МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Є.С. Сінайський
Л.В. Новікова
Л.І. Заславська

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2013

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
С 38

Рекомендовано редакційною радою ДВНЗ «Національний гірничий університет» як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 11 від 27.11.2013).

Рецензенти:

А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національної металургійної академії України;

Н.І. Ободан, д-р техн. наук, професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпропетровського національного університету.

Сінайський Є.С.

С 38 Вища математика. Частина І: навч. посіб. / Є.С. Сінайський, Л.В. Новікова, Л.І. Заславська; М-во освіти і науки, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2013. – 399 с.

Викладено курс вищої математики, розрахований на 400 – 500 навчальних годин, для студентів технічних спеціальностей. Містить розділи: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до аналізу, диференціювання, інтегрування, функції кількох змінних, диференціальні рівняння, числові та степеневі ряди. Основну увагу приділено з`ясуванню суті математичних понять, методів та їх застосуванню. Теоретичні положення проілюстровано великою кількістю детально розібраних прикладів. Систематичні примітки дають уявлення про становлення математики як науки, її розвиток та творців.

Іл. 252. Табл. 2. Бібліогр.: 14 назв.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пастух зобов`язаний привести коня
до водопою, але пити кінь повинен сам
А. Дистервег, нім. педагог XIX ст.

Найстародавніша з наук – математика – виникла завдяки роботі людської думки, яка викликана практичними потребами. Математика у кожному явищі (незалежно від фізичної сутності) виділяє притаманні йому кількісні властивості або просторові форми і вивчає їх. Абстрактність підходу спричинила те, що математика посіла справді особливе місце серед інших наук. Вона розроблює абстрактні поняття (число, точка, лінія), а також методи поводження з ними і на цій основі зводить моделі реальних процесів та явищ. Крім того, математика проникає у найрізноманітніші науки, формує мову і озброює ту або іншу галузь знань необхідним для досліджень інструментом. Слово «*mathema*», від якого походить назва «математика», з грецької перекладається «пізнання». Філософ І. Кант вважав, що у кожній природознавчій науці власне стільки науки, скільки в ній математики. Не варто доводити цей вислів до абсолюту, проте раціональне зерно у ньому все ж міститься. Майбутньому інженеру, для якого, за справедливим твердженням акад. А.М. Крилова, математика є тим самим, що «штангель, зубило, напилок для слюсаря», виникає нагальна потреба розібратися у чималому математичному інструментарії та навчитися ним користуватися стосовно до своєї спеціальності.

Існує велика кількість відмінних підручників та спеціальних посібників з математики, що призначені для вивчення цієї дисципліни у технічному вузі. Вміщена у виданнях інформація, що викладена лаконічною мовою математичних посилок та наслідків, часто-густо здається першокурснику неозорим морем. Тому, щоб дістатися без втрат до берега знань, йому потрібні і багато праці, і чимала упертість. Математичні ідеї повинні бути глибоко осмислені. Досягається це лише самостійними зусиллями. Викладач тільки допомагає, прагне по можливості складне зробити більш простим, доступним. Він, спираючись на свій досвід, вказує найнадійніші шляхи, що ведуть до цілі. Успіх навчання залежить не тільки від рівня попередньої підготовки учня, але також від його зібраності, вміння розподіляти свої сили та час.

Даний посібник – це конспективне викладання курсу вищої математики для технічних вузів у обсязі 400 – 500 учбових годин, він фіксує увагу на головному. Громіздкі доведення, здебільшого, опускаються з посиланням на видання. Мета книги – підтримати зусилля студента щодо засвоєння понять, методів і робочого апарату математики.

Дві взаємопов`язані складові навчання – інтерес до математики та вміння використовувати її правила – потребують, за нашим розумінням, посилення. Це стало стимулом для написання цього посібника. Допитливість та цілеспрямованість найкращих наших студентів незмінно надихає нас. Роботу не можна було б здійснити без всебічної підтримки з боку ректора Національного гірничого університету, академіка НАН України Г.Г. Півняка.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Множини:

$\varnothing$ – пусте

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots\}$ – складене з елементів $a, b, \ldots$

$\boldsymbol{N}$ – всіх натуральних чисел ($\boldsymbol{N_0}$ – множина $\boldsymbol{N}$, що доповнена числом 0)

$\boldsymbol{Z}$ – всіх цілих чисел

$\boldsymbol{Q}$ – всіх раціональних чисел

$\boldsymbol{I}$ – всіх ірраціональних чисел

$\boldsymbol{R}$ – всіх дійсних чисел

Проміжки:

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – відкритий (інтервал)

$\left.\begin{matrix}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\end{matrix}\right\}$ – напіввідкритий (відкритий зліва або справа)

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ – замкнений (відрізок)

$\left.\begin{matrix}[\boldsymbol{a}, \infty) \\ (\boldsymbol{a}, \infty)\end{matrix}\right\}$ – нескінченний (промінь)

$(-\infty, \infty)$ – нескінченний (числова пряма)

Знаки:

$\in$ – включення елемента в множину ($x \in X$ – елемент x належить до множини X)

$\notin$, $\overline{\in}$ – заперечення знака $\in$

$\subset$ – включення однієї множини до іншої

$<$ – менше ($\leq$ – менше або дорівнює)

$>$ – більше ($\geq$ – більше або дорівнює)

$=$ – рівності ($\neq$ – нерівності)

$\cup$ – об`єднання множин

$\cap$ – перерізу множин

$\to$, $\boldsymbol{lim}$ – прямування до границі

∞ – нескінченності

$\Rightarrow$ – слідування ($A \Rightarrow B$ – із твердження A випливає твердження B)

$\Leftrightarrow$ – рівносильності ($A \Leftrightarrow B$ – із A випливає B і навпаки)

$\sim$ – еквівалентності (для змінних величин $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha/\beta \to 1$)

$\forall$ – словосполучення «для всіх», «для кожного»

$\exists$ – існування ($\exists x$: – існує елемент x такий, що ...)

$\boldsymbol{d}$ – диференціала (df – диференціал функції f)

Δ – приросту, оператора Лапласа: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\boldsymbol{y'}, \dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$ – похідної

$\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ – частинної похідної

$\sum$ – підсумовування ($\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$)

δ_{ij} – Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$)

$\int$ – інтеграла ($\iint$ – подвійний інтеграл, $\iiint$ – потрійний інтеграл, $\oint$ – криволінійний інтеграл по замкненому контуру)

$|\cdot|$ – модуля ($|a|$ – модуль величини a)

$\boldsymbol{e}$ – числа, що дорівнює 2,718281828459...

$\boldsymbol{ln}$ – логарифма з основою e

∇ – оператора Гамільтона: $\nabla = \vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$

Математичні об`єкти:

$\boldsymbol{D(f)}$ – область визначення функції

$\boldsymbol{E(f)}$ – область змінювання функції

$\boldsymbol{det\ A}$ – визначник матриці A

$\vec{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ – вектор

$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$ – скалярний добуток векторів

$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ – векторний добуток векторів

$\{\boldsymbol{x_j}\}$ – послідовність чисел: $x_1, x_2, \ldots$

$(\boldsymbol{a} - \varepsilon, \boldsymbol{a} + \varepsilon)$ – ε-окіл точки a

$\boldsymbol{f(a)}$ – значення функції $f(x)$ у точці $x = a$

$\boldsymbol{f'(a)}$ – значення похідної $f'(x)$ у точці $x = a$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f(a-0)} \\ \boldsymbol{f(a+0)} \end{array}\right\} -$$ одностороння границя функції $f(x)$ у точці $x = a$ зліва або справа

$\boldsymbol{max\, f}$ – максимум функції f

$\boldsymbol{max\,\{a, b\}}$ – найбільше з чисел a, b

$\boldsymbol{min\, f}$ – мінімум функції f

$\boldsymbol{min\,\{a, b\}}$ – найменше з чисел a, b

$\alpha = \boldsymbol{o(\beta)}$ – величина α, яка веде себе так, що $\alpha/\beta \to 0$

$\alpha = \boldsymbol{O(\beta)}$ – величина α, яка веде себе так, що $|\alpha/\beta| \le const$

$\boldsymbol{grad}\,\varphi$ – градієнт функції φ: $grad\,\varphi = \nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$\boldsymbol{div\,\vec{a}}$ – дивергенція векторного поля: $div\,\vec{a} = \nabla\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

$\boldsymbol{rot\,\vec{a}}$ – ротор векторного поля: $rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

Посилання:

Кожному параграфу відповідає власна нумерація формул, рисунків та прикладів. При посиланнях на формулу даного параграфа у круглих дужках зазначається тільки її номер. Якщо посилання здійснюється на формулу з іншого параграфа, то спочатку наводиться номер параграфа, а потім після крапки – номер формули. Те саме стосується рисунків і прикладів. У квадратних дужках даються посилання на джерело зі списку навчальної літератури.

