

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНОЇ, ТЕОРЕТИЧНОЇ  
ТА ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО  
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО  
ЗАВДАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ  
6.050503 «МАШИНОБУДУВАННЯ»

Дніпропетровськ  
НГУ  
2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНОЇ, ТЕОРЕТИЧНОЇ ТА  
ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО  
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО  
ЗАВДАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ  
6.050503 «МАШИНОБУДУВАННЯ»

Затверджено до видання редакційною  
радою НГУ (протокол № від ) за  
поданням методичної комісії напряму  
підготовки 6.050503 Машинобудування  
(протокол № 12 від 25.05.2009).

Дніпропетровськ  
2012

ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВО-  
ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Для студентів напрямку підготовки 6.0505003 / В.В. Плахотнік, Л.Я. Якубович.-  
Д.; ДВНЗ «НГУ», 2012 – 10 с.

Автори:

В.В. Плахотнік, к.т.н., доц. (підбір варіантів завдань, контрольні запитання);  
Л.А. Якубович, асистент (приклад розрахунку варіанта завдання)

Затверджено до видання редакційною радою НГУ (протокол №                    від  
2012 р.) за поданням методичної комісії напрямку підготовки 6.050503  
«Машинобудування (протокол №                    від                    )

Методичні матеріали призначені для самостійної роботи студентів  
напряму 6.050503 «Машинобудування» під час підготовки до модульного  
контролю за результатами практичних занять з нормативної дисципліни  
«Теоретична механіка»

Наведені варіанти завдань для самостійної роботи, приклад розв'язання  
завдання та контрольні запитання.

Відповідальний за випуск завідуючий кафедрою будівельної, теоретичної та  
прикладної механіки д.т.н., проф. С.Є. Блохін

## Вступ

Розділ теоретичної механіки присвячений вивченню плоского руху, важливий для глибокого розуміння руху взаємодіючих елементів механізмів та машин і для визначення їх основних кінематичних характеристик.

Для того, щоб освоїти методи та прийоми розв'язання задач по цій темі студенту необхідно ознайомитись із законом що описує плоский рух тіла, теоремами про швидкості та прискорення точок плоскої фігури. Ці питання розкриті в підручника:

- С.М. Тарг «Краткий курс теоретической механики», розділ XI. М. «Высшая школа», 1986 р;
- М.А. Павловський. Теоретична механіка, розділ 11. Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

Для опанування темою особливу увагу треба приділити теоремам про проекції швидкостей двох точок тіла, миттєвий центр швидкостей, окремим випадкам знаходження миттєвого центру швидкостей та визначення прискорення точки тіла за допомогою прискорення полюса.

Після ознайомлення з теоретичними положеннями даної теми студент приступає до виконання розрахунково-графічного завдання. Вихідні дані та номер варіанта завдання вибираються з таблиці відповідно номеру залікової книжки: наприклад, номеру 283052 ставиться у відповідність перші літери алфавіту наступним шляхом

283052

*абвгде*

Потім з таблиці вибираються дані, що стоять на перехресті стовпчика з літерним позначенням та рядка, номер якої відповідає букві із запису (1). Наприклад, у випадку що розглядається, у стовпчику таблиці з літерою «е» вибирається число на другому рядку, а в стовпчику з літерою «д» - число у п'ятому рядку і тому подібне.

Розрахунково-графічне завдання виконується на аркушах формату А-4, заповнених з однієї сторони. На титульному аркуші вказують назву завдання, номер залікової книжки, групу, прізвище та ініціали студента, а також посаду та прізвище викладача, який перевіряє завдання.

Перед розв'язанням задачі треба виписати повністю її умову з числовими даними, зробити акуратне креслення в масштабі. Розв'язання повинно супроводжуватися короткими, послідовними, без скорочень, поясненнями та кресленнями. Необхідно вказувати розмірність всіх вихідних даних та кінцевих результатів.

