стосовно чітких множин.

Нечіткі відношення являють собою розширення поняття бінарного відношення на клас нечітких множин. Їх властивості зумовлені ознаками нечітких множин і бінарних відношень.

Принцип узагальнення – це спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин.

Контрольні питання

1. Що означає характеристична функція множини?
2. Дайте визначення нечіткої множини.
3. Що називають носієм нечіткої множини?
4. Які операції над нечіткими множинами ви знаєте?
5. Як можна визначити доповнення нечіткої множини? Об'єднання та перетин нечітких множин?
6. Чим пояснюється існування кількох операцій об'єднання й перетину нечітких множин?
7. Які спеціальні операції над нечіткими множинами Ви знаєте?
8. Який сенс мають операції концентрування й розтягування?

9. Яким чином обчислюється відстань Хеммінга при розгляді скінченної множини? Лічильної множини? Множини потужності континуума?

10. Яким чином обчислюють евклідову відстань між множинами?

11. Який геометричний сенс має лінійна відстань між множинами?

12. Яку властивість характеризує індекс нечіткості множини? Яким чином його обчислюють?

13. Чи залежить індекс нечіткості перетину (об'єднання) множин від індексів нечіткості вихідних множин?

14. Чи змінюється індекс нечіткості множини внаслідок операцій концентрування та розтягування?

15. Дайте визначення найближчої чіткої множини до даної нечіткої?

16. Яку множину називають множиною рівня α нечіткої множини?

17. Сформулюйте теорему про розкладання нечіткої множини на множини рівня.

18. Сформулюйте теорему про декомпозицію нечітких множин.

19. Що називають нечітким відношенням?

20. Як можна задавати нечіткі відношення?

21. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?

22. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлексивним)?

23. Яке нечітке відношення називають симетричним, антисиметричним, асиметричним?

24. Яке нечітке відношення називають транзитивним? Яким чином пов'язані між собою різні види транзитивності нечітких відношень?

25. Що являє собою транзитивне замикання нечіткого відношення?

26. За якими ознаками проводиться класифікація нечітких відношень?

27. Дайте визначення відношень передпорядку, строгого та нестрогого порядку, еквівалентності, схожості, подібності, відмінності, переваги. На яких властивостях відношень базується ця класифікація?

28. Що являє собою відображення нечіткої множини?

29. Сформулюйте принцип узагальнення стосовно відображення нечітких множин.

30. Що являє собою образ нечіткої множини при звичайному відображенні?

31. Що являє собою нечітке відображення?

32. Як можна визначити образ нечіткої множини при нечіткому відображенні?

33. Що являє собою прообраз нечіткої множини при звичайному відображенні? При нечіткому відображенні?

Завдання до розділу 4

1. Дано такі нечіткі множини:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1 & 0{,}9 \end{array};$$

$$B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}9 \end{array};$$

$$C\text{:}\quad \mu_C(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, & \textit{якщо } x \in (0;6), \\ 0, & \textit{якщо } x \notin (0;6) \end{cases};$$

$$D\text{:}\quad \mu_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & \textit{якщо } x \notin (0;6), \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Визначити їхні носії.

2. Визначити перетин та об’єднання множин: а) A та B , б) C та D із завдання 1 (за трьома визначеннями).

3. Визначити доповнення множин A, C.

4. Виконати операції концентрування та розтягування множин B та D .

5. Розкласти нечіткі множини A та B (із завдання 1) на множини рівня.

6. Знайти найближчі до множин A, B, C, D із завдання 1 звичайні множини .

7. Знайти відстань Хеммінга та евклідову відстань між множинами: а) A та B, б) C та D.

8. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин B та D.

9. Обчислити лінійний індекс нечіткості множини, функція належності якої $\mu(x) = 1-(x-1)^2$, де $x \in [0;\, 2]$.

10. Навести приклад симетричного й рефлексивного нечіткого відношення.

11. Навести приклад транзитивного й рефлексивного нечіткого відношення.

12. Задати за допомогою матриці нечіткі відношення а) «приблизно дорівнює», б) «значно більше» на множині чисел від 1 до 6.

13. Знайти max min, min max та max-мультиплікативну композиції нечітких відношень R_1 та R_2, які задано таким чином:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,45 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,4 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Які властивості має кожне з поданих нижче нечітких відношень:

$$\text{а)}\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,45 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$\text{в)}\ R_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.7 & 1 & 0.2 \\ 0.20 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad \text{г)}\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,45 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

15. Нехай задано множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	1	0	0
x_6	0	0	1
x_7	0	0	1

Знайти образ $\varphi(A)$ множини A при відображенні φ, якщо множину A задано таким чином:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1 & 0,9 \end{array}.$$

16. Нехай маємо такі множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею:

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,5	0
x_2	0	1	0,9
x_3	0,8	0,6	0,5
x_4	0,7	0,3	0,9
x_5	1	0,7	0,6
x_6	0	0	1
x_7	0,2	0,7	1

Визначити множину $\varphi(A)$ при відображенні φ, якщо множину A задано в такому вигляді:

$$A= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1 & 0,9 \end{array} .$$

РОЗДІЛ 5

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Мета розділу: вивчення методів прийняття рішень за наявності нечітких вихідних даних та їх застосування до розв’язування прикладних задач.

5.1. Задача досягнення нечітко визначеної мети (підхід Белмана – Заде)

Нехай X – універсальна множина альтернатив, тобто сукупність альтернатив, серед яких ОПР здійснює вибір (інакше кажучи, сукупність *можливих виборів* ОПР). *Нечіткою метою* в множині X будемо називати деяку її нечітку підмножину. Позначимо цю підмножину G. Нечітка мета описується функцією належності $\mu_G : X \to [0,1]$. Чим більший ступінь належності альтернативи x до нечіткої множини мети μ_G, тобто чим більше значення $\mu_G(x)$, тим більшим буде ступінь досягнення цієї мети, якщо вибрати альтернативу x за розв’язок. Нечіткі обмеження, або множина допустимих альтернатив, також описуються нечіткими підмножинами множини X. Позначимо їх $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Будемо вважати, що нам відомі функції належності цих нечітких множин.

Розв’язати задачу означає досягнути мети й задовольнити обмеження, причому в даній постановці задачі слід говорити не просто про досягнення мети, а про її реалізацію тією чи іншою мірою. Необхідно також враховувати й ступінь виконання обмежень.

Основним у підході Белмана – Заде до розв’язування цієї задачі, є те, що мету прийняття рішень і множину альтернатив розглядають як рівноважні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. Це дозволяє подати розв’язок задачі у відносно простому вигляді. Зокрема, у підході Белмана – Заде вимоги задачі враховуються у такий спосіб.

Нехай, наприклад, деяка альтернатива x забезпечує досягнення мети (інакше – відповідає меті) зі ступенем $\mu_G(x)$ і задовольняє обмеження (або є допустимою) зі ступенем $\mu_C(x)$. Тоді *нечітким розв’язком* D задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин мети й обмежень, тобто $D = G \cap C$. Це означає, що розв’язок задачі нечітко визначеної мети також являє собою деяку нечітку підмножину універсальної множини альтернатив X. Якщо перетин множин визначати за правилом 4.7, то функція належності розв’язку μ_D буде мати такий вигляд:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

У разі, коли в задачі наявні кілька цілей та обмежень, нечіткий розв’язок можна описати такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x),..., \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x),..., \mu_{C_m}(x)\}.$$

П р и к л а д 5.1. Нехай маємо універсальну множину альтернатив $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. На цій множині задано такі множини мети й обмежень:

G – "x має бути близькою до 5" (нечітка мета),

C_1 – "x не повинна бути близькою до 4" (перше обмеження),

C_2 – "x повинна бути близькою до 6" (друге обмеження).

Їхні функції належності задано таблицею:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{C_1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
$\mu_{C_2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1	0,8	0,6	0,4	0,2

Тоді функція належності нечіткого розв'язку задачі, згідно з підходом Белмана – Заде, набуває на множині X таких значень:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

Вочевидь, такому розв'язку характерна невизначеність, а саме, ми отримуємо не одну альтернативу, а деяку нечітку множину альтернатив. Якщо ОПР не здатна опрацювати такий тип розв'язку, то можна рекомендувати йому альтернативу, яка має найбільший ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Таку альтернативу називають *максимізуючим розв'язком.*

Це один із найбільш поширених у літературі способів вибору єдиної альтернативи.

У наведеному вище прикладі таким розв'язком буде число 5, оскільки ступінь його належності до нечіткого розв'язку максимальна.

П р и к л а д 5.2. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, коли мета й обмеження подано такими функціями належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, & \text{якщо } x \in (0; 6), \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 6); \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & \textit{якщо} \quad x \in (0; 6), \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розв'язування

Щоб розв'язати цю задачу, використаємо підхід Белмана – Заде, тобто

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Для зручності зобразимо графіки функцій належності мети й обмежень (див. рис. 5.1).

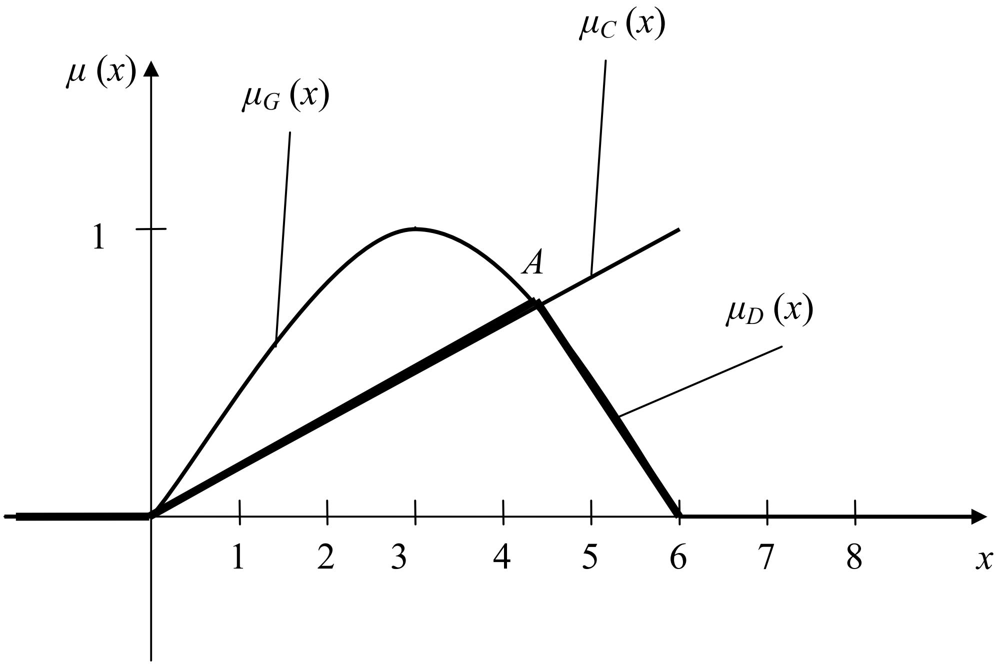


Рис. 5.1. Графічна інтерпретація розв'язування задачі досягнення нечітко визначеної мети

Тут товстою лінією показано функцію належності нечіткого розв'язку *D*. Опишемо її аналітично. Для цього знайдемо точки перетину функцій належності мети й обмеження.

Складемо рівняння:

$$-\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1 = \frac{1}{6}x.$$

Розв'язавши його, отримаємо координати двох точок перетину: $x_1 = 0$ та $x_2 = 4{,}5$. Тепер можемо записати функцію належності розв'язку в аналітичному вигляді, тобто

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, \ \textit{якщо} \ \ x\in(0;4{,}5),\\ -\frac{1}{9}(x-3)^2+1, \ \textit{якщо} \ x\in(4{,}5;6),\\ 0 \qquad\qquad \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

Максимізуючим розв'язком буде альтернатива: $x_2 = 4{,}5$, а ступінь її належності до нечіткого розв'язку $\mu_D(x)=0{,}75$.

Розглянута вище ситуація прийняття рішень характеризувалася тим, що й мета, і обмеження були підмножинами однієї і тієї самої універсальної множини. Більш універсальною може бути інша постановка задачі, коли нечітка мета й обмеження є підмножинами різних універсальних множин. Розглянемо її.