Розділ І

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Здавна, принаймні вже чотири тисячоліття, для вирішення практично важливих задач люди складають рівняння. Найпростіші з них – це рівняння першого степеня, їх ще називають лінійними. Рівняння можуть вміщувати одну, дві або декілька (іноді більш ніж сотню) невідомих. Щоб знайти ці величини, потрібна достатня кількість рівностей. Виникають системи рівнянь. До лінійних алгебраїчних систем часто зводять нелінійні та неалгебраїчні, тобто більш складні рівняння. В будь-якій галузі знань, де використовують математику, з`являється необхідність розв`язувати лінійні системи: у механіці твердого тіла – при дослідженні міцностних властивостей конструкцій, у електротехніці – при аналізі електричних кіл, в економіці і статистиці – при вивченні потоків матеріальних коштів і заявок на обслуговування. Описування і дослідження великих лінійних систем потребує спеціального математичного апарату. З цією метою вводять такі алгебраїчні об`єкти, як матриці та визначники, розробляють правила поводження з ними. Вказані питання утворюють предмет лінійної алгебри. Поняття та методи цього розділу математики переплітаються з ідеями, що виходять з уявлень про геометричні вектори та дії з ними.

§ 1. Матриці та дії з ними

Лише з алгеброю розпочинається
суворе математичне навчання.
М.І. Лобачевський, рос. математик XIX ст.

1^0. ***Поняття матриці***. Нехай маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = h_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = h_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = h_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Ще коротше систему (1) можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = h_i, \quad \text{де} \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{1'}$$

Величини $h_1, h_2, ..., h_m$ виникають з величин $x_1, x_2, ..., x_n$ у результаті застосування відносно останніх двох операцій – множення на деякі числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n)$ та складання. Такі операції називають лінійними. Говорять, що кожна з величин h_i є **лінійною комбінацією** величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Система (1) здійснює **лінійне перетворення** величин x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ на величини h_i $(i = 1, 2, ..., m)$.

Сукупність усіх коефіцієнтів a_{ij} при строгій відповідності їх до місця розташування у системі (1) є характеристикою перетворення. Цю характеристику зручно надати у формі таблиці, яку називають **матрицею**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}, \ \text{або} \ A = \left(a_{ij}\right). \tag{2}$$

Перший індекс елемента a_{ij} є номером рядка, другий – номером стовпця, на перетині яких він знаходиться, m – число рядків, n – число стовпців матриці A. Якщо $m \neq n$, то матрицю називають **прямокутною розміру $\boldsymbol{m \times n}$**, при $m = n$ матриця A – **квадратна**, число n – її **порядок**. У квадратній матриці A елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють **головну діагональ**, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ складають її побічну діагональ. Квадратну матрицю A називають **діагональною**, якщо $a_{ij} = 0$ для усіх $i \neq j$, **верхньою трикутною**, якщо $a_{ij} = 0$ для усіх $i > j$, **нижньою трикутною**, якщо $a_{ij} = 0$ для усіх $i < j$, **симетричною**, якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для усіх $i \neq j$. Застосовують символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j, \end{cases} \tag{3}$$

за допомогою якого записують діагональну матрицю та її окремий випадок – о**диничну** матрицю E:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\lambda_i \delta_{ij}\right), \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right).$$

Матриці розміру $1 \times n$ та $n \times 1$ містять тільки один ряд елементів, відповідно їх називають **матриця-рядок та матриця-стовпець**.

Матриця $\theta = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ – **нульова**, якщо усі її елементи нулі, тобто $a_{ij} = 0$ $\forall i, j$ (знак $\forall$ заміняє словосполучення «для усіх»).

Із елементів матриці (2) можна утворити нову **транспоновану** відносно A матрицю $A^T = \left(a_{ij}^T\right)_{n,m}$ так, що рядки A стануть (при збереженні того ж порядку) стовпцями і навпаки. Очевидно, що $a_{ij}^T = a_{ji}$.

2⁰. ***Рівність матриць***. Дві матриці $A = \left(a_{kj}\right)$ і $B = \left(b_{kj}\right)$ дорівнюють одна одній, якщо їх розміри збігаються і відповідні елементи рівні, тобто $a_{kj} = b_{kj}$ для усіх значень k та j. Записують $A = B$.

3⁰. ***Додавання матриць*** Сумою матриць $A = \left(a_{kj}\right)$ і $B = \left(b_{kj}\right)$ однакового розміру називають матрицю того самого розміру $C = \left(c_{kj}\right)$ з елементами $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$ $\forall k, j$, тобто елементи, що стоять на однакових місцях, додають. Записують $C = A + B$.

Для матриць одного розміру справедливими є формули:

$$A + B = B + A; \quad \left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right); \quad A + \theta = A.$$

4⁰. ***Множення матриці на число***. Ця операція передбачає множення усіх елементів матриці на дане число. Якщо $A = \left(a_{kj}\right)_{m,n}$ і λ – деяке число, то $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m,n}$. Для будь-яких чисел α, β і матриць одного розміру A, B мають місце властивості:

$$\alpha\left(A + B\right) = \alpha A + \alpha B; \quad \left(\alpha\beta\right)A = \alpha\left(\beta A\right); \quad \left(\alpha + \beta\right)A = \alpha A + \beta A; \quad 0 \cdot A = \theta.$$

5⁰. ***Множення матриць***. Операція визначена за умови: число стовпців першого множника дорівнює числу рядків другого. Так, якщо $A = \left(a_{kj}\right)_{l,n}$ і $B = \left(b_{kj}\right)_{m,l}$, то при $m \neq n$ множити A на B не можна, а B на A можна. Добутком BA у цьому випадку називають матрицю $C = \left(c_{ij}\right)_{m,n}$, елементи якої знаходяться за правилом

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} b_{ik} a_{kj} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{il}a_{lj}. \qquad (4)$$

Щоб знайти елемент c_{ij} матриці $C = BA$, потрібно кожен елемент i-го рядка матриці B помножити на відповідний елемент j-го стовпця матриці A і отримані добутки додати.

Приклад. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти BA.

Розв'язування. Матриця B має розмір 2×3, матриця A – 3×4. Результатом множення B на A буде матриця C розміру 2×4. За формулою (4) знаходимо

$c_{11} = 2\cdot 4 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 = 7$, $\quad c_{12} = 2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 5 = 4$,

$c_{13} = 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 = 5$, $\quad c_{14} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 5$,

$c_{21} = 1\cdot 4 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = -1$, $\quad c_{22} = 1\cdot 2 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 5 = -3$,

$c_{23} = 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 9$, $\quad c_{24} = 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 5$.

Маємо $C = BA = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Для квадратних матриць A і B одного порядку обидва добутки AB та BA мають сенс, але у загальному випадку вони не збігаються: $AB \neq BA$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ AB \neq BA.$$

При множенні матриць, якщо тільки записані нижче добутки не позбавлені змісту, справедливі властивості:

1) $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$ (однак з рівності $AB = \theta$ не випливає, що $A = \theta$ або $B = \theta$, див. попередній приклад);

2) $AE = A$, $EA = A$;

3) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;

4) $(AB)C = A(BC)$;

5) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, λ – число;

6) $(AB)^T = B^T A^T$.

Властивості 1) – 5) легко перевірити, доведення властивості 6) див. [9, с.14].

Операція множення матриць дозволяє записати лінійне перетворення (1) у компактній матричній формі. Дійсно, нехай A – матриця (2), X і H – матриці-стовпці:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix},$$

тоді за правилом множення (4) маємо матрицю-стовпець

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент цієї матриці-стовпця згідно з (1) дорівнює відповідному елементу матриці H, отже,

$$AX = H. \tag{1''}$$

Якщо величини h_1, h_2, ..., h_m в свою чергу піддати лінійному перетворенню з матрицею коефіцієнтів $B = \left(b_{kj}\right)_{l,m}$, то результатом буде матриця-стовпець Y з елементами y_1, y_2, ... , y_l, причому $Y = BH = BAX$. Перетворення матриці X на матрицю Y визначається при цьому добутком BA.

♦ Як самостійний алгебраїчний об`єкт матриці в явній формі з`явилися у XIX ст. в працях Сільвестра. Саме йому належить термін «матриця». Основні правила дій над матрицями розроблені у 1858 р. Келі.

