УДК 519.85

С.А.Ус

О МОДЕЛЯХ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предложены новые модели оптимального разбиения множеств в условиях нечеткой исходной информации.

Запропоновано нові моделі оптимального розбиття множин в умовах нечіткої вихідної інформації.

При решении прикладных задач информация, требуемая для построения математической модели, как правило, не является точно определенной, и поэтому построение моделей и разработка методов решения, которые позволяют учесть эту неопределенность является актуальной задачей.

В работе [1] рассмотрены задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности для случаев, когда неопределенность имеет стохастическую природу, а также некоторые модели оптимального нечеткого разбиения множеств. Эти модели соответствуют задачам, в которых нечетким является полученное оптимальное разбиение. При этом исходные данные предполагаются полностью определенными. Однако, как правило, именно исходная информация является довольно расплывчатой, нечеткой.

В данной работе предложены математические модели, в которых нечеткими являются именно исходные данные. При этом получаемое решение должно быть вполне определенным.

Рассмотрим бесконечномерную задачу размещения, общая постановка которой дана в [1].

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них, или даже всех могут быть заранее неизвестны. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, а также стоимость доставки продукции $c_i(x,\tau_i)$, $i=\overline{1,N}$ - из пункта производства τ_i в пункт потребления x.предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность i-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т.е. на подмножества Ω_1, Ω_2, …, Ω_N, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

В реальных задачах точно определить спрос, задать его количественную оценку, часто невозможно, но при этом можно оценить его как «высокий», «низкий» и т.д. Таким образом, в каждой точке области мы можем задать некоторое качественное значение, которое удобно описывать с помощью нечетких множеств. Функция спроса при этом будет задана в виде некоторого нечеткого отображения множества Ω на множество $R^+=[0;+\infty)$. Т.е. на множестве Ω будет задано нечеткое отображение ρ с функцией принадлежности $\mu_\rho(x,r)$: $\Omega\times \mathrm{R}^+\to[0;1]$. Каждому потребителю x из Ω в этом случае ставится в соответствие некоторое нечеткое множество на R^+, описывающее спрос на продукцию. А именно, для каждого фиксированного x' соответствующее ему нечеткое значение функции ρ будет описываться функцией принадлежности $\mu_\rho(x',r)$.

Аналогично, функцию стоимости также можно определить как нечеткое отображение множества Ω^2 в R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x,\tau_i,r)$: $\Omega\times\Omega\times \mathrm{R}^+\to[0;1]$. Нечеткое значение функции для каждого фиксированного x' и τ_i будет нечетким множеством на R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x',\tau_i,r)$.

Кроме того, значения мощности производителей b_i, $i=\overline{1,N}$ также могут быть заданы нечетко, в виде нечетких множеств.

Таким образом, получаем следующие задачи оптимального разбиения множеств при нечетких исходных данных:

Задача 1 (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств без ограничений).

Пусть Ω - замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, центры которых $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ заданы, так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \tag{1}$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, N}, \tag{2}$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \tag{3}$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ - нечеткие отображения множества Ω^2 в R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x, \tau_i, r)$: $\Omega \times \Omega \times \mathrm{R}^+ \to [0;1]$, $\rho(x)$ - нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x, r)$: $\Omega \times \mathrm{R}^+ \to [0;1]$.

Задача 2 (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств без ограничений).

Пусть Ω - замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \tag{4}$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\text{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right)=0,\ \text{i}\neq\text{j},\ \text{i, j} = \overline{1,\text{N}}, \tag{5}$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \tag{6}$$

$c_i(x,\tau_i)$, $i = \overline{1,N}$, $\rho(x)$ описываются также как в задаче 1.

Задача 3 (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω - замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$, центры которых $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_N$ заданы так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x,\tau_i)\rho(x)dx \tag{7}$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i, \quad i = \overline{1,N} \tag{8}$$

$$\text{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right)=0,\ \text{i}\neq\text{j},\ i, j = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \tag{10}$$

Здесь $c_i(x,\tau_i)$, $i = \overline{1,N}$ - нечеткие отображения множества Ω^2 в R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x,\tau_i,r)$: $\Omega\times\Omega\times\mathrm{R}^+ \to [0;1]$; $\rho(x)$ нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x,r)$: $\Omega\times\mathrm{R}^+ \to [0;1]$; b_i, $i = \overline{1,N}$ заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи ($\sum_{i=1}^{N} b_i \ge S$, $S = \int_{\Omega} \rho(x)\mathrm{d}x$).

Задача 4 (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω - замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \qquad (11)$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \le b_i, \quad i = \overline{1, N} \qquad (12)$$

$$\mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \ne j, \ i, j = \overline{1, N}, \qquad (13)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \qquad (14)$$

Здесь функции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ и $\rho(x)$, а также параметры b_i, $i = \overline{1, N}$ определяются как в предыдущей задаче.

Учитывая возможную нечеткость в задании b_i, $i = \overline{1, N}$, получим задачу вида:

Задача 5 (Задача оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств).

Пусть Ω - замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx \qquad (15)$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \le \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, N} \qquad (16)$$

$$\mathrm{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right)=0,\ \mathrm{i}\neq\mathrm{j},\ \mathrm{i},\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{N}}, \qquad (17)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = \Omega, \qquad (18)$$

Здесь $c_i(x,\tau_i)$, $i=\overline{1,N}$ - нечеткие отображения множества Ω^2 в R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x,\tau_i,r)$: $\Omega\times\Omega\times\mathrm{R}^+\to[0;1]$; $\rho(x)$ - нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x,r)$: $\Omega\times\mathrm{R}^+\to[0;1]$; $\tilde{b}_i$, $i=\overline{1,N}$ - заданные нечеткие числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи.

Интегралы в постановках отображают суммирование по всем x из Ω и в зависимости от выбранного метода решения задачи рассматриваются как интегралы Лебега либо как нечеткие интегралы.

Предложенные модели сформулированы для случая, когда должно быть получено четкое решение задачи в виде обычного разбиения множества Ω и могут быть обобщены на класс нечетких разбиений.

1. Киселева Е.М. Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография – К.: Наукова Думка 2005 – 564 с.