Нехай, як і раніше, X – універсальна множина альтернатив, і нехай подано відображення $\varphi: X \to Y$, значення якого (елементи множини Y) можна розуміти як реакції деякої системи на вихідні дії $x \in X$ або як деякі оцінки вибору відповідних альтернатив. Відображення φ вважаємо однозначним.

Нечітка мета при цьому описується у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини реакцій (оцінок) Y, тобто функцією належності $\mu_G : Y \to [0,1]$, а обмеження являють собою нечіткі підмножини вихідної множини X, функції належності яких $\mu_{C_i} : X \to [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Задача при цьому зводиться до першої постановки (тобто до випадку, коли мета виступає нечіткою підмножиною множини X). Розглянемо її.

Визначимо нечітку множину альтернатив станів $\overline{\mu}_G$, які забезпечують досягнення даної мети μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні φ, тобто

$$\overline{\mu}_G(x) = \mu_G(\varphi(x)).$$

Після цього вихідну задачу розглядають як задачу досягнення нечіткої мети $\overline{\mu}_G$ при тих самих нечітких обмеженнях.

В и з н а ч е н н я 5.1. Нехай G й C – нечіткі множини мети (у множині Y) та обмежень (у множині X). *Нечітким розв'язком* задачі досягнення мети G при обмеженнях C назвемо максимальну множину D, яка має такі властивості:

1. $D \subset C$ (розв'язок є допустимою альтернативою);
2. $\varphi(D) \subset G$ (досягнення нечіткої мети), де $\varphi(D)$ – образ D при нечіткому відображенні φ.

У разі, коли задано нечітке відображення множини альтернатив у множину реакцій або оцінок, нечіткий розв'язок можна знайти, користуючись визначенням прообразу, яке подано в попередньому розділі.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, Y – універсальна множина оцінок, а також задано нечітке відображення X в Y, функція належності якого

$\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$. Кожній альтернативі це відображення ставить у відповідність її нечітку оцінку. Нечіткі обмеження описуються функцією належності $\mu_C(x)$.

За теоремою 4.6. прообраз D визначають таким чином:

$$N = \{(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y,\ \mu_\varphi(x,y) > \mu_G(y)\},$$

$$N_x = \{\, y \mid y \in Y,\ (x,y) \in N \},$$

$$X^0 = \{\, x \mid x \in X,\ N_x \neq \varnothing \},$$

$$\mu_{\widetilde{D}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(y), & x \in X, \\ 1, & x \in X \setminus X^0. \end{cases}$$

Нечіткий розв’язок тоді описується такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\, \mu_{\widetilde{D}}(x), \mu_C(x) \,\},$$

або

$$\mu_{\widetilde{D}}(x) = \begin{cases} \min\left\{\mu_C(x), \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(x)\right\}, & x \in X,^0 \\ \\ \mu_C(x), & x \in X \backslash X^0. \end{cases}$$

Якщо необхідно вибрати конкретну альтернативу, то за розв’язок задачі можна, наприклад, обрати ту, ступінь належності якої до нечіткого розв’язку μ_D максимальний, тобто альтернативу, що реалізує величину $\max\limits_{x \in X} \mu_D(x)$. Однак, цей вибір не можна вважати достатньо обґрунтованим, бо існують також інші способи вибору єдиної альтернативи.

Отже, підхід Белмана – Заде спирається на можливість симетричного опису множин мети й обмежень у вигляді нечітких підмножин однієї і тієї самої універсальної множини. Це дозволяє описати розв’язок задачі в досить простому вигляді. Однак, не всяка задача прийняття рішень може бути сформульована таким чином.

Зауваження. Іноді важливість мети й обмежень враховують за допомогою вагових коефіцієнтів. Тоді розв’язок задачі записується у такий спосіб:

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_n \mu_{G_n}(x), \nu_1 \mu_{C_1}(x), \ldots, \nu_m \mu_{C_m}(x)\},$$

тут $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \nu_1, \ldots, \nu_m$ – вагові коефіцієнти цільових функцій та обмежень відповідно.

Цей підхід також не можна вважати достатньо обґрунтованим.

5.2. Задачі нечіткого математичного програмування та їх класифікація

Стандартна задача математичного програмування звичайно являє собою задачу максимізації (або мінімізації) заданої функції на даній множині допустимих альтернатив, яку описано системою нерівностей. Наприклад,

$$f(x) \to \max,$$
$$\varphi_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x \in X,$$

де X – задана множина альтернатив, $f : X \to R^1$ й $\varphi_i : X \to R^1$, $i = 1,\dots,m$ – задані функції.

При моделюванні в такій формі реальних задач дослідник часто може мати у своєму розпорядженні лише нечіткі описи функцій f і φ або їхніх параметрів, нечітко може бути описана й множина альтернатив *X*. Нечіткий опис ситуації прийняття рішень може, наприклад, відображати неадекватність інформації про цю ситуацію або бути формою наближеного опису, достатнього для розв'язування даної задачі.

Більше того, у деяких випадках точно визначена множина обмежень (допустимих альтернатив) може виявитися лише наближеною до реальної ситуації в тому сенсі, що в задачі, яка моделюється, альтернативи поза множиною обмежень можуть не бути недопустимими, а виявляються лише тією чи іншою мірою менш бажаними для ОПР. Прикладом такої ситуації може слугувати задача, де множиною допустимих альтернатив виступає сукупність всіляких способів розподілу ресурсів, які ОПР збирається вкласти в дану операцію. У цьому випадку, мабуть, недоцільно заздалегідь вводити чітку межу множини допустимих альтернатив (розподілів), оскільки може трапитися так, що розподіл ресурсів, який перебуває за цією межею, дасть ефект, що переважить "меншу" його бажаність для ОПР. Таким чином, нечіткий опис може виявитися більш адекватним реальності, ніж в деякому сенсі довільно прийнятий чіткий опис.

Форми нечіткого опису інформації можуть бути різними, звідси й походить відмінність у математичних постановках відповідних задач *нечіткого математичного програмування* (НМП). Наведемо деякі з цих постановок, згрупованих у п'ять описаних нижче типів задач [17].

З а д а ч а І. Максимізація заданої звичайної функції на нечіткій множині альтернатив. Тобто маємо таку задачу:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

тут $f : X \to R^1$, $\mu_C : X \to [0,1]$.

Опишемо підходи до розв'язування цієї задачі.

1. *Зведення до задачі нечітко визначеної мети.*

Для цього вихідна цільова функція нормується в такий спосіб:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu_C} f(x)} \to \max .$$

Отриману функцію $\bar{f}(x)$ вважають функцією належності нечіткої мети. При цьому значення $\bar{f}(x)$ буде ступенем досягнення мети при виборі альтернативи $x \in X$. Це дозволяє безпосередньо застосувати до розв'язування цієї задачі підхід Белмана – Заде. Раціональним вважається вибір альтернативи, яка має максимальний ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто реалізує таку величину:

$$\max_{x \in X} \min\left\{\mu_C(x), \bar{f}(x)\right\}.$$

2. *Зведення до задачі багатокритерійної оптимізації.*

У цьому підході враховується той факт, що потрібно досягти максимального значення функції і максимальної належності розв'язку задачі до множини допустимих альтернатив. Тобто розв'язується така багатокритерійна задача:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max, \\ & \mu_C(x) \to \max, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Цей підхід детальніше буде розглянуто далі.

З а д а ч а II. Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування.

Його можна отримати, якщо "пом'якшити" обмеження, тобто припустити можливість деякого їх порушення, в стандартній задачі математичного програмування:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max, \\ & \varphi(x) \le 0, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Крім того, замість максимізації функції $f(x)$, можна прагнути досягнення певного фіксованого значення цієї функції, причому різним відхиленням $f(x)$ від цієї величини приписувати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим менший ступінь його допустимості). Нечітку задачу при цьому можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &f(x) \geq z_\circ, \\ &\varphi(x) \tilde{\leq} 0, \\ &x \in X, \end{aligned}$$

тут символ $\sim$ означає нечіткість відповідних нерівностей.

Опишемо один із способів формалізації таких задач.

Припустимо, що $z_\circ$ – задана величина цільової функції $f(x)$, досягнення якої вважається достатнім для виконання мети прийняття рішення, та існують (подані ОПР) два граничних рівні a та b, причому нерівність: $f(x) < z_\circ - a$ означає сильне порушення умови: $f(x) \geq z_\circ$, а $\varphi(x) > b$ – сильне порушення умови $\varphi(x) \leq 0$. Тоді можна записати множини мети й обмежень, використовуючи такі функції належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq z_\circ - a, \\ \mu(x,a), & z_\circ - a < f(x) < z_\circ, \\ 1, & f(x) \geq z_\circ, \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \geq b, \\ \nu(x,b), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \leq 0, \end{cases}$$

тут $\mu : X \to [0,1]$ та $\nu : X \to [0,1]$ – деякі функції, що описують міру виконання відповідних нерівностей з погляду ОПР та зважаючи на конкретну задачу прийняття рішень.

Таким чином, вихідну задачу буде сформульовано у вигляді задачі досягнення нечітко визначеної мети, до якої можна застосувати підхід Белмана – Заде, або можна звести її до задачі багатокритерійної оптимізації такого вигляду:

$$\begin{aligned} &\mu_G(x) \to \max, \\ &\mu_C(x) \to \max, \\ &x \in X. \end{aligned}$$

Детальніше методи розв’язування цієї задачі буде розглянуто у наступному пункті цього посібника.

З а д а ч а III. Дано нечітко описану функцію, яку необхідно “максимізувати”, тобто відображення $\mu_\varphi : X \times R^1 \to [0,1]$, де X – універсальна множина альтернатив, R^1 – числова вісь. У цьому випадку функція $\mu_\varphi(x_0, r)$

при кожному фіксованому $x_0 \in X$ являє собою нечітку оцінку результату вибору альтернативи x_0 (нечітку *оцінку* альтернативи x_0) або нечітку реакцію системи на керування x_0. Задано також нечітку множину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0,1]$.

До такої постановки зводиться багато класів задач нечіткого математичного програмування. Методи їх розв'язування розглянуто в [15].

Задача IV. Задано звичайну цільову функцію $f : X \to R^1$ та систему обмежень: $\varphi_i(x) \le b_i$, $i = 1, \dots, m$. Причому параметри в описі функцій $\varphi_i(x)$ задано нечітко, зокрема у формі нечітких множин.

Наприклад, у лінійному випадку $\left(X = R^n\right)$ функції $\varphi_i(x)$ мають такий вигляд:

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

а кожен з параметрів a_{ij} та b описано відповідною нечіткою множиною $\mu_{ij}(a_{ij})$, $\nu_i(b_i)$.

Розроблено кілька способів розв'язування таких задач.

Одним з них є метод модальних значень. Він полягає в тому, що нечіткий параметр замінюється своїм модальним значенням, а потім розв'язується отримана скалярна задача. Ступінь належності отриманого розв'язку обчислюється як мінімум серед ступенів належності модальних значень параметрів. Однак цей метод можна застосовувати тоді, коли функції належності параметрів унімодальні, тобто кожна з них досягає свого максимального значення тільки в одній точці. Якщо ж ця вимога не виконується, то питання про те, яке саме із значень параметрів, що мають найвищий ступінь належності треба вибирати, залишається відкритим.

Інший спосіб розв'язування полягає у зведенні вихідної задачі до задачі типу I.

Існують також методи, в основі яких зведення вихідної задачі до задачі багатокритерійної оптимізації [4].

Задача V. У її умові нечітко описано як параметри функцій обмежень, так і параметри цільової функції.

Одним з підходів до розв'язування такої задачі є її зведення до задачі типу III.

5.3. Задачі математичного програмування з нечіткими обмеженнями

Нехай на універсальній множині альтернатив X задано функцію $\varphi: X \to R^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору альтернатив, і нечітку підмножину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0,1]$. Належить "максимізувати" в деякому сенсі функцію φ на нечіткій множині μ_C, тобто

$$\varphi(x) \to \max,$$
$$x \in \widetilde{C}.$$

Це означає, що під “максимізацією” можна розуміти вибір нечіткої підмножини μ_D (нечіткого рішення), якому відповідає найкраще в деякому сенсі нечітке значення функції φ. Зрозуміло, що подання розв’язку в такій формі доцільне лише тоді, коли вона змістовно сприймається ОПР.

Якщо ж ОПР не сприймає нечіткого опису задачі, то під “максимізацію” функції φ слід розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або множини альтернатив.