♦ **Джеймс Сільвестр** (англ. математик, 1814 – 1897) займався адвокатурою, був професором математики кількох університетів Англії та США. Засновник першого в Америці математичного журналу. Яскрава особистість, оратор, поетично обдарована, дотепна, іскрометна людина. Його жвавий розум успішно проникав у різні розділи математики та встановлював там потаємні на той час взаємозв`язки.

♦ **Артур Келі** (англ. математик, 1821 – 1895) протягом 20 років поєднував адвокатську практику з інтенсивними науковими дослідженнями в галузі математики. З 1863 р. – професор університету в Кембріджі.

♦ **Леопольд Кронекер** (нім. математик, 1823 – 1891) закінчив Берлінський університет, а згодом викладав в ньому. Вперто відстоював принцип арифметизації математики. Вважав, що у її основі лежить число, насамперед натуральне: «Всемогутній Бог створив цілі числа, решта – справа рук людських».

§ 2. Визначники

Батальйони цифр схожі на батальйони людей:
вони не завжди такі сильні, як це здається.
М. Сейдж, амер. літератор XX ст.

1^0. *Поняття визначника*. Квадратній матриці A довільного порядку ставлять у відповідність число $\Delta = det\, A$, яке називають визначником або **детермінантом** матриці A. Це число можна виразити через елементи матриці. Якщо $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ – матриця 2-го порядку (буква «a» або «b» тут фіксує стовпець, а індекс – рядок, з якого береться елемент), то їй відповідає **визначник 2-го порядку**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1}$$

Елементи a_1 і b_2 розташовані на головній діагоналі, b_1, a_2 утворюють побічну діагональ визначника.

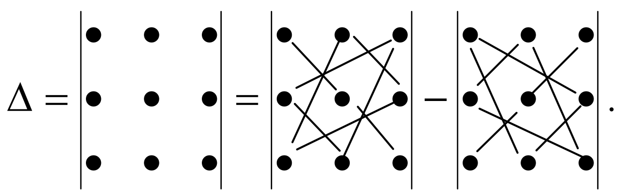
Матрицю третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

характеризує її визначник $\Delta = det\, A$, який обчислюється за правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - b_1 a_2 c_3 - c_2 b_3 a_1. \tag{2}$$

Щоб запам`ятати формули (2) застосовують **«правило трикутників»**



Тут лініями з`єднані елементи, які потрібно перемножити, причому знак кожного добутку у першій схемі праворуч зберігається, а у другій – змінюється на протилежний.

Приклад 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot(-4)\cdot(-1) + 0\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot 0\cdot 0 - (-4)\cdot 2\cdot(-2) = -3.$$

2^0. ***Мінори та алгебраїчні доповнення***. Зробивши групування доданків, перепишемо формулу (2) у вигляді

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

З урахуванням (1) маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Визначники 2-го порядку, які записані праворуч, можна здобути через викреслення у Δ одного з рядків та одного з стовпців. Кожний такий визначник називають **мінором** елемента, що розташований на перетині викреслених рядів. **Алгебраїчне доповнення** елемента – це його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, де i – номер рядка, а j – номер стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент. Так, у визначнику Δ алгебраїчним доповненням елемента a_1 є $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Елементам a_2 та a_3 відповідають алгебраїчні доповнення $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ і $A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$. У цих позначеннях рівність (3) запишеться таким чином:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3. \qquad (4)$$

Маючи на увазі формулу (4), говорять, що визначник Δ розкладений за елементами його 1-го стовпця. Аналогічні формули можна записати з елементами будь-якого іншого ряду із Δ. Це означає, що величина визначника не залежить від того, за яким рядом його розкладають: **визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів якого-небудь його ряду та їх алгебраїчних доповнень**. Це правило легко перевірити для визначників 2-го та 3-го порядків. Його можна прийняти як означення детермінантів більш високих порядків. Наприклад, визначник 4-го порядку можна розуміти як число, що визначається за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Тут алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} – визначники 3-го порядку. Так само визначник 5-го порядку можна виразити через визначники 4-го порядку і т.д.

Приклад 2. Розкриваючи визначник 4-го порядку за елементами 1-го рядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17.$$

3^0. ***Визначник порядку n***. Нехай $A = \left(a_{ij}\right)$ – квадратна матриця порядку $n > 1$. Її **визначник Δ = *detA* – це число, що дорівнює сумі попарних добутків елементів якого-небудь його ряду та їх алгебраїчних доповнень**, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{5}$$

або

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \tag{6}$$

причому $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \cdot M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}. Формула (5) дає розкладання визначника за елементами його i-го рядку, рівність (6) є розкладання Δ за елементами його j-го стовпця.

4^0. ***Властивості визначників***. Для визначників 2-го порядку подані далі властивості безпосередньо випливають з формули (1). Можна показати, що вони справедливі також для визначників будь-якого порядку.

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки при збереженні того ж порядку слідування зробити стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. Визначник змінює знак, якщо два його рядки (або два стовпці) поміняти місцями:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Визначник дорівнює нулю, якщо два його рядки (або два стовпці) однакові:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Загальний множник елементів якого-небудь ряду (рядка або стовпця) можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

5. Визначник дорівнює нулю, якщо відповідні елементи двох його паралельних рядів пропорційні:

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного з його рядів додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на довільне число:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Із збільшенням порядку n визначника швидко зростає кількість арифметичних операцій, що потребує його обчислення. Застосовуючи властивості визначників, зокрема 4 та 6, чисельну процедуру можна спростити. Вибирають один з рядів визначника та віднімають або додають до нього той чи інший паралельний ряд з підходящим коефіцієнтом, прагнучи утворити в обраному ряді якомога більшої кількості нулів. Потім визначник розкладають за елементами такого ряду згідно з формулою (5) або (6).

Приклад 3. У визначнику Δ з прикладу 2 один з елементів 1-го стовпця нульовий. Утворимо у цьому стовпці ще два нулі. Для цього третій рядок помножимо на 2 і додамо до 1-го рядку, потім той самий третій рядок помножимо на 4 і додамо до 4-го рядку, після чого розкладемо Δ за 1-м стовпцем:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1&0\\0&3&4&1\\-1&0&2&3\\4&2&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&5&6\\0&3&4&1\\-1&0&2&3\\4&2&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&5&6\\0&3&4&1\\-1&0&2&3\\0&2&9&12\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1&5&6\\3&4&1\\2&9&12\end{vmatrix}.$$

У результаті порядок визначника зменшився на одиницю. Оперуючи 1-м рядком визначника 3-го порядку, аналогічним чином дістанемо:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&5&6\\3&4&1\\2&9&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&5&6\\0&-11&-17\\0&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-11&-17\\-1&0\end{vmatrix}=-(-11\cdot 0-17\cdot 1)=17.$$

Визначник має близькі до матриці позначення, але його зміст та дії з ним інші. Наприклад, при множенні визначника на число можна множити на це число тільки один з його рядів (властивість 4), у випадку матриці множенню підлягають усі її елементи. Матриця – це таблиця чисел, що виступає як єдиний алгебраїчний об`єкт, але одним числом її замінити не можна. Визначник являє собою одну з характеристик квадратної матриці, що властива тільки таким матрицям.

Зауваження. Із означень (5) і (6) випливають дві допоміжні властивості визначників.

7. Сума попарних добутків алгебраїчних доповнень елементів якого-небудь ряду та довільних чисел $q_1, q_2,..., q_n$ дорівнює визначнику Δ', який утворюється з Δ, якщо обраний у ньому ряд замінити рядом величин $q_1, q_2,..., q_n$.

Зокрема,

$$q_1A_{11}+q_2A_{21}+\cdots+q_nA_{n1}=\begin{vmatrix}q_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\q_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\q_n&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta'. \tag{7}$$

Щоб у цьому переконатися, достатньо розкласти Δ' за елементами 1-го стовпця.

8. Сума попарних добутків елементів якого-небудь ряду визначника та відповідних алгебраїчних доповнень паралельного ряду дорівнює нулю. Наприклад,

$$a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\cdots+a_{n2}A_{n1}=0. \tag{8}$$

Дійсно, поклавши у формулі (7) $q_1=a_{12}$, $q_2=a_{22}$, ..., $q_n=a_{n2}$, приходимо до визначника Δ' з двома однаковими стовпцями, отже, $\Delta'=0$.

♦ Початок теорії визначників сходить до Лейбниця. Сучасний виклад, головні властивості, а також термін «детермінант» (*determino* – визначаю, лат.) містяться у роботах Коші (1815), її розвиток – у працях Келі і Сільвестра. Позначення визначника у вигляді квадратної таблиці, що обмежена вертикальними рисками, належить Келі.