### Зміст завдання

Для заданого положення механізму знайти швидкості та прискорення точок А, В і С. Схеми механізмів розміщені на рис. 1,

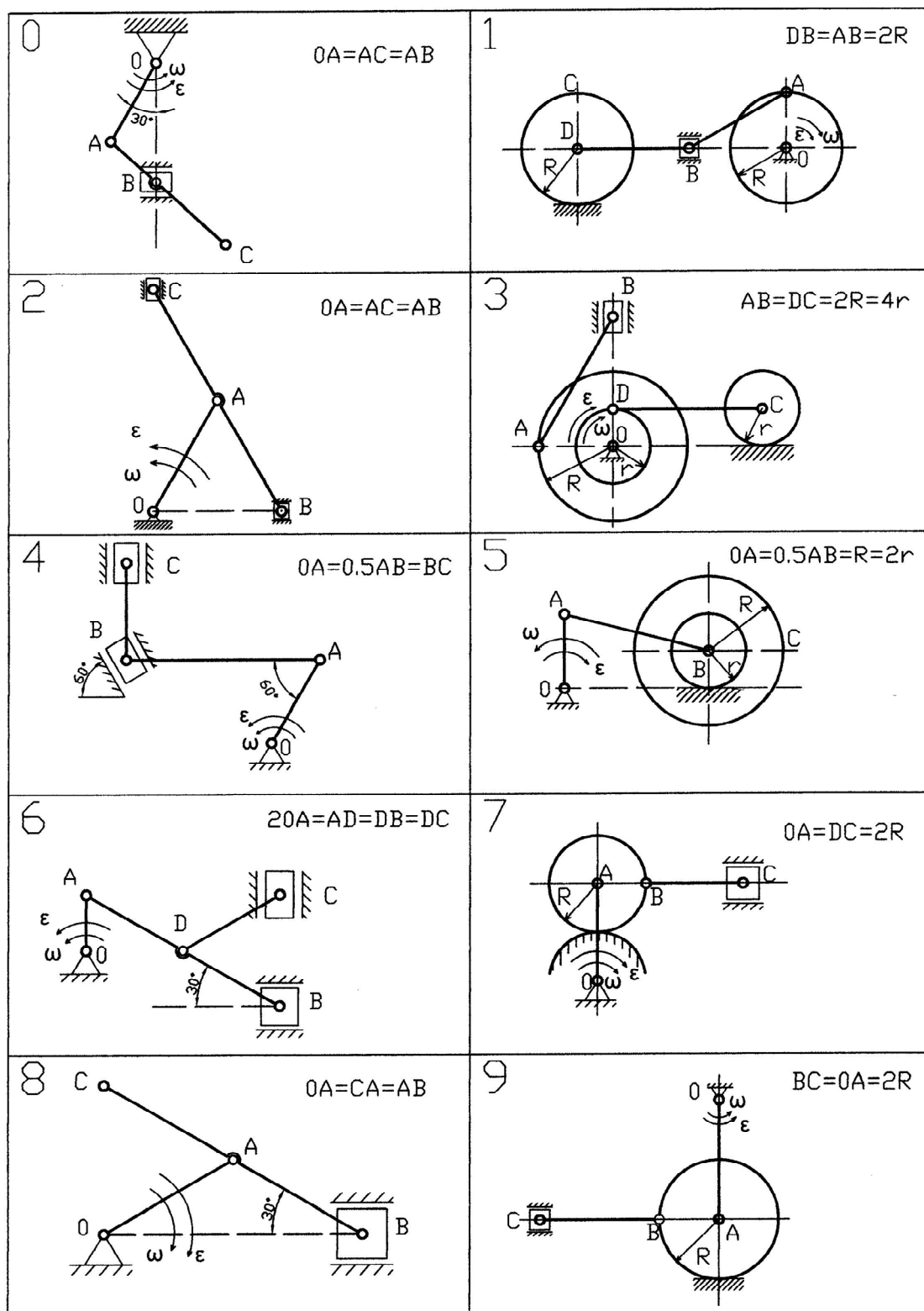


Рис. 1

а необхідні для розрахунку дані приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

№ строки	№ схеми	ОА, м	$\omega$ , 1/с	$\varepsilon$ , 1/с <sup>2</sup>
1	0	0,4	-5	8
2	1	0,6	4	-7
3	2	0,8	-2	6
4	3	1,0	6	-5
5	4	-3	-7	4
6	5	0,2	9	-3
7	6	0,5	-8	2
8	7	0,7	1	-10
9	8	-9	3	9
0	0	0,2	-10	1
	е	д	г	е

Примітка: знак «-» вказує, що при розв'язанні задачі необхідно дану величину спрямовувати у протилежному напрямку.

