Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»

П.М. Щербаков
Л.І. Шелест
К.Ю. Шелест

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ І ПРАКТИЧНІ РОЗРОБКИ СПРОЩЕНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ З ОБЕРНЕНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2012

УДК 514.116(075.8)
ББК 221510я73
Щ 61

Рекомендовано до видання редакційною радою Державного ВНЗ «НГУ» як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей різних форм навчання, слухачів МІБО та учнів під час підготовки до ЗНО (протокол № 2 від 25.06.2012).

Рецензенти:
А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики (Національна металургійна академія України);
Т.В. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ «Національний гірничий університет»).

Автори: П.М. Щербаков – розд. 1, 2;
Л.І. Шелест – розд. 3, 4;
К.Ю. Шелест – розд. 5, 6.

Щербаков П.М.
Щ 61 Теоретичні основи і практичні розробки спрощених методів обчислення тригонометричних виразів з оберненими тригонометричними функціями: навч. посіб. / П.М. Щербаков, Л.І. Шелест, К.Ю. Шелест. – Д.: Національний гірничий університет, 2012. – 66 с.

Зміст видання відповідає розділу «Обернені тригонометричні функції» загального курсу математики для всіх технічних спеціальностей.

Включає основні поняття про функції і методи зведення тригонометричних функцій до гострого кута за допомогою тригонометричного кола.

Містить означення і властивості обернених тригонометричних функцій, формули для обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій та спрощені методи таких обчислень розв'язками прямокутних трикутників, практичні поради щодо застосування тригонометричного кола при обчисленні обернених тригонометричних функцій від своїх прямих функцій, обчислення всіх тригонометричних функцій кута, заданого оберненою тригонометричною функцією, приклади з детальними поясненнями їх розв'язувань та індивідуальні завдання.

УДК 514.116(075.8)
ББК 221510я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник спрямований на поглиблення знань під час вивчення розділу «Обернені тригонометричні функції» загального курсу математики для всіх технічних спеціальностей.

У ньому наведені основні поняття про функції, вказані загальні ознаки обернених функцій і умови їх існування, а також запропоновані спрощені методи обчислення тригонометричних виразів, складовими яких є обернені тригонометричні функції.

Посібник містить приклади з детальними поясненнями їх розв'язувань та індивідуальні завдання відповідно до кожного розділу.

Всі запропоновані методи і рекомендації успішно апробовані протягом багатьох років серед студентів першого і другого курсів деяких технічних спеціальностей, а також серед слухачів регіональних центрів МІБО.

Навчальний посібник буде корисним студентам першого і другого курсів усіх технічних спеціальностей, слухачам МІБО та учням при підготовці до ЗНО.

1. ФУНКЦІЇ

Наведено основні поняття про функції, вказано ознаки їх монотонності, дано означення оберненої функції та акцентовано увагу на ті обмеження, при яких функція може мати обернену до неї функцію. На основі простих прикладів сформульовано принцип однозначного відображення між функцією і її оберненою функцією, вказана залежність між ними і показано взаємне розташування графіків цих функцій в одній і тій самій системі координат.

1.1. Загальні означення

Функцією називається правило, за яким кожному елементу x деякої множини X відповідає єдиний елемент у другої множини Y.

Для означення функції будемо користуватися записом $y = f(x)$, де буква f означає правило, за яким для кожного елемента $x \in X$ визначається єдиний елемент $y \in Y$.

Всі значення, які може набувати незалежна змінна x стосовно конкретної функції, утворюють **область її визначення**.

Всі значення залежної змінної y, які може набувати функція при всіх x із області її визначення, складають **область значень** цієї функції.

Правило, за яким кожному значенню $x \in X$ відповідає не одне, а декілька, можливо, безліч значень змінної $y \in Y$, називається **багатозначною** функцією.

В багатьох випадках властивості функції стають більш ясними, якщо цю функцію зобразити графічно, тобто побудувати її графік.

Функція називається **зростаючою** на деякому інтервалі, якщо більшому значенню незалежної змінної x з цього інтервалу відповідає більше значення даної функції, тобто при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Схематичний графік зростаючої функції на інтервалі $(0;+\infty)$ зображено на рис. 1.

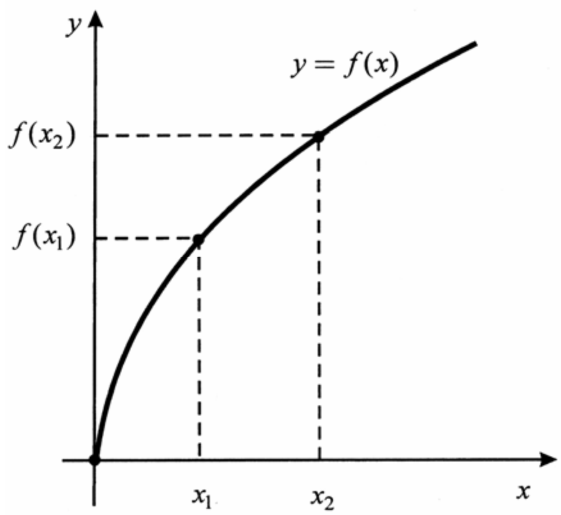


Рис. 1

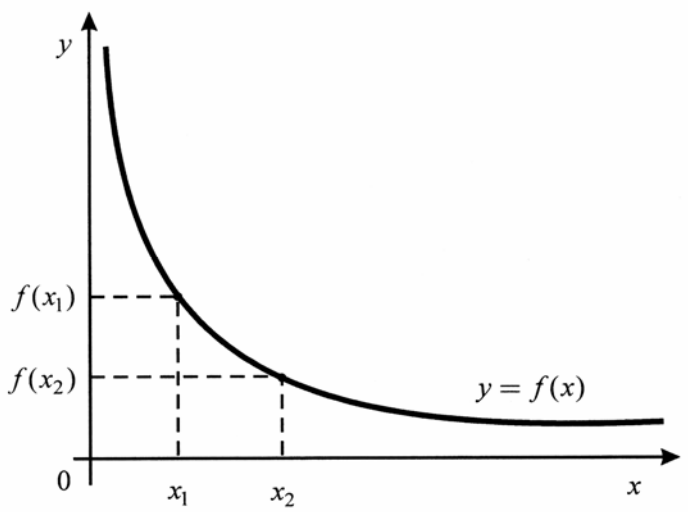


Рис. 2

Функція називається **спадною** на деякому інтервалі, якщо більшому значенню незалежної функції x з цього інтервалу відповідає менше значення цієї функції, тобто при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Схематичний графік спадної функції на інтервалі $(0;+\infty)$ зображено на рис. 2.

Якщо функція тільки зростає (або спадає) на інтервалі $x \in (x_1, x_2)$, то її називають зростаючою (або спадною) функцією на цьому інтервалі. Зростаючі та спадні функції об'єднуються терміном **«монотонні»** функції.

1.2. Обернені функції

Розглянемо функцію $y = x^3$ на множині $x \in [-2;2]$. Для кожного значення незалежної змінної x цієї множини можна знайти тільки одне значення змінної y із множини $y \in [-8;8]$. Звідси виходить, що функція $y = x^3$ однозначно відображає відрізок $[-2;2]$ – область її визначення на відрізок $[-8;8]$ – в область її значень. Графік цієї функції зображено на рис. 3.

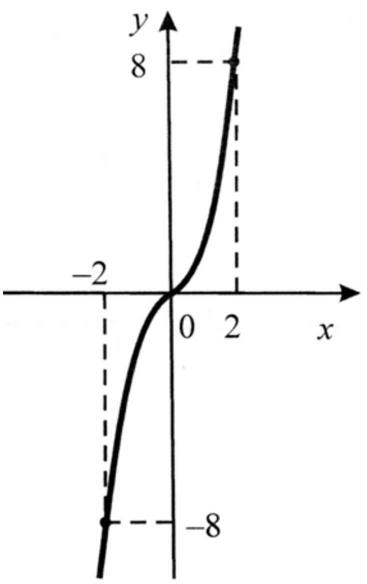


Рис. 3

При обчисленні значень цієї функції рівність $y = x^3$ розглядалась як рівняння відносно незалежної змінної x. Але вказану рівність можна звести до рівняння відносно незалежної змінної y, тобто $x = \sqrt[3]{y}$. Не складно впевнитися, що воно теж має єдиний розв'язок для кожного $y \in [8;8]$. Геометрично це означає, що будь-яка пряма, яка проходить через точку відрізка $[-8;8]$ паралельно осі x, перетинає графік функції $y = x^3$ тільки в одній точці, тобто кожному значенню $y \in [-8;8]$ відповідає єдине значення $x \in [-2;2]$. Звідси виходить, що на відрізку $[-8;8]$ задана функція $x = \sqrt[3]{y}$, яка відображає значення вказаного відрізка (тепер область визначення цієї функції) на відрізок $[-2;2]$ – область її значень. Отже, для функції $y = x^3$ при $x \in [-2;2]$ і для функції $x = \sqrt[3]{y}$ при $y \in [-8;8]$ існує взаємна однозначна відповідність, а їх графіками в одній і тій самій системі координат є одна і та сама крива, рис. 3. На цій підставі функцію $x = \sqrt[3]{y}$ слід розглянути як **обернену** по відношенню до функції $y = x^3$.

Перейдемо тепер до загального випадку. Розглянемо функцію $y = f(x)$ з областю визначення $x \in X$ і областю значень $y \in Y$.

Нехай ця функція така, що будь-яка пряма, яка проходить через точку множини Y паралельно осі x, перетинає її графік тільки в одній точці, тобто для кожного $x \in X$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв'язок $y \in Y$.

Подальші міркування виконаємо аналогічно тим, які розглянуті вище для конкретних функцій. З цією метою рівність $y = f(x)$ зведемо до рівняння від змінної y і в загальному вигляді позначимо його $x = f^{-1}(y)$.

Згідно з прийнятим допущенням про перетин прямої з графіком функції $y = f(x)$ рівняння $x = f^{-1}(y)$ для кожного $y \in Y$ теж має єдиний розв'язок $x \in X$, тобто на множині Y задана функція, областю значень якої є множина X.

Ця функція називається **оберненою** по відношенню до функції $y = f(x)$ і позначається, як уже зазначалось, $x = f^{-1}(y)$.

Функції $y = f(x)$ і $x = f^{-1}(y)$ виражають один і той же зв'язок між змінними x і y. Але в першому випадку ми розглядаємо x як незалежну змінну, а y – як функцію, а в другому – навпаки, y вважаємо незалежною змінною, а x – функцією. Таким чином, між функцією $y = f(x)$ і $x = f^{-1}(y)$ існує взаємна однозначна відповідність, а їх графіками в одній і тій же системі координат є одна і та сама лінія. Звідси очевидно, що для функції $x = f^{-1}(y)$ оберненою є функція $y = f(x)$. Тому обидві ці функції називаються **взаємно оберненими**.

Слід зауважити, що деякі функції не мають обернених, наприклад функція $y = x^2$, якщо її розглядати на всій числовій осі, де вона задана. Це пояснюється тим, що відповідне їй рівняння відносно змінної $y > 0$ має такі два розв'язки: $x = -\sqrt{y}$, $x = \sqrt{y}$, тобто пряма L, проведена через будь-яку точку множини $y \in [0;+\infty)$ паралельно осі x, перетинає графік функції $y = x^2$ в точках M_1, M_2 з абсцисами x_1, x_2 (рис. 4).

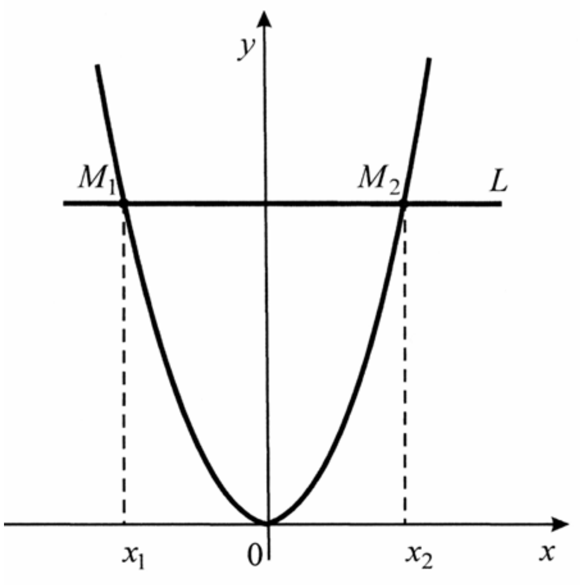


Рис. 4

Якщо ж цю функцію розглянемо тільки на проміжку $x \in [0;+\infty)$, то впевнимося, що на ньому вона має обернену функцію $x = \sqrt{y}$, бо кожному значенню $y \in [0;+\infty)$ відповідає єдине значення $x \in [0;+\infty)$, яке задовольняє рівнянню $y = x^2$.

Виникає питання, яка повинна бути функція, щоб вона мала обернену функцію?

В підрозд. 1.1 ми означили монотонною функцію на тих інтервалах, де вона зростає чи спадає. З рис. 1, 2, 3 видно, що пряма, яка проведена паралельно осі x до перетину з графіком монотонної функції, пересікає цей графік тільки в одній точці, тобто кожному значенню y відповідає одне значення x. Наявність єдиної відповідності між змінними x і y засвідчує те, що **монотонна функція** $y = f(x)$ **має обернену функцію** $x = f^{-1}(y)$.

Наведемо без доведення теорему про існування оберненої функції.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і зростає (або спадає) на проміжку $x \in X$, а областю її значень відповідно є проміжок $y \in Y$, то для неї існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка теж неперервна і зростає (або спадає) на проміжку $y \in Y$.

Щоб знайти обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ для неперервної монотонної функції $y = f(x)$, необхідно останнє рівняння розв'язати відносно змінної y.

Для зручності в позначенні оберненої функції $x = f^{-1}(y)$ змінні x і y переставляють місцями, в результаті чого одержують вираз $y = f^{-1}(x)$. Необхідно відмітити, що в математичній літературі символ оберненої функції f^{-1}, тобто правило, за яким вона обчислюється, прийнято записувати будь-якою іншою буквою латинського чи грецького алфавіту. Так, вирази $y = f^{-1}(x)$ і $y = \varphi(x)$ є рівнозначними загальними позначеннями оберненої функції. Тоді в одній і тій самій системі координат для функції $y = f(x)$ та її оберненої $y = \varphi(x)$ буде два різних графіки, які розташовані симетрично відносно прямої $y = x$, тобто відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Наприклад, розглянемо знову функцію $y = x^3$, але в області її визначення $x \in (-\infty; +\infty)$. На вказаному проміжку це зростаюча функція, тому вона має обернену функцію $x = \sqrt[3]{y}$, а при перестановці змінних буде мати вигляд: $y = \sqrt[3]{x}$. Слід розуміти, що $f(x) = x^3$, а $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$.

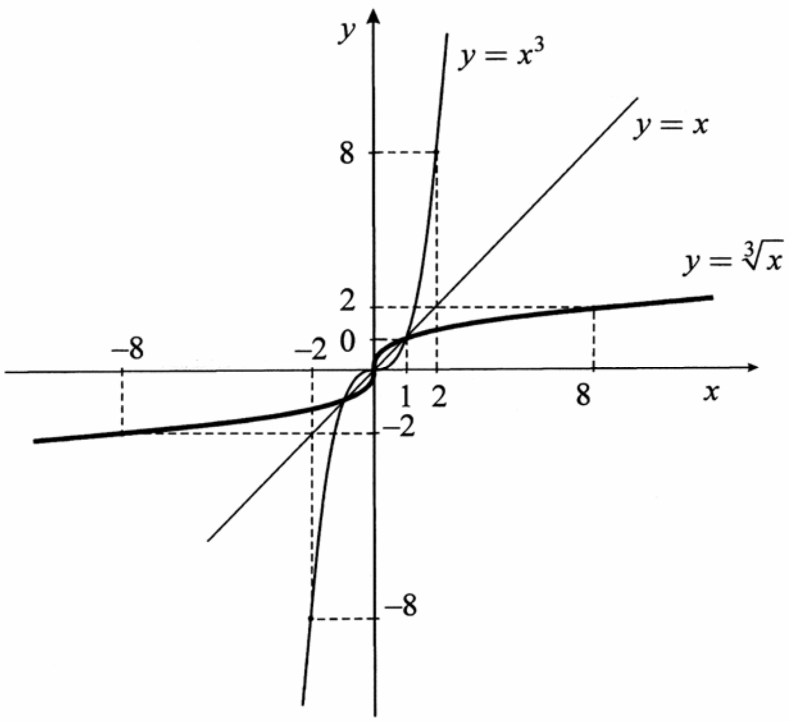


Рис. 5

Графіки функцій $y = x^3$ і $y = \sqrt[3]{x}$ показані на рис. 5, при цьому графік оберненої функції виділений жирною лінією.

Якщо функція $y = f(x)$ монотонна на деяких інтервалах області визначення, то на кожному інтервалі монотонності вона має свою обернену функцію. Звернемося, наприклад, до раніше розглянутої степеневої функції $y = x^2$ (рис. 4). Ця функція зростає на інтервалі $x \in [0;+\infty)$, тому на цьому інтервалі оберненою до неї буде функція $x = \sqrt{y}$, на інтервалі $x \in (-\infty;0]$ функція спадна, тому оберненою до неї буде функція $x = -\sqrt{y}$.

Питання для самоперевірки

1. Яке правило називається функцією?
2. Які ознаки монотонних функцій?
3. За яких умов для функції існує обернена їй функція?
4. В яких випадках дві функції називаються взаємно оберненими?
5. Які особливості графіків функції та її оберненої функції в одній і тій же системі координат?

2. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Подано дослідження тригонометричних функцій на предмет існування для них обернених тригонометричних функцій, при цьому всі одержані висновки обґрунтовано графічно. Для кожної тригонометричної функції сформульовано остаточні означення їх обернених функцій, зроблено важливе доповнення про багатозначні функції і вказано залежності, які існують між ними і відповідними оберненими функціями.

2.1. Арксинус

Розглянемо функцію $y = \sin x$, визначену на множині $x \in (-\infty;+\infty)$, з областю значень $y \in [-1;1]$. Графік цієї функції (синусоїду) показано на рис. 6.