♦ **Готфрід Лейбніц** (нім. математик, винахідник, філософ, історик, юрист, мовознавець, 1646 – 1716) протягом 40 років працював на посадах бібліотекаря, історіографа та юриста у ганноверських герцогів, один з яких став англійським королем (Георг I). Тричі зустрічався з Петром I, на його прохання розробив проект розвитку освіти і державного управління в Росії. У пошуках «загального методу» науки, «універсальної мови», що виражають зміни і рух, винайшов (одночасно із Ньютоном) диференціальне та інтегральне числення.

♦ **Огюстен Коші** (фр. математик, 1789 – 1857) спочатку інженер на спорудженні військового порту, а з 1816 р. – професор кількох вищих навчальних закладів Парижа. У 1830 р. після революції через свої прокоролівські симпатії відбув з Бурбонами у заслання. У 1838 р. повернувся до Парижа, але внаслідок відмови присягнути уряду не міг обіймати державні посади. Викладав у єзуїтському коледжі. Лише після революції 1848 р. отримав місце у Сорбонні, має блискучі досягнення в усіх галузях математики (близько 800 наукових робіт).

§ 3. Системи лінійних рівнянь та визначники

Алгебра щедра, вона нерідко дає
більше, ніж у неї благають.
Ж. Даламбер, фр. математик XVIII ст.

1^0. ***Формули Крамера***. Розглянемо систему двох рівнянь першого степеня з невідомими x, y та три визначники 2-го порядку, що пов`язані з системою

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = h_1, \\ a_2 x + b_2 y = h_2, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Виключимо із системи y, для чого перше рівняння помножимо на b_2, друге на b_1 і віднімемо одне рівняння із другого. Отримаємо

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 h_1 \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) x = b_2 h_1 - b_1 h_2 \quad \text{або} \quad x \cdot \Delta = \Delta_x.$$

Аналогічно, виключаючи x, знаходимо $y\cdot\Delta = \Delta_y$. Отже,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{2}$$

Рівності (2) дають розв\`язок системи (1). Їх називають **формулами Крамера**.

Приклад 1. Розв\`язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + 5y = 12. \end{cases}$

Розв\`язування. Маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 17$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 34$.

За формулами (2) знаходимо $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{34}{17} = 2$.

Нехай існує система, яку складають n рівнянь першого степеня з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при заданій матриці A її коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = h_n, \end{cases} \qquad A = (a_{ij})_{n,n}. \tag{3}$$

Позначимо $\Delta = detA$, A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементу a_{ij} в цьому визначнику, Δ_j – визначник, що утворений із Δ заміною в ньому j-го стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & h_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & h_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underbrace{h_n}_{j\text{-й стовпець}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Помножимо перше рівняння системи (3) на A_{11}, друге на A_{21}, ... , n-е на A_{n1}, тобто множниками є алгебраїчні доповнення елементів 1-го стовпця. Отримані рівності складемо почленно:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\right)\cdot x_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}\right)\cdot x_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1}\right)\cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} h_i A_{i1}.$$

Згідно з формулами типу (2.8) вирази у дужках ліворуч, окрім першого, перетворюються на нулі. Враховуючи (2.6), (2.7), а також позначення (4), маємо $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$. Звідси випливає, що $x_1 = \Delta_1/\Delta$. Аналогічно можна виразити і інші невідомі системи, тому

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

Це і є **формули Крамера**.

Приклад 2. Задано систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 3x - y + 2z = 18, \\ 2x + 5y - 3z = -1. \end{cases}$

Визначити невідомі x, y та z.

Розв`язування. Маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 18 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 8$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 18 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 18 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 6$. За формулами Крамера (5) знаходимо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{2} = 4, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3.$$

2^0. ***Дослідження системи***. Детермінант $\Delta = det\, A$, що відповідає матриці коефіцієнтів $A = (a_{ij})$ системи (3), називають **визначником системи**. Якщо $\Delta \neq 0$, то розв`язок системи (3) існує і він єдиний. Його можна знайти за формулами (5). Якщо $\Delta = 0$ та хоча б один з визначників $\Delta_j$ виду (4) не дорівнює нулю, то система (3) розв`язку не має (**несумісна**). У випадку, коли усі визначники (4) перетворюються на нуль, тобто $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, ... , $\Delta_n = 0$, система (3) або несумісна, або має нескінченну множину розв`язків (**невизначена система**). Для однозначного висновку потрібне додаткове дослідження.

Приклад 3. Знайти розв`язок системи $\begin{cases} 3x + y + 2z = 1, \\ 2x - 3y - 5z = 3, \\ 4x + 5y + 9z = -1. \end{cases}$

Розв`язування. Тут

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&2\\2&-3&-5\\4&5&9\end{vmatrix}=0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-3&-5\\-1&5&9\end{vmatrix}=0,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}3&1&2\\2&3&-5\\4&-1&9\end{vmatrix}=0,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&-3&3\\4&5&-1\end{vmatrix}=0\cdot$$

Разом з цим можна помітити, що третє рівняння є наслідком перших двох: достатньо подвоїти перше рівняння та відняти від нього друге. Третє рівняння нової інформації не містить і повинно бути відкинуто. Рівняння, що залишилися, розглядаємо як систему з двома невідомими, наприклад, y та z: $\begin{cases}y+2z=1-3x,\\-3y-5z=3-2x.\end{cases}$

Знаходимо $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-3&-5\end{vmatrix}=1$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1-3x&2\\3-2x&-5\end{vmatrix}=19x-11$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1-3x\\-3&3-2x\end{vmatrix}=-11x+6$.

Отже,

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=19x-11,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=6-11x.$$

Величину x тут можна задавати довільно. При $x=0$ маємо $y=-11$, $z=6$, якщо $x=1$, то $y=8$, $z=-5$ і т.д. Виникає нескінченна множина розв`язків.

Приклад 4. Розв`язати систему $\begin{cases}x+2y+3z=1,\\2x+4y+6z=5,\\3x+6y+9z=3.\end{cases}$

**Розв`язування**. Як і у прикладі 3, $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, однак перша рівність суперечить другій. Отже, система несумісна, її розв`язок не існує.

3^0. ***Однорідна система***. Так називають систему (3), якщо всі її вільні члени – нулі, тобто $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}\qquad(6)$$

Система (6) завжди сумісна. Вона має очевидний (тривіальний) розв`язок $x_1=0$, $x_2=0$, ... , $x_n=0$. Якщо визначник системи $\Delta\neq 0$, то такий розв`язок згідно з формулами Крамера (5) – єдиний. При $\Delta=0$ у системи (6), окрім тривіального, є ще й нескінченна множина ненульових розв`язків, тобто таких, коли хоча б одне з невідомих не дорівнює нулю. Так, якщо у визначнику $\Delta$ якому-небудь елементу, наприклад $a_{11}$, відповідає алгебраїчне доповнення $A_{11}\neq 0$, то розв`язком системи (6) буде $x_1=A_{11}\neq 0$, $x_2=A_{12}$, ... ,

$x_n = A_{1n}$. Дійсно, підставляючи ці значення у систему (6), дістаємо

$$
\begin{aligned}
&a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = 0,\\
&a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \cdots + a_{nn}A_{1n} = 0.
\end{aligned}
$$

Перше рівняння є правильним, тому що його ліва частина являє собою розклад визначника $\Delta = 0$ за елементами першого рядка згідно з (2.5), решта виконуються у силу властивості 8 для визначників (див. примітку та формулу (2.8) у кінці § 2). Якщо числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ утворюють ненульовий розв`язок системи (6), то при будь-якому $t \neq 0$ набір величин $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ також буде розв`язком системи. Отже, ненульових розв`язків нескінченна множина, якщо є хоча б один такий розв`язок.

Приклад 5. Дослідити однорідну систему $\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 4x + 3y + 7z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$

**Розв`язування**. Тут $\Delta = 0$. Це означає, що існують ненульові розв`язки. Оскільки

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то розв`язками системи будуть $x = -t,\ y = -t,\ z = t,$ де t – будь-яке число.

♦ Клинописні давньовавілонські тексти часів династії Хамурапі (XVIII ст. до н.е.) містять розв`язування рівнянь 1-го та 2-го степеня, а також їх систем. У китайських математичних книгах два тисячоліття потому розроблена спеціальна техніка «фан-чен» – розв`язування на лічильних дошках систем із n рівнянь 1-го степеня. Розвиваючи метод «фан-чен», японський математик Кова Секі в 1683 р. прийшов до розв`язування систем за допомогою визначників. В Європі до XIX ст. ці результати не були відомі, у застосуванні до систем лінійних рівнянь теорія визначників тут почала розвиватися лише після робіт Г. Крамера (1704 – 1752) – професора Кальвіністської академії у Женеві.