Вказівки. При визначенні швидкостей точок плоского механізму, що складається з декількох ланок, належить розглядати рух кожної ланки окремо, почавши з тієї, рух якої заданий. На цьому етапі необхідно скористатись теоремою про проекції швидкостей двох точок на пряму, що їх з'єднує, та властивостями миттєвого центру швидкостей для кожної ланки механізму окремо. Визначаючи прискорення довільної точки на ланці, необхідно скористатися векторним рівнянням  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$ , де А – полюс, прискорення якого відомо.

#### Приклад виконання завдання

Механізм (рис. 2) складається з колеса 1, стрижня 2 та повзуна 3, з'єднаних між собою шарнірами.

Дано:  $R = 0,4$  м;  $r = 0,2$  м,  $BC = 2$  м,  $a_0 = 3$  м/с<sup>2</sup>;  $V = 0,5$  м/с.

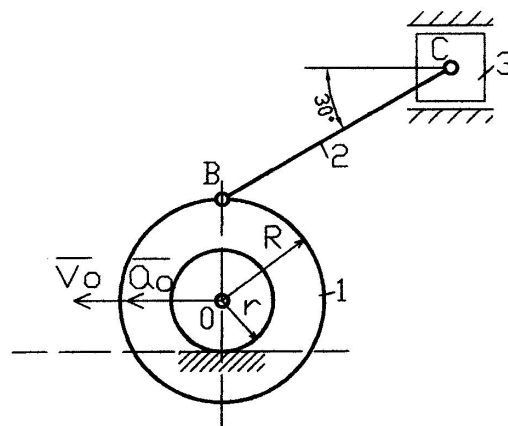


Рис. 2

Розв'язок. **1. Визначення швидкостей точок.** Ведуча ланка механізму – колесо 1, тому що заданий рух т. О. Для цього тіла миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці контакту з нерухомою поверхнею (рис. 3). Згідно з властивостями миттєвого центра швидкостей модуль швидкості т. В та кутову швидкість тіла знаходимо із співвідношення

$$\frac{V_B}{BP} = \frac{V_0}{OP} = \omega, \quad (1)$$

звідки

$$\omega = \frac{V_0}{OP} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5 \quad 1/c, \quad V_B = \omega \cdot BP = \omega(R + r) = 2,5(0,4 + 0,2) = 1,5 \text{ м/с}.$$

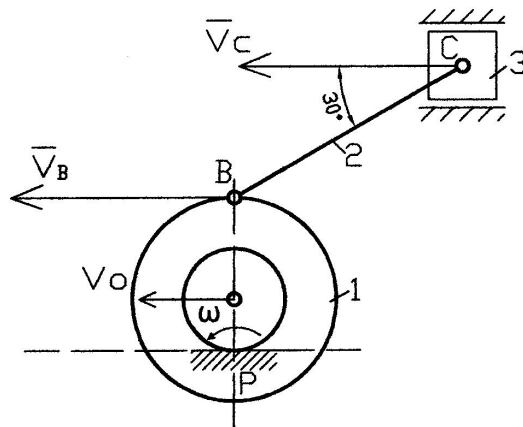


Рис. 3

Вектор швидкості т. В спрямований в бік руху перпендикулярно до відрізка BP. Напрямок кутової швидкості визначається напрямком  $\vec{V}_0$  і показано на кресленні.