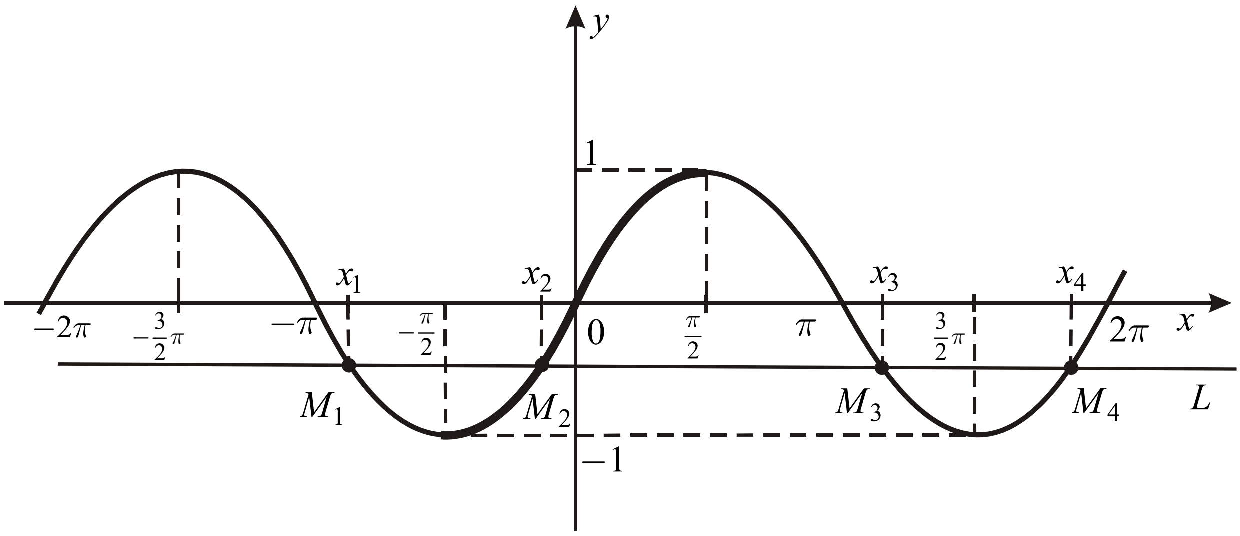


Рис. 6

Як видно з цього рисунка, кожна пряма L, що проходить через точку множини $y \in [-1;1]$ паралельно осі x, має безліч точок перетину із синусоїдою, наприклад, точки $\ldots M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ \ldots$. Отже, у даному випадку кожному значенню $y[-1;1]$ відповідає нескінченна множина значень x, наприклад, значення: $\ldots x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$. Це свідчить про те, що функція $y = \sin x$ на всій числовій осі при $x \in (-\infty;+\infty)$ не має оберненої функції. Але ця функція є зростаючою чи спадною, тобто монотонною, на проміжках $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, де $k \in Z$, значить, на кожному такому проміжку функція $y = \sin x$ має обернену функцію.

Для зручності обернену тригонометричну функцію до функції $y = \sin x$ визначають на проміжку $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, при $k = 0$, де функція $y = \sin x$ зростає.

На цьому проміжку частина синусоїди додатково виділена жирною лінією, рис. 6.

На проміжку $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ знаходиться гострий кут $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ прямокутного трикутника, розв'язок якого зручно використовувати в подальших математичних перетвореннях.

Функція $x = \arcsin y$ називається оберненою до функції $y = \sin x$ на проміжку $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Якщо в запису $x = \arcsin y$ поміняти місцями змінні, як вказувалося раніше, тобто незалежну змінну позначити через x, а функцію – через y, то вираз $y = \arcsin x$ (читається «арксинус x») є кінцевим для позначення оберненої функції, при цьому $x \in [-1;1]$, а $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Графік оберненої функції $y = \arcsin x$ показано на рис. 7 жирною лінією, він симетричний до графіка функції $y = \sin x$ відносно прямої $y = x$, тобто відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

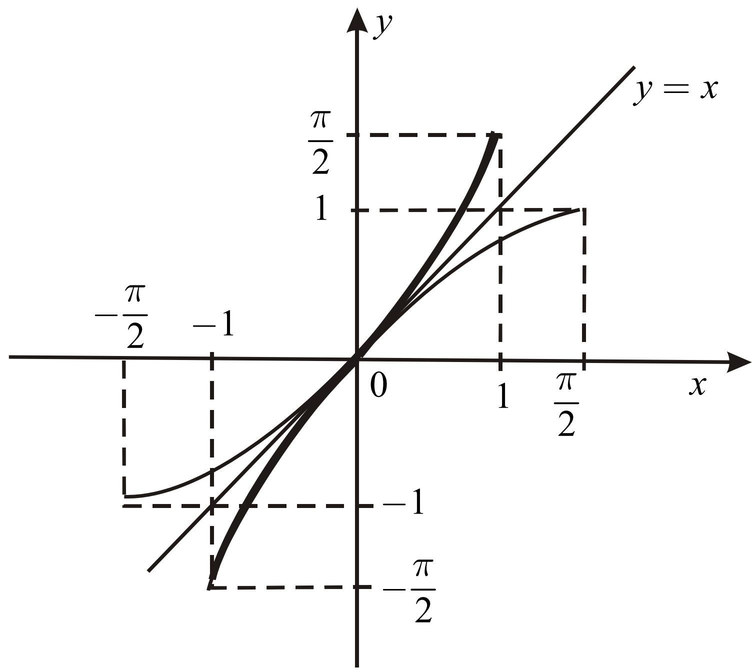


Рис. 7

Остаточне означення. Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції $y = \sin x$, якщо для неї виконуються такі дві умови:

1) $\sin y = x$,

2) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Слід відзначити, що умова $x \in [-1;1]$ не входить в означення, бо вона безпосередньо витікає з першої умови, хоча про неї необхідно пам'ятати і брати до уваги при графічному тлумаченні функцій $y = \sin x$ і $y = \arcsin x$.

Записи $y = \arcsin x$ і $x = \sin y$ при $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ еквівалентні, тому слід розуміти, що арксинус x є кут, синус якого дорівнює x.

Наприклад, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, бо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Помилковою була б відповідь: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, але $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Основні властивості оберненої функції $y = \arcsin x$:

– область визначення: $x \in [-1;1]$;

– область значень: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

– функція непарна, тобто $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

– функція зростаюча;

– $\sin(\arcsin x) = x$;

– $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

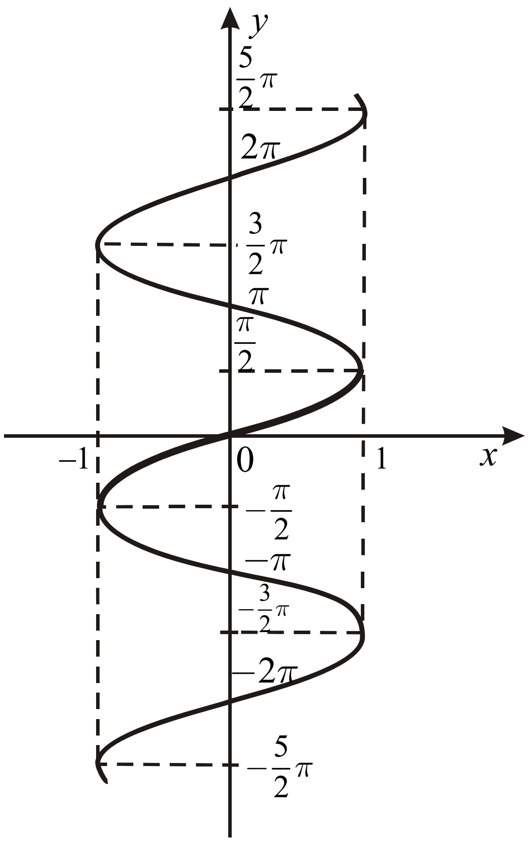


Рис. 8

Важливе доповнення. Якщо кожному значенню $y \in [-1;1]$ поставити у відповідність всі значення $x \in (-\infty;\infty)$, які задовольняють рівняння $y = \sin x$, а не тільки розглянуті раніше $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, рис. 6, то в цьому випадку одержимо багатозначну функцію, яка позначається $x = \mathrm{Arc}\sin y$. Після перестановки змінних x і y багатозначна функція має вигляд $y = \mathrm{Arc}\sin x$, а її значення на проміжку $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ називаються головними, тобто це значення оберненої функції $y = \arcsin x$. Графік багатозначної функції $y = \mathrm{Arc}\sin x$ показано на рис. 8, де графік оберненої функції додатково виділено жирною лінією.

Між багатозначною $y = \mathrm{Arc}\sin x$ і оберненою $y = \arcsin x$ функціями існує така залежність:

$$\operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x,\ k \in Z, \text{ де } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

При $k = 0$ багатозначна функція $y = \operatorname{Arcsin} x$ має головні значення, тобто значення оберненої тригонометричної функції $y = \arcsin x$.

Наприклад. Послідовно обчислимо значення багатозначної функції $y = \operatorname{Arcsin} x$ для $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$, $k_4 = 2$ при однаковому значенні $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$k_1 = -1$, $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$ або (-225°),

$\boldsymbol{k_2 = 0}$, $\boldsymbol{\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}}$,

$k_3 = 1$, $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ або 135°,

$k_4 = 2$, $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ або 405°.

2.2. Арккосинус

Розглянемо функцію $y = \cos x$, визначену на множині $x \in (-\infty; \infty)$, з областю значень $y \in [-1; 1]$. Графік цієї функції (косинусоїду) показано на рис. 9.

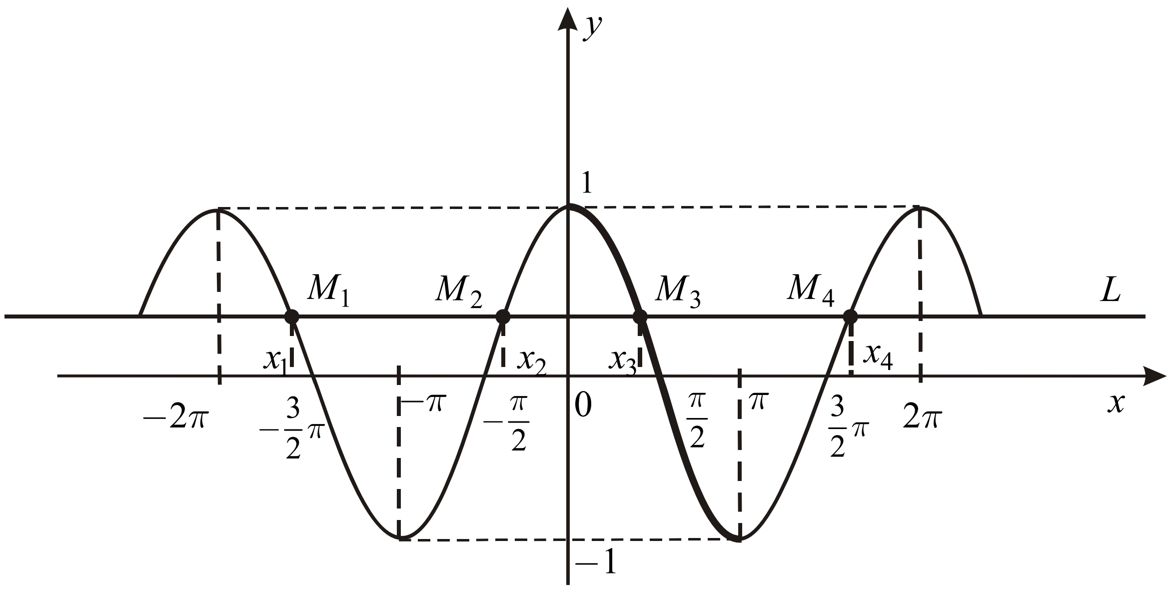


Рис. 9

Дослідження косинусоїди аналогічні наведеним вище дослідженням синусоїди. Кожна пряма L, що проходить через точку множини $y \in [-1; 1]$ паралельно осі x, пересікає косинусоїду в нескінченній множині точок, наприклад в точках $\ldots M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$.

Отже, кожному значенню $y \in [-1;1]$ відповідає нескінченна множина значень x, наприклад, значення $\ldots x_1$, x_2, x_3, x_4, ..., тобто на всій числовій осі $x \in [-\infty;\infty]$ функція $y = \cos x$ не має оберненої функції. Але ця функція є спадною чи зростаючою (монотонною) на проміжках $x \in [k\pi, \pi + k\pi]$, де $k \in Z$, і на кожному такому проміжку функція $y = \cos x$ має обернену функцію. Для зручності (з тих же міркувань, що в підрозд. 2.1) обернену функцію до функції $y = \cos x$ визначають на проміжку $x \in [0;\pi]$ при $k = 0$, де частина косинусоїди додатково виділена жирною лінією, рис. 9. Функція $x = \arccos y$ називається оберненою до функції $y = \cos x$ на проміжку $x \in [0;\pi]$. Якщо в запису $x = \arccos y$ поміняти змінні місцями, тобто незалежну змінну позначити через x, а функцію – через y, то вираз $y = \arccos x$ (читається «арккосинус x») є кінцевим для позначення оберненої функції, при цьому $x \in [1;1]$, а $y \in [0;\pi]$. Графік оберненої функції $y = \arccos x$ показано на рис. 10 жирною лінією, він симетричний до графіка функції $y = \cos x$ відносно прямої $y = x$, тобто відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

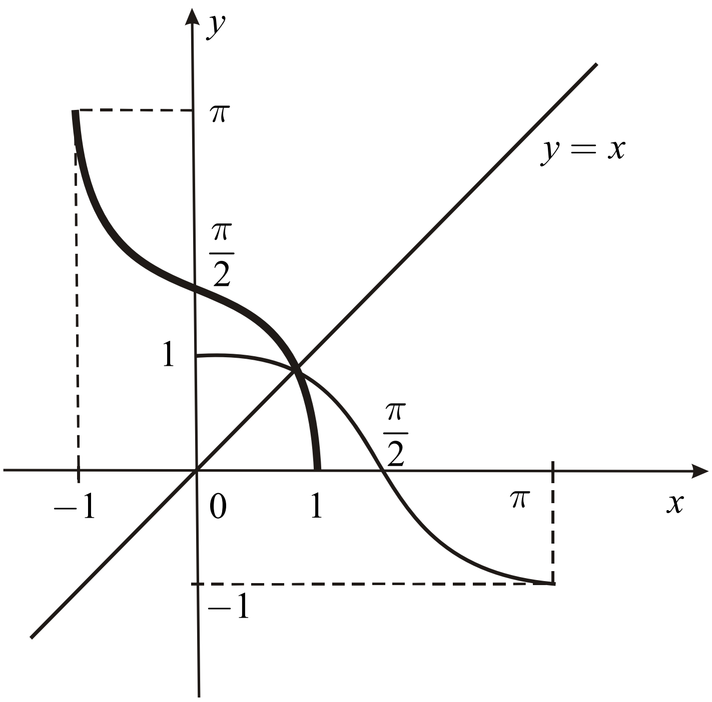


Рис. 10

Остаточне означення. Функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $y = \cos x$, якщо для неї виконуються такі дві умови:

1) $\cos y = x$; 2) $0 \le y \le \pi$.

Записи $y = \arccos x$ і $x = \cos y$ при $y \in [0;\pi]$ еквівалентні, тому слід розуміти, що арккосинус x є кут, косинус якого дорівнює x.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in [0;\pi]$.

Основні властивості оберненої функції $y = \arccos x$:

– область визначення: $x \in [-1;1]$;

– область значень: $y \in [0;\pi]$;

– функція не є ні непарною, ні парною: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

– функція спадна;

– $\cos(\arccos x) = x$;

– $\arccos(\cos x) = x$, при $x \in [0;\pi]$.

Важливе доповнення. Якщо кожному значенню $y \in [-1;1]$ поставити у відповідність усі значення $y = \cos x$, а не тільки розглянуті раніше $x \in [0;\pi]$, рис. 9, то в цьому випадку одержимо багатозначну функцію, яка позначається $x = \mathrm{Arccos}\, y$. Після перестановки змінних x і y багатозначна функція має вигляд $y = \mathrm{Arc}\cos x$, а її значення на проміжку $y \in [0;\pi]$ називаються головними, тобто це значення оберненої функції $y = \arccos x$. Графік багатозначної функції показано на рис. 11, де графік оберненої функції додатково виділено жирною лінією.

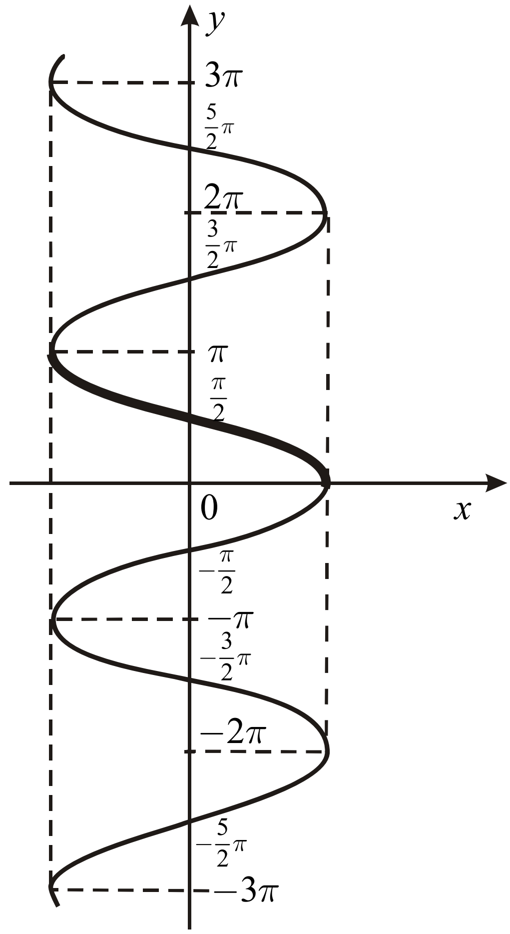


Рис. 11

Між багатозначною $y = \mathrm{Arc}\cos x$ і оберненою $y = \arccos x$ функціями існує така залежність: $\mathrm{Arccos} x = 2\pi k \pm \arccos x$, $k \in Z$.

При $k = 0$ $\mathrm{Arc}\cos x = \pm \arccos x$, але $(-\arccos x) \notin [0;\pi]$, тому слід враховувати тільки знак плюс у правій частині цього виразу, щоб одержати її головні значення.