§ 4. Системи лінійних рівнянь та матриці

Ідеалом математики повинно бути
створення числення, що полегшує міркування.
А. Уайтхед, англ. математик XX ст.

1⁰. ***Обернена матриця***. Нехай $A = (a_{ij})$ – квадратна матриця, причому $\det A \neq 0$. У цьому випадку говорять, що A **невироджена** матриця. Матрицю A^{-1} того ж розміру, що і A, називають **оберненою** відносно A, якщо виконується рівність

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{1}$$

де E – одинична матриця.

Для існування оберненої матриці A^{-1} достатньо, щоб $\det A \neq 0$. Дійсно, нехай $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$, $E = (\delta_{ij})$ – квадратні матриці порядку n, δ_{ij} – символ Кронекера (1.3). Тоді $AA^{-1} = C = (c_{ij})$, де за правилом множення матриць (1.4) $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Отже, $c_{ij} = \delta_{ij}$ $\forall\ i, j = 1, 2, \ldots, n$. Розглянемо j-й стовпець матриці C (індекс j фіксований, а індекс i приймає значення від 1 до n). Для елементів цього стовпця одержуємо рівності:

$$\begin{array}{ll}
i = 1 & a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} = 0, \\
i = 2 & a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj} = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
i = j & a_{j1}b_{1j} + a_{j2}b_{2j} + \cdots + a_{jn}b_{nj} = 1, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
i = n & a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \cdots + a_{nn}b_{nj} = 0.
\end{array}$$

Із даної системи для довільного елемента b_{kj} на підставі (3.5) випливає

$$b_{kj} = \frac{1}{\Delta}\begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \end{array}
\begin{array}{l} \leftarrow k\text{-й стовпець} \\ \\ \leftarrow j\text{-й рядок} \end{array}$$

Останній визначник можна одержати із визначника системи $\Delta = det\ A$ у результаті заміни в ньому k-го стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів. Розкладаючи такий визначник за елементами k-го стовпця, згідно з (2.6) приходимо до формули

$$b_{kj} = \frac{1}{\Delta} A_{jk}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

де A_{jk} – алгебраїчне доповнення елемента a_{jk} у визначнику Δ.

Формула (2) однозначно визначає елементи матриці $A^{-1} = (b_{ij})$ за умови $\Delta = det\ A \neq 0$, тобто якщо матриця A невироджена.

Таким чином, згідно з (2) обернена матриця A^{-1} має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Зауваження. Для квадратних матриць A і B одного порядку справедлива властивість $det\ (AB) = det\ A \cdot det\ B$. Через те, що $det\ E = 1$, із (1) випливає, що $det\ A^{-1} \cdot det\ A = 1$. Як видно, вже сам факт існування взаємно обернених матриць означає, що їх визначники не можуть дорівнювати нулю.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв`язування. Обчислюємо $\Delta = det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то матриця A невироджена і для неї існує обернена матриця $A^{-1} = \left(b_{kj}\right)$.

Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів визначника Δ:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

За формулою (2) визначаємо елементи матриці A^{-1}:

$$b_{11}=\frac{1}{\Delta}A_{11}=5,\qquad b_{12}=\frac{1}{\Delta}A_{21}=-6,\qquad b_{13}=\frac{1}{\Delta}A_{31}=-2,$$

$$b_{21}=\frac{1}{\Delta}A_{12}=-1,\qquad b_{22}=\frac{1}{\Delta}A_{22}=\frac{3}{2},\qquad b_{23}=\frac{1}{\Delta}A_{32}=\frac{1}{2},$$

$$b_{31}=\frac{1}{\Delta}A_{13}=-1,\qquad b_{32}=\frac{1}{\Delta}A_{23}=\frac{1}{2},\qquad b_{33}=\frac{1}{\Delta}A_{33}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -6 & -2\\ -1 & 3/2 & 1/2\\ -1 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Множенням матриць переконуємося у тому, що $A\,A^{-1}=A^{-1}A=$ E, тобто матрицю A^{-1} знайдено правильно.

2^0. ***Матрична форма розв`язування***. Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=h_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=h_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=h_m\end{cases}\tag{4}$$

у матричній формі подається рівністю (див. 5^0 § 1)

$$AX=H,\tag{5}$$

де $A=(a_{ij})_{m,n}$, $X=(x_j)_{n,1}$, $H=(h_i)_{m,1}$.

При $m=n$ A – квадратна матриця і якщо $det\,A\neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо обидві частини (5) зліва на A^{-1}. Згідно з (1) і властивістю 2 із 5^0 § 1 отримаємо $A^{-1}AX=A^{-1}H$, $EX=A^{-1}H$, тобто

$$X=A^{-1}H.\tag{6}$$

Це і є матричний запис розв`язку системи (4).

Зауваження. На підставі (3) рівність (6) після множення матриць A^{-1} та H матиме вигляд

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ \cdots\\ h_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}h_1+A_{21}h_2+\cdots+A_{n1}h_n\\ A_{12}h_1+A_{22}h_2+\cdots+A_{n2}h_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_{1n}h_1+A_{2n}h_2+\cdots+A_{nn}h_n\end{pmatrix}.$$

Згідно з властивістю 7 визначників, що наведена наприкінці § 2, j-й рядок ($j = 1, 2, \dots, n$) отриманої матриці дорівнює визначнику Δ_j, який утворений із Δ завдяки заміні в ньому j-го стовпця елементів числами $h_1, h_2, \dots, h_n$ – див. рівності (3.4). Тому

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

тобто знов приходимо до формул Крамера (3.5).

Приклад 2. Задано систему $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 6, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ Знайти невідомі x_1, x_2, x_3.

Розв`язування. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$

Маємо $\det A = 2$, матрицю A^{-1} знайдено вище (див. приклад 1). Використовуючи (6), дістанемо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ -1 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 0.$$

3^0. ***Еквівалентні матриці***. **Елементарними перетвореннями** матриці будемо називати такі три операції з її рядками: 1) множення усіх елементів якого-небудь рядка на довільне число $\lambda \neq 0$; 2) переміну рядків місцями; 3) додавання до елементів деякого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на довільне число.

Матриця C **еквівалентна** матриці A, якщо вона отримана із A за допомогою скінченої кількості елементарних перетворень. Записують: $C \sim A$.

Нехай матриця $A = (a_{ij})_{m,n}$ системи (4) збільшена за рахунок додавання стовпця вільних членів, тобто утворена **розширена матриця**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Очевидно, що кожному елементарному перетворенню матриці B відповідає аналогічне перетворення системи (4), що приводить до еквівалентної системи рівнянь.

4^0. ***Метод Гауса***. Елементарними перетвореннями із системи (4) послідовно виключаються невідомі, що розташовані нижче головної діагоналі. Система (4) зводиться до еквівалентної системи ступінчастого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n &= p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{kk}x_k + \cdots + d_{kn}x_n &= e_k. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

При $k = n$ систему (8) називають **трикутною**, її коефіцієнти утворюють верхню трикутну матрицю. У цьому випадку останнє рівняння системи містить тільки одне невідоме x_n, яке легко визначити. Із передостаннього рівняння, де присутні x_n та x_{n-1}, знаходять x_{n-1}, після чого, піднімаючись уверх, можна знайти решту невідомих. Система при цьому має єдиний розв`язок. Якщо $k < n$, то $n - k$ невідомих можна задати довільно – система розв`язується неоднозначно, у неї безліч розв`язків.

Зведення системи (4) до форми (8) виконують так: першим розташовують рівняння, у якого коефіцієнт при x_1 відрізняється від нуля (найпростіше, якщо такий коефіцієнт – одиниця). Нехай $a_{11} \neq 0$, тоді, множачи перше рівняння почергово на a_{21}/a_{11}, a_{31}/a_{11} і т.д., віднімають його почленно із другого, третього і т.д. рівнянь. Дістають

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n &= p_2, \\ b_{32}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{3n}x_n &= p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \cdots + b_{mn}x_n &= p_m. \end{aligned}\right\}$$

Процедуру повторюють стосовно до рівнянь, починаючи з 2-го, виключають x_2 з усіх рівнянь нижче 2-го і т.д., поки не отримають систему вигляду (8). Якщо у цьому процесі з`являється тотожність виду $0 = 0$, то її слід відкинути. Поява у системі неможливих рівностей типу $0 = l$, де l відрізняється від нуля, означає, що вихідна система (4) несумісна. Перехід до системи (8) зручно виконувати у матричній формі, піддаючи елементарним перетворенням розширену матрицю B системи (4).