Точка С одночасно належить до стрижня BC та повзуна 3, який поступально рухається по горизонталі, тому маємо що вектор швидкості точки С  $\vec{V}_C$  буде паралельний вектору швидкості  $\vec{V}_B$ . Стрижень 2 рухається плоско паралельно, але для положення механізму, при якому швидкості  $\vec{V}_B$  та  $\vec{V}_C$  паралельні, але не перпендикулярні до відрізка BC має місце випадок, коли миттєвий центр швидкостей стрижня 2 знаходиться у нескінченності, тому кутова швидкість стрижню 2 дорівнює нулю. З чого випливає, що швидкості точок В і С рівні:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C = 1,5 \text{ м/с}.$$

**2. Визначення прискорень точок.** Прискорення точки В (рис. 4) знаходимо згідно теореми про прискорення точок плоскої фігури, вибравши в якості полюса точку О, прискорення якої відоме

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{OB}^n + \bar{a}_{OB}^\tau \quad (2)$$

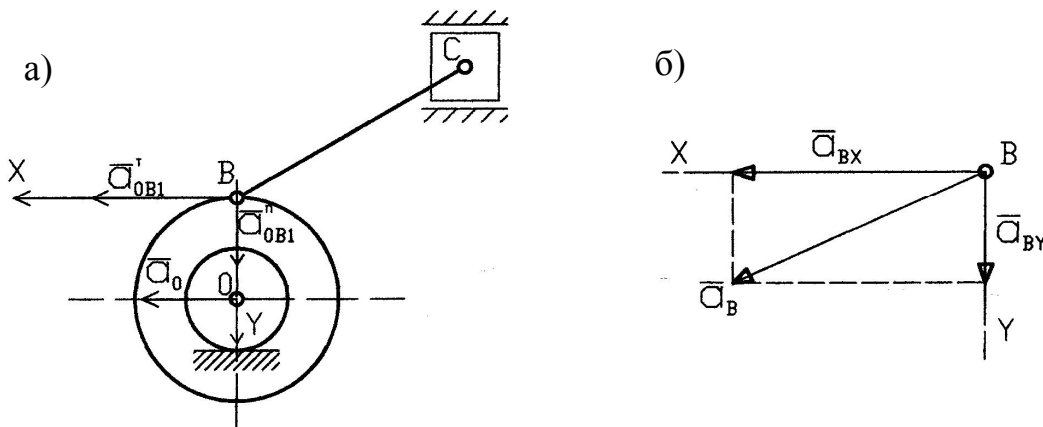


Рис. 4

Вектор  $\bar{a}_{OB}^n$  спрямований від точки В до точки О і дорівнює

$$a_{OB}^n = \omega^2 \cdot OB = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2$$

Вектор  $\bar{a}_{OB}^\tau$  спрямований перпендикулярно до  $\bar{a}_{OB}^n$  в бік руху. Його величина визначається через кутове прискорення  $\varepsilon$ :  $a_{OB}^\tau = \varepsilon \cdot OB$ .

При визначенні  $\varepsilon$  скористуємось тим, що відстань від точки О до миттєвого центру швидкостей Р залишається постійною при будь-якому положенні колеса і похідна від кутової швидкості по часу залишиться

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V_0}{OP} \right) = \frac{1}{OP} \cdot \frac{dV_0}{dt} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \frac{a_0}{OP} \quad (3)$$

Використовуючи вихідні дані, одержимо

$$\varepsilon = \frac{3}{0,2} = 15 \text{ 1/с}^2.$$

Так як знаки  $\omega$  та  $\varepsilon$  співпадають, то обертання колеса прискорене.

Знаходимо значення  $a_{OB}^\tau$

$$a_{OB}^\tau = 15 \cdot 0,4 = 6 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 4а показані вектори  $\bar{a}_O$ ,  $\bar{a}_{BO}^\tau$  та  $\bar{a}_{BO}^n$ , геометрична сума яких дорівнює прискоренню т. В (2). Знайдемо проекцію цієї суми на осі Х та Y, які проведені через точку В. Тоді

$$a_{BX} = a_0 + a_{OB}^\tau = 3 + 6 = 9 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BY} = a_{OB}^n = 2,5 \text{ м/с}^2$$

звідки



$$a_B = \sqrt{a_{BX}^2 + a_{BY}^2} = \sqrt{9^2 + 2,5^2} = 9,34 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора  $\bar{a}_B$  можна визначити способом, який показаний на рис. 4б.

Прискорення точки С знаходимо аналогічно, вибравши в якості полюса т. В (рис. 5).