Наприклад. Послідовно обчислимо значення багатозначної функції $y = \mathrm{Arc}\cos x$ для $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$, $k_4 = 2$ при однаковому значенні $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Значення оберненої функції визначимо за правилом $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, тобто $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Наступні обчислення:

$$k_1 = -1,\ \mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\pi \pm \frac{3\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} -2\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{11}{4}\pi,\ \text{або}\ \left(-495^\circ\right) \\ -2\pi + \frac{3}{4}\pi = -\frac{5}{4}\pi,\ \text{або}\ \left(-225^\circ\right) \end{array}\right.,$$

$k_2 = 0$, $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\dfrac{3\pi}{4}$ або $\left(\pm 135^\circ\right)$.

При цій умові кут $\dfrac{3\pi}{4}$ є значенням оберненої функції, тобто

$$\mathbf{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}},\ \left(\mathbf{135^\circ}\right).$$

$$k_3 = 1,\ \mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi \pm \frac{3\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} 2\pi - \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{5}{4}\pi, \text{ або } 225^\circ \\ 2\pi + \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{11}{4}\pi, \text{ або } 495^\circ \end{array}\right. .$$

2.3. Арктангенс

Розглянемо функцію $y = \mathrm{tg}\, x$, визначену на множині $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$, з областю значень $y \in (-\infty;\infty)$. Графік цієї функції (тангенсоїду) показано на рис. 12.

Дослідження аналогічні тим, що виконані в пунктах 2.1, 2.2. Кожна пряма L, що проходить через точку множини $y \in (-\infty;\infty)$ паралельно осі x, перетинає тангенсоїду в нескінченній множині точок, наприклад у точках M_1, M_2, M_3. Отже, кожному значенню y відповідає нескінченна множина значень x, тобто на числовій осі $x \in (-\infty;\infty)$ функція $y = \mathrm{tg} x$ не має оберненої функції. Додатково слід відмітити, що графік функції в точках $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, має

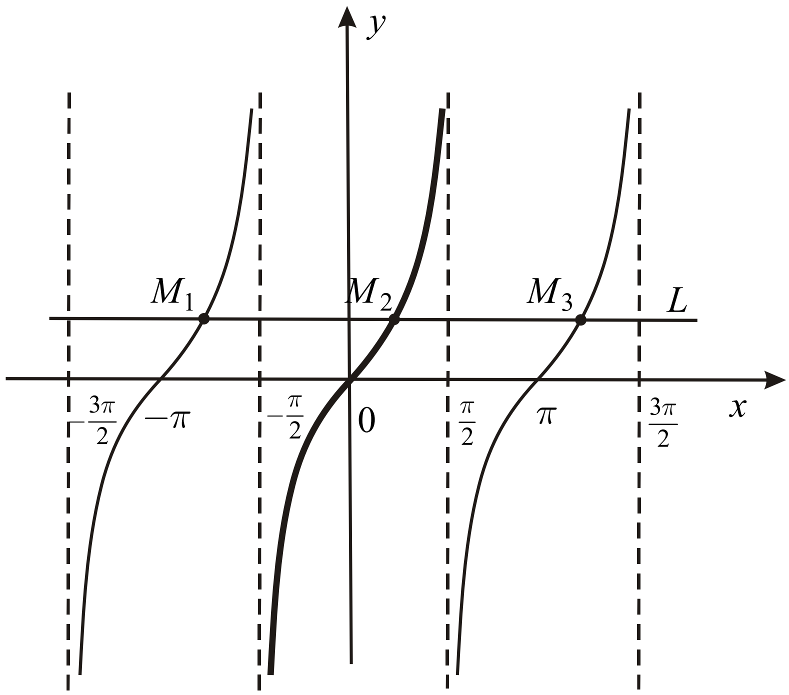


Рис. 12

нескінченні розриви і через ці точки проходять вертикальні (перпендикулярні до осі x) асимптоти. Але функція $y = \mathrm{tg}\, x$ є зростаючою (монотонною) на проміжках $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$, і на кожному такому проміжку вона має обернену функцію. Для зручності (з тих же міркувань, що в підрозд. 2.1) обернену функцію до функції $y = \operatorname{tg} x$ визначають на проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $k = 0$. Графік на цьому проміжку виділено жирною лінією, рис. 12.

Функція $x = \operatorname{arctg} y$ називається оберненою до функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і при перестановці місцями змінних x та y вираз $y = \operatorname{arctg} x$ (читається «арктангенс x») є кінцевим для позначення оберненої функції. При цьому $x \in (-\infty; \infty)$, а $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Графік оберненої функції $y = \operatorname{arctg} x$ показано жирною лінією, він симетричний до графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ відносно прямої $y = x$, рис. 13.

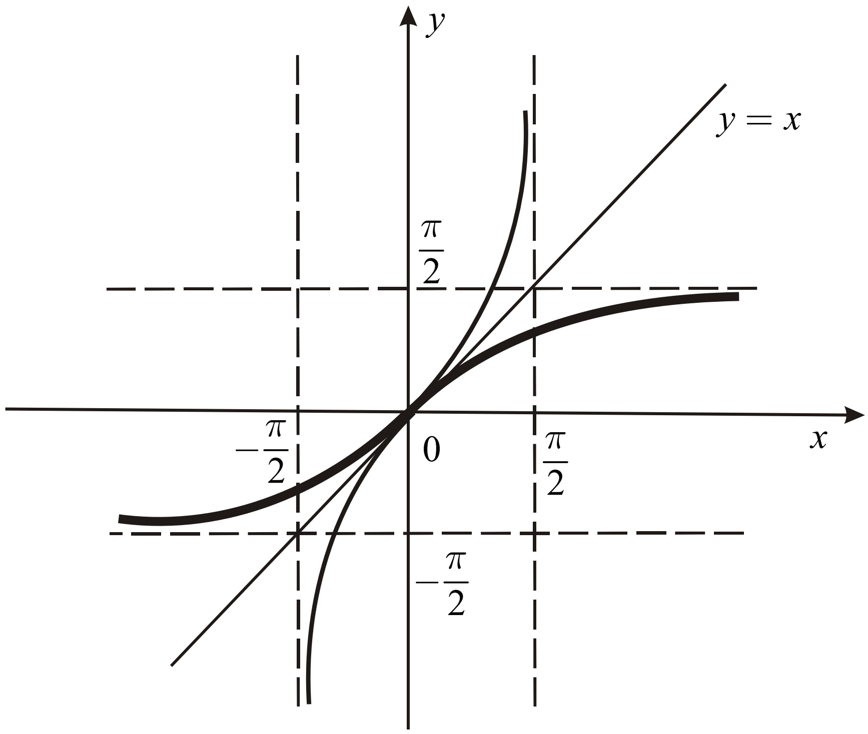


Рис. 13

Остаточне означення. Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до функції $y = \operatorname{tg} x$, якщо для неї виконуються такі дві умови:

1) $\operatorname{tg} y = x$;

2) $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Записи $y = \operatorname{arctg} x$ і $x = \operatorname{tg} y$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ еквівалентні, тому слід розуміти, що арктангенс x є кут, тангенс якого дорівнює x.

Наприклад, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, бо $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ і $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Основні властивості оберненої функції $y = \mathbf{arctg}\, x$:

– область визначення: $x \in (-\infty;\infty)$;

– область значень: $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

– функція непарна: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

– функція зростаюча;

– $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$;

– $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Важливе доповнення. Якщо кожному значенню $y \in (-\infty;\infty)$ поставити у відповідність усі значення $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$, які задовольняють рівняння $y = \operatorname{tg} x$, а не тільки розглянуті раніше на проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, рис. 12, то в цьому випадку одержимо багатозначну функцію, яка позначається $x = \operatorname{Arctg} y$. Після перестановки змінних x та y багатозначна функція має вигляд $y = \operatorname{Arctg} x$, а її значення на проміжку $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ називаються головними, тобто це значення оберненої функції $y = \operatorname{arctg} x$. Графік багатозначної функції $y = \operatorname{Arctg} x$ показано на рис. 14, де графік оберненої функції виділений жирною лінією.

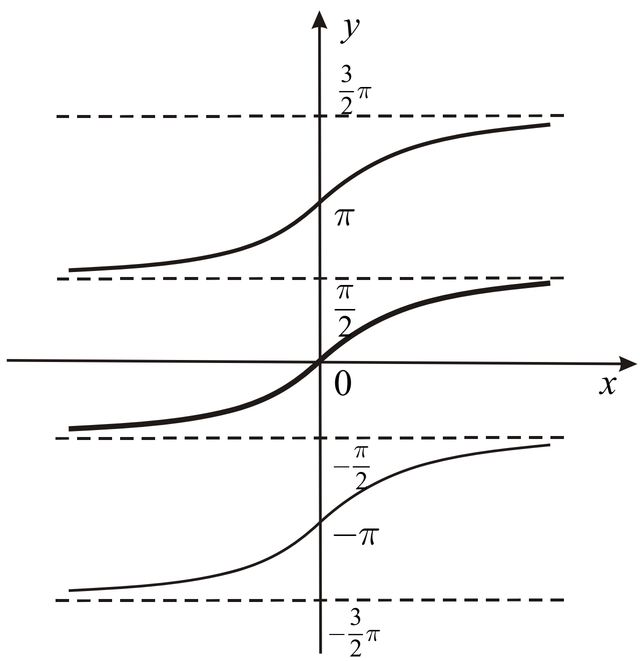


Рис. 14

Між багатозначною функцією $y = \operatorname{Arctg} x$ і оберненою $y = \operatorname{arctg} x$ функціями існує така залежність:

$$\operatorname{Arctg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x,\ k \in Z.$$

При $k = 0$ багатозначна функція $y = \operatorname{Arctg} x$ має головні значення, тобто значення оберненої тригонометричної функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Наприклад. Послідовно обчислимо значення багатозначної функції $y = \operatorname{Arctg} x$ для $k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $k_5 = 2$ при однаковому значенні $x = \sqrt{3}$.

Значення оберненої функції $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Далі обчислимо:

$k_1 = -2$; $\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = -2\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5}{3}\pi$ або $\left(-300^\circ\right)$;

$k_2 = -1$, $\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2}{3}\pi$ або $\left(-120^\circ\right)$;

$\boldsymbol{k_3 = 0}$, $\mathbf{Arctg}\sqrt{\mathbf{3}} = \mathbf{arctg}\sqrt{\mathbf{3}} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ **або** $\left(\mathbf{60^\circ}\right)$;

$k_4 = 1$, $\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$ або 240°;

$k_5 = 2$, $\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = 2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7}{3}\pi$ або 420°.

2.4. Арккотангенс

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$, визначену на множині $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$, з областю значень $y \in (-\infty; \infty)$. Графік цієї функції (котангенсоїду) показано на рис. 15.

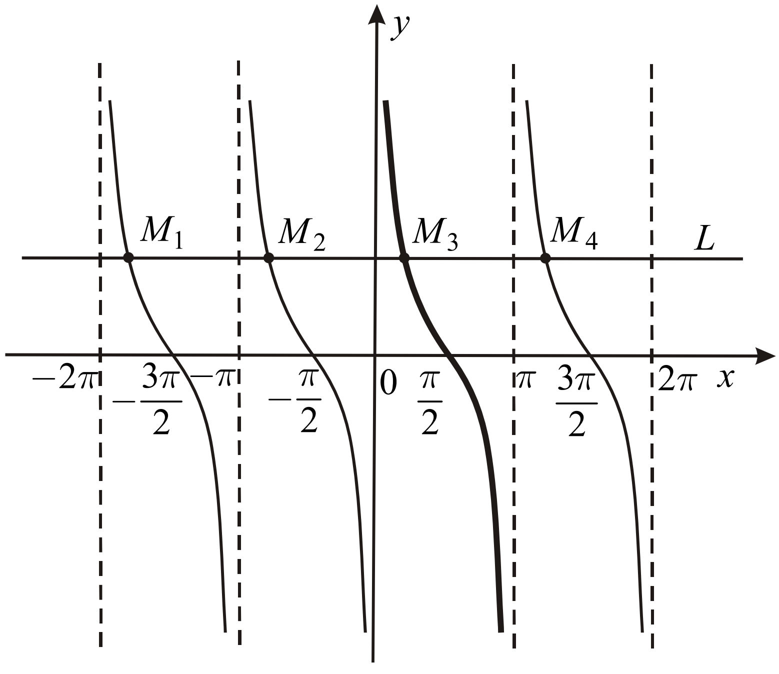


Рис. 15

Дослідження аналогічні тим, що виконані для функції $y = \operatorname{tg} x$ (підрозд. 2.3). З таких же міркувань на всій числовій осі $x \in (-\infty; \infty)$ функція $y = \operatorname{ctg} x$ не має оберненої функції. Графік цієї функції в точках $x = \pm k\pi$, $k \in Z$, має нескінченні розриви і через ці точки проходять вертикальні (перпендикулярні до осі x) асимптоти.

Як видно з наведеного графіка, функція $y = \operatorname{ctg} x$ є спадною (монотонною) на проміжках $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$, значить на кожному такому проміжку вона має обернену функцію. Для зручності (з таких же міркувань, що в підрозд. 2.1) обернену функцію визначають на проміжку $x \in (0; \pi)$, тобто при $k = 0$. Графік на цьому проміжку додатково виділено жирною лінією, рис. 15. Функція $x = \operatorname{arcctg} y$ називається оберненою до функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $x \in (0; \pi)$ і при перестановці змінних x та y вираз $y = \operatorname{arcctg} x$ (читається «арккотангенс x») є кінцевим для позначення оберненої функції, при цьому $x \in (-\infty; \infty)$, а $y \in (0; \pi)$. Графік оберненої функції $y = \operatorname{arcctg} x$ показано на рис. 16, він симетричний до графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ відносно прямої $y = x$ і виділений жирною лінією.

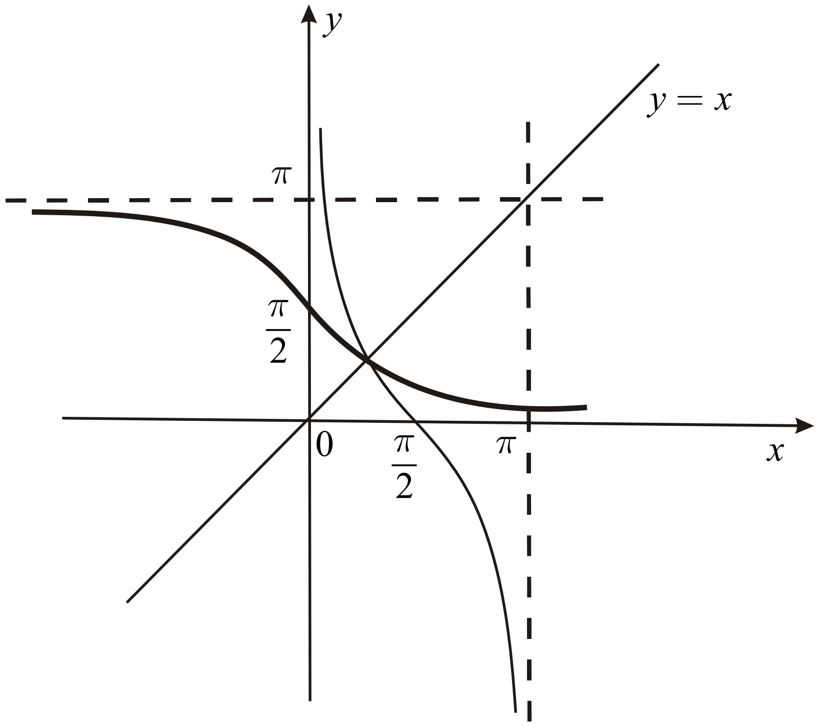


Рис. 16

Остаточне означення. Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ називається оберненою до функції $y = \operatorname{ctg} x$, якщо для неї виконуються такі дві умови:

1) $\operatorname{ctg} y = x$;

2) $y \in (0;\pi)$.

Записи $y = \operatorname{arcctg} x$ і $x = \operatorname{ctg} y$ при $y \in (0;\pi)$ еквівалентні, тому слід розуміти, що арккотангенс x є кут, котангенс якого дорівнює x.

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, бо $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{\pi}{3} \in (0;\pi)$.

Основні властивості оберненої функції $y = \operatorname{arcctg} x$:

– область визначення: $x \in (-\infty;\infty)$;

– область значень: $y \in (0;\pi)$;

– функція не є ні парною, ні непарною, тому $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

– функція спадна;

– $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

– $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, якщо $x \in (0;\pi)$.

Важливе доповнення. Якщо кожному значенню $y \in (-\infty;\infty)$ поставити у відповідність усі значення $x \in (k\pi;\pi + k\pi)$, $k \in Z$, які задовольняють рівняння $y = \operatorname{ctg} x$, а не тільки розглянуті раніше на проміжку $x \in (0;\pi)$, рис. 15, то в цьому випадку одержимо багатозначну функцію, яка позначається

$x = \mathrm{Arcctg}\, y$. Після перестановки змінних x та y багатозначна функція має вигляд $y = \mathrm{Arcctg}\, x$, а її значення на проміжку $(0;\pi)$ називаються головними, тобто це значення оберненої функції $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Графік багатозначної функції $y = \mathrm{Arcctg}\, x$ показано на рис. 17, де графік оберненої функції виділений жирною лінією.