Раціональність при цьому означає, що, вибираючи конкретну альтернативу, ОПР має виходити з необхідності компромісу між бажанням отримати якомога більше значення функції φ та прагненням віддати перевагу допустимій альтернативі, яка має найбільший ступінь належності до множини допустимих альтернатив.

Розглянемо два підходи до розв’язування цієї задачі, їх обгрунтування наведено в монографії [17].

5.3.1. Підхід 1, який базується на множинах рівня нечіткої множини обмежень

Даний підхід полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування формулюється у вигляді сукупності звичайних задач максимізації функції φ на всіляких множинах рівня множини допустимих альтернатив. Якщо ж альтернатива $x_0 \in X$ є розв’язком задачі: $\varphi(x) \to \max$, на множині рівня λ, то природно вважати, що її ступінь належності до нечіткої множини розв’язків задачі не менший за λ.

Таким чином, перебравши всілякі значення λ, ми одержимо функцію належності нечіткого розв’язку.

Опишемо цей підхід більш детально.

Позначимо через C_λ множину рівня λ нечіткої множини допустимих альтернатив μ_c, тобто

$$C_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_C(x) \ge \lambda\}.$$

Для всіх чисел $\lambda \ge 0$, за умови що $C_\lambda \ne \varnothing$, уведемо таку множину:

$$N(\lambda) = \left\{ x \;\middle|\; x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}.$$

Це множина розв'язків звичайної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності яких до множини допустимих альтернатив вихідної задачі НМП не менший за λ.

Для побудови функції належності нечіткого розв'язку необхідно кожній альтернативі $x \in X$ приписати ступінь належності до цієї множини. Зробимо це таким чином: ступенем належності альтернативи x_0 до нечіткої множини розв'язків будемо вважати максимальне (точніше верхню границю) з чисел λ, для яких відповідна множина $N(\lambda)$ містить альтернативу x_0.

В и з н а ч е н н я 5.2. Розв'язком задачі НМП будемо називати нечітку підмножину μ_D, яка описується такою функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda: x \in N(\lambda)} \lambda . \tag{5.1}$$

Цей розв'язок назвемо розв'язком типу 1.

Т в е р д ж е н н я 5.1. Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$, то $\mu^1(x) = \mu_C(x)$.

Доведення

а) Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) > \mu_C$, то $\sup\limits_{\lambda: x \in N(\lambda)} > \mu_C(x)$. Це означає, що існує число $\tilde{\lambda}$, яке задовольняє умови: $\tilde{\lambda} > \mu_C(x)$, і $x \in N(\tilde{\lambda})$. Тоді, відповідно до визначення нечіткого розв'язку, $x \in C_{\tilde{\lambda}}$, а тому $\mu_C(x) \geq \tilde{\lambda}$, тобто нерівність: $\lambda > \mu_C(x)$, неможлива.

б) Якщо ж $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) < \mu_C(x)$, тобто

$$\sup_{\lambda: x \in N(\lambda)} < \mu_C(x) = \nu, \tag{5.2}$$

то для будь-якого числа λ, що задовольняє умову $x \in N(\lambda)$, виконується включення $x \in C_\nu \subset C_\lambda$, крім того, $x \notin N(\lambda)$, оскільки в протилежному випадку із нерівності (5.2) маємо, що $\nu < \nu$. Звідси випливає:

$$\varphi(x) < \sup_{x' \in C_\nu} \varphi(x') \leq \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') = \varphi(x).$$

Тим самим твердження доведено.

З огляду на твердження 5.1. і на визначення розв'язку, його функцію належності можна записати у такому вигляді:

$$\mu^1(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & x \in \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{5.3}$$

таким чином,

$$\operatorname{supp} \mu^1(x) = \bigcup_{\lambda>0} N(\lambda).$$

Будемо говорити, що розв’язок типу 1 існує, якщо $\mu^1(x) \neq 0$ на множині *X*, тобто тоді й тільки тоді, коли знайдеться таке число: $\lambda > 0$, для якого $N(\lambda) \neq \varnothing$.

Нечіткому розв’язку відповідає *нечітке* “максимальне” *значення* $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$. Воно є образом нечіткої множини $\mu^1(x)$ при відображенні φ і відповідно до визначення 4.36 має такий вигляд:

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \sup_{x\in N(\lambda)} \lambda, \tag{5.4}$$

тут

$$\varphi^{-1}(r) = \{x | x \in X, \varphi(x) = r\}.$$

Якщо в задачі НМП розв’язку типу 1 не існує, то можемо скористатися *ε-оптимальним нечітким розв’язком*, який для заданого числа $\varepsilon > 0$, можна визначити таким чином:

$$\mu^1_\varepsilon(x) = \sup_{\lambda: x\in N(\varepsilon,\lambda)} \lambda, \tag{5.5}$$

тут $$N(\varepsilon,\lambda) = \left\{ x \middle| x \in X, \varphi(x) \geq \sup_{x'\in C_\lambda} \varphi(x') - \varepsilon \right\}. \tag{5.6}$$

Відповідне йому нечітке значення функції φ описується такою функцією належності:

$$\mu^\varepsilon_\varphi(x) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \mu^1_\varepsilon(x). \tag{5.7}$$

Границю μ^ε_φ, коли $\varepsilon \to 0$ можна вважати верхньою нечіткою границею функції φ на нечіткій множині μ_C.

Поняття ε-оптимального розв’язку може бути корисним не тільки тоді, коли $\mu^1(x) = 0$ для всіх альтернатив $x \in X$, але й тоді, коли $N(\lambda) = \varnothing$ при деяких значеннях λ із інтервалу $[0,1]$.

Розглянемо властивості розв’язку 1.

1. Для будь-якого числа r_0 за умови, що $\mu_\varphi(r_0) > 0$, знайдеться така альтернатива: $\widetilde{x} \in X$, для якої $\varphi(\widetilde{x}) = r_0$ й $\widetilde{x} \in N(\lambda)$ при деякому значенні $\lambda > 0$, тобто

$$r_0 \in \operatorname{supp}\ \mu_\varphi \Rightarrow \left[\bigcup_{\lambda>0} N(\lambda) \right] \cap \varphi^{-1}(r_0) \neq \varnothing. \tag{5.8}$$

2. Якщо $r_0 \in \text{supp } \mu_\varphi$, то $\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu^1(x) = \sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu_C(x)$.

3. Функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\text{supp } \mu_\varphi$.

Функцію $\mu_\varphi(r)$ описано таким чином, що її значення для конкретного числа $r \in R^1$ є максимальним ступенем належності альтернативи *x* множині $\mu_C(x)$, у межах якої функція $\varphi(x)$ набуває значення *r*.

Відповідно до третьої властивості функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\text{supp } \mu_\varphi$. Це означає, зокрема, що в межах множини *X* немає жодної альтернативи, для якої виконувалися б одночасно нерівності: $\mu_C(x) > \mu_\varphi(x) > 0$ й $\varphi(x) > r$, тобто не існує такого елемента $x \in X$, що мав би більший, ніж $\mu_\varphi(r)$, ступінь належності $\mu_C(x)$ й забезпечив би більше від *r* значення максимізованої функції.

Якщо нечіткий розв'язок для ОПР неприйнятний і необхідно вибрати конкретну альтернативу $x \in X$, то цей вибір має спиратися не тільки на ступінь належності цієї альтернативи до нечіткої множини $\mu_C(x)$, але й на відповідне значення функції $\varphi(x)$. Як випливає з третьої властивості, чим більше значення r_0, тим менше значення ступеня належності $\mu_C(x)$ тієї альтернативи, яка забезпечує досягнення цього значення. Тому ОПР повинна спочатку звернутися до нечіткого максимального значення $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$ й обрати пару $(r_0, \mu_\varphi(r_0))$, яка відповідає її прагненню отримати більше значення r_0, й одночасно якомога більше значення ступеня його належності до множини $\mu_\varphi(r)$. Після вибору такої пари доречно зупинитись на такій альтернативі $x_\circ \in \varphi^{-1}(r_\circ)$, що має найбільший ступінь належності множині $\mu_C(x)$ (або на альтернативі, що в деякому сенсі близька до *x*).

Описаний підхід виявляється незручним з двох причин.

По-перше, в цьому розв'язку недостатньо явно враховується необхідність компромісу між значеннями максимізованої функції, та значеннями ступеня належності альтернативи до множини допустимих рішень.

По-друге, він незручний для обчислення.

Якщо функція належності неперервна, то застосування цього підходу вимагає розгляду нескінченної кількості задач, оскільки нескінченною буде кількість множин рівня. Однак для практичного використання буде достатньо розглянути скінченну множину задач для множин рівня, визначених експертами або ОПР.

Розглянемо застосування описаного підходу для лінійної задачі НМП.

П р и к л а д 5.3. Розв'язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\
&x_1 + 6x_2 \leq 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \leq\approx 12, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Будемо вважати, що нечіткі обмеження описуються такою функцією належності:

$$
\mu(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ 2x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ 0{,}5, & якщо\ 13 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ 0{,}7, & якщо\ 12 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 1, & якщо\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}
$$

Розв'язування

Використаємо метод розкладання на множини рівня. Враховуючи вигляд функції належності обмежень, необхідно розв'язувати задачі на таких множинах рівня: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0{,}7$; та $\lambda_3 = 0{,}5$.

На рівні: $\lambda_1 = 1$, задача набуває такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\
&x_1 + 6x_2 \leq 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Коли $\lambda_2 = 0{,}7$, то маємо таку задачу:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\
&x_1 + 6x_2 \leq 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

І на рівні: $\lambda_3 = 0{,}5$, задачу буде записано в такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\
&x_1 + 6x_2 \leq 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Отримані задачі являють собою задачі лінійного програмування і для їх розв'язування можна застосовувати, наприклад, симплекс-метод, або, оскільки кожна з них має лише дві змінні, розв'язати їх графічно.

З цією метою зобразимо на координатній площині множини рівня нечіткої множини допустимих альтернатив (див. рис. 5.2).

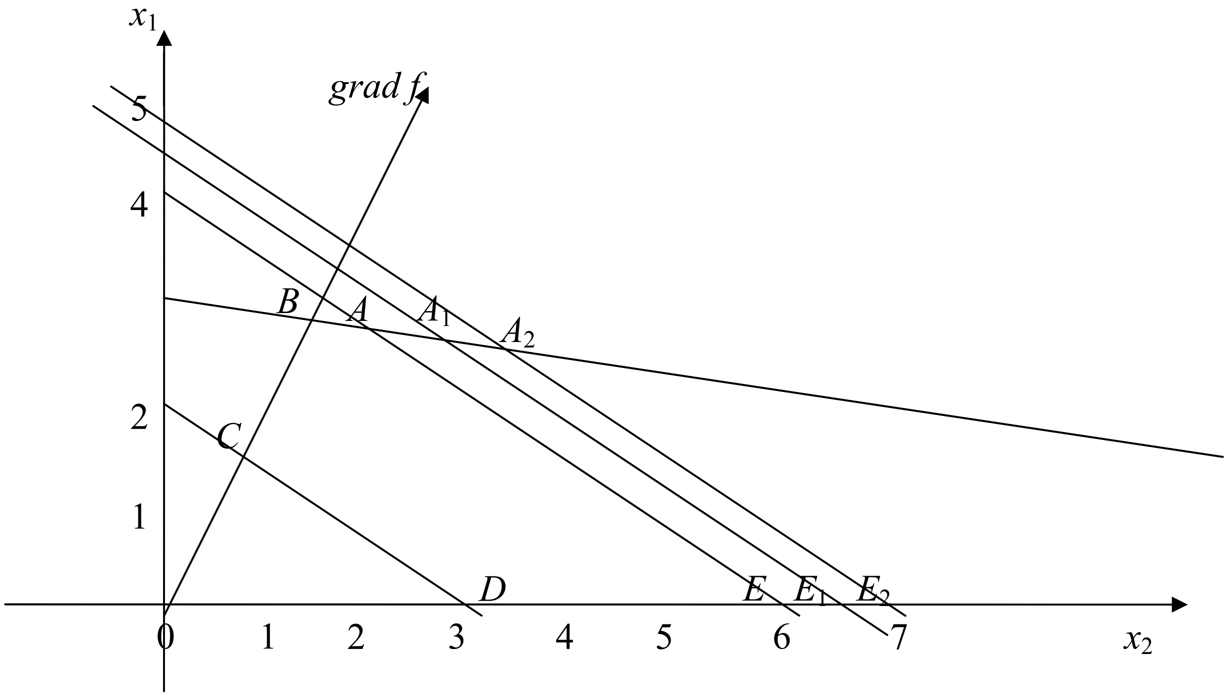


Рис. 5.2. Графічна інтерпретація розв'язування задачі нечіткого математичного програмування

Тут багатокутник $ABCDE$ відповідає множині рівня: $\lambda_1 = 1$; $A_1\,DCDE_1$ – множині рівня: $\lambda_2 = 0{,}7$; $A_2\,BCDE_2$ – множині рівня: $\lambda_3 = 0{,}5$.