Приклад 3. Методом Гауса розв`язати систему $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 5. \end{cases}$

Розв`язування. Елементарними перетвореннями зводимо розширену матрицю B системи до ступінчастого вигляду:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -16 & 7 & -11 \\ 0 & -32 & 14 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 16 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Із третього рядка останньої матриці видно, що у результаті елементарних перетворень в системі виникла неможлива рівність $0 = 7$. Отже, вихідна система несумісна.

Приклад 4. Методом Гауса знайти розв`язок системи $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

Розв`язування. Зробимо елементарні перетворення розширеної матриці B.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В останній матриці третій рядок відповідає рівності $x_3 = 3$, згідно з другим рядком $-3x_2 + 5x_3 = 0$, $3x_2 = 5x_3$, $x_2 = 5$, з першого рядка знаходимо: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 + 2x_3 = 2$. Система має розв`язок: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$.

Зауваження. Після виключення невідомих, що розташовані нижче головної діагоналі, процедуру виключення можна продовжити і добитися зникнення невідомих також і вище цієї діагоналі (метод Гауса – Жордана). Так, у прикладі 4, продовжуючи перетворення матриці B, отримаємо

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$.

5^0. ***Ранг матриці***. Якщо у довільній матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ виділити k рядків і k стовпців ($k \le m$, $k \le n$), то елементи, що стоять на перетині цих рядів, утворять квадратну матрицю порядку k. Визначник такої матриці називають **мінором k-го порядку матриці A**. Так, для матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 8 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix} \text{ визначники } \Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 8 & 3 & 1\end{vmatrix}, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 8 & 3 & 6\end{vmatrix}$$

і т.д. є мінорами 3-го порядку, а визначники

$$\delta_1=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}, \quad \delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}, \quad \delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix} \text{ – мінорами 2-го порядку.}$$

Число r, що визначає порядок самого старшого відмінного від нуля мінору матриці A, називають її **рангом**. Застосовують позначення $r = RgA$. Для записаної вище матриці A усі її мінори 3-го порядку – нулі, тобто $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, тоді як мінор 2-го порядку, зокрема, $\delta_1 \neq 0$. Отже, $Rg\,A = 2$.

Відома теорема: якщо матриця A має мінор $M \neq 0$ порядку r, а всі її мінори порядку $r+1$, що містять M (обвідні мінори), дорівнюють нулю, то $Rg\,A = r$.

Для наведеної вище матриці A мінор 2-го порядку $\delta_1 \neq 0$, а обвідні для δ_1 мінори 3-го порядку $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Тому $Rg\,A = 2$ і обчислення інших мінорів 3-го порядку Δ_3 та Δ_4 стає непотрібним.

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці. Якщо від матриці A перейти до еквівалентної матриці, яка містить якомога більше нульових елементів, то обчислення мінорів матриці, а значить і визначення $Rg\,A$, спроститься.

Зауваження. В матриці A будь-який відмінний від нуля мінор порядку $r = RgA$ можна прийняти як основний, тобто базисний. Тоді будь-який ряд матриці A, що розташований за межами базисного мінору, можна подати через лінійну комбінацію паралельних рядів, які перетинають цей мінор. Отже, такий ряд завдяки елементарним перетворенням стає нульовим.

Наприклад, якщо в матриці A (див. вище) базисним вважати мінор δ_1, то третій рядок матриці A, що знаходиться за межами δ_1, є лінійною комбінацією двох перших рядків, вона є результатом додаванням першого та подвоєного другого рядка. Віднімаючи цю комбінацію з третього рядка, маємо

$$A \sim \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6^0. *Критерій сумісності системи*. Поняття рангу матриці використовують при розв`язуванні питання про сумісність системи (4). Відповідь на це питання містить така теорема [4, с. 66].

Теорема Кронекера – Капеллі. Для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A системи та ранг її розширеної матриці B збігалися: $Rg\, A = Rg\, B$.

Для сумісної системи величину $r = Rg\, A$ називають просто **рангом системи**. У цьому випадку справедливі твердження:

1) кількість незалежних рівнянь системи дорівнює рангу системи;

2) якщо ранг системи дорівнює кількості невідомих, тобто $r = n$, то система має єдиний розв`язок;

3) якщо ранг системи менший за кількість невідомих, тобто $r < n$, то система є невизначеною, вона має нескінченну множену розв`язків (r невідомих системи лінійно виражаються через $n - r$ вільних невідомих, які можна задавати довільно).

Приклад 5. Розглянемо таку систему та її розширену матрицю B:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 6, \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями зводимо матрицю B до ступінчастої форми. Це спрощує визначення рангу матриці B, а значить, і матриці A, яка є частиною B, а у випадку сумісності системи дозволяє знайти її розв`язок.

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -26 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & 5 & 7 \\ 0 & -13 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Три перших стовпця отриманої матриці утворюють матрицю, що еквівалентна матриці A системи. Очевидно, $Rg\, A = 3$ і $Rg\, B = 3$ також. Отже, система сумісна. Через те, що кількість невідомих збігається з рангом системи ($n = 3$ і $r = 3$), система має єдиний розв`язок. Він легко визначається: $x_3 = 4$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$.

7^0. ***Однорідна система***. Система (4) – **однорідна**, якщо $h_1 = h_2 = \ldots = h_m = 0$. Її матричний запис (5) має вигляд $AX = \theta$, де θ – нульова матриця-стовпець. Розширена матриця B такої системи від матриці A її коефіцієнтів відрізняється тільки стовпцем, який складається з нулів. Тому $RgA = RgB$, тобто однорідна система завжди сумісна. Якщо $RgA = n$ (n – кількість невідомих), то система має єдиний розв`язок. Таким розв`язком є $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Якщо ж $RgA < n$, то однорідна система має нескінченну множину розв`язків, один з яких нульовий. Коли кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, тобто $m = n$, однорідна система має ненульовий розв`язок тільки при $det\, A = 0$. У противному разі $RgA = n$ і ненульових розв`язків не існує.

Приклад 6. Розглянемо однорідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Кількість рівнянь тут збігається з кількістю невідомих, $det\, A = 0$, тому система має ненульовий розв`язок. У зв`язку з тим, що $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, ранг системи $r = RgA = 2$.

Вільних невідомих тут $n - r = 3 - 2 = 1$. Нехай це буде x_3. Виберемо величину x_3 у формі $x_3 = t\delta$, де t – довільне число. Третє рівняння системи можна отримати відніманням 1-го рівняння з 2-го, тому його відкинемо. З двох перших рівнянь знаходимо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 \\ 3x_1 + 8x_2 = -4x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = t\delta \\ 3x_1 + 8x_2 = -4t\delta \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} t\delta & 2 \\ -4t\delta & 8 \end{vmatrix}, \; x_2 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & t\delta \\ 3 & -4t\delta \end{vmatrix}.$$

Остаточно

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \cdot t = 16t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot t = -7t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \cdot t = 2t.$$

♦ Метод Гауса – один з найекономніших способів розв`язування лінійних алгебраїчних систем. Невідомий китайський автор (між III ст. до н. е. та I ст. н. е.) у 8-й книзі праці під назвою «Математика у 9-ти книгах» наводить правило «фан-чен» (дослівно: вистроювання чисел по клітинах) для розв`язування системи n лінійних рівнянь, що по суті збігається з методом Гауса. Оперуючи таблицею, що являє собою у сучасній термінології розширену матрицю системи, її зводять до трикутного вигляду. Від`ємні числа «фу», що виникають у цьому процесі, на відміну від додатних «чжен» виділяють палицями іншого кольору або іншої форми. В Європі від`ємні числа повсюдно почали застосовуватися лише в середині XVII ст.

♦ Поняття рангу матриці введено Сільвестром.

♦ **Карл Гаус** (нім. математик, астроном, фізик, 1777 – 1855) народився в бідній родині поденника. В ранньому дитинстві у нього позначилися виключні математичні здібності. Звернув на себе увагу герцога Брауншвейзького та за його підтримки одержав освіту. З 1807 р. до кінця життя – директор астрономічної обсерваторії і професор університету у Геттінгені. Його внесок у науку настільки великий, що вже за життя на честь вченого було зроблено медаль з написом «Король математиків».

♦ **Альфредо Капеллі** (італ. математик, 1855 – 1910) над усе відомий своїми дослідженнями в галузі алгебри. В Берлінському університеті слухав лекції Кронекера. Викладав математику в університетах Палермо та Неаполя.