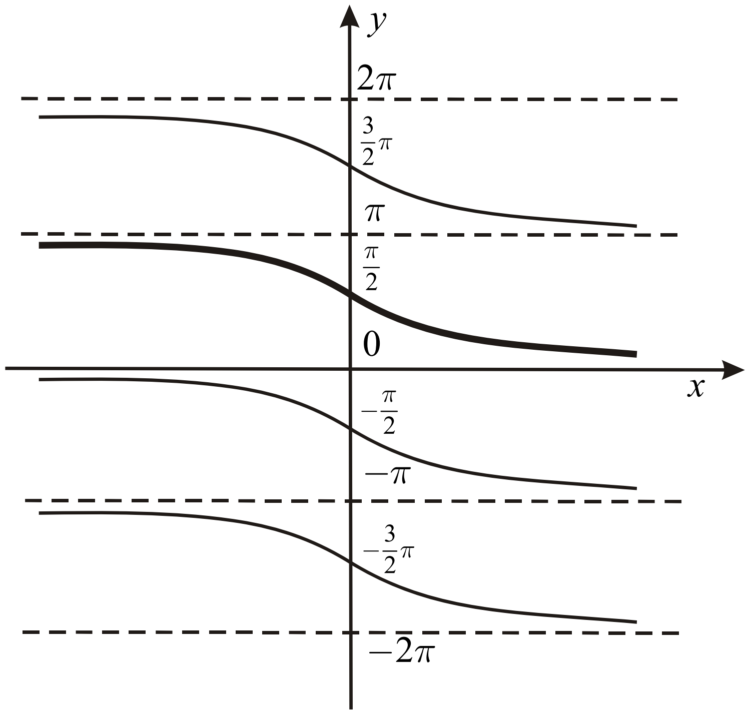


Рис. 17

Між багатозначною $y = \mathrm{Arcctg}\, x$ і оберненою $y = \mathrm{arcctg}\, x$ функціями існує така залежність:

$\mathrm{Arcctg}\, x = k\pi + \mathrm{arcctg}\, x$, $k \in Z$.

Наприклад. Послідовно обчислимо значення багатозначної функції $y = \mathrm{Arcctg}\, x$ для $k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ при однаковому значенні $x = -\sqrt{3}$.

Згідно з вказаним правилом обчислення цієї оберненої функції для від'ємного аргументу маємо: $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{5\pi}{6}$ або150°.

Далі обчислимо:

$k_1 = -2$; $\mathrm{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -2\pi + \frac{5\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$ або$\left(-210^\circ\right)$;

$k_2 = -1$, $\mathrm{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\pi + \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ або$\left(-30^\circ\right)$;

$\boldsymbol{k_3 = 0}$, $\mathbf{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \mathbf{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$ **або** $\mathbf{150^\circ}$.

Питання для самоперевірки

1. Яке остаточне означення оберненої функції $y = \arcsin x$?

2. Яка існує залежність між багатозначною $y = \mathrm{Arc}\sin x$ і оберненою $y = \arcsin x$ функціями?

3. Яке остаточне означення оберненої функції $y = \arccos x$?

4. Яка існує залежність між багатозначною $y = \mathrm{Arccos}\, x$ і оберненою $y = \arccos x$ функціями?

5. Яке остаточне означення оберненої функції $y = \mathrm{arctg}\, x$?

6. Яка існує залежність між багатозначною $y = \mathrm{Arctg}\, x$ і оберненою $y = \mathrm{arctg}\, x$ функціями?

7. Яке остаточне означення оберненої функції $y = \mathrm{arcctg}\, x$?

8. Яка існує залежність між багатозначною $\mathrm{Arcctg}\, x$ і оберненою $y = \mathrm{arcctg}\, x$ функціями?

3. ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто тригонометричне коло і його застосування при зведенні тригонометричних функцій до гострого кута. Доведено формули для обчислення всіх тригонометричних функцій від обернених, ці формули систематизовано в таблицю. Запропоновано спрощені методи таких обчислень простими розв'язуваннями прямокутних трикутників, ці методи також застосовано при обчисленні тригонометричних функцій від половинних і подвійних обернених тригонометричних функцій.

3.1. Тригонометричне коло і зведення тригонометричних функцій

Тригонометричним називається коло з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює одиниці, рис. 18.

Як правило, у тригонометричному колі розглядають різноманітні положення рухомого радіуса OA_1, який може обертатися навколо центра, тобто навколо точки O. Кожний кут, який при цьому можна одержати, обчислюють від нерухомого радіуса OA, що збігається з додатним напрямком осі x, до зафіксованого (кінцевого) положення рухомого радіуса OA_1, наприклад, кути α, β. З наведеного прикладу виходить, що в тригонометричному колі два кути можна визначати від початкового положення, тобто від нерухомого радіуса, до одного і того ж положення рухомого радіуса. Таке твердження стає зрозумілим, якщо кути позначити відповідними знаками. Додатним вважається той кут, який утворений обертанням рухомого радіуса від нерухомого в напрямку проти годинникової стрілки, від'ємним – за годинниковою стрілкою. Звертаючись знову до рис. 18, констатуємо, що кут α, утворений обертанням рухомого радіуса OA_1 у напрямку проти годинникової стрілки, – додатний, а кут β, утворений обертанням того самого рухомого радіуса, але за годинниковою стрілкою, – від'ємний. Отже, зробимо висновок: кожний кут у тригонометричному колі визначається додатним або від'ємним залежно від зручності його використання в подальших математичних розрахунках чи перетворюваннях. Тригонометричне коло ділиться координатними осями на чотири чверті (квадранти), при цьому перша чверть знаходиться між додатними напрямками осей x та y, а інші послідовно нумеруються в напрямку проти

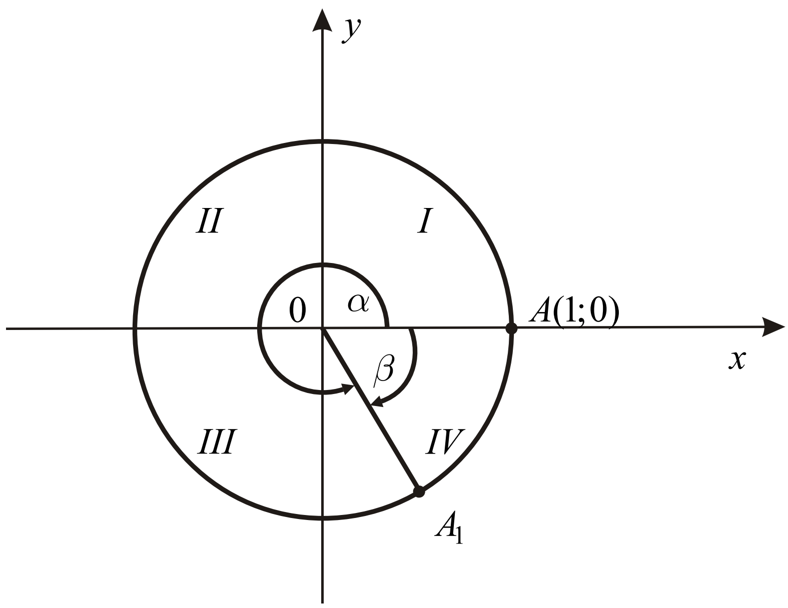


Рис. 18

годинникової стрілки, рис. 18. Якщо рухомий радіус займе остаточне положення в першій, другій, третій або четвертій чверті, то утворений при цьому кут називається кутом відповідної чверті незалежно від того, скільки повних обертів навколо початку координат він до цього зробив. Так, кути α і β на рис. 18 є кутами четвертої чверті.

З використанням тригонометричного кола в значній мірі спрощуються складні тригонометричні розрахунки, більш зрозумілими стають тотожні перетворення виразів, складовими яких є тригонометричні функції. Застосування тригонометричного кола наведено в подальших викладках. Спочатку дамо означення його важливих ліній.

Лінії синусів і тангенсів вертикальні, при цьому лінія синусів збігається з віссю у, а лінія тангенсів проходить через точку $A(1;0)$ перпендикулярно осі *x,* рис. 19.

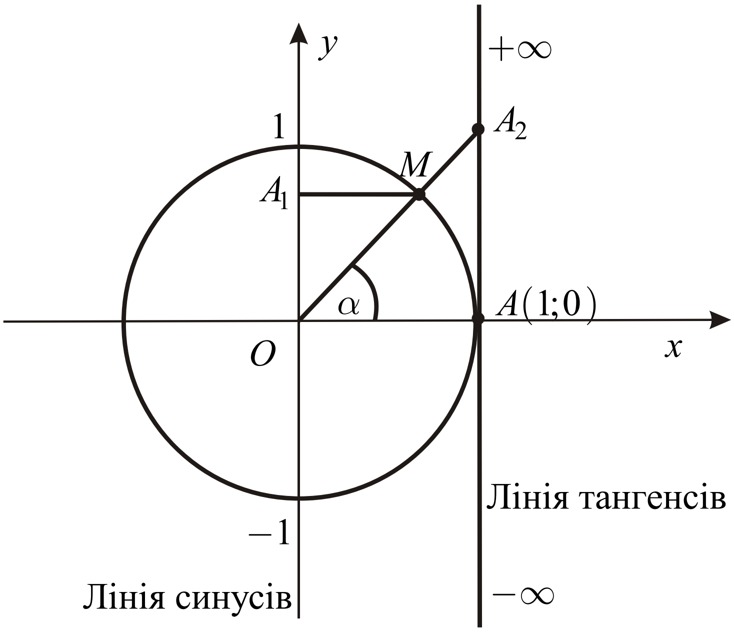


Рис. 19

Для того, щоб знайти $\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha)$, необхідно повернути рухомий радіус на кут α проти годинникової стрілки, якщо він додатний, або за її рухом, якщо він від'ємний, потім знайти точки перетину радіуса з колом (т. M) або з лінією тангенсів (т. A_2). Проекція точки M на лінію синусів (відрізок OA_1) є $\sin\alpha$, а відрізок AA_2 – $\operatorname{tg}\alpha$. Якщо відрізки OA_1, AA_2 знаходяться вище осі *x*, то функції додатні, якщо який-небудь відрізок нижче за вісь *y*, то відповідна йому функція має від'ємне значення.

Лінії косинусів і котангенсів горизонтальні, лінія косинуса збігається з віссю x, а лінія котангенса – це дотична до кола в точці $B(0;1)$, рис. 20.

Для того, щоб знайти $\cos\alpha(\operatorname{ctg}\alpha)$, необхідно повернути рухомий радіус на кут α проти годинникової стрілки, якщо він додатний, або за її рухом, якщо він від'ємний, потім знайти точки його перетину з колом (т. M) (з лінією котангенсів (т. B_2)). Проекція т. M на лінію косинусів (відрізок OB_1) є $\cos\alpha$, а відрізок BB_2 – $\operatorname{ctg}\alpha$. Для додатного значення функції відповідний відрізок знаходиться справа від осі y, для від'ємного – зліва.

Для того, щоб одержати **зведену тригонометричну функцію, тобто функцію, зведену до гострого кута**, не варто запам'ятовувати досить велику кількість формул зведення, достатньо скористуватися графіком досліджуваної функції або тригонометричним колом, яке зручніше в даному випадку.

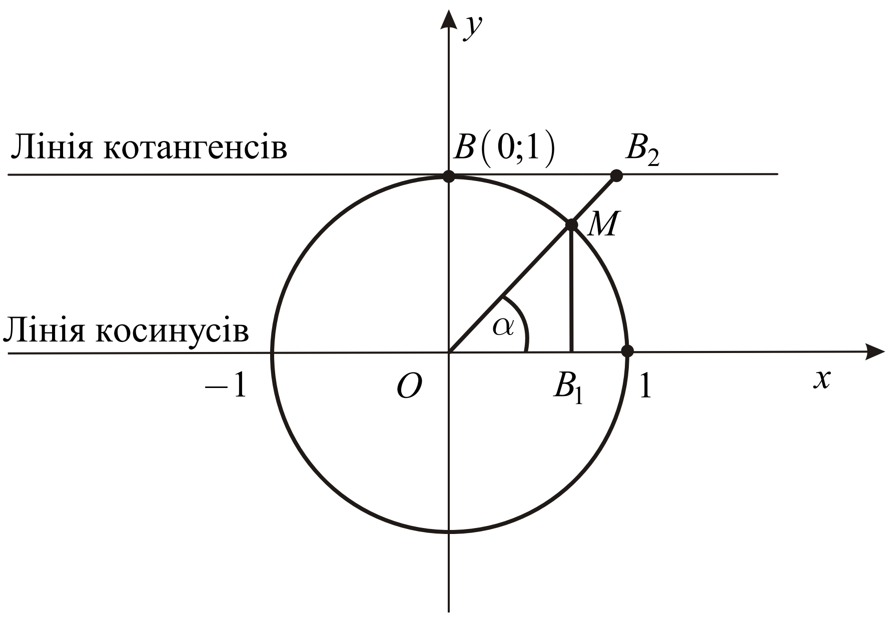


Рис. 20

Розглянемо метод зведення тригонометричної функції, аргументом якої є кут α_1, до тригонометричної функції гострого кута.

Якщо кут α_1 більший за період тригонометричної функції ($\alpha_1 > T$), то в першу чергу його слід зменшити до кута $\alpha < T$.

Періодичні тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ мають період $T = 2\pi$ $\left(360^\circ\right)$, а функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ – $T = \pi\left(180^\circ\right)$. Нехай будь-яка з них має кут $\alpha_1 > T$, тоді за допомогою простих арифметичних дій подамо його таким виразом:

$$\alpha_1 = nT + \alpha, \text{ де } n \in Z, \ \alpha < T.$$

В такому випадку кут α_1 можна зменшити на цілу кількість періодів, тобто на nT, унаслідок чого тригонометрична функція кута α_1 рівнозначно стане тригонометричною функцією кута α.

Якщо при цьому кут α виявиться гострим, то зведення функції кута α_1 до функції гострого кута виконано.

Якщо кут $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; T\right)$, то подальшими тригонометричними перетвореннями необхідно функцію кута α звести до функції гострого кута β.

Пропонуємо вказані перетворення виконувати не на основі формального застосування формул зведення, а з допомогою тригонометричного кола – як ефективного способу наглядного подання співвідношень між кутами і їх тригонометричними функціями.

В такому випадку кут α слід схематично показати на тригонометричному колі та знайти відрізок, що визначає задану функцію на відповідній для неї лінії, рис. 19, 20. Розташування цього відрізка стосовно координатних осей визначає знак функції. Враховуючи чверть, у якій знаходиться кут α, його не складно подати в вигляді формули

$$\alpha = \frac{\pi}{2}n \pm \beta \text{ (або } \alpha = 90^\circ n \pm \beta\text{), де } n \in Z \text{, а } \beta - \text{гострий кут.}$$

Порада. Зручніше підібрати $n \in Z$ таким, щоб $\beta \le \frac{\pi}{4}$.

Ця формула дозволяє функцію кута α звести до функції гострого кута β, але для її кінцевого визначення доцільно скористатися мнемонічним правилом.

Мнемонічне правило. Якщо значення кута $\frac{\pi}{2}n\left(90^\circ n\right)$, де $n \in Z$, знаходиться на вертикальному діаметрі (n – непарне), то звідна функція змінює свою назву на кофункцію, тобто синус $\Leftrightarrow$ косинус, тангенс $\Leftrightarrow$ котангенс. Якщо кут $\frac{\pi}{2}n\left(90^\circ n\right)$ знаходиться на горизонтальному діаметрі (n – парне), то назва звідної функції не змінюється.

Приклад. Функцію $\cos 1320^\circ$ звести до гострого кута β.

У прийнятому вище позначенні $\alpha_1 = 1320^\circ$. Період функції $\cos x$ дорівнює 360°, тому кут α_1 містить три цілих періоди, тобто

$$1320^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 240^\circ \text{, отже, } \alpha = 240^\circ.$$

Тоді

$$\cos 1320^\circ = \cos\left(3 \cdot 360^\circ + 240^\circ\right) = \cos 240^\circ.$$

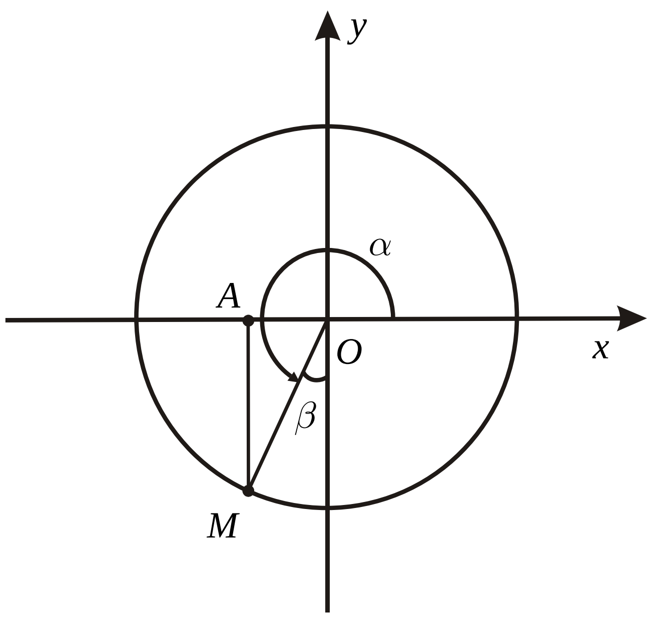


Рис. 21

Зведемо функцію $\cos 240^\circ$ до функції гострого кута β, для чого побудуємо тригонометричне коло і на ньому схематично покажемо кут $\alpha = 240^\circ$, рис. 21.

Відрізок OA, який визначає $\cos\alpha$, знаходиться зліва від осі y, тому звідна функція має знак мінус.

Далі скористуємося формулою $\alpha = 90^\circ n \pm \beta$, або в нашому випадку $240^\circ = 90^\circ n \pm \beta$.

При $n = 3$ маємо: $240^\circ = 90^\circ \cdot 3 - 30^\circ$, де кут $\beta = 30^\circ$ ($\beta < \frac{\pi}{4}$ згідно з порадою).

Отже, функція $\cos 240^\circ = \cos\left(90^\circ \cdot 3 - 30^\circ\right)$ зводиться до функції кута $\beta = 30^\circ$.

Кут $90^\circ \cdot 3$ $\left(\text{або } 270^\circ\right)$ знаходиться на вертикальному діаметрі ($n = 3$ – непарне), тому функція косинус змінюється на синус, тобто функція $\cos 240^\circ$ зводиться до функції $\sin 30^\circ$ з урахуванням знака мінус, встановленого раніше, а саме $\cos 240^\circ = -\sin 30^\circ$.

Кінцевий результат: $\cos 1320^\circ = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

Зауваження. Кут $\alpha = 240^\circ$ можна подати по-іншому:

$$240^\circ = 90^\circ \cdot 2 + 60^\circ.$$

Отже, функція $\cos 240^\circ = \cos\left(90^\circ \cdot 2 + 60^\circ\right)$зводиться до функції кута $\beta = 60^\circ$.