Розв'язком задачі на множині рівня 1 буде точка A. Знайдемо її координати з такої системи рівнянь:

$$
\begin{cases}
x_1 + 6x_2 = 18, \\
2x_1 + 3x_2 = 12.
\end{cases}
$$

Отримуємо, що $x_1 = 2, x_2 = 2\frac{2}{3}$.

Значення цільової функції в цій точці $f(A) = 17\frac{1}{3}$.

Аналогічно знаходимо розв'язки задач на множинах рівня 0,7 та 0,5. Це точки A_1, яка має координати: $x_1 = 2\frac{2}{3}, x_2 = 2\frac{5}{9}$, та A_2 (її координати: $x_1 = 3\frac{1}{3},\ x_2 = 2\frac{4}{9}$).

Відповідні значення цільової функції: $f(A_1) = 18\frac{1}{9}$, $f(A_2) = 18\frac{2}{3}$.

Звівши одержані результати в таблицю, маємо нечіткий розв'язок задачі.

x_1	x_2	f	λ
2	$2\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	1
$2\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{9}$	$18\frac{1}{9}$	0,7
$3\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{9}$	$18\frac{2}{3}$	0,5

Нагадаємо, що коли функції належності неперервні, то необхідно розв'язувати задачі на нескінченній кількості множин рівня. Але на практиці достатньо визначити для розгляду кілька рівнів.

5.3.2. Підхід 2 й еквівалентність розв'язків обох типів

Для цього підходу характерно те, що із самого початку явно враховується прагнення ОПР при виборі альтернативи отримати якомога більші значення як максимизованої функції, так і функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив.

З цією метою до визначення розв'язку включають лише ті альтернативи, які в задачах багатокритерійної оптимізації називаються ефективними за Парето.

Нагадаємо, що альтернатива $x_0 \in X$ називається ефективною за двома функціями $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, коли для будь-якої іншої альтернативи $x' \in X$ з нерівностей: $\varphi(x') \geq \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') \geq \mu_C(x_0)$, випливають рівності: $\varphi(x') = \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') = \mu_C(x_0)$.

Інакше, якщо x_0 – ефективна альтернатива для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ на множині X, то вибравши будь-яку іншу альтернативу не можна збільшити, порівняно з $\varphi(x_0)$ та $\mu_C(x_0)$, значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої.

У задачі прийняття рішень при наявності кількох критеріїв множина ефективних альтернатив виступає як сукупність запропонованих варіантів раціонального вибору, який здійснює ОПР.

Отже, нехай P – множина всіх ефективних альтернатив для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, які розглядаються в задачі нечіткого математичного програмування.

В и з н а ч е н н я 5.3. Розв'язком задачі НМП називають нечітку множину, функцієя належності якої

$$\mu^2(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{коли } x \in P, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{5.9}$$

Цей розв'язок називатимемо розв'язком типу 2.

У цьому визначенні явно припускається, що ОПР має використовувати в процесі прийняття рішення лише ті альтернативи універсальної множини X, які дають одночасно неполіпшувані значення функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Відповідно розв'язку 2 нечітке значення функції $\varphi(x)$ записується в такому вигляді:

$$\mu_\varphi^2(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^2(x), \qquad r \in R^1. \tag{5.10}$$

Встановимо співвідношення між розв'язками обох типів.

Т е о р е м а 5.1 [17]. Якщо множина X компактна, функція $\varphi(x)$ неперервна, а функція $\mu_C(x)$ напівнеперервна зверху на множині X, то для кожного значення $r \in R^1$ виконується така рівність:

$$\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r). \tag{5.11}$$

З огляду на визначення 5.3, реалізацію розв'язку типу 2 зведено до визначення множини ефективних альтернатив функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$. Однак ця множина включає, у загальному випадку, нескінченну кількість елементів, а її побудова являє собою досить складне завдання.

Разом з тим, для отримання такого розв'язку в конкретній задачі достатньо, щоб було визначено скінченну кількість ефективних альтернатив, рівномірно вибраних із множини P.

Для їх відшукування можна скористатися такою властивістю (див. розділ 3, теорему 3.1):

Якщо існують такі числа v_1, v_2 ($v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $v_1 + v_2 = 1$), стосовно яких альтернатива x_0 забезпечує досягнення на множині X максимуму функції: $F(x) = v_1\varphi(x) + v_2\mu_C(x)$, то ця альтернатива є ефективною для цільових функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Таким чином, надаючи різних додатних значень ваговим коефіцієнтам функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ і максимізуючи відповідні функції $F(x)$, можна визначити будь-яку необхідну кількість ефективних альтернатив.

Отримані при цьому альтернативи разом з відповідними значеннями функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ передаються в розпорядження ОПР, яка й робить остаточний вибір, виходячи із своїх суб'єктивних уявлень (або використовуючи інформацію, що не була врахована в даній математичній моделі) про відповідну важливість значень функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

5.4. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив

Досліджуючи реальну ситуацію або процес з метою прийняття раціонального рішення, природно спочатку виявити множину всіх допустимих розв'язків або альтернатив.

Залежно від інформації, яку ми маємо, цю множину вдається описати з тією чи іншою мірою чіткості. Нехай, наприклад, маємо деяку універсальну множину альтернатив X і нечіткий опис її підмножини допустимих альтернатив $\mu_C(x)$. Значення функції μ_C описують міру допустимості відповідних альтернатив у поданій задачі.

Якщо окрім цієї функції, немає іншої інформації про досліджувану альтернативу, то раціональним залишається прийняти вибір деякої альтернативи з такої множини:

$$X^D = \left\{ x \,\middle|\, x \in X,\, \mu_C(x) = \sup_{y \in X} \mu_C(y) \right\},$$

тобто довільної альтернативи з тих, що мають максимальний ступінь прийнятності, оскільки не існує підстав віддавати перевагу іншим. При введені в модель додаткової інформації раціональним може виявитися вибір альтернатив з будь-якої підмножини множини X^D або будь-яких альтернатив, що не належать цій множині. Не виключено, що ця інформація може служити підставою для виявлення єдиної, найкращої з усіх альтернативи.

Інформація, про реальну ситуацію або процес, завдяки якій можна віддати перевагу одній альтернативі над іншою, може бути подана різними способами.

У попередніх розділах ми вже розглянули випадки, коли така інформація задавалася у формі функцій корисності, описувалась числовими нерівностями але такий спосіб опису реальної ситуації не завжди можливий. Більш універсальним можна вважати опис інформації у формі відношень переваги на множині альтернатив. Випадок, коли на множині альтернатив подано чітке відношення переваги, було розглянуто в розділі 2. Але не завжди переваги можуть бути визначені чітко, тобто іноді більш точною моделлю ситуації буде їхній опис у вигляді нечітких відношень, коли перевага може бути виявлена тільки певною мірою. Шляхи прийняття рішень за таких умов і буде розглянуто нижче.

5.4.1. Нечіткі відношення переваги та їхні властивості

В и з н а ч е н н я 5.3. Нехай X – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* (НВП) на множині X будемо називати всіяке рефлексивне відношення, задане на цій множині.

Це відношення описується функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$, яка є рефлексивною, тобто $\mu_R(x,x) = 1,\ \forall x \in X$.

Якщо μ_R – нечітке відношення переваги на множині X, то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_R(x,y)$ є мірою виконання переваги «x не гірше y», або $x \geq y$. З того, що $\mu_R(x,y) = 0$, випливає одне з двох тверджень: або $y = x$ або x та y не порівнянні між собою з додатною мірою. Рефлексивність цього відношення відображає той факт, що будь-яка альтернатива не гірша від себе самої.

Подане на множині X нечітке відношення переваги однозначно задає три відповідних йому нечітких відношення:

– однаковості $R^I\left(\mu_R^I\right)$,

– квазіеквівалентності $R^e\left(\mu_R^e\right)$,

– строгої переваги $R^S\left(\mu_R^S\right)$.

Ці відношення будуть використовуватись для визначення та аналізу властивостей недомінованих альтернатив у задачах прийняття рішень.

За аналогією до звичайних ці відношення можна визначити таким чином:

$$R^I = \left(X \times X \setminus R \bigcup R^{-1}\right) \bigcup \left(R \bigcap R^{-1}\right),$$

$$R^S = R \setminus R^{-1},$$

$$R^e = R \bigcap R^{-1},$$

де R^{-1}– обернене до R відношення, що описується такою функцією належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(x,y), \qquad \forall (x,y) \in X \times X .$$

Використавши визначення операцій об’єднання, перетину та різниці нечітких множин, отримаємо наведені нижче вирази для функцій належності цих відношень.

1. Нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I(x,y)=\max\{1-\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\},\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}\}=$$
$$=\max\{\min\{1-\mu_R(x,y),1-\mu_R(y,x)\},\min\{1-\mu_R(x,y),1-\mu_R(y,x)\}\}.$$

2. Нечітке відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^e(x,y)=\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x,y)=\begin{cases}\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x), & \text{коли } \mu_R(x,y)\ge\mu_R(y,x),\\ 0, & \text{коли } \mu_R(x,y)<\mu_R(y,x).\end{cases}$$

Для пояснення сенсу цих відношень розглянемо приклад.

П р и к л а д 5.4 (чітке відношення переваги). На множині X подано n функцій $f_i : X \to R^1$, $i = 1, \ldots, n$. Задамо на множині X відношення переваги R таким чином: $x\,R\,y \Leftrightarrow f_i(x)\ge f_i(y),\ \forall\ i=1,\ldots,n$.

Легко бачити, що функція належності відношення R має такий вигляд:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1, & \text{коли } f_i(x)\ge f_i(y),\ i=\overline{1,n},\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Зауважимо, що при такому відношенні переваги в множині X можуть бути альтернативи, які не можна порівняти (тобто $R\cup R^{-1}\ne X\times X$ й існують такі альтернативи x, y, для яких виконується умова $(x,y)\notin R\cup R^{-1}$). Наприклад, альтернативи x, y для яких $f_i(x)\ge f_i(y),\ \forall\ i\ne i_\circ$, та $f_{i_\circ}(x)<f_{i_\circ}(y)$ в інших випадках.

З огляду на подані вище визначення

$$\mu_R^e(x,y)=\begin{cases}1, & \text{коли } f_i(x)=f_i(y),\ \forall\ i=\overline{1,n},\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Підкреслимо, що альтернативи, недоміновані за даним відношенням переваги, називаються ефективними або оптимальними за Парето для функцій $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо тепер деякі властивості визначених нечітких відношень μ_R^e та μ_R^S.

І. Нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^I є рефлексивними та симетричними.

Дійсно, $\mu_R^e(x,x)=\mu_R^I(x,x)=\mu_R(x,x)=1$, оскільки вихідне відношення μ_R є рефлексивним. Симетричність цих відношень випливає з їхніх визначень.

ІІ. Відношення μ_R^S – антирефлексивне й антисиметричне.

Справді, $\mu_R^S(x,x)=0$, оскільки вихідне НВП належить до рефлексивних, тобто $\mu_R(x,x)=1$, $\forall x\in X$.

Нехай, $\mu_R^S(x,y)>0$, тобто $\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x)>0$, тоді $\mu_R^S(y,x)=0$, а це й свідчить про антисиметричність цього відношення.

Покажемо тепер, що коли вихідне НВП μ_R на множині X належить до транзитивних, то нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^S також транзитивні.

Т е о р е м а 5.2. Якщо НВП μ_R на множині X транзитивне, то й відповідне нечітке відношення μ_R^e також буде транзитивним.