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad (4)$$

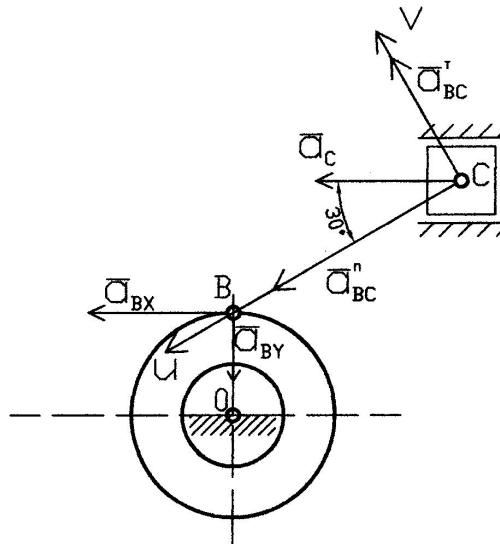


Рис. 5

Або, скориставшись проекціями прискорення т. В на осі Х та Y вираз (4) запишеться

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{BX} + \bar{a}_{BY} + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau \quad (5)$$

прискорення  $\bar{a}_{BC}^n$  спрямоване від точки С до точки В по прямій ВС, а

$\bar{a}_{BC}^\tau$  перпендикулярне до  $\bar{a}_{BC}^n$  і спрямоване в бік руху.

Раніше було встановлено, що в даному положенні механізму кутова швидкість стрижня  $2 \omega_2 = 0$ , тому

$$a_{BC}^n = \omega_2^2 \cdot BC = 0.$$

Скориставшись тим, що точка С належить до повзуна 3 і рухається з ним прямолінійно по горизонталі, можна стверджувати, що напрямок вектору прискорення  $\bar{a}_C$  точки С визначений. Знайдемо проекцію виразу (5) на ось U, спрямовану вздовж стрижня ВС

$$a_C \cos 30^0 = a_{BX} \cos 30^0 + a_{BY} \cos 60^0 + a_{BC}^n$$

звідки

$$a_C = \frac{a_{BX} \cos 30^0 + a_{BY} \cos 60^0}{\cos 30^0} = \frac{9 \cdot 0,866 + 2,5 \cdot 0,5}{0,866} = 10,44 \text{ м/с}^2$$

Величину  $a_{BC}^\tau$  тангенціальної складової прискорення точки С можна визначити з проекції рівняння (5) на ось V

$$a_C \sin 30^0 = a_{BX} \sin 30^0 - a_{BY} \sin 60^0 + a_{BC}^\tau,$$

Звідки

$$\begin{aligned} a_{BC}^\tau &= a_C \sin 30^0 - a_{BX} \sin 30^0 + a_{BY} \sin 60^0 = \\ &= 10,44 \cdot 0,5 - 9 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 0,866 = 2,88 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Скориставшись залежністю  $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BC$  знаходимо кутове прискорення стрижня 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BC}^\tau}{BC} = \frac{2,88}{2} = 1,44 \text{ 1/с}^2$$

Запитання для самоперевірки

1. Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним?
2. На які два руха можна розкласти плоско паралельний рух тіла?
3. Що називається миттєвим центром швидкостей?
4. Як можна графічно визначити положення миттєвого центру швидкостей, якщо відомі швидкості двох точок тіла?
5. Які властивості миттєвого центру швидкостей?
6. Які швидкості у точок плоскої фігури у тому випадку, коли миттєвий центр швидкостей утрапиться у нескінченості?
7. Маємо дві точки А і В плоскої фігури, що рухається. Швидкість точки А перпендикулярна до АВ. Як спрямована швидкість точки В?
8. Сумою яких трьох складових прискорень є прискорення довільної точки тіла, що рухається плоскопаралельно?

Литература

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под. Ред. Яблонского. - М.: Высшая школа, 1978. - 432 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Физматгиз, 1970. – 478 с.

Укладачі:

**Плахотнік** Валентина Василівна  
**Якубович** Людмила Анатоліївна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО  
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО  
ЗАВДАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ  
6.050503 «МАШИНОБУДУВАННЯ»

Державний ВУЗ «НГУ»  
49005, м. Дніпропетровськ, пр. К.Маркса, 19