Кут $90^\circ \cdot 2$ $\left(\text{або } 180^\circ\right)$ знаходиться на горизонтальному діаметрі ($n = 2$ – парне), тому функція косинус не змінюється, тобто функція косинус 240° зводиться до функції $\cos 60^\circ$ з урахуванням знака мінус, а саме:

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Результат такий самий, як і в попередньому випадку.

Відповідь: $\cos 1320^\circ = -\sin 30^\circ = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

3.2. Формули для обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій

Формула 1. $\sin(\arcsin x) = x$, де $\arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ згідно з означенням функції $\arcsin x$ (підрозд. 2.1).

Формула 2. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, де $\arccos x \in [0; \pi]$.

Доведення. Позначимо $\arccos x = \alpha$, тоді $\cos\alpha = x$, якщо $\alpha \in [0; \pi]$. За умовою формули необхідно знайти $\sin(\arccos x)$. Підставимо в цей вираз замість $\arccos x$ його позначення α, після чого маємо:

$$\sin(\arccos x) = \sin\alpha.$$

Щоб знайти $\sin\alpha$, скористаємося рівнянням $\cos\alpha = x$, одержаним на вказаному вище інтервалі визначень кута α, а також відомою тригонометричною тотожністю: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Звідси $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, тобто $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$.

На інтервалі $[0;\pi]$, де задано кут α, синус доданий, тому $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$, та, враховуючи прийняте позначення, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

Звідси виходить, що для будь-якого $x \in [-1;1]$ справедливо:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ де } \arccos x \in [0;\pi].$$

Формула 2 доведена.

Формула 3. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Доведення. Позначимо $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тоді $\operatorname{tg}\alpha = x$, якщо $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. За умовою необхідно знайти $\sin(\operatorname{arctg} x)$ або $\sin\alpha$. Скористаємося відомою формулою $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha$, звідки $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Далі виконаємо тотожні математичні перетворення, скориставшись формулою $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$:

$$1-\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha-1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Звідки $\sin\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Як уже зазначалось, $\operatorname{tg}\alpha = x$ на вказаному проміжку всіх значень кута α, тому $\sin\alpha = \pm\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Визначимо знак $\sin\alpha$ залежно від знака змінної x.

Нехай $x \geq 0$, тоді $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ і для цього кута $\sin\alpha \geq 0$.

З іншого боку, при $x \geq 0$ використовується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, якщо перед коренем стоїть знак плюс.

Звідси виходить, що в даному випадку виконується рівність $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

При $x < 0$ кут $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ і для нього $\sin\alpha < 0$.

При $x<0$ виконується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}<0$, якщо перед коренем знак плюс. Оскільки права і ліва частини рівності мають однакові знаки (мінуси), то $\sin\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

З урахуванням позначення отримаємо: $\sin(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Отже, для будь-якого $x\in(-\infty;\infty)$ справедливо $\sin(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arctg}x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, а знак $\sin(\operatorname{arctg}x)$ визначається знаком змінної x, якщо перед коренем знак плюс.

Формула 3 доведена.

Формула 4. $\sin(\operatorname{arcctg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arcctg}x\in(0;\pi)$.

Доведення. Позначимо $\operatorname{arcctg}x=\alpha$, тоді $\operatorname{ctg}\alpha=x$, якщо $\alpha\in(0;\pi)$. За умовою формули необхідно знайти $\sin(\operatorname{arcctg}x)=\sin\alpha$.

Скористаємося відомою формулою $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$,

звідки $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ або $\sin\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

На вказаному вище проміжку для всіх значень кута α справедливо $\operatorname{ctg}\alpha=x$. З урахуванням цього твердження маємо:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}.$$

На інтервалі $(0;\pi)$, де задано кут α, синус додатний ($\sin\alpha>0$). Звідси виходить, що при будь-якому значенні x (додатному чи від’ємному) перед коренем необхідно брати знак плюс, тобто

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отже, з урахуванням позначення $\operatorname{arcctg}x=\alpha$ для будь-якого $x\in(-\infty;\infty)$ справедливо:

$$\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

де $\operatorname{arcctg}x\in(0;\pi)$.

Формула 4 доведена.

Формула 5. $\cos(\arccos x) = x$, де $\arccos x \in [0;\pi]$ згідно з означенням функції $\arccos x$ (підрозд. 2.2).

Формула 6. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, де $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Доведення аналогічне доведенню формули 2.

Позначимо $\arcsin x = \alpha$, тоді $\sin\alpha = x$, якщо $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. За умовою формули необхідно знайти $\cos(\arcsin x)$, тобто $\cos(\arcsin x) = \cos\alpha$. Згідно з основною тригонометричною тотожністю $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ маємо $\cos^2\alpha = 1-x^2$, звідки $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$. На інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, де задано кут α, косинус додатний, тому $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ або, враховуючи прийняте позначення, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Отже, для будь-якого $x \in [-1;1]$ справедливо: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, де $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Формула 6 доведена.

Формула 7. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Доведення. Скористаємося основною тригонометричною тотожністю $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ і формулою $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = 1-\sin^2(\operatorname{arctg} x) = 1-\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

звідки $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

Обернену функцію арктангенс задано на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, де косинус додатний, тому перед коренем необхідно брати теж знак плюс, а саме:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси виходить, що для будь-якого $x \in (-\infty;\infty)$ справедливо:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ де } \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Формула 7 доведена.

Формула 8. $\cos(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, де $\operatorname{arcctg} x\in(0;\pi)$.

Доведення аналогічне доведенню формули 7, тільки скористаємося формулою $\sin(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Виконаємо тотожні перетворення

$$\cos^2(\operatorname{arcctg} x)=1-\sin^2(\operatorname{arcctg} x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2},$$

звідки $\cos(\operatorname{arcctg} x)=\pm\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Позначимо $\operatorname{arcctg} x=\alpha$, де $\alpha\in(0;\pi)$, тоді $\cos\alpha=\pm\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Визначимо знак $\cos\alpha$ залежно від знака змінної x.

Нехай $x\geq 0$, тоді $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ і для цього кута $\cos\alpha\geq 0$.

З іншого боку, при $x\geq 0$ виконується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\geq 0$, якщо перед коренем стоїть знак плюс. Звідси виходить, що в даному випадку виконується рівність $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

При $x<0$ кут $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ і для нього $\cos\alpha<0$. При $x<0$ виконується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}<0$, якщо перед коренем стоїть знак плюс. Оскільки права і ліва частини рівності мають однакові знаки (мінуси), то $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

З урахуванням позначення: $\cos(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Отже, для будь-якого $x\in(-\infty;\infty)$ справедливо

$$\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

де $\operatorname{arcctg} x\in(0;\pi)$, а знак $\cos(\operatorname{arcctg} x)$ визначається знаком змінної x, якщо перед коренем знак плюс.

Формула 8 доведена.

Формула 9. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x) = x$, де $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ згідно з означенням функції $\mathrm{arctg}\,x$ (підрозд. 2.3).

Формула 10. $\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, де $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Доведення. Скористаємося відомою формулою $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а в даному випадку $\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}$.

В цю формулу підставимо значення $\sin(\arcsin x) = x$ (формула 1) і $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (формула 6), тоді

$$\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ де } \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, для будь-якого $x \in (-1;1)$ справедливо $\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, де $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а знак лівої частини формули визначається знаком змінної x, якщо перед коренем знак плюс.

Формула 10 доведена.

Формула 11. $\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, де $\arccos x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Доведення аналогічне попередньому.

Скористаємося відомою формулою $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ або

$$\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}.$$

В цей вираз підставимо значення $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ (формула 2) і $\cos(\arccos x) = x$ (формула 5), тоді

$$\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \arccos x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right], \text{ бо } \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} \text{ не існує.}$$

Отже, для будь-якого $x \in [-1;0) \cup (0;1]$ справедливо

$$\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

де $\arccos x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, а знак лівої частини формули визначається знаком змінної x, якщо перед коренем стоїть знак плюс.

Формула 11 доведена.

Формула 12. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, де $\operatorname{arcctg} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Доведення аналогічне попередньому.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{\sin(\operatorname{arcctg} x)}{\cos(\operatorname{arcctg} x)}.$$

Скористаємося формулами 4, 8, а саме: $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ і $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, тоді $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{x}$, якщо $\operatorname{arc} c \operatorname{tg} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Отже, для будь-якого $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ справедливо $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, де $\operatorname{arcctg} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Формула 12 доведена.

Формула 13. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, де $\operatorname{arcctg} x \in (0; \pi)$ згідно з означенням функції $\operatorname{arcctg} x$ (підрозд. 2.4)

Формула 14. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, де $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Доведення. Скористаємося відомою формулою $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ і формулою 10, але $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Одержимо $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, при цьому $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, бо $\operatorname{ctg} 0$ не існує.

Отже, для будь-якого $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ справедливо

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

де $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, а знак лівої частини формули визначається знаком змінної x, якщо перед коренем стоїть знак плюс.

Формула 14 доведена.

Формула 15. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, де $\arccos x \in (0;\pi)$.

Доведення аналогічне попередньому. Скористаємося формулою $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\arccos x)}$ і формулою 11, а саме $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, тоді $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $\arccos x \in (0;\pi)$, бо $\operatorname{ctg} 0$ і $\operatorname{ctg}\pi$ не існує.

Отже, для будь-якого $x \in (-1;1)$ справедливо

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

де $\arccos x \in (0;\pi)$, а знак лівої частини формули визначається знаком змінної x, якщо перед коренем знак плюс.

Формула 15 доведена.

Формула 16. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$, де $\operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Доведення аналогічне двом попереднім. Скористаємося формулою $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$ і формулою 9, а саме $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, тоді $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$ при $\operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, бо $\operatorname{ctg} 0$ не існує.

Отже, для будь-якого $x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ справедливо

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x},$$

де $\operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Формула 16 доведена.

З метою забезпечення наглядності відображення і системності інформації доведені формули зведено в табл. 1.

Таблиця 1

Формули обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій

Порядковий номер формули в послідовності її розгляду	Формула	Область визначення тригонометричної функції, в якій аргументом є обернена тригонометрична функція
1	$\sin(\arcsin x) = x$	$x \in [-1;1]$
2	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$x \in [-1;1]$
3	$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in (-\infty;\infty)$
4	$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in (-\infty;\infty)$
5	$\cos(\arccos x) = x$	$x \in [-1;1]$
6	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$x \in [-1;1]$
7	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in (-\infty;\infty)$
8	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in (-\infty;\infty)$
9	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$x \in (-\infty;\infty)$
10	$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1;1)$
11	$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$x \in [-1;0) \cup (0;1]$
12	$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$	$x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$
13	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$x \in (-\infty;\infty)$
14	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$x \in [-1;0) \cup (0;1]$
15	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1;1)$
16	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$	$x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$

3.3. Метод обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій на основі графічного тлумачення розв'язку

У попередньому підрозд. 3.2 розглянуті формули обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій і складено таблицю, в якій систематизовані ці формули.

Але ефективність безпосереднього використання такої таблиці досить незначна, тому що потрібно завчити і пам'ятати додатково ще шістнадцять формул.

Наведемо один метод обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій, при якому немає потреби використовувати будь-яку формулу з вказаної таблиці, оскільки реалізується звичайний розгляд прямокутного трикутника, загально відоме його розв'язування і наглядне подання деяких математичних перетворень на тригонометричному колі.

Випадок 1. Обернені тригонометричні функції додатного аргументу

Згадаємо, що областю визначення функцій $\arcsin x$ і $\arccos x$ є множина всіх чисел x, які належать проміжку $[-1;1]$, тобто $x \in [-1;1]$, а функцій $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ – проміжок $(-\infty;\infty)$, тобто $x \in (-\infty;\infty)$.

Розглянемо спочатку вказані обернені тригонометричні функції тільки від додатного аргументу, тобто функцій $\arcsin x$, $\arccos x$ на інтервалі $(0;1)$, а функцій $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ – на проміжку $(0;\infty)$. В даному випадку областю значень кожної з них є інтервал $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, тобто **множина значень гострих кутів деяких прямокутних трикутників.**

На основі наведеного твердження зробимо важливий висновок: **для кожної оберненої тригонометричної функції додатного аргументу можна побудувати прямокутний трикутник, гострим кутом якого є ця обернена тригонометрична функція.**

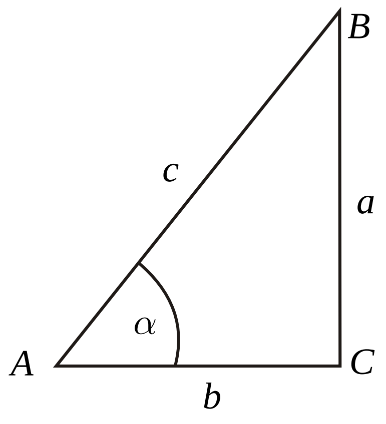


Рис. 22

Відомо, що для кутів $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ тригонометричні функції визначаються відношенням сторін прямокутного трикутника, рис. 22, тобто:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Наприклад, скористаємося прямокутним трикутником, гострим кутом якого є кут $\alpha = \arccos\dfrac{4}{5}$ або $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Відповідно до рис. 22 візьмемо $b = 4$, $c = 5$, тоді за теоремою Піфагора

$a=\sqrt{c^2-b^2}$, $a=3$. З цього трикутника маємо: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

Розглянемо обчислення тригонометричних функцій на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити такі функції: $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.

Розв'язок. Скористаємося запропонованим методом, для чого позначимо $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$, тоді $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, де кут α гострий ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) і для нього існує безліч прямокутних трикутників. За відомими ознаками вони подібні, тому відношення відповідних двох сторін цих трикутників однакові. З них виберемо такий, у якого катет, прилеглий до кута α, дорівнює одиниці, а гіпотенуза – трьом, рис. 23.

За вказаною умовою катет $AC=1$, гіпотенуза $AB=3$, а катет $BC=\sqrt{9-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (за теоремою Піфагора).

Для цього прямокутного трикутника обчислимо необхідні функції:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC},\ \cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

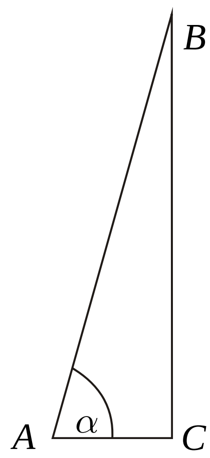


Рис. 23

Відповідь: $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 2. Обчислити такі функції: $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$, $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Розв'язок. Позначимо $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$, де α – це гострий кут, для якого існує безліч подібних прямокутних трикутників. З них виберемо такий, у якого катет, протилежний куту α, дорівнює $\sqrt{7}$, а прилеглий до нього – трьом, рис. 24.

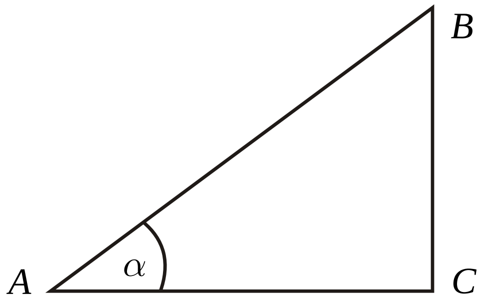


Рис. 24

За даною умовою катет $AC = 3$, катет $BC = \sqrt{7}$, гіпотенуза $AB = \sqrt{7+9} = 4$. Для цього прямокутного трикутника маємо: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Відповідь: $\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Зауваження. Розв'язком прямокутного трикутника, побудованого для заданої оберненої тригонометричної функції додатного аргументна як для гострого кута α, можна знайти тригонометричні функції і другого гострого кута $\left(90^\circ - \alpha\right)$ цього трикутника, якщо виникла потреба осмислити відповідні формули зведення.

Звернемося до попереднього прикладу 2. Під час розв'язування для заданого кута $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ побудовано прямокутний трикутник (рис. 24) і обчислені відповідні тригонометричні функції цього кута.

Обчислимо тригонометричні функції кута $\left(90^\circ - \alpha\right)$, тобто кута ABC вказаного трикутника:

$$\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{AC}{AB},\ \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{3}{4},\ \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha;$$

$$\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{BC}{AB},\ \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\sqrt{7}}{4},\ \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{AC}{BC},\ \operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7},\ \operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\sqrt{7}}{3},\ \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha,$$

оскільки за умовою $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Чим скористатися – безпосередньо формулами зведення, чи розв'язком прямокутного трикутника – це вже ваш вибір (відповідно до ситуації).

Випадок 2. Обернені тригонометричні функції від'ємного аргументу

Якщо обернена тригонометрична функція **має від'ємний аргумент**, її необхідно спочатку виразити через обернену тригонометричну **функцію додатного аргументу**.

В даному випадку доцільно згадати такі властивості обернених тригонометричних функцій від'ємного аргументу:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Після нескладних тотожних перетворень, якщо вони необхідні, обчислюються тригонометричні функції від обернених тригонометричних функцій додатного аргументу (випадок 1).

Приклад 3. Обчислити $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

Розв'язок. Задану обернену тригонометричну функцію від'ємного аргументу спочатку необхідно виразити через обернену тригонометричну функцію додатного аргументу, тобто $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

Функція $\sin x$ непарна $\left(\sin(-x) = -\sin x\right)$, тоді

$$\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = -\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right).$$

Позначимо $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, де кут α гострий $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ і для нього існує безліч подібних прямокутних трикутників. З них виберемо такий, у якого катет, протилежний куту $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, дорівнює чотирьом, а прилеглий катет – трьом, рис. 25.

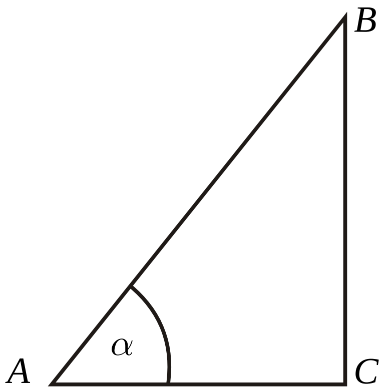


Рис. 25

За даною умовою катет $BC = 4$, катет $AC = 3$, гіпотенуза $AC = \sqrt{9+16} = 5$.

Розв'язком цього прямокутного трикутника буде: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, значить, $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{5}$. Повертаючись до заданої умови і результатів тотожних перетворень, одержимо

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = -\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = -\frac{4}{5}$.