Зауважимо, що з цієї теореми та з розглянутих вище властивостей відношення μ_R^e випливає, що в умовах теореми μ_R^e являє собою нечітке відношення еквівалентності (рефлексивне, симетричне, транзитивне).

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^e не транзитивне. Тобто відшукаються такі альтернативи $x,y,z\in X$, для яких буде справедливою нерівність:

$$\mu_R^l(x,y)<\min\{\mu_R^l(x,z),\mu_R^l(z,y)\}\,. \tag{5.12}$$

Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y)\geq\mu_R(y,x)$. Тоді з визначення μ_R^e одержуємо, що $\mu_R^e(x,y)=\mu_R^e(y,x)$. Користуючись цією рівністю, запишемо нерівність (5.12) у такому вигляді:

$$\mu_R(y,x)<\min\{\mu_R^e(y,z),\mu_R^e(z,x)\}. \tag{5.13}$$

Оскільки відношення μ_R^e симетричне, то з нерівності (5.13) одержуємо, що

$$\mu_R^e(y,z)\leq\mu_R(y,z),$$

$$\mu_R^e(z,x)\leq\mu_R(z,x),$$

тобто $\min\{\mu_R^e(y,z),\mu_R^e(z,x)\}\leq\min\{\mu_R(y,z),\mu_R(z,x)\}$,

а $\mu_R(y,x)<\min\{\mu_R(y,z),\mu_R(z,x)\}$, що суперечить умові транзитивності вихідного відношення: μ_R ($\mu_R(x,y)\geq\max\limits_{z\in X}\min\{\mu_R(x,z),\mu_R(z,y)\}$).

Випадок, коли $\mu_R(y,x)\geq\mu_R(x,y)$, доводиться аналогічно.

Можна довести аналогічне твердження і стосовно відношення строгої переваги μ_R^S.

Т е о р е м а 5.3. Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X транзитивне, то транзитивним буде також відповідне нечітке відношення строгої переваги μ_R^S.

5.4.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Розглянемо тепер задачу раціонального вибору альтернатив з множини X, на якій задано нечітке відношення переваги R, його функція належності $\mu_R : X \times X \to [0,1]$.

Як було зазначено раніше, у тих випадках, коли дані про ситуацію прийняття рішень описано у формі звичайного відношення переваги, то раціональним можна вважати вибір максимальних (недомінованих) альтернатив. Математично така задача зводиться до визначення на поданій множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Далі спробуємо застосувати цей підхід до задач прийняття рішень, коли відношення переваги на множині альтернатив описано нечітко.

Отже, нехай маємо звичайну (чітко описану) множину альтернатив X та подане на ній нечітке відношення нестрогої переваги μ_R, і відповідне йому нечітке відношення строгої переваги μ_R^S. Визначимо підмножину недомінованих альтернатив множини $(X,\ \mu_R)$. Зауважимо, що оскільки вихідне відношення переваги нечітке, то природно чекати, що й відповідна підмножина недомінованих альтернатив буде нечіткою.

За визначенням відношення строгої переваги для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_R^S(y,x)$ являє собою міру, з якою альтернатива x буде домінована альтернативою y. Отже, стосовно фіксованої альтернативи $y \in X$, визначену на множині X функцію $\mu_R^S(y,x)$ можна вважати функцією належності нечіткої множини всіх альтернатив x, які строго доміновані альтернативою y.

Нехай, наприклад, міра належності альтернативи x_0 до цієї множини (відповідно деякій фіксованій альтернативі y) дорівнює 0,3. Це означає, що x_0 домінована альтернативою y зі ступенем 0,3. Легко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, які не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення множини $\mu_R^S(y,x)$ в множині X і її функцію належності можна записати таким чином:

$$1 - \mu_R^S(y,x),\ x \in X . \tag{5.14}$$

Якщо, наприклад, $\mu_R^S(y,x) =$ 0,3, то альтернатива x не домінується альтернативою y зі ступенем 0,7. Очевидно, що для визначення в множині X підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою цієї множини, необхідно взяти перетин нечітких множин, що описані виразом (5.14), за всіма альтернативами $y \in X$.

В и з н а ч е н н я 5.4. Нехай X – множина альтернатив, μ_R – подане на ній нечітке відношення переваги. Нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив $\mu_R^{н.д.}(x)$ назвемо перетин нечітких множин, що мають вигляд, відповідний виразу (5.14) за всіма альтернативами $y \in X$, тобто

$$\mu_R^{н.д.}(x) = \inf_{y \in X}\left[1 - \mu_R^S(y, x)\right], \quad x \in X, \tag{5.15}$$

або

$$\mu_R^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x), \quad x \in X. \tag{5.16}$$

Значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$ відображає міру, з якою альтернатива x не буде домінуватись жодною альтернативою множини X.

Нехай $\mu_R^{н.д.}(x_0) = \alpha$ для деякої альтернативи x_0. Тоді x_0 може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем, не більшим від $(1 - \alpha)$.

Справді, при цьому

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x_0) = 1 - \alpha,$$

і тоді

$$\mu_R^S(y, x_0) \le 1 - \alpha, \quad \forall y \in X.$$

Визначимо тепер нечітку підмножину альтернатив через функцію належності вихідного нечіткого відношення переваги μ_R. Для цього покажемо, що

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \sup_{y \in X}\left[\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\right], \ \forall x \in X. \tag{5.17}$$

Дійсно, нехай довільно вибрано альтернативу $x \in X$. Уведемо такі множини

$$Y^1(x) = \{y \mid y \in X, \mu_R(y, x) > \mu_R(x, y)\}, \tag{5.18}$$

$$Y^2(x) = \{y \mid y \in X, \mu_R(y, x) \le \mu_R(x, y)\}. \tag{5.19}$$

Користуючись тим, що $Y^1(x) \cup Y^2(x) = X$, для кожної альтернативи $x \in X$ запишемо рівність (5.17) у такій формі:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \max\left\{\sup_{y \in Y^1(x)} \mu_R^S(y, x), \ \sup_{y \in Y^2(x)} \mu_R^S(y, x)\right\}. \tag{5.20}$$

Далі, спираючись на визначення μ_R^S, одержуємо шляхом перетворення виразу (5.20), що

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=\max\left\{\sup_{y\in Y(x)}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)],0\right\}=$$

$$=\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}[\mu_R(y,y)-\mu_R(x,y)],\ \sup_{y\in Y^2(x)}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)]\right\}=$$

$$=\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)].$$

Рівність (5.17) дозволяє описати множину недомінованих альтернатив за допомогою такої функції належності:

$$\mu_R^{\text{'н.д.}}(x)=1-\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)]. \qquad (5.21)$$

Формулу (5.21) можна використовувати для обробки інформації, поданої у вигляді нечіткого відношення переваги для визначення в множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Оскільки величина $\mu_R^{\text{н.д.}}(x)$ виступає як міра "недомінованості" альтернативи x, то раціональним, з огляду на подану нечітку інформацію, природно вважати вибір альтернатив, що мають якомога більший ступінь належності до нечіткої множини $\mu_R^{\text{н.д.}}(x)$, тобто тих альтернатив, які дають значення функції $\mu_R^{\text{н.д.}}(x)$, найближче до такої величини:

$$\sup_{x\in X}\mu_R^{\text{н.д.}}(x)=1-\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)].$$

Альтернативи, для яких функція $\mu_R^{\text{н.д.}}(x)$ досягає своєї верхньої грані, тобто елементи множини

$$X_{\text{н.д.}}=\left\{x\,\middle|\,x\in X,\ \mu_{\mathrm{R}}^{\text{н.д.}}(x)=\sup_{z\in X}\mu_R^{\text{н.д.}}(z)\right\},$$

будемо називати максимальними недомінованими альтернативами множини (X,μ_R).

П р и к л а д 5.5. Дано скінченну множину: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,\}$, й нечітке відношення переваги на ній, функція належності якого має такий вигляд:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ \hline x_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ \hline x_3 & 0{,}6 & 0{,}4 & 1 & 0{,}5 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{array}.$$

Знайдемо множину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R).

Згідно з поданим вище визначенням

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ \hline x_2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ \hline x_2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{array},$$

тоді

$$\mu_R^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 0{,}3 \end{array}.$$

Звідси бачимо, що найбільший ступінь недомінованості має альтернатива x_3, а тому її вибір слід вважати раціональним.

В и з н а ч е н н я 5.5. Відношення R на множині X назвемо лінійним, якщо ним або оберненим до нього відношенням пов'язані кожні дві альтернативи множини X.

Тобто, якщо відношення лінійне, то на множині X не існує непорівнянних між собою альтернатив. Для звичайних відношень лінійність означає, що буде справедливим таке твердження:

$$R \cup R^{-1} = X \times X,$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, або з використанням термінів характеристичних функцій

$$\mu_R(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_R(y, x) = 1.$$

Якщо має місце нечітке відношення, однозначно можна виявити лише повну відсутність лінійності, тобто нечітке відношення μ_R не буде лінійним тоді і тільки тоді, коли знайдуться альтернативи $x, y \in X$, для яких виконується така рівність:

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0,$$

де $\mu_R(x, y)$ – функція належності даного нечіткого відношення.

Отже, властивість лінійності стосовно нечіткого відношення можна розуміти більш широко.

В и з н а ч е н н я 5.6. Нехай λ – деяке число з інтервалу [0;1]. Нечітке відношення μ_R будемо називати *λ-лінійним*, якщо його функція належності має таку властивість:

$$\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\} > \lambda, \quad \forall\ x,y \in X. \tag{5.22}$$

Таким чином, якщо, наприклад, нечітке відношення порядку являє собою 0,7-лінійне відношення, то з кожних двох альтернатив одна не гірша від одної зі ступенем, не меншим за 0,7.

В и з н а ч е н н я 5.7. Нечітке відношення називається *сильно лінійним*, якщо його функція належності задовольняє таку умову:

$$\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\} = 1, \ \forall\ x,y \in X. \tag{5.23}$$

Інакше цю властивість можна визначити таким чином:

$$\mu_R(x,y) \ge \mu_R(y,x) \ \Rightarrow\ \mu_R(x,y) = 1. \tag{5.24}$$

Покажемо тепер, що сильна лінійність відповідає такій умові:

$$\mu_R(x,y) = 1 - \mu_R^S(y,x), \quad \forall\ x,y \in X, \tag{5.25}$$

де μ_R^S – відповідне нечітке відношення строгої переваги.

Дійсно, коли виконується умова (5.23), то з огляду на визначення відношення строгої переваги μ_R^S отримуємо, що $\mu_R^S(y,x) = 0$ і $\mu_R^S(x,y) = 1,$ тобто умову (5.24) також виконано. З іншого боку, якщо виконано (5.24) й $\mu_R(x,y) \ge \mu_R(y,x)$, то $\mu_R^S(y,x) = 0$ й $\mu_R(x,y) = 1$, тобто виконується й умова (5.23).

Пояснимо сенс сильної лінійності. Якщо, наприклад, альтернатива x краща від альтернативи y зі ступенем $1\,(y \succ x)$, то $(x,y) \notin R^{-1}$, тобто y не може бути кращою від x з жодним додатним ступенем. Коли ж має місце відношення $x \succ y$, то $(x,y) \in R^{-1}$ тобто $y \ge x$ зі ступенем 1. Якщо ж x краща від y зі ступенем α ($x \underset{\alpha}{\succ} y$), то зі ступенем $(1 - \alpha)$ виконується перевага: $y \ge x$. Таким чином, за своїм змістом сильна лінійність значною мірою аналогічна властивості лінійності звичайного відношення.

Сильно лінійні відношення мають такі властивості:

1. $\mu_R(x_1,x_2) = 1, \quad \mu_R(x_2,x_1) = 0.$

2. Відповідні сильно лінійному відношенню відношення R^e та R^I збігаються.

Дійсно, нехай для деяких пар альтернатив $(x, y) \in X$ виконано умову: $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$. Тоді з визначення (сильної лінійності) випливає, що $\mu_R(x, y) = 1$, а із визначення μ_R^I отримуємо, що $\mu_R^I(x, y) = \mu_R(x, y)$. Унаслідок симетричності відношення μ_R^I, коли $\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x)$, то

$$\mu_R^I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = \mu_R^e(x, y).$$

Визначення 5.8. Нечітке відношення переваги назвемо *слабко лінійним*, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_R(y, x) > 0\,,\ \forall\ x, y \in X.$$

Наведемо приклади ліійних нечітких відношень.