§ 5. Лінійні операції над векторами

Все це з першого погляду дуже схоже на справжню нісенітницю але, насправді ж, виконані у відповідності з цим алгебраїчні дії приводять до зображень досить дивних.
М. Штіфель, нім. математик XVI ст.

1⁰. ***Поняття вектора***. Величини, що повністю визначаються одним числовим значенням (безрозмірним чи розмірним у даній системі фізичних одиниць), називають **скалярами** (наприклад, маса, температура, час). **Вектор** – це напрямлений відрізок, тобто геометричний об`єкт, який характеризується довжиною та напрямком у просторі (наприклад, сила, швидкість, прискорення). Застосовують позначення: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, де A – початок, B – кінець вектора $\vec{a}$, $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$ – довжина вектора. Два вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ вважаємо **рівними**, якщо їх довжина та напрямок однакові:

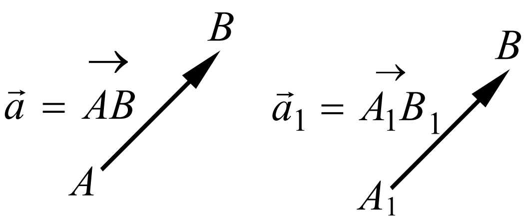


Рис. 1

$\vec{a} = \vec{a}_1 \quad \Leftrightarrow \quad 1)\ |\vec{a}| = |\vec{a}_1|, \quad 2)\ \vec{a} \ || \ \vec{a}_1,$ вектори співнаправлені.

Отже, вектор, не змінюючи його, можна перенести паралельно до самого себе й помістити його початок в будь-яку точку простору.

Паралельні вектори називають **колінеарними**, а вектори, що паралельні до однієї й тієї площини, – **компланарними**.

Якщо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{BA}$ – протилежний відносно $\vec{a}$, позначають $(-\vec{a})$.

2⁰. ***Додавання векторів***. Нехай дані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. У кінець вектора $\vec{a}$ помістимо початок вектора $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$, що виходить з початку $\vec{a}$ і замикає

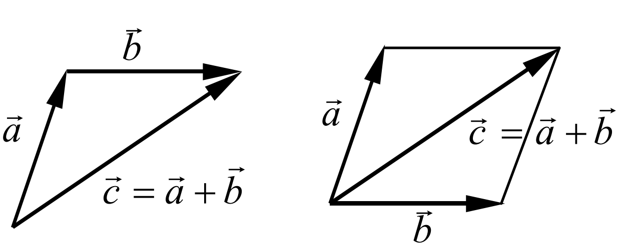


Рис. 2

ламану, називають сумою $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Правило, за яким $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ є діагоналлю паралелограму із сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, призводить до такого ж результату (рис. 2).

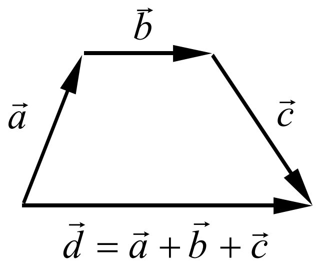


Рис. 3

Дія додавання векторів через побудову ламаної, а потім її замикання поширюється на будь-яку скінчену кількість векторів. Вона може бути застосована також для колінеарних векторів. Сумарний вектор перетвориться на точку, якщо початок ламаної збігається з її кінцем. У цьому випадку кажуть, що результатом додавання є **нуль-вектор**: $\vec{0}$. Його довжина $\left|\vec{0}\right| = 0$, а напрямок не визначений.

3^0. ***Віднімання векторів***. Відняти який-небудь вектор – це означає додати йому протилежний:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

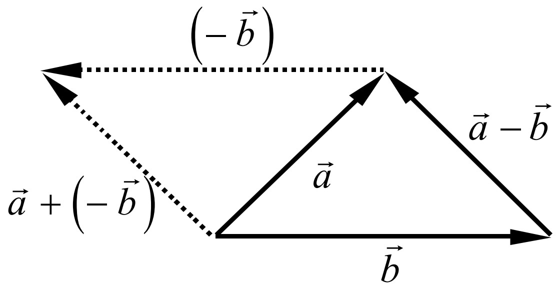


Рис. 4

Тому (рис. 4), щоб від $\vec{a}$ відняти $\vec{b}$, потрібно віднести вектори до загального початку, і тоді різницею $\vec{a}-\vec{b}$ буде замикаючий вектор, що направлений у бік $\vec{a}$, тобто того вектора, з якого здійснюється віднімання.

4^0. ***Множення вектора на число***. Додавання n однакових векторів $\vec{a}$ приводить до вектора того ж напрямку довжини $n\left|\vec{a}\right|$. Такий сумарний вектор

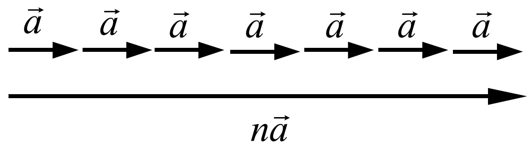


Рис. 5

називають доданком вектора $\left|\vec{a}\right|$ на число n і позначають $n\vec{a}$. Цей результат узагальнюється на випадок довільного дійсного числа λ. Добутком $\lambda\vec{a}$ називають вектор довжини $|\lambda|\left|\vec{a}\right|$ з тим же напрямком, що і $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, або з протилежним йому, якщо $\lambda < 0$. Зокрема,

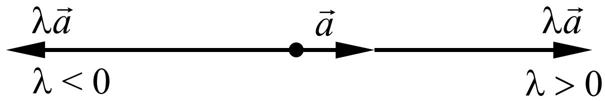


Рис. 6

$$(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a};\quad 0\cdot\vec{a}=\vec{0};\quad 1\cdot\vec{a}=\vec{a}.$$

5^0. ***Властивості лінійних операцій***. Лінійні операції над векторами – це множення їх на числа та додавання. З наведених вище означень випливають рівності, в яких усі скаляри – дійсні числа:

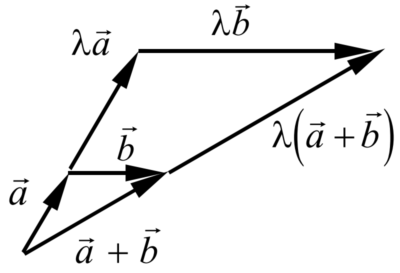


Рис. 7

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$

$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$;

7) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

8) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Рис. 7 ілюструє останнє співвідношення, що випливає з властивості пропорційності сторін подібних трикутників.

♦ Напрямленими відрізками для позначення сил користувалися Леонардо да Вінчі (1452 – 1519) і Галілео Галілей (1564 – 1642). У 1587 р. голландський математик та інженер С. Стевін (1548 – 1620) пропонує «правило паралелограма» для додавання двох перпендикулярних сил, позначених стрілками. Початок числення напрямлених відрізків покладено у 1799 р. датським математиком і геодезистом К. Весселем (1745 – 1818). Правило додавання векторів (*vector* – несучий, що переносить, лат.) шляхом побудови ламаної сформульовано ним у тому самому вигляді, що і в сучасних курсах математики. Від Л. Карно (фр. математик, механік, військовий і політичний діяч, 1753 – 1823) йде традиція позначати вектори рискою зверху.

§ 6. Розкладання вектора за базисом. Координати

Поки алгебра й геометрія розвивалися кожна своїм власним шляхом, просування їх було повільним, а застосування обмеженим. Але відтоді, як ці науки об`єдналися, вони енергійно підтримали одна одну й швидко почали набувати досконалості.
Ж. Лагранж, фр. математик XVIII ст.

1^0. ***Проекція вектора на вісь***. Нехай дані вісь l та вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Із його початку і кінця опустимо перпендикуляри на вісь. Їх основи позначимо A_1 і B_1. Проекцією вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вісь l (записують $np_l\vec{a}$) називають довжину вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, яку беруть зі знаком «+», якщо

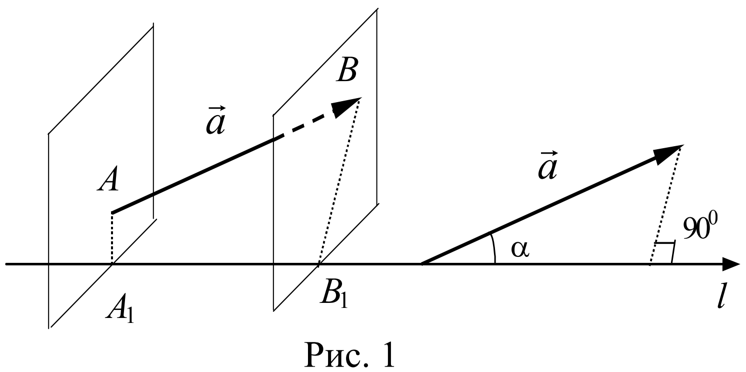


Рис. 1

напрямок цього вектора збігається з напрямом осі, або зі знаком «–», якщо ці напрямки протилежні. Проекція вектора – це скаляр.