Приклад 4. Обчислити $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

Розв'язок. Задану обернену тригонометричну функцію від'ємного аргументу виразимо через обернену тригонометричну функцію додатного аргументу

$$\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)=\pi-\arccos\frac{5}{6}, \text{ тоді } \operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\pi-\arccos\frac{5}{6}\right).$$

Скористаємося формулою зведення або тригонометричним колом (підрозд. 3.1) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\pi-\arccos\frac{5}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{5}{6}\right)$.

Отже, $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)=-\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{5}{6}\right)$.

Спочатку обчислимо $\operatorname{ctg}\alpha$, де $\alpha=\arccos\frac{5}{6}$ (тобто $\cos\alpha=\frac{5}{6}$), потім врахуємо знак мінус. Для цього скористаємося розв'язком прямокутного трикутника, рис. 26.

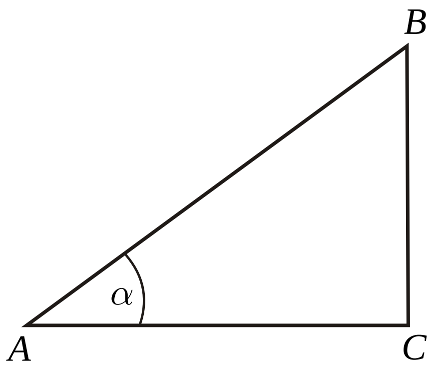


Рис. 26

За вказаною умовою катет $AC=5$, гіпотенуза $AB=6$, а катет $BC=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$. В цьому випадку $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}$, тобто $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{5}{6}\right)=\frac{5\sqrt{11}}{11}$, а з урахуванням знака мінус $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)=-\frac{5\sqrt{11}}{11}$.

Відповідь: $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)=-\frac{5\sqrt{11}}{11}$.

Приклад 5. Обчислити $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}+\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

Розв'язок. Обернену тригонометричну функцію від'ємного аргументу зведемо до відповідної функції додатного аргументу

$$\operatorname{arcctg}(-2)=\pi-\operatorname{arcctg}2.$$

Тоді заданий вираз має вигляд $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}+(\pi-\operatorname{arcctg}2)\right)=$

$$=\sin\left(\pi+\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcctg}2\right)\right)=-\sin\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcctg}2\right).$$

Скористаємося формулою синуса різниці двох кутів $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, а саме:

$$-\sin\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcctg}2\right)=-\left(\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos(\operatorname{arcctg}2)-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{13}\sin(\operatorname{arcctg}2)\right)=-\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos(\operatorname{arcctg}2)+\frac{5}{13}\sin(\operatorname{arcctg}2).$$

На підставі виконаних тотожних перетворень заданому виразу надамо такого вигляду:

$$\sin\left(\arccos\frac{5}{13}+\operatorname{arcctg}(-2)\right)=-\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos(\operatorname{arcctg}2)+\frac{5}{13}\sin(\operatorname{arcctg}2).$$

Позначимо: $\alpha=\arccos\dfrac{5}{13}$, $\beta=\operatorname{arcctg}2$.

В даному випадку маємо: $\sin\left(\arccos\dfrac{5}{13}+\operatorname{arcctg}(-2)\right)=-\sin\alpha\cos\beta+\dfrac{5}{13}\sin\beta$.

Для обчислення функцій правої частини цього виразу скористаємося розв'язками прямокутних трикутників, рис. 27, 28.

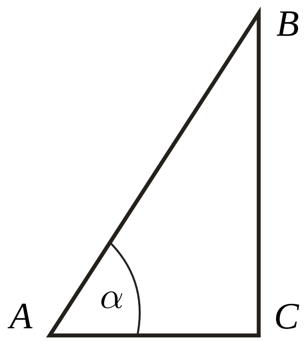


Рис. 27

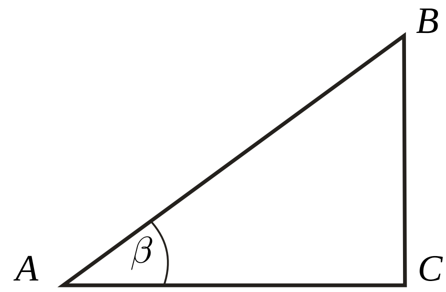


Рис. 28

За рис. 27: катет $AC=5$, гіпотенуза $AB=13$, катет $BC=\sqrt{169-25}=12$, $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$.

За рис. 28: катет $AC=2$, катет $BC=1$, гіпотенуза $AB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Отже,

$$\sin\left(\arccos\frac{5}{13}+\operatorname{arcctg}(-2)\right)=-\frac{12}{13}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{65}(24-5)=-\frac{19\sqrt{5}}{65}.$$

Відповідь: $\sin\left(\arccos\dfrac{5}{13}+\operatorname{arcctg}(-2)\right)=-\dfrac{19\sqrt{5}}{65}$.

3.4. Обчислення тригонометричних функцій від половинних обернених тригонометричних функцій

Обчислення тригонометричних функцій, аргументами яких є половинні обернені тригонометричні функції, зводиться до обчислення функцій синусів і косинусів подвійних аргументів. Для цього згадаємо формули половинних кутів:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\left[\begin{array}{lll} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \alpha\neq\pi+2\pi n, & n\in Z,\\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, & \alpha\neq\pi+2\pi n, & n\in Z,\\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \alpha\neq\pi n, & n\in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{lll} \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \alpha\neq 2\pi n, & n\in Z,\\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \alpha\neq\pi n, & n\in Z,\\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, & \alpha\neq 2\pi n, & n\in Z. \end{array}\right.$$

Пояснення. Знак перед радикалом береться відповідно до чверті, у якій знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

Значення функцій $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, де α – задана обернена тригонометрична функція, обчислюються за правилами, розглянутими в підрозд. 3.2, 3.3.

Приклад 6. Обчислити $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{8}{15}\right)\right)$.

Розв'язок. Обернену тригонометричну функцію $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{8}{15}\right)$ зведемо до відповідної функції додатного аргументу, тобто $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{8}{15}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}$, тоді

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{8}{15}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}\right).$$

За формулою зведення

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}\right),$$

тобто $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{8}{15}\right)\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}\right)$.

Розглянемо праву частину цієї тотожності.

Позначимо $\alpha = \operatorname{arcctg}\dfrac{8}{15}$, де $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тобто цей кут знаходиться в першій чверті, бо аргумент заданої оберненої тригонометричної функції додатний. Звідси $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{8}{15}$, необхідно знайти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Скористаємося формулою $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Перед квадратним коренем стоїть знак плюс, бо кут $\dfrac{\alpha}{2}$, як зазначено вище, знаходиться в першій чверті.

Значення функції $\cos\alpha$ розраховуються з допомогою відомих формул, які, до речі, не завжди можна відновити в пам'яті.

Скористаємося більш простим, на наш погляд, методом, а саме – розв'язком прямокутного трикутника.

Кут α – гострий, тому побудуємо для нього прямокутний трикутник, рис. 29.

За умовою катет $AC = 8$, катет $BC = 15$, гіпотенуза $AB = \sqrt{225+64} = 17$.

З цього трикутника $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$.

Отже, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{8}{17}}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}} = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

Таким чином, $\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{8}{15}\right) = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

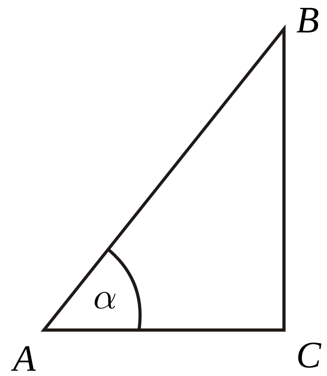


Рис. 29

Відповідь: $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{8}{15}\right)\right) = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

Приклад 7. Обчислити $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)\right)$.

Розв'язок. Обернену тригонометричну функцію $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$ зведемо до відповідної функції додатного аргументу, а саме:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{7}}{3},$$

тоді $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Розглянемо праву частину цієї тотожності.

Позначимо $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}$, де $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто цей кут знаходиться в першій чверті. Звідси $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, необхідно знайти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Скористаємося формулою $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Перед квадратним коренем стоїть знак плюс, бо кут $\frac{\alpha}{2}$, як зазначено вище, знаходиться в першій чверті.

Значення $\cos\alpha$ легко знайти за відповідним значенням $\sin\alpha$, скориставшись основною тригонометричною тотожністю $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

У даному випадку використовувати розв’язання прямокутного трикутника недоцільно.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, тобто $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, тоді $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{9}}{1+\frac{2}{9}}} = \sqrt{\frac{7}{11}} = \frac{\sqrt{77}}{11}$.

З урахуванням знака мінус одержимо:

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{77}}{11}.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{77}}{11}$.

3.5. Обчислення тригонометричних функцій від подвійних обернених тригонометричних функцій

Обчислення складних тригонометричних функцій, аргументами яких є подвоєні обернені тригонометричні функції, зводиться до обчислення функцій подвійних кутів за відомими формулами, а саме:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha,\ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \alpha,\ 2\alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$$

Приклад 8. Обчислити $\sin(2\operatorname{arctg}4)$.

Розв'язок. Позначимо $\alpha = \operatorname{arctg}4$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = 4$, необхідно знайти $\sin 2\alpha$.

Скористаємося формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Аргумент оберненої тригонометричної функції $\operatorname{arctg}4$ додатний, тому кут α гострий, отже, побудуємо для нього прямокутний трикутник, рис. 30.

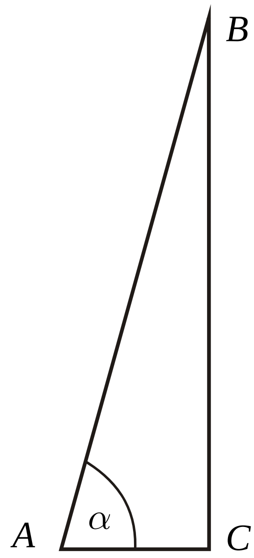


Рис. 30

В цьому трикутнику катет $AC = 1$, катет $BC = 4$, гіпотенуза $AB = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$,

звідси

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Знаки цих функцій плюси, бо кут α знаходиться в першій чверті.

Таким чином, $\sin 2\alpha = 2\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{8}{17}$.

Відповідь: $\sin(2\operatorname{arctg}4) = \frac{8}{17}$.

Приклад 9. Обчислити $\sin\left(2\operatorname{arcctg}(-3)\right)$.

Розв'язок. Обернену тригонометричну функцію $\operatorname{arcctg}(-3)$ зведемо до додатного аргументу, тобто: $\operatorname{arcctg}(-3) = \pi - \operatorname{arcctg}3$. Тоді

$\sin\left(2\operatorname{arcctg}(-3)\right) = \sin 2(\pi - \operatorname{arcctg}3) =$

$= \sin(2\pi - 2\operatorname{arcctg}3) = -\sin(2\operatorname{arcctg}3)$.

Позначимо $\alpha = \operatorname{arcctg}3$, тобто $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, внаслідок чого маємо:

$\sin\left(2\operatorname{arcctg}(-3)\right) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha.$

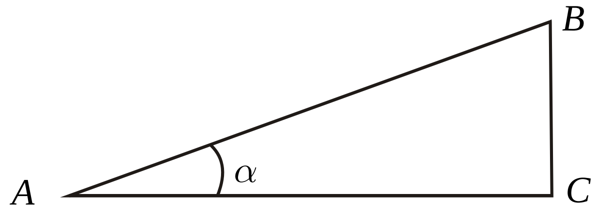


Рис. 31

Для визначення цих функцій скористаємося розв'язком прямокутного трикутника, адже кут α гострий, рис. 31.

В цьому трикутнику катет $AC = 3$, катет $BC = 1$, гіпотенуза $AB = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$,

тоді $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Знаки цих функцій додатні, бо кут α знаходиться в першій чверті $\sin 2\alpha = 2\frac{\sqrt{10}}{10}\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{5}$, знак мінус врахуємо в кінці обчислення.

Відповідь: $\sin(2\operatorname{arctg}(-3)) = -\frac{3}{5}$.

Приклад 10. Обчислити $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right)$.

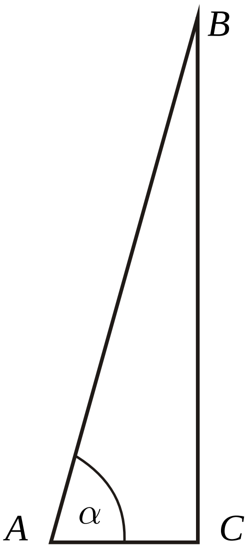


Рис. 32

Розв'язок. Позначимо $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{3}$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{3}$, необхідно знайти $\cos 2\alpha$. Скористаємося формулою $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Оскільки кут α гострий, побудуємо для нього прямокутний трикутник, рис. 32.

Катет $AC = 3$, катет $BC = 7$, гіпотенуза $AB = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$, тоді $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}} = \frac{7\sqrt{58}}{58}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{58}$.

Отже, $\cos 2\alpha = \left(\frac{3\sqrt{58}}{58}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{58}}{58}\right)^2 = -\frac{20}{29}$.

Відповідь: $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right) = -\frac{20}{29}$.

Приклад 11. Обчислити $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Розв'язок. Обернену тригонометричну функцію $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ зведемо до додатного аргументу, тобто: $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{4}$, тоді

$$\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \operatorname{tg}2\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(2\pi - 2\arccos\frac{1}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{1}{4}\right).$$

Позначимо $\alpha = \arccos\frac{1}{4}$, тобто $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, унаслідок чого маємо:

$$\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

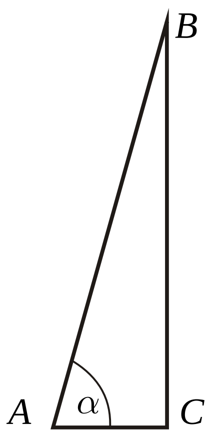


Рис. 33

Значення функції $\operatorname{tg}\alpha$ знайдемо розв'язком прямокутного трикутника, рис. 33.

Катет $AC = 1$, гіпотенуза $AB = 4$, катет $BC = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$, отже,

$$\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{2\sqrt{15}}{1-15} = -\left(-\frac{\sqrt{15}}{7}\right) = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{15}}{7}$.

Приклад 12. Обчислити $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Розв'язок. В даному прикладі об'єднується обчислення складної тригонометричної функції половинного і подвійного кутів.

Спочатку виразимо обернену тригонометричну функцію $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ через додатний аргумент $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}$, тоді:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-2\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-2\pi+2\arccos\frac{1}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\arccos\frac{1}{2}\right).$$

В наведених тотожних перетвореннях вилучено (-2π) згідно з періодичністю тригонометричних функцій. Для того, щоб скоротити запис, позначимо $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\beta=\arccos\frac{1}{2}$ (відповідно $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$) і виразимо $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha+2\beta\right)$ через будь-які тригонометричні функції кутів α та β, наприклад, через функцію тангенса, а саме:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha+2\beta\right)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha+2\beta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha+2\beta\right)}=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos2\beta-\sin\frac{1}{2}\alpha\sin2\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos2\beta+\cos\frac{1}{2}\alpha\sin2\beta}.$$

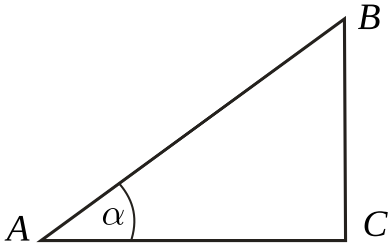
Поділивши чисельник і знаменник останнього дробу на $\cos\frac{1}{2}\alpha\cos2\beta$ (за умови, що $\cos\frac{1}{2}\alpha\neq0$ і $\cos2\beta\neq0$), отримаємо такий вираз:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha+2\beta\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}2\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}.$$

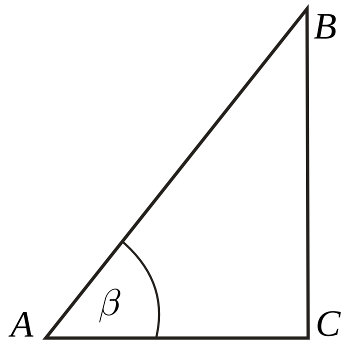
Для обчислення складових цього виразу скористаємося відомими формулами: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$.

Перед квадратним коренем стоїть знак плюс, оскільки кут α гострий, то першій чверті належить і кут $\frac{\alpha}{2}$.

Значення функцій $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ обчислимо за допомогою розв'язків прямокутних трикутників з урахуванням прийнятих позначень, рис. 34 (а, б).



а)



b)

Рис. 34

За рис. 34, а маємо: катет $AC = 4$, катет $BC = 3$, гіпотенуза $AB = \sqrt{16+9} = 5$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, тоді $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \dfrac{1}{3}$. За рис. 34, б маємо: катет $AC = 1$, гіпотенуза $AB = 2$, катет $BC = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, тоді $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$.

Отже, $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\alpha + 2\beta\right) = \dfrac{1-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\right)}{\frac{1}{3}+\left(-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{1-3\sqrt{3}} = \{$ помножимо чисельник і знаменник на вираз $\left(1+3\sqrt{3}\right)\} = \dfrac{12+10\sqrt{3}}{-26} = -\dfrac{\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}+10\right)}{26} = -\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+5\right)}{13}$.

Відповідь: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} - 2\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = -\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+5\right)}{13}$.

Питання для самоперевірки

1. Як розташовані лінії синусів, косинусів, тангенсів і котангенсів на тригонометричному колі?

2. Як звести тригонометричну функцію до гострого кута за допомогою тригонометричного кола?

3. В яких випадках $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$?

4. Чому для кожної оберненої тригонометричної функції додатного аргументу можна побудувати прямокутний трикутник, гострим кутом якого є ця функція?

5. Як скористатися розв'язками прямокутних трикутників при обчисленні тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій з від'ємним аргументом?

4. ОБЧИСЛЕННЯ ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД СВОЇХ ПРЯМИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

На конкретних прикладах розглянуто особливості обчислення кожної оберненої тригонометричної функції від своєї прямої тригонометричної функції, коли задане значення кута не належить області значень цієї складної функції. Всі обчислення подані як аналітичними розв'язками, так і розв'язками за допомогою тригонометричного кола, чим забезпечується можливість використання найбільш зручного метода.