Нехай X – множина, що складається з 4 елементів, тоді нечітке відношення з такою функцією належності:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}55 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix},$$

буде 0,5-лінійним.

Відношення, що описується функцією належності:

$$\mu_R(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix},$$

буде сильно лінійним.

5.4.3. Чітко недоміновані альтернативи та їхні властивості

У даному підрозділі ми розглянемо задачі, у яких множина недомінованих альтернатив являє собою нормальну нечітку підмножину універсальної множини X, тобто функція належності цієї підмножини має таку властивість:

$$\sup_{x\in X} \mu_R^{н.д.}(x) = 1. \qquad (5.26)$$

У цьому випадку для нашої альтернативи з множини $X^{н.д.}$ максимальних недомінованих альтернатив виконано таку умову: $\mu_R^{н.д.}(x) = 1$, тобто міра недомінованості кожної з них дорівнює 1.

Іншими словами, для кожної альтернативи $x \in X^{н.д.}$ і будь-якої альтернативи $y \in X$ при цьому виконується така рівність: $\mu_R^S(y, x) = 0$, тобто жодна альтернатива не домінує з додатним ступенем над поданою альтернативою *x*.

Тому ці альтернативи ми будемо називати *чітко недомінованими*, множину таких альтернатив позначимо як $X^{\text{ЧНД}}$. Таким чином,

$$X^{\text{ЧНД}} = \left\{x \mid x \in X,\ \mu_R^{н.д.}(x) = 1\right\}. \qquad (5.27)$$

Як випливає з визначення множини $X^{\text{ЧНД}}$ та $\mu_R^{н.д.}$, для кожної чітко недомінованої альтернативи виконується така умова:

$$\sup_{y\in X} \mu_R^S(y, x) = 0, \quad \forall x \in X^{\text{ЧНД}}, \qquad (5.28)$$

де μ_R^S – нечітке відношення строгої переваги, яке відповідає відношенню μ_R.

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{\text{ЧНД}}$ справедливою буде така рівність:

$$\mu_R^S(x_1, x_2) = \mu_R^S(x_2, x_1) = 0\ . \qquad (5.29)$$

Із визначення випливає, що рівність (5.29) еквівалентна рівності:

$$\mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1),$$

але тоді

$$\mu_R^I(x_1, x_2) = \max\{1 - \mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)\} \ge 0{,}5\,,$$

тобто будь-які дві чітко недоміновані альтернативи пов'язані відношенням байдужості зі ступенем, не меншим за 0,5.

А відповідне нечітке відношення еквівалентності μ_R^e, буде визначатися таким чином:

$$\mu_R^e(x_1, x_2) = \mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1) \ \ \forall\ x_1, x_2 \in X^{\text{ЧНД}}. \qquad (5.30)$$

Коли мають місце довільні нечіткі відношення переваги, то може виявитися, що $\mu_R^e(x_1, x_2) = 0$ для деяких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{\text{ЧНД}}$, тобто ні з якою додатною мірою ці альтернативи не будуть еквівалентними. Зауважимо, що тоді $\mu_R(x_1, x_2) = 0$, тобто x_1 та x_2 не порівнянні між собою. Однак це не стосується лінійних відношень.

5.5. Прийняття рішень при кількох відношеннях переваги на множині альтернатив

Розглянемо задачу, в якій задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j = 1,..,m.$ Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги R_j, $j = 1,..,m.$ Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Задача полягає в тому, щоб на основі даної інформації зробити раціональний вибір альтернатив з множини $(X, R_1,..., R_m)$.

Звернемося спочатку до ситуації, коли відношення описуються числовими функціями корисності $f_j : X \to R^1$, $j = 1, \dots, m$, де R^1 – числова вісь. Значення функції $f_j(x)$ можна вважати числовою оцінкою альтернативи за ознакою j, $j = 1,..,m$. Перевага з погляду ознаки j віддається альтернативі, характерній більш високою оцінкою $f_j(x)$. Задача полягає в тому, щоб вибрати альтернативу, яка має якомога більші оцінки за всіма ознаками. Раціональним у цьому випадку природно вважати вибір альтернативи x_0, що має таку властивість:

$$\text{коли } f_j(y) \geq f_j(x_0),\ j = 1, 2, \dots, m, \text{ то } f_j(y) = f_j(x_0),\ j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.31)$$

Такі альтернативи в багатокритерійній оптимізації називаються ефективними.

Легко бачити, що кожна функція $f_j(x)$, $j = 1,..,m$, описує звичайне відношення переваги на множині альтернатив таким чином:

$$R_j = \{(x, y) \mid x, y \in X,\ f_j(x) \geq f_j(y)\}. \quad (5.32)$$

Нехай $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$. Покажемо, що множина всіх ефективних (недомінованих) альтернатив у множині (X, Q_1) збігається з множиною ефективних альтернатив для набору функцій f_j, $j = 1,..., m.$

Припустимо, що x_0 – альтернатива, яка не домінується в множині (X, Q_1). Це означає, що для будь-якої альтернативи $y \in X$ виконується така умова:

$$\left(y, x_0\right) \notin Q_{1,}^S \tag{5.33}$$

де Q_1^S – відношення строгої переваги, відповідне відношенню Q_1, воно має такий вигляд:

$$Q_1^S = \left\{\left(x, y\right) \mid x, y \in X, f_j\left(x\right) \geq f_j\left(y\right), \ j = 1,..,m, \exists\, j_0 : f_{j_0}\left(x\right) > f_{j_0}\left(y\right)\right\}. \tag{5.34}$$

Звідси і з урахуванням умови (5.33) робимо висновок, що має місце властивість (5.31), тобто x_0 – ефективна альтернатива для функції $f_j\left(x\right)$, $j = 1,...,m.$

Можна показати й зворотне, тобто, що будь-яка ефективна для множини функцій $f_j\left(x\right)$, $j = 1,...,m$, альтернатива не домінується в множині $\left(X, Q_1\right)$. Таким чином, для того, щоб знайти множину ефективних альтернатив, можна замість набору відношень R_j, $j = 1,...,m$, взяти їхній перетин Q_1 і знайти множину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, Q_1\right)$. Запишемо тепер перетин відношень R_j в іншому вигляді.

Нехай

$$\mu_j\left(x, y\right) = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо}\left(x, y\right) \in R_j, \\ 0, \ \textit{якщо}\left(x, y\right) \notin R_j, \end{cases} \tag{5.35}$$

де $\mu_j\left(x, y\right)$ – функція належності R_j. Тоді перетину цих відношень відповідає така функція належності:

$$\mu_{Q_1}\left(x, y\right) = \min\left\{\mu_1\left(x, y\right),..., \mu_m\left(x, y\right)\right\}. \tag{5.36}$$

Вона виступає аналогом згортки критеріїв $f_j : F(x) = \min\limits_{j=1,..,m} \lambda_j f_j$, у багатокритерійних задачах прийняття рішень. Тут числа λ_i– коефіцієнти відносної важливості критеріїв. У згортці (5.36) $\lambda_j = 1$, $j = 1,...,m$, що відповідає ситуації, коли всі подані відношення однаково важливо враховувати при виборі альтернатив. Якщо такі відношення відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, то в згортці (5.36) можна використовувати різні за величиною коефіцієнти λ_j. При цьому вихідні відношення маємо розглядати як нечіткі, тобто у визначенні функції належності (5.35) числа 0 та 1 необхідно вважати крайніми точками одиничного інтервалу можливих значень ступеня належності.

У результаті згортки вихідних відношень R_j з коефіцієнтами λ_j, що відповідають умові: $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, отримуємо функцію належності, яка має такий вигляд:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\lambda_1\mu_1(x, y),..., \lambda_m\mu_m(x, y)\}, \qquad (5.37)$$

тобто функцію належності нечіткого відношення переваги. Але таке відношення не буде рефлексивним, а це означає, що воно не належить до відношень переваги в сенсі визначення пункту 5.4.1, і тому описана згортка незручна для застосування, коли необхідно враховування значимість поданих відношень.

Тому розглянемо згортку вихідних відношень іншого вигляду, а саме:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y). \qquad (5.38)$$

Зауважимо, що отримане після згортки (5.38) звичайних відношень R_j нечітке відношення μ_{Q_2} буде рефлексивним, оскільки такими є вихідні відношення.

Нехай усі вихідні відношення переваги однакові за важливістю. У згортці (5.38) цьому випадку відповідають такі значення вагових коефіцієнтів: $\lambda_j = \dfrac{1}{m}, \; j = 1,..., m.$ Знайдемо підмножину альтернатив, не домінованих на множині (X, Q_2), використовуючи визначення з п. 5.4.2, таким чином:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \frac{1}{m}\sup_{y\in X}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y)\right], \qquad x \in X. \qquad (5.39)$$

Позначимо через $X_1^{ЧНД}$ підмножину чітко недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{θ_1}), а через $X_2^{ЧНД}$ відповідну підмножину в (X, μ_{θ_2}). Встановимо, що $X_2^{ЧНД} \subset X_1^{ЧНД}$. Дійсно, нехай $x_0 \in X_2^{ЧНД}$, тоді згідно з визначенням чітко недомінованої альтернативи та з огляду на формулу (5.39) можемо зробити висновок, що

$$\sup_{y\in X}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_{0,y})\right] = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_0, y)\right] \le 0, \qquad (5.40)$$

для всіх альтернатив $y \in X$.

Припустимо, що $x_0 \notin X_1^{ЧНД}$. Тоді, відповідно до властивості (5.31) і визначення (5.35) робимо висновок, що знайдеться така альтернатива $y \in X$, для якої $\mu_j(y, x_0) = 1, \quad j = 1,..., m$, причому для деякого індексу j_0 виконується рівність: $\mu_{j_0}(x_0, y) = 0$. Але тоді для альтернативи y не буде справедливою нерівність (5.40). Звідси випливає, що $x_0 \in X_1^{\text{ЧНД}}$, і відповідно $X_2^{\text{ЧНД}} \subset X_1^{\text{ЧНД}}$.

З а у в а ж е н н я. Множина $X_2^{\text{ЧНД}}$ не включає в себе всі ефективні альтернативи для функцій f_j, $j = 1,...,m$, тобто не збігається з множиною $X_1^{\text{ЧНД}}$, але можна показати, що кожна ефективна альтернатива, тобто кожний елемент $x \in X_1^{\text{ЧНД}}$ має додатний ступінь належності до множини $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, тобто

$$X_1^{\text{ЧНД}} \subseteq \operatorname{supp} \mu_{Q_2}^{н.д.}.$$

Дійсно, якщо для будь-якої альтернативи $x \in X$ виконано рівність: $\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 0$, то на основі визначення (5.39) виявляємо, що в множині X можна відшукати таку альтернативу y, для якої

$$\mu_j(y,x) - \mu_j(x,y) = 1, \qquad j = 1,...,m,$$

тобто $\mu_j(y,x) = 1$ і $\mu_j(x,y) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Це означає, що альтернатива y домінує над альтернативою x, тобто $f_j(y) > f_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, і тому альтернатива x не може бути ефективною для набору функції f_j.

Функція $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ впорядковує альтернативи за ступенем їх недомінованості. Наприклад, якщо $\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 3/4$ і яка-небудь альтернатива $y \in X$ буде строго кращою від альтернативи x за якими-небудь двома ознаками, то не менше ніж за однією з решти ознак вона строго переважає альтернативу y.

Якщо взяти перетин множин $X_1^{\text{ЧНД}}$ й $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, то отримаємо відповідне впорядкування на множині ефективних альтернатив, користуючись яким серед них можна здійснити вибір.

Отже, застосування згортки (5.38) вихідних звичайних відношень до розв'язування задачі прийняття рішень на множині функцій дозволяє одержати додаткову інформацію про відносний ступінь недомінованості ефективних альтернатив, звузивши таким чином клас раціональних виборів до такої множини:

$$X^{ЧНД} = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X_2^{н.д.}} \mu_{Q_2}^{н.д.}(x') \right\}$$

У загальній задачі, коли на множині альтернатив задано m нечітких відношень переваги R_j, $j = 1, \dots, m$, а також задано коефіцієнти λ_j, $j = 1, \dots, m$ відносної ваги цих відношень, можна діяти, так само як у попередньому випадку.

Сформулюємо тепер алгоритм прийняття рішень при кількох заданих відношеннях переваги на множині альтернатив.