Розглянемо складні обернені тригонометричні функції, аргументами яких є їх тригонометричні функції, а саме: $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Властивості цих функцій наведені в підрозд. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, але доцільно їх ще раз нагадати:

$\arcsin(\sin x) = x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$\arccos(\cos x) = x$, якщо $x \in [0; \pi]$,

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Як правило, в завданні на обчислення будь-якої оберненої функції з поданих вище не виконується відповідна умова для змінної x (кута), тобто її значення не належить до області значень даної функції.

Наведемо методи обчислення складних обернених тригонометричних функцій при довільних значеннях змінної x. Вони передбачають аналітичний і графічний розв'язки відповідно до кожної функції, при цьому графічний розв'язок виконується з використанням тригонометричного кола. Запропоновані методи сприяють глибокому і чіткому розумінню основних принципів тотожних тригонометричних перетворень, крім того, надають можливість кожному користувачеві посібника вибрати найбільш доступне тлумачення цих перетворень.

4.1. Обчислення функції $\arcsin(\sin x)$

Приклад 13. Обчислити $\arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right)$.

Аналітичний розв'язок

В цьому випадку ми не можемо скористатися формулою $\arcsin(\sin x) = x$, оскільки кут $\frac{9\pi}{7} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Подамо цей кут у вигляді суми $\pi + \frac{2\pi}{7}$, тоді $\sin\frac{9\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\frac{2\pi}{7}$.

Кут $\frac{2\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, отже, $\arcsin\left(-\sin\frac{2\pi}{7}\right) = -\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right) = -\frac{2\pi}{7}$.

Відповідь: $\arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right) = -\frac{2\pi}{7}$.

Розв'язок за допомогою тригонометричного кола

Побудуємо тригонометричне коло, на якому покажемо кут $\frac{9\pi}{7}$ (рухомий радіус OA, що його утворює, виділено жирною лінією), рис. 35.

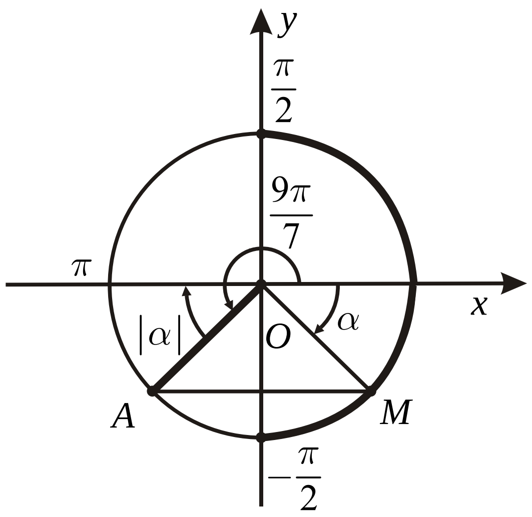


Рис. 35

Як видно з рис. 35, кут $\frac{9\pi}{7}$ не належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, виділеному жирною лінією, тому виконаємо такі додаткові побудови: через точку A, ордината якої дорівнює $\sin\frac{9\pi}{7}$, проведемо горизонтальну лінію до перетину з колом в точці M і для неї покажемо радіус OM.

У результаті одержимо кут $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right)$, який знаходиться на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\sin\alpha = \sin\frac{9\pi}{7}$ (ординати точок A і M однакові). Кут α від'ємний, а його абсолютне значення $|\alpha| = \frac{9\pi}{7} - \pi = \frac{2\pi}{7}$.

Отже, з урахуванням знака мінус $\alpha = -\frac{2\pi}{7}$.

Відповідь: $\arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right) = -\frac{2\pi}{7}$.

Приклад 14. Обчислити $\arcsin(\sin 8)$.

Доповнення. В цьому прикладі значення кута розглядається в радіанах ($8 \approx \frac{8}{3{,}14}\pi \approx 2{,}55\pi$).

Аналітичний розв'язок

Позначимо $\alpha = \arcsin(\sin 8)$ – це кут, який повинен задовольняти такі дві умови: $\sin\alpha = \sin 8$ і $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Кут величиною вісім не належить до цього проміжку, тобто $8 \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, тому ми не можемо скористатися формулою $\arcsin(\sin x) = x$. Зведемо $\sin 8$ до синуса кута α так, щоб при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin 8$ дорівнював би $\sin\alpha$ або $(-\sin\alpha)$.

З простих математичних міркувань знайдемо таке значення кута α, яке задовольняє цю умову:

$$\alpha = (3\pi - 8) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

За правилами зведення тригонометричних функцій до гострого кута (підрозд. 3.1) маємо $\sin 8 = \sin(3\pi - 8) = \sin\alpha$.

Тоді $\arcsin(\sin 8) = \arcsin\sin(3\pi - 8) = 3\pi - 8$.

Відповідь: $\arcsin(\sin 8) = 3\pi - 8$.

Зауваження. Кут α можна подати по-іншому:

$$\alpha = (8 - 3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

звідки $\sin\alpha = \sin(8 - 3\pi) = -\sin(3\pi - 8) = -\sin 8$, тобто

$$\sin 8 = -\sin\alpha = -\sin(8 - 3\pi) \text{ і } \arcsin(\sin 8) = \arcsin(-\sin(8 - 3\pi)) =$$
$$= -\arcsin(\sin(8 - 3\pi)) = -(8 - 3\pi) = 3\pi - 8.$$

Відповідь така сама, але математичні перетворення дещо складніші.

Розв'язок за допомогою тригонометричного кола

Спочатку зменшимо кут $8 \approx 2{,}55\pi$ на період $T = 2\pi$, тобто $\sin 8 = \sin(8 - 2\pi)$.

Побудуємо тригонометричне коло, на якому покажемо кут $(8 - 2\pi)$ (рухомий радіус OA, що його утворює, виділено жирною лінією), рис. 36.

Примітка. Кут $(8 - 2\pi) \approx 0{,}55\pi \approx 99°$.

Як видно з цього рисунка, кут $(8 - 2\pi) \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, тобто він не належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, виділеному жирною лінією.

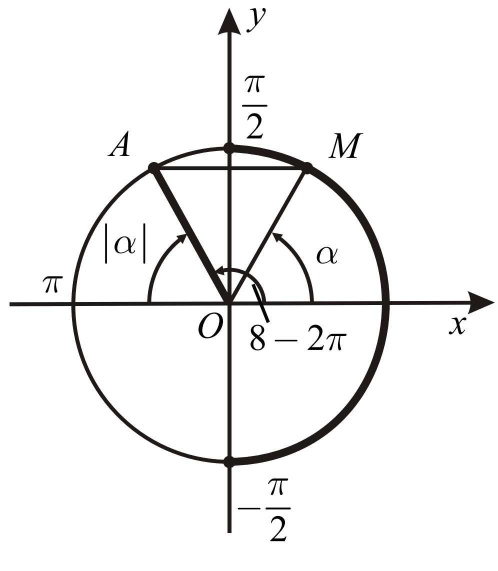


Рис. 36

У зв'язку з цим виконаємо таку додаткову побудову: через точку A проведемо горизонтальну лінію до перетину з колом у точці M і для неї покажемо радіус OM.

У результаті одержимо кут $\alpha = \arcsin\left(\sin\left(8-2\pi\right)\right)$, який знаходиться на інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\sin\alpha = \sin\left(8-2\pi\right)$, але $\arcsin\left(\sin\left(8-2\pi\right)\right) \neq 8-2\pi$, бо $\left(8-2\pi\right) \notin \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Кут $\left|\alpha\right| = \pi - \left(8-2\pi\right) = 3\pi - 8$, при цьому кут α знаходиться в першій чверті, тому він додатний.

Отже, $\alpha = 3\pi - 8$, тоді $\arcsin\left(\sin\left(8-2\pi\right)\right) = 3\pi - 8$.

Відповідь: $\arcsin\left(\sin 8\right) = 3\pi - 8$.

4.2. Обчислення функції $\arccos\left(\cos x\right)$

Приклад 15. Обчислити $\arccos\left(\cos 5\right)$.

Доповнення. В цьому прикладі значення кута розглядається в радіанах ($5 \approx \dfrac{5}{3{,}14}\pi \approx 1{,}59\pi$).

Аналітичний розв'язок

В даному випадку ми не можемо скористатися формулою $\arccos\left(\cos x\right) = x$, оскільки $5 \notin \left[0;\pi\right]$. Зведемо $\cos 5$ до косинуса кута α так, щоб при $\alpha \in \left[0;\pi\right]$ $\cos 5$ дорівнював би $\cos\alpha$ або $\left(-\cos\alpha\right)$. Згідно з цією умовою одержимо $\alpha = \left(2\pi - 5\right) \in \left[0;\pi\right]$, тоді $\cos 5 = \cos\left(2\pi - 5\right) = \cos\alpha$.

Отже, $\arccos\left(\cos 5\right) = \arccos\left(\cos\left(2\pi - 5\right)\right) = 2\pi - 5$.

Відповідь: $\arccos\left(\cos 5\right) = 2\pi - 5$.

Розв'язок за допомогою тригонометричного кола

Побудуємо тригонометричне коло, на якому покажемо кут $5 \approx 1{,}59\pi \approx 286^\circ$. Рухомий радіус OA, що його утворює, виділено жирною лінією, рис. 37.

Як видно з цього рисунка, кут величиною п'ять не належить до проміжку $\left[0;\pi\right]$, виділеному жирною лінією, тому виконавши додаткову побудову, знайдемо такий кут, щоб його значення було на інтервалі від нуля до π і косинус цього кута дорівнював би $\cos 5$. Вказані величини визначають кут α, який необхідно знайти. Через точку A з абсцисою $\cos 5$ проведемо вертикальну лінію до перетину з колом в точці M і для неї покажемо радіус OM.

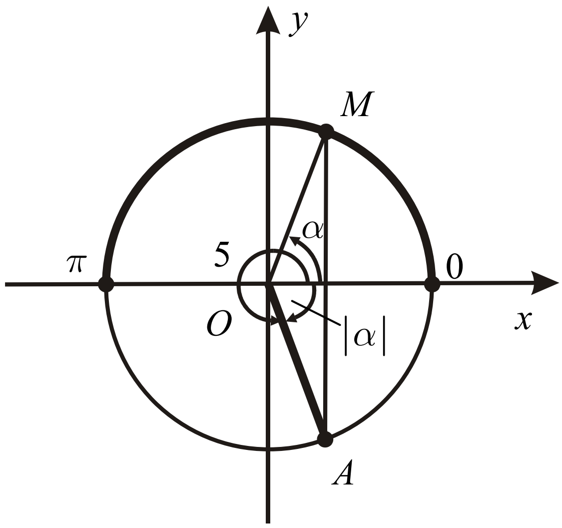


Рис. 37

В результаті одержимо кут α, який знаходиться на проміжку $\left[0;\pi\right]$ і косинус якого дорівнює $\cos 5$ (абсциси точок M і A – однакові).

Кут α додатний, геометрично $\alpha = |\alpha| = 2\pi - 5$.

Відповідь: $\arccos\left(\cos 5\right) = 2\pi - 5$.

4.3. Обчислення функції $\mathbf{arctg}\left(\mathbf{tg}\,x\right)$

Приклад 16. Обчислити $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 2\right)$.

Доповнення. У цьому прикладі кут задано в радіанах ($2 \approx \dfrac{2}{3{,}14}\pi \approx 0{,}64\pi$).

Аналітичний розв'язок

В даному випадку ми не можемо скористатися формулою $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} x\right) = x$, бо кут $\alpha \notin \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Зведемо $\operatorname{tg} 2$ до тангенса кута α так, щоб при $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} 2$ дорівнював би $\operatorname{tg}\alpha$ або $\left(-\operatorname{tg}\alpha\right)$. Згідно з вказаною умовою одержимо $\alpha = \left(\pi - 2\right) \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тоді $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg}\left(\pi - 2\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

Отже, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 2\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(2 - \pi\right)\right) = 2 - \pi$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 2\right) = 2 - \pi$.

Розв'язок за допомогою тригонометричного кола

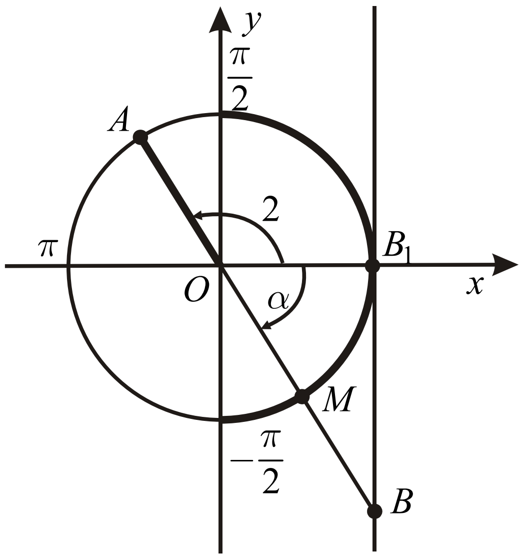


Рис. 38

Побудуємо тригонометричне коло, на якому покажемо кут $2 \approx 0,64\pi$ (рухомий радіус OA, що його утворює, виділено жирною лінією), рис. 38.

Продовжимо радіус OA до перетину з лінією тангенсів у точці B.

При цьому радіус OM утворює з віссю Ox кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg}\alpha$ (відрізок BB_1). Вказаний проміжок виділено жирною лінією.

Кут α від'ємний, тому

$$\alpha = -(\pi - 2) = 2 - \pi .$$

Отже, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2-\pi)) = 2-\pi$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2) = 2 - \pi$.

4.4. Обчислення функції $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

Приклад 17. Обчислити $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-28))$.

Доповнення. У цьому прикладі кут задано в радіанах ($28 \approx \frac{28}{3,14}\pi \approx 8,92\pi$).

Аналітичний розв'язок

В даному випадку ми не можемо скористатися формулою $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, оскільки кут $(-28) \notin (0;\pi)$.

За формулою $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ маємо:

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-28)) = \operatorname{arcctg}(-\operatorname{ctg} 28) = \pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 28).$$

Зведемо $\operatorname{ctg} 28$ до $\operatorname{ctg}\alpha$ так, щоб при $\alpha \in (0;\pi)$ $\operatorname{ctg} 28$ дорівнював би $\operatorname{ctg}\alpha$ або $(-\operatorname{ctg}\alpha)$.

А саме: $\alpha = (9\pi - 28) \in (0;\pi)$, тоді за правилами зведення (підрозд. 3.1) маємо: $\operatorname{ctg} 28 = -\operatorname{ctg}(9\pi - 28) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Отже, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-28)) = \pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}28) = \pi - \operatorname{arcctg}(-\operatorname{ctg}(9\pi - 28)) =$

$= \pi - (\pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(9\pi - 28))) = \pi - \pi + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(9\pi - 28)) =$

$= \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(9\pi - 28)) = 9\pi - 28$.

Відповідь: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 28) = 9\pi - 28$.

Розв'язок за допомогою тригонометричного кола

Період котангенса $T = \pi$, тому кут $28 \approx 8{,}92\pi \approx 1606^\circ$ зменшимо на 8π і для кута $(28 - 8\pi)$ побудуємо тригонометричне коло, рухомий радіус OA, що його утворює, показано жирною лінією, рис. 39.

Продовжимо радіус до перетину з лінією котангенсів у точці B.

Як видно з рисунка, кут $(28-8\pi) \in (0;\pi)$, а $\operatorname{ctg} 28 = \operatorname{ctg}(28-8\pi)$ визначається абсцисою точки B.

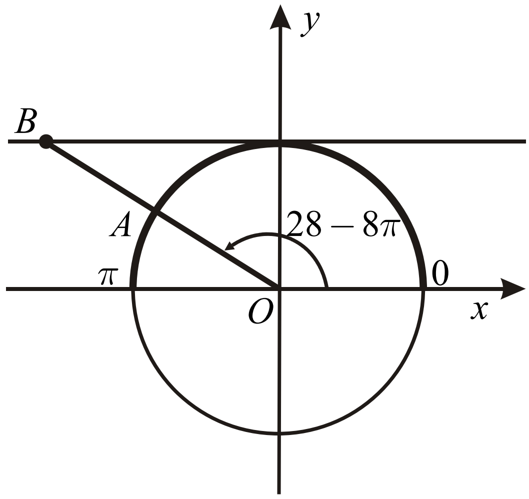


Рис. 39

Вказаний проміжок додатково виділено жирною лінією.

Тоді

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 28) = \\ = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(28-8\pi)) = 28 - 8\pi.$$

На основі формули $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ маємо

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-28)) = \\ = \pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(28-8\pi)) =. \\ = \pi - (28-8\pi) = 9\pi - 28.$$

Відповідь: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-28)) = 9\pi - 28$.

Питання для самоперевірки

1. За яких умов $\arcsin(\sin x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$?

2. Вказати правильну відповідь з двох наведених для кожної складної функції:
   а) $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ і $\arcsin(\sin x) = \pi + x$, якщо кут x знаходиться в третій чверті;
   б) $\arccos(\cos x) = 2\pi + x$ і $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$, якщо кут x знаходиться в четвертій чверті;
   в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi$ і $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + \pi$, якщо кут x знаходиться в другій чверті;
   г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-x)) = \pi - x$ і $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-x)) = \pi + x$, якщо кут x знаходиться в другій чверті.

5. ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ КУТА РОЗВ'ЯЗКОМ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА, ЯКЩО ВІДОМА БУДЬ-ЯКА ОДНА ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФУНКЦІЯ ЦЬОГО КУТА

Доведено, що всі тригонометричні функції кута, в якій би чверті він не знаходився, можна обчислити простими розв'язками прямокутного трикутника, якщо відома будь-яка тригонометрична функція цього кута.

У підрозд. 3.3 запропоновано використовувати розв'язки прямокутних трикутників замість деяких формул при обчисленні тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій. Поданий метод, на наше переконання, заслуговує на увагу.

Розв'язок прямокутного трикутника також можна застосовувати при обчисленні тригонометричних функцій кута, якщо відома будь-яка тригонометрична функція цього кута. Особливості вказаного застосування розглянемо з допомогою тригонометричного кола для кута в кожній координатній чверті.

Випадок 1. Кут α знаходиться в першій чверті

Покажемо тригонометричне коло з кутом $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ і для цього кута на відповідних лініях визначимо тригонометричні функції, рис. 40.