1. Будуємо нечітке відношення Q_1 (перетин вихідних відношень):

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), ..., \mu_m(x, y)\}.$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{\theta_1}(x, y) - \mu_{\theta_2}(x, y)\right].$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 [згортку відношень типу (5.38)]:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y)$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_2}(y, x) - \mu_{Q_2}(x, y)\right].$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ за таким правилом:

$$\mu^{н.д.}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{н.д.}(x), \mu_{Q_2}^{н.д.}(x)\right\}.$$

4. Раціональним вважаємо вибір альтернатив із множини:

$$X^{Н.Д.} = \left\{x \in X \middle| \mu^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X} \mu^{н.д.}(x')\right\}.$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{\text{Н.Д.}}$, але в тому чи іншому сенсі й слабко (або не дуже сильно) доміновані альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких до множини $\mu^{\text{н.д.}}$ нижчий від певного заданого.

П р и к л а д 5.6. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, і на ній подано три чіткі відношення переваги, що мають однакову значущість, а саме:

$R_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	0	1

$R_2 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	1	1

$R_3 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1

Необхідно на їхній основі здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X.

Розв'язування

Оскільки відношення переваги мають однакову значущість, то приймемо, що коефіцієнти відносної ваги $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}$.

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2 \cap \lambda_3 R_3$, для наших даних воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

Знаходимо відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^{s}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Далі знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}), а саме:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x_1) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 2/3 & 1 \end{array}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \dfrac{1}{3}\left(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j) + \mu_3(x_i, x_j)\right)$, яке набуває за нашими даними такого вигляду:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 2/3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}$$

Записуємо відповідне йому відношення строгої переваги:

$$\mu_{Q_2}^{S}\left(x_i, x_j\right)= \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{array}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$, а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4}{1 \mid 2/3 \mid 0 \mid 1}.$$

3. Множина недомінованих альтернатив являє собою перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$:

$$\mu^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4}{1 \mid 2/3 \mid 0 \mid 1}.$$

Звідси робимо висновок, що в поданому прикладі раціональним слід вважати вибір альтернатив x_1 та x_4, які мають максимальний ступінь недомінованості.

П р и к л а д 5.7. Нехай множина $X=\left\{x_1, x_2, x_3\right\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2, причому перше з них має значущість, удвічі більшу ніж друге, зокрема

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}, \qquad R_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}$$

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язування

1. Будуємо відношення: $Q_1=\lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$, враховуючи, що $\lambda_1=0{,}33$ і $\lambda_2=0{,}67$, воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}167 & 0{,}33 \end{pmatrix},$$

а відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^{s}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_1}\right)$. Її функція належності

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}\left(x_i\right)=\frac{x_1}{0{,}67}\left|\frac{x_2}{0{,}967}\right|\frac{x_3}{0{,}833}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \lambda_1\mu_1\left(x_i, x_j\right)+\lambda_2\mu_2\left(x_i, x_j\right)$. Його функція належності

$$\mu_{Q_2}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}367 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}867 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідне відношення строгої переваги має такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}^{S}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}167 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}367 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$:

$$\mu_{Q_2}^{н.д..}=\frac{x_1}{0{,}2}\left|\frac{x_2}{0{,}833}\right|\frac{x_3}{0{,}633}.$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{н.д.}=\frac{x_1}{0{,}2}\left|\frac{x_2}{0{,}833}\right|\frac{x_3}{0{,}633}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

5.6. Відношення переваги на нечіткій множині альтернатив

Розглянемо тепер випадок, коли підмножина припустимих альтернатив також нечітка.

Нехай X – універсальна множина альтернатив і на ній подано нечітку підмножину допустимих альтернатив, функція належності якої $\nu : X \to [0,1]$, а також нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

У разі, коли множина допустимих альтернатив являє собою звичайну множину, вибір раціональної альтернативи визначається лише поданими на ній нечіткими відношеннями переваги. Але тепер нам необхідно враховувати ще й ступінь належності альтернативи до множини допустимих альтернатив, тобто, перевагу слід віддавати альтернативам, яким відповідає більше значення функції $\nu(x)$.

Цю вимогу можна врахувати в такий спосіб:

Визначимо відношення переваги, породжене функцією ν, таким чином:

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 1, & якщо \ \ \nu(x) \geq \nu(y), \\ 0, & якщо \ \ \nu(x) < \nu(y). \end{cases}$$

Тепер вихідну задачу зведено до постановки, яку було розглянуто в попередньому пункті, і для її розв’язування можна використати описану там процедуру.

5.7. Прийняття рішень, коли задано перевагу на множині ознак

Нехай задано множину альтернатив X і множину ознак (або експертів) P. Кожній альтернативі $x \in X$ тією чи іншою мірою притаманна кожна ознака з множини P. Для кожної фіксованої ознаки $p \in P$ відоме нечітке відношення переваги φ на множині альтернатив X, тобто відомо функцію належності $\varphi\colon X \times X \times P \to [0,1]$. Її значення $\varphi(x_1, x_2, p)$ означає ступінь переваги альтернативи x_1 над альтернативою x_2 за ознакою p. Якщо P – множина експертів, то $\varphi(x_1, x_2, p)$ – відношення переваги на множині альтернатив, яке пропонується експертом p. Таким чином, функція φ описує сім’ю нечітких відношень переваги на множині X відносно параметра p.

Елементи множини P, різняться за важливістю, а нечітке відношення: $\mu\colon P \times P \to [0;1]$, описує важливість ознак, зокрема величина $\mu(p_1, p_2)$ показує ступінь, з якою ознака p_1 вважається не менш важливою, ніж ознака p_2.

Задача полягає в раціональному виборі альтернативи з множини X на основі описаної вище інформації.

Розглянемо один з можливих підходів до розв’язування цієї задачі.

Позначимо через $\varphi(x, p)$ нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка відповідає нечіткому відношенню переваги $\varphi(x_1, x_2, p)$ для фіксованої ознаки $p \in P$, тобто

$$\varphi^{н.д.}(x, p) = 1 - \sup[\varphi(y, x, p) - \varphi(x, y, p)]. \tag{5.41}$$

Якби вибір альтернатив відбувався тільки за єдиною ознакою p, то раціональним потрібно було б вважати вибір тих із них, що забезпечують найбільше значення функції належності $\varphi(x, p)$ (ступеня недомінованості) на множині X. Але в даному випадку необхідно вибрати альтернативу з урахуванням сукупності ознак, які різняться своєю важливістю.

При фіксованій альтернативі $x_0 \in X$ функція $\varphi^{н.д.}(x_0, p)$ описує нечітку підмножину ознак, за якими вона недомінована. Зрозуміло, що коли для двох альтернатив x_1 та x_2 нечітка множина $\varphi^{н.д.}(x_1, p)$ «не менш важлива», ніж нечітка множина ознак $\varphi^{н.д.}(x_2, p)$, то й альтернативу x_1 належить вважати не менш прийнятною, ніж альтернатива x_2. Таким чином, ситуація в даному випадку аналогічна тій, що розглядалася при аналізі задачі нечіткого математичного програмування.

Отже, в даному випадку необхідно узагальнити подану нечітку підмножину множини P і вважати отримане нечітке відношення вислідним відношенням переваги на множині альтернатив X.

Згадане відношення, породжене функцією $\varphi^{н.д.}(x, p)$ і нечітким відношенням μ, визначимо за такою формулою:

$$\eta(x_1, x_2) = \sup \min\{\varphi^{н.д.}(x_1, p_1), \varphi^{н.д.}(x_2, p_2), \mu^{н.д.}(p_1, p_2)\}. \tag{5.42}$$

Це нечітке відношення переваги можна вважати результатом «згортки» сім'ї нечітких відношень $\varphi(x_1, x_2, p)$ в єдине вислідне нечітке відношення переваги, яке враховує інформацію про відносну важливість критеріїв, задану у формі нечіткого відношення переваги.

Таким чином, побудовою нечіткого відношення переваги η вихідну задачу вибору зведено до задачі вибору за єдиним відношенням переваги. Для розв'язування такої задачі достатньо визначити відповідну відношенню η, скореговану нечітку множину недомінованих альтернатив і вибрати ті з них, які надають максимуму функції $\eta^{н.д.}(x)$.

Розглянемо задачі, які ілюструють описаний підхід.

П р и к л а д 5.8 (вибір на основі чітких відношень). Нехай задано множину альтернатив: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Альтернативи порівнюються між собою за трьома ознаками A, B, C. Результати їхнього порівняння за кожною ознакою описуються такими матрицями відношень нестрогої переваги:

за ознакою A

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	0	0	1	0
x_4	1	0	1	1 ,

за ознакою B

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	1
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1,

за ознакою C

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1
x_4	0	0	0	1.

Відношення відносної важливості ознак описується матрицею такого вигляду:

	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	0	0	1.

З цієї матриці видно, що ознаки A та B еквівалентні одна одній і кожна з них важливіша за ознаку C.

Керуючись описаним підходом, визначимо множину альтернатив, які не домінуються за кожною з ознак, у результаті чого отримаємо такі функції належності:

$$\varphi^{н.д.}(x_i, A) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д.}(x_i, B) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д.}(x_i, C) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0}.$$

Отже, недомінованими альтернативами виявились:

– за ознакою A альтернатива x_2;
– за ознакою B альтернатива x_1;
– за ознакою C альтернатива x_1, x_2, x_3.

Далі, за формулою (5.42), отримуємо таку матрицю вислідного відношення переваги на множині альтернатив X:

$$\eta(x_i, x_j) = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

А за формулою (5.41) маємо відповідну множину недомінованих альтернатив (не скореговану):

$$\eta^{н.д.}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1}.$$

Нарешті, використовуючи формулу: $\eta^{н.д.}(x_i) = \min\{\eta^{н.д.}(x_i), \eta^{н.д.}(x_i, x_i)\}$, знаходимо скореговану множину недомінованих альтернатив, а саме:

$$\eta^{н.д.}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0}.$$

Таким чином, робимо висновок, що раціональним у даній задачі слід вважати вибір альтернативи x_1 або x_2. Зауважимо, що ці альтернативи є недомінованими за ознаками A та B , які найбільш (однаково) важливі.

П р и к л а д 5.9 (вибір на основі нечітких відношень). Розглянемо таку задачу. Припустимо, що керівник фірми розглядає чотири проекти подальшого розвитку підприємства *А*, *Б*, *В*, *Г*, і має вибрати для реалізації один з них. З цією метою він запросив чотирьох експертів: *Е*1, *Е*2, *Е*3, *Е*4, до позицій кожного з них він ставиться по-різному. Тобто до висновків одного з експертів він прислухається більш уважно, ніж до поглядів іншого. Відносні переваги позицій експертів описано такою матрицею нечіткого відношення «не менш важливо»:

	*E*1	*E*2	*E*3	*E*4
*E*1	1	0,4	0,6	0
*E*2	1	1	0,8	1
*E*3	0,2	1	1	1
*E*4	0,8	0	0	1

На думку експертів відношення переваги між проектами описуються функціями належності, які мають такий вигляд:

$E1$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,8	1	0
$Б$	0	1	0,2	1
$В$	0	0,8	1	0
$Г$	0	0	0	1

$E2$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,5	0,3
$Б$	0,8	1	0,8	0,8
$В$	0,5	1	1	0
$Г$	0,8	0	0	1

$E3$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0	0,8	0
$Б$	0	1	0	0
$В$	0,1	0	1	0,4
$Г$	1	0	1	1

$E4$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	1	0,9	0
$Б$	0	1	1	1
$В$	0,4	0	1	0
$Г$	0	0	0	1

Розв'язування

Знайдемо нечіткі множини недомінованих за кожною ознакою альтернатив:

	A	$Б$	$В$	$Г$
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E1)$	1	0,2	0	0
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E2)$	0,3	1	0,5	0,2
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E3)$	0	0	0,3	1
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E4)$	1	0	0	0

Далі знаходимо нечітке відношення переваги η, визначене на множині функціями $\varphi^{н.д.}$ й нечітким відношенням μ,

	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,4	1
$Б$	1	1	0,5	0,8
$В$	0,5	0,5	0,5	0,5
$Г$	1	1	0,5	1

Насамкінець, визначаємо відповідну відношенню η нечітку множину недомінованих альтернатив, її функція належності має такий вигляд:

$$\eta^{н.д.} = \frac{А \quad Б \quad В \quad Г}{1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}9 \quad 0{,}8},$$

а скорегована множина недомінованих альтернатив буде такою:

$$\eta^{н.д.} = \frac{А \quad Б \quad В \quad Г}{1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}8}.$$

Як бачимо, найбільший ступінь недомінованості має альтернатива $А$, тому вибір саме цього проекту можна вважати раціональним.