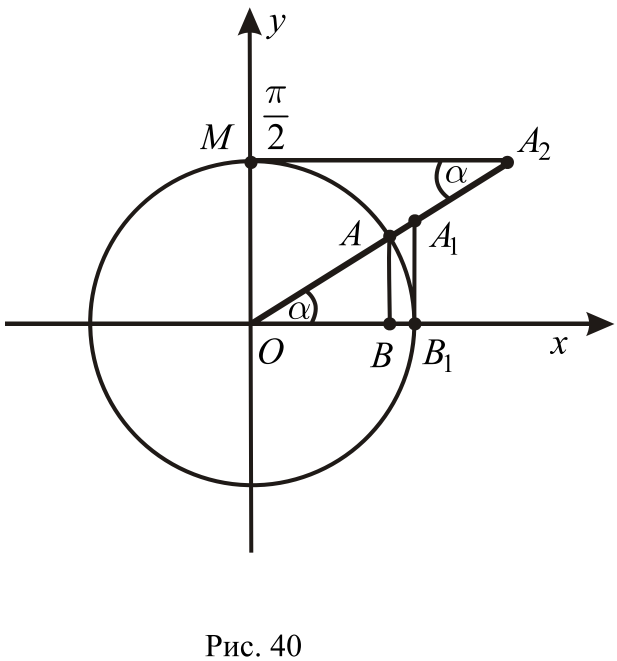


Рис. 40

В прийнятому масштабі синус кута α дорівнює довжині відрізка AB, косинус – OB, тангенс – A_1B_1 і котангенс – MA_2.

Ці результати можна отримати розв'язком прямокутного трикутника OAB, а саме:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{OA}$, $\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA}$, $OA = 1$,

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{A_1B_1}{OB_1}$, $OB_1 = 1$, але $\dfrac{A_1B_1}{OB_1} = \dfrac{AB}{OB}$,

тоді $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{AB}{OB}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{MA_2}{MO}$,

$MO = 1$, але $\dfrac{MA_2}{MO} = \dfrac{OB}{AB}$, оскільки

$\Delta OAB \sim \Delta OMA_2$, тоді $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{OB}{AB}$.

Отже, якщо кут α знаходиться в першій чверті і задана для нього яка-небудь тригонометрична функція, то інші тригонометричні функції цього кута можна отримати розв'язком відповідного прямокутного трикутника.

Приклад 18. Обчислити $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$ і $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язок. Прямокутний трикутник ABC, у якого катет $AC = 2$, гіпотенуза $AB = 7$, а катет $BC = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$, має кут $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, рис. 41.

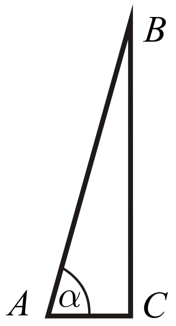


Рис. 41

За допомогою цього трикутника одразу обчислимо всі інші тригонометричні функції кута α: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

Випадок 2. Кут α знаходиться в другій чверті

Покажемо тригонометричне коло з кутом $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, рис. 42.

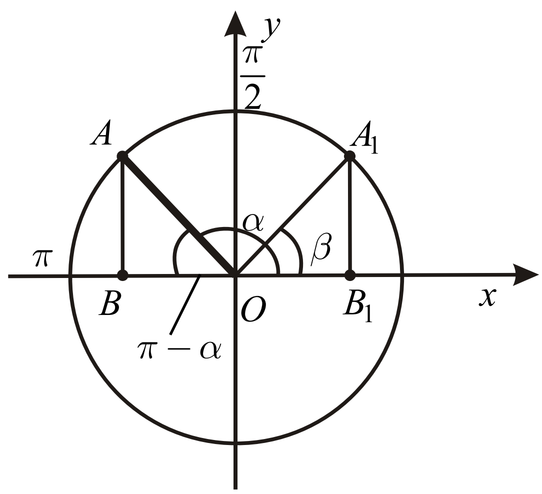


Рис. 42

Як видно з цього рисунка, в прямокутному трикутнику OAB кут BOA дорівнює $(\pi-\alpha)$. Відповідні тригонометричні функції кутів α і $(\pi-\alpha)$ за модулем рівні згідно з формулами зведення.

На тригонометричному колі покажемо точку A_1 симетрично точці A відносно осі OY. Прямокутні трикутники OA_1B_1 і OAB рівні між собою за відомими геометричними ознаками. При цьому кути $\beta = \angle B_1OA_1$ і $(\pi-\alpha)$ теж рівні, значить, тригонометричні функції кута $(\pi-\alpha)$ за модулем дорівнюють відповідним функціям кута β.

Порівнюючи висновки відносно кутів α і $(\pi-\alpha)$, а також $(\pi-\alpha)$ і β, визначимо, що всі тригонометричні функції кута α за модулем дорівнюють відповідним функціям кута β. Кут β знаходиться в першій чверті, значить, розв'язуванням прямокутного трикутника можна обчислити тригонометричні функції кута $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ за модулем.

Для визначення знаків тригонометричних функцій необхідно пам'ятати, що в другій чверті тільки синус додатний, усі інші функції від'ємні, також можна скористатися тригонометричним колом.

Приклад 19. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ і $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

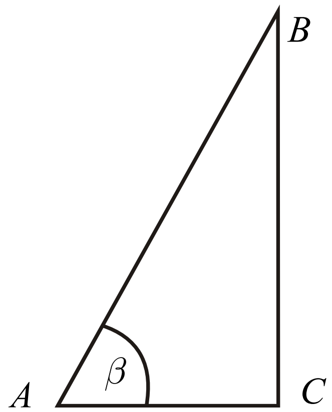


Рис. 43

Розв'язок. За допомогою формули синуса подвійного кута виразимо $\sin 2\alpha$ через функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, а саме: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Спочатку обчислимо $|\sin\alpha|$ і $|\cos\alpha|$, для чого скористаємося умовою $|\sin\alpha| = \sin\beta$, $|\cos\alpha| = \cos\beta$, де β – кут прямокутного трикутника ABC, тангенс якого дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$, тобто $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, рис. 43.

В цьому трикутнику катет $BC = \sqrt{5}$, катет $AC = 2$, гіпотенуза $AB = \sqrt{5+4} = 3$. За його розв'язком маємо: $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$ або $|\sin\alpha| = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $|\cos\alpha| = \frac{2}{3}$

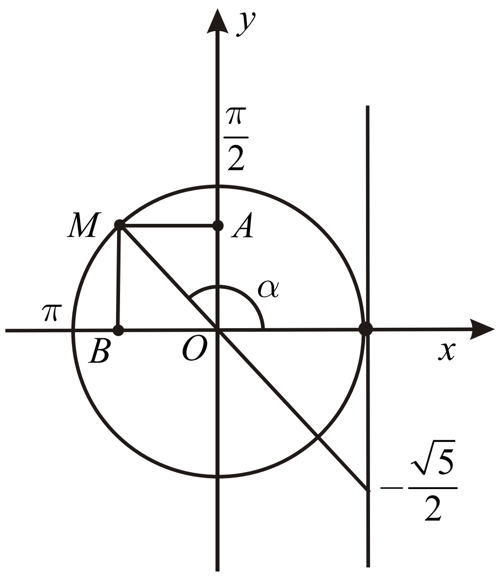


Рис. 44

Кут α знаходиться в другій чверті, але ми забули, які знаки в цій чверті мають $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, не біда, скористаємося тригонометричним колом, рис. 44.

Як бачимо, ордината точки M додатна (відрізок OA знаходиться над віссю Ox), значить, $\sin\alpha$ додатний, абсциса точки M від'ємна (відрізок OB знаходиться зліва від осі Oy), тому $\cos\alpha$ від'ємний, тобто

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos\alpha = -\frac{2}{3},$$

$$\sin 2\alpha = 2\frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Відповідь: $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Випадок 3. Кут α знаходиться в третій чверті

Покажемо тригонометричне коло з кутом $\alpha \in \left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$, рис. 45.

Продовжимо радіус OA до перетину з колом в точці A_1, унаслідок чого одержимо кут $\beta = \alpha - \pi = |\pi - \alpha|$, для якого тригонометричні функції за модулем дорівнюють відповідним функціям кута α (за формулами зведення або за розглядом тригонометричного кола). Трикутники OAB і OA_1B_1 рівні, кут β знаходиться в першій чверті, тому розв'язком прямокутного трикутника можна обчислити тригонометричні функції кута $\alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ за модулем.

Для визначення знаків тригонометричних функцій необхідно пам'ятати, що в третій чверті синус і косинус від'ємні, а тангенс і котангенс додатні, або розглянути тригонометричне коло.

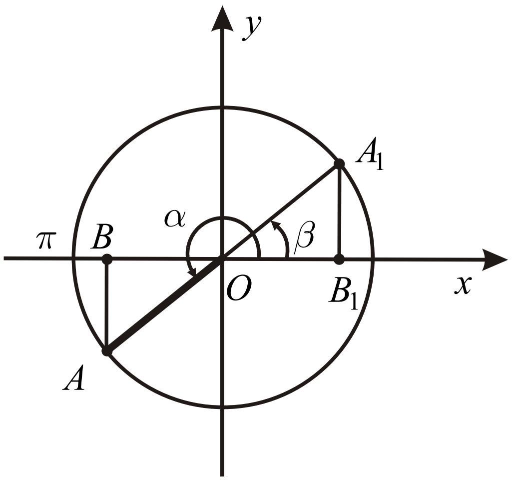


Рис. 45

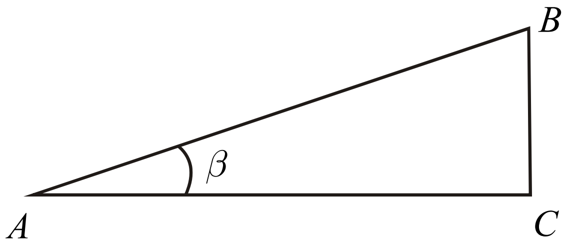


Рис. 46

Приклад 20. Обчислити $\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Розв'язок. Виразимо $\sin\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$, а саме: $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, а $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, тобто кут $\frac{\alpha}{2}$ знаходиться в другій чверті, де синус додатний, отже, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Обчислимо $|\cos\alpha|$ з умови $|\cos\alpha| = \cos\beta$, де β – кут прямокутного трикутника ABC, синус якого дорівнює $\frac{5}{13}$, тобто $\sin\beta = \frac{5}{13}$, рис. 46.

В цьому трикутнику катет $BC = 5$, гіпотенуза $AB = 13$, катет $AC = \sqrt{169-25} = 12$. За його розв'язком $\cos\beta = \frac{12}{13}$, тобто $|\cos\alpha| = \frac{12}{13}$. Кут α знаходиться в третій чверті, де косинус від'ємний (відрізок OB знаходиться зліва від осі Oy, рис. 44), тоді $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

Отже, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Відповідь: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Випадок 4. Кут α знаходиться в четвертій чверті

Покажемо тригонометричне коло з кутом $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, рис. 47.

На колі покажемо точку A_1 симетрично точці A відносно осі Ox. Одержаний при цьому кут β дорівнює куту AOB, тобто $\beta = 2\pi - \alpha$.

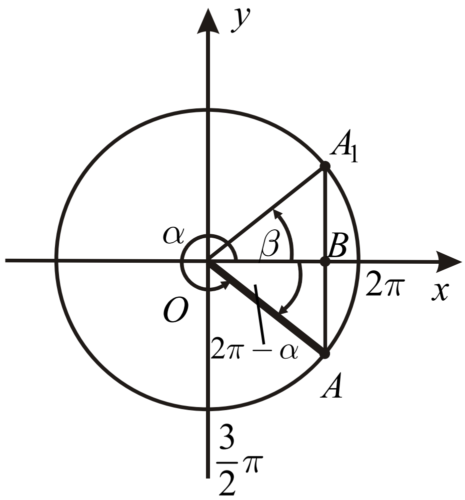


Рис. 47

Тригонометричні функції кута α за модулем дорівнюють відповідним функціям кута $(2\pi-\alpha)$, а значить, відповідним функціям кута β. Трикутники OAB і OA_1B рівні, кут β знаходиться в першій чверті, тому можна застосувати прямокутний трикутник для знаходження тригонометричних функцій кута $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ за модулем.

Для визначення знаків тригонометричних функцій необхідно пам'ятати, що в четвертій чверті тільки косинус додатний, всі інші функції від'ємні, або розглянути тригонометричне коло.

Приклад 21. Обчислити $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Розв'язок. Виразимо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через косинус кута α, а саме: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, де $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, а $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$, тобто кут $\frac{\alpha}{2}$ знаходиться в другій чверті, де тангенс від'ємний, тоді $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Обчислимо $|\cos\alpha|$ з умови $|\cos\alpha| = \cos\beta$, де β – кут прямокутного трикутника ABC, синус якого дорівнює 0,6, тобто $\sin\beta = 0{,}6$, рис. 48.

В цьому трикутнику катет $BC = 6$, гіпотенуза $AB = 10$, а катет $AC = \sqrt{100-36} = 8$. За його розв'язком: $\cos\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ або $|\cos\alpha| = \frac{4}{5}$, кут α знаходиться в четвертій чверті, де косинус додатний (відрізок OB знаходиться справа від осі Oy, рис. 47), тому $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

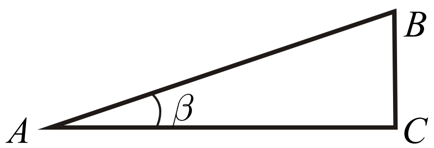


Рис. 48

Отже, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$.

Питання для самоперевірки

1. Як визначити тригонометричні функції гострого кута в прямокутному трикутнику?

2. Які співвідношення між тригонометричними функціями двох гострих кутів прямокутного трикутника?

3. Як пояснюються застосування розв'язків прямокутних трикутників для кутів другої чверті?

4. Як пояснюються застосування розв'язків прямокутних трикутників для кутів третьої чверті?

5. Як пояснюються застосування розв'язків прямокутних трикутників для кутів четвертої чверті?

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

6.1. Необхідна інформація

Відомо, що для деяких кутів встановлені значення тригонометричних функцій, які зручно використовуються при розв'язку відповідних прикладів. Згадаємо ці значення, табл. 2.

Таблиця 2

Значення тригонометричних функцій

Кути / Функції	0 (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує
$\operatorname{ctg} x$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Як видно з таблиці, для кута $\frac{\pi}{2}$ тангенс не визначений, а для кута 0 не визначений котангенс.

Оскільки $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то тангенс не визначений для тих кутів, для яких $\cos x = 0$, тобто для кутів $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Після аналогічних доведень маємо, що котангенс не визначений для кутів $x = \pi k$, де $k \in Z$.

6.2. Обчислити:

1. $\operatorname{arctg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$. Відповідь: $\frac{3}{4}\pi$.

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Відповідь: $\frac{17\pi}{12}$.

3. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)+\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

4. $\cos(\pi-\arcsin(-1))$. Відповідь: 0.

5. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\arccos(-1)\right)$. Відповідь: 1.

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$. Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$. Відповідь: 3.

9. $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

10. $\operatorname{tg}^2\left(6\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Відповідь: 1.

6.3. Обчислити тригонометричні функції від обернених тригонометричних функцій:

11. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$. Відповідь: $2\sqrt{2}$.

12. $\sin^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$. Відповідь: 0,96.

13. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\operatorname{arctg}7\right)$. Відповідь: 7.

14. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\operatorname{arctg}(-5)\right)$. Відповідь: 5.

15. $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}\right)$. Відповідь: $\frac{63}{65}$.

16. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}-\arccos\frac{3}{4}\right)$. Відповідь: $\frac{3-\sqrt{105}}{16}$.

17. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arccos 0,8\right)$. Відповідь: $-\frac{33}{56}$.

18. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\frac{3\pi}{2}\right)$. Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

19. $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}\right)$. Відповідь: $\frac{16}{65}$.

20. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$. Відповідь: $\frac{77}{85}$.

21. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

22. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$. Відповідь: 0,98.

23. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$. Відповідь: $\frac{2}{3}$.

24. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)\cdot\sqrt{13}$. Відповідь: 3.

25. $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2{,}4)\right)$. Відповідь: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

26. $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

27. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$. Відповідь: 2.

28. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$. Відповідь: $\frac{1}{5}$.

29. $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

30. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$. Відповідь: $\frac{6}{25}$.

31. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$. Відповідь: $\frac{24}{25}$.

32. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. Відповідь: $\frac{24}{25}$.

33. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)$. Відповідь: $\frac{17}{25}$.

34. $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$. Відповідь: $-3\sqrt{7}$.

35. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$. Відповідь: $-\frac{119}{120}$.

36. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$. Відповідь: $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

37. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

38. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$. Відповідь: $\frac{1}{5}$.

6.4. Обчислити обернені тригонометричні функції від тригонометричних функцій:

39. $\arcsin(\sin 1)$. Відповідь: 1.
40. $\arcsin(\sin 2)$. Відповідь: $\pi - 2$.
41. $\arcsin(\sin 4)$. Відповідь: $\pi - 4$.
42. $\arcsin(\sin 6)$. Відповідь: $6 - 2\pi$.
43. $\arcsin(\sin 10)$. Відповідь: $3\pi - 10$.
44. $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right)$. Відповідь: $\frac{\pi}{5}$.
45. $\arccos(\cos 4)$. Відповідь: $2\pi - 5$.
46. $\arccos(\cos 7)$. Відповідь: $7 - 2\pi$.
47. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$. Відповідь: $5 - 2\pi$.
48. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 130^\circ\right)$. Відповідь: -50°.
49. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5)$. Відповідь: $5 - \pi$.
50. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{3\pi}{5}$.
51 $\arcsin\left(\sin\left(-120^\circ\right)\right)$. Відповідь: -60°.
52. $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Відповідь: $\frac{3\pi}{10}$.
53. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$. Відповідь: $\frac{7\pi}{18}$.
54. $\arccos(\cos(-26))$. Відповідь: $26 - 8\pi$.
55. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 37)$. Відповідь: $12\pi - 37$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Щербаков Петро Миколайович
Шелест Людмила Іванівна
Шелест Катерина Юліївна

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ І ПРАКТИЧНІ РОЗРОБКИ СПРОЩЕНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ З ОБЕРНЕНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підп. до друку 25.06.2012. Формат 30 х 42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,7.
Обл.-вид. арк. 3,7. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Державному ВНЗ «Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842 від 11.06.2004

49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.