Якщо найбільший ступінь недомінованості має не одна а кілька альтернатив, то ОПР може або самостійно обрати одну з них, виходячи з якихось додаткових міркувань, або розширити коло експертів і знову розв’язати задачу, як описано вище.

Висновки

Теорія нечітких множин є математичним апаратом, що дозволяє описувати поняття, які не можуть бути висловлені чітко. Застосування цієї теорії доцільне в тих випадках, коли недостатньо інформації для прийняття рішення, або опис ситуації засобами звичайних множин дуже «огрубляє» модель, що не дозволяє отримати задовільний результат.

Задачі нечіткого математичного моделювання являють собою узагальнення звичайних задач математичного моделювання. Їх класифікують залежно від того, які елементи задачі є нечіткими, що зумовлює використання різних підходів до їх розв’язування. Зокрема це може бути розкладання на множини рівня, зведення до задачі нечітко визначеної мети або до задачі багатокритерійної оптимізації. Перелічені підходи належать до непрямих методів розв’язування задач НМП.

Нечіткі відношення переваги дозволяють моделювати ситуації, у яких інформація про переваги альтернатив не може бути висловлена однозначно. Вони дозволяють враховувати їх «деякою мірою». У багатьох випадках це дає можливість побудувати більш адекватну математичну модель і спростити розв’язування задачі.

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу досягнення нечітко визначеної мети.

2. Які особливості підходу Белмана – Заде до розв’язування задачі досягнення нечітко визначеної мети?

3. Яким чином враховуються мета й обмеження при формулюванні та розв’язуванні задачі досягнення нечітко визначеної мети?

4. Чи можна сформулювати задачу досягнення нечітко визначеної мети в разі, коли мета й обмеження являють собою підмножини різних універсальних множин?

5. Сформулюйте загальну постановку задачі нечіткого математичного програмування.

6. Яким чином класифікують задачі нечіткого математичного програмування?

7. Які підходи застосовують до розв’язування задач НМП?

8. У чому полягає сутність методу зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети при розв’язувані задач НМП?

9. У чому полягає сутність методу розкладання на множини рівня при розв’язувані задач НМП?

10. Розкрийте суть методу модальних значень у застосуванні до задач НМП?

11. Опишіть застосування методу зведення до багатокритерійної задачі при розв’язуванні задач НМП.

12. Що являє собою нечітке відношення переваги?

13. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?

14. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли відоме відношення переваги на даній множині альтернатив?

15. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношень переваги на множині альтернатив?

16. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Завдання до розділу 5

Завдання А

1. Розв’язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, за даними, які наведено в таблиці.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
G	0,8	0,6	0,7	0,4	0.2	0,1	0,1
C_1	0,5	0,3	0,5	0,4	0,6	0,5	0,4
C_2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
C_3	0,3	0,5	0,7	1	0,9	0,6	0,2

2. Мету та обмеження описано такими функціями належності:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}(x-3)^2+1, & \textit{якщо } x\notin(1;5)\\ 0 & \textit{в інших випадках,}\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x, \textit{ якщо } & x\in(0;6),\\ 1, \textit{ якщо } & x\geq 6,\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети.

3. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети за такими умовами:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1, & \textit{якщо } x\notin(0;2)\\ 0 & \textit{в інших випадках,}\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}|x|, & \textit{якщо } x\notin(0;2)\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

4. Розв'язати таку задачу нечіткого математичного програмування.

$$\begin{aligned}&f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2\to\min\\&x_1-2x_2\geq 2,\\&2x_1+5x_2\leq 10,\\&-12x_1+8x_2\ \tilde{\leq}\ 24,\\&x_1,x_2\geq 0.\end{aligned}$$

5. Розв'язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування.

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max\\&x_1+x_2\geq 4,\\&4x_1+6x_2\ \tilde{\leq}\ 24,\\&3x_1+8x_2\leq 24,\\&x_1,x_2\geq 0.\end{aligned}$$

6. Розв’язати подану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом розкладання на множини рівня.

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min \\
&x_1 + 2x_2 \mathrel{\tilde{\geq}} 2, \\
&2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\
&12x_1 + 8x_2 \leq 24, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

7. Розв’язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом зведення до багатокритерійної задачі.

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min \\
&x_1 + 2x_2 \geq 2, \\
&2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\
&12x_1 + 8x_2 \leq 24, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

8. Множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на ній подано два нечітких відношення переваги, важливість яких дорівнює відповідно $\lambda_1 = 0{,}7$, $\lambda_2 = 0{,}3$. Здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X за даними відношеннями, якщо

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

9. За поданими нижче відношеннями переваги здійснити раціональний вибір альтернативи із множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. За поданими нижче відношеннями переваги здійснити раціональний вибір альтернативи із множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, якщо $\lambda_1 = 0{,}4$, $\lambda_2 = 0{,}6$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання В

Використовуючи теорію нечітких множин, скласти математичні моделі для наведених нижче задач.

1. Комерційно-транспортна фірма (дистриб'ютор) закуповує товар одного й того самого виду в групи постачальників, а також транспортує його та реалізовує покупцям. Припустимо, що в співробітництві задіяно M постачальників та N покупців. Відомі граничні можливості кожного з них, причому ці дані описані нечітко.

Крім того, дистриб'ютор має у своєму розпорядженні інформацію про:

– ціну придбання одиниці товару в кожного постачальника $t_i, i = 1,2,..., M$;

– ціну продажу одиниці готової продукції $s_j, i = 1,2,..., N$;

– питомі транспортні витрати $c_{ij}, i = 1,2,..., M; j = 1,2,..., N$;

– обов'язковий обсяг пропозиції за контрактом $p_i, i = 1,2,..., M$;

– обов'язковий обсяг попиту за контрактом $q_j, i = 1,2,..., N$;

– ціну одиниці товару, який закуповується поза контрактом $k_i, i = 1,2,..., M$;

– ціну одиниці товару, який продається поза контрактом, $r_j, i = 1,2,..., N$;

Необхідно визначити, якими мають бути обсяги продукції x_{ij}, $i = 1,2,..., M$, $j = 1,2,..., N$, що закуповується в кожного з постачальників і продається кожному із споживачів, щоб мінімізувати суму витрат на перевезення продукції та максимізувати прибуток дистриб'ютора.

2. Підприємство використовує кілька виробничих приміщень. Кожне з них характеризується відмінними від інших параметрами (розміри, застосована система освітлення, рівень забрудненості атмосфери, відбивна здатність поверхні, вимоги до освітлення та економії ресурсів). Для освітлення цих приміщень можуть бути застосовані кілька видів світильників, що мають різні технічні параметри. Задача полягає в раціональному виборі джерела світла для кожного приміщення з огляду на перелічені вище характеристики, тобто необхідно вибрати такий вид лампи, що найбільшою мірою задовольняє всі вимоги.

3. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі видобутку корисної копалини застосовують твердіючу суміш, яка складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем у приготуванні такої суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітні матеріали (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Завдання полягає у визначенні такого складу суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність відповідала нормативним умовам (має становити 20 – 60 кг/см^2), води повинно міститися приблизно 20 % від в'язких

складових, а цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску приблизно 65, 9, 35 і 18 % від інертних компонентів у суміші відповідно.

Враховувати, що залежність міцності суміші від її складових описується такою функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

4. Для проведення закладних робіт на гірничому підприємстві використовують кілька видів сумішей, що характеризуються такими ознаками: міцність, вартість, основність, усадка, вміст горючих компонентів, пористість. Кожна з цих ознак має певний пріоритет. Необхідно вибрати оптимальний склад суміші відповідно до заданих пріоритетів.

5. Покупець вибирає одну з п’яти моделей пральних машин. Кожну з них він оцінює за такими ознаками: вартість, потужність, економічність, габаритні розміри, маса завантажуваної білизни. Завдання: а) сформулювати й розв’язати з огляду на ці умови задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати й розв’язати задачу вибору альтернативи за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

6. Керівництву підприємства необхідно призначити одного з трьох кандидатів на посаду головного інженера. Необхідно враховувати такі критерії вибору: освіта, досвід роботи, авторитет у колективі, вік, організаторські здібності. Завдання: а) сформулювати і розв’язати з урахуванням цих умов задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати і розв’язати задачу вибору за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

7. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовують сировину у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, але іншого складу й різної вартості за 1 кг (див. табл. 5.1). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, що містить олова приблизно 50 % і цинку приблизно 25 % .

Таблиця 5.1

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	8
II	10	50	40	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

8. На шахті «Добропільска» функціонує три видобувних дільниці. Приблизний вміст сірки, вологи й зольність вугілля, що видобувається на кожній з них, різні (табл. 5.2). Відомі величини максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку вугілля з кожної дільниці, суми витрат на видобуток для кожної дільниці (табл. 5.2). Плановий обсяг видобутку на шахті становить 3000 тис. т. Необхідно, з огляду на можливості кожної дільниці, скласти план видобувних робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними й виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини, а саме зольність повинна становити приблизно 47 %, вологість – приблизно 10 % , вміст сірки – приблизно 3 % .

Таблиця 5.2

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис.т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис.т	1200	600	530

Завдання С

1 – 8. Розв’язати сформульовані в попередньому пункті задачі одним з методів.

Список літератури

1. Акоф, Р. Основы исследования операций [Текст] / Р. Акоф, М. Сасиени. М.: Мир, 1971. – 534 с.

2. Грешилов, А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях? [Текст] /А. А. Грешилов. – М.: Радио и связь, 1991. – 317 с.

3. Дороднов, А. А. Теория принятия решений [Текст]: учеб. пособие / А. А. Дороднов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – 112 с.

4. Зайченко, Ю. П. Исследование операций [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К.: Вища шк., 1988. – 552 с.

5. Зайченко, Ю. П. Исследование операций [Текст]: сб. задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – К.: Вища шк., 1984. – 220 с.

6. Исследование операций. Т. 1. Методологические основы и математические методы [Текст]: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – 712 с.

7. Исследование операций. Т. 2. Модели и применения [Текст]: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – 677 с.

8. Кини, Р. Принятие решений при многих критериях, предпочтениях и замещениях [Текст] пер. с англ. / Р. Кини, Х. Райфа. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

9. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств [Текст] / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

10. Математический аппарат экономического моделирования [Текст] / под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1983. – 368 с.

11. Математические модели и методы в планировании и управлении горным призводством [Текст] / А. Г. Протосеня, С. А. Кулиш, А. Е. Азбель и др. – М.: Недра, 1985. – 288 с.

12. Михалевич, В. С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем [Текст] / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

13. Моделирование и управление горнорудными предприятиями [Текст] / С. Л. Каграманян, А. С. Давидкович, В. А. Малышев и др. – М.: Недра, 1989. – 360 с.

14. Модели и алгоритмы управления процессами добычи и обогащения полезных ископаемых. [Текст]: Труды Свердловского горного института. – Вып. 133 / – Свердловск: Изд-во УПИ, 1976.

15. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта [Текст] / под ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

16. Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. Нейман, О. Моргенштейн. – М.: Наука, 1970. – 707 с.

17. Орловский, С. А., Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации [Текст] / С. А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 206 с.

18. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 254 с.

19. Резниченко, С. С. Математические методы и моделирование в горной промышленности [Текст] / С. С. Резниченко, А. А. Ашихмин. – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 404 с.

20. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. [Текст] / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

21. Таха, Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2 [Текст] / Х. Таха. – М., 1985. – 700 с.

22. Теория выбора и принятия решений [Текст] / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов, – М.: Наука, 1982. – 328 с.

23. Трухаев, Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р. И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 168 с.

24. Ус, С. А. Теорія нечітких множин у системах прийняття рішень [Текст]: навч. посібник / С. А. Ус. – Д.: НГА України, 2001, – 86 с.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Ус Світлана Альбертівна

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 20.01.2012. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 12,4.
Обл.-вид. арк. 15,2. Тираж 100 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.

49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса,19.