Справедливі **властивості**:

1. При паралельному перенесенні вектора його проекція на вісь не змінюється. Отже, рівні вектори мають рівні проекції на одну й ту ж вісь.

2. Проекція ненульового вектора на вісь дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектор перпендикулярний до осі.

3. У загальному випадку (рис. 1)

$$np_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right| cos\alpha, \tag{1}$$

де α – кут між вектором та віссю, тобто це кут, на який треба повернути вісь, щоб її напрямок збігся з напрямом вектора (кут вважають додатним, якщо його відрахування робиться проти ходу годинникової стрілки).

4. Скалярний множник можна виносити за знак проекції

$$np_l\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda\, np_l\vec{a}\,. \tag{2}$$

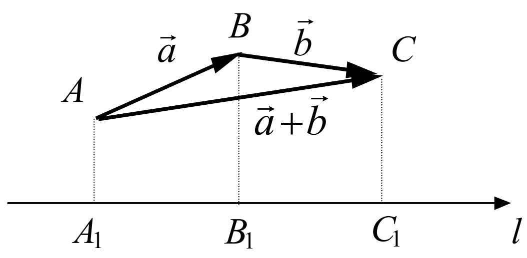


Рис. 2

5. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків

$$np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}\,. \tag{3}$$

Рівність (2) безпосередньо випливає із (1). В справедливості формули (3) можна переконатися, якщо звернутися до означення проекції та рис. 2.

2^0. ***Лінійна незалежність векторів***. Нехай вектор $\vec{d}$ являє собою лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_к$, тобто

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_к\vec{a}_к,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_к$ – деякі числа. Говорять, що вектор $\vec{d}$ розкладено за векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_к$.

Систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_к$ називають **лінійно незалежною,** якщо жоден з заданих векторів не можна представити як лінійну комбінацію решти векторів або, що те саме, якщо рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_к\vec{a}_к = \vec{0}$$

можлива лише тоді, коли усі числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_к$ дорівнюють нулю. Якщо вказана рівність виконується, наприклад, при $\alpha_1 \neq 0$, то $\vec{a}_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \cdots - \dfrac{\alpha_к}{\alpha_1}\vec{a}_к$, тобто $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією решти векторів, тому система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_к$ **лінійно залежна**.

Два вектори лінійно залежні тільки в тому випадку, якщо вони колінеарні, три – якщо вони компланарні, чотири та більше векторів у тривимірному просторі завжди лінійно залежні (див. 3^0).

3^0. *Базиси на площині і у просторі*.

Теорема 1. Нехай є два неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Будь-який компланарний з ними вектор $\vec{a}$ розкладається за цими векторами. Таке розкладання єдине.

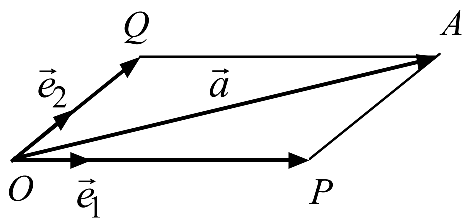


Рис. 3

Доведення. Приведемо вектори до загального початку O і побудуємо паралелограм з діагоналлю $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ так, щоб вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ лежали на його сторонах (рис. 3). Побудова єдина. Вектор $\overrightarrow{OP}$ колінеарний до вектору $\vec{e}_1$, отже, може бути виражений через нього, тобто $\overrightarrow{OP} = \alpha_1\vec{e}_1$. Аналогічно $\overrightarrow{OQ} = \alpha_2\vec{e}_2$, де α_1, α_2 – деякі числа. Через те, що $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, дістаємо: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Це й означає, що вектор $\vec{a}$ розкладено за векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$.

Систему лінійно незалежних векторів, за якими можливе розкладання довільного вектора (у даному випадку компланарного з $\vec{e}_1, \vec{e}_2$), називають **базисом**. Базисом на площині можна вибрати будь-які два неколінеарних вектори, що беруть у певному порядку.

Теорема 2. Нехай є три некомпланарні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Будь-який вектор $\vec{a}$ розкладається за ними. Таке розкладання єдине.

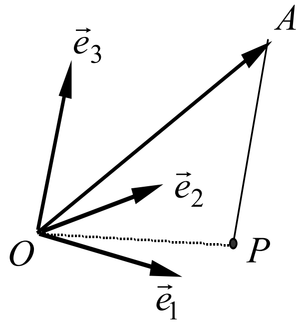


Рис. 4

Доведення. Віднесемо вектори до загального початку O. Через точку A – кінець вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ проведемо паралельно до $\vec{e}_3$ пряму. Нехай P – точка перетину цієї прямої з площиною векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Побудова єдина. Очевидно, що $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$ .. Вектор $\overrightarrow{OP}$ компланарний з векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Згідно з теоремою 1 $\overrightarrow{OP} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Вектор $\overrightarrow{PA}$ колінеарний до вектора $\vec{e}_3$ за побудовою. Тому, знайдеться число α_3 таке, що $\overrightarrow{PA} = \alpha_3\vec{e}_3$. Маємо $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, тобто одержано розкладання довільного вектора $\vec{a}$

за системою лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Це означає, що набір векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ може бути базисом у просторі. Числа α_1, α_2, α_3 називають **координатами вектора** $\vec{a}$ у даному базисі. Записують $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. За допомогою базису кожному вектору ставлять у відповідність упорядкований набір чисел (два на площині, три у просторі) – координати вектора і навпаки.

Мають місце **властивості** (див. 5^0 § 5).

1. При множенні вектора на число усі його координати множаться на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.$$

2. При додаванні векторів відповідні координати у даному базисі додаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) + (\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3.$$

4^0. ***Декартова система координат***. Нехай у просторі задано базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, що віднесений до деякої фіксованої точки O. Сукупність точки O і базису утворює **декартову систему координат**. Точка O – її **початок**.

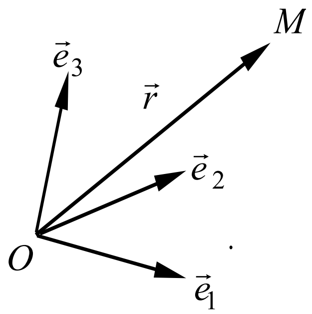


Рис. 5

Довільній точці M простору можна поставити у відповідність вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, що виходить з точки O. Його називають радіусом-вектором точки M. Розкладаючи вектор $\vec{r}$ за базисом, отримуємо $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Координати вектора $\vec{r}$, тобто числа x, y, z, разом з тим називають координатами точки M. Записують $M(x, y, z)$.

Система координат встановлює однозначну відповідність між геометричним об`єктом – точкою та упорядкованим набором чисел – її координатами. Здійснюється об`єднання геометрії з алгеброю. Цей момент є вихідним пунктом **аналітичної геометрії** – розділу математики, в якому на основі метода координат геометричні задачі розв`язують засобами алгебри.

Найбільш поширена **прямокутна система** координат. За її базис у просторі приймають три взаємно перпендикулярні одиничні за довжиною вектори: $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ – орти. Направлені вздовж цих векторів осі називають: Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат (рис. 6).

5⁰. ***Вектор у прямокутній системі***. Запишемо розкладання довільного вектора $\vec{a}$ за ортами:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{4}$$

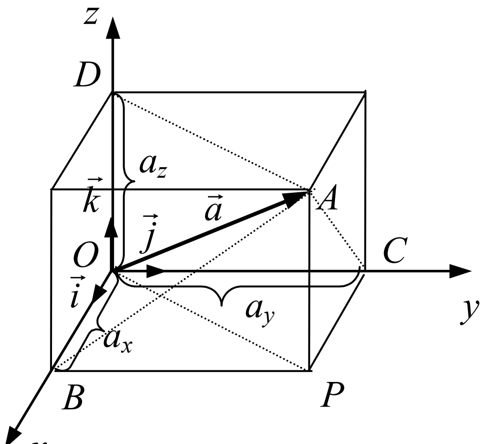


Рис. 6

Координати вектора $\vec{a}$, тобто числа a_x, a_y, a_z є проекціями $\vec{a}$ на відповідні осі координат. Дійсно, $\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA}$ (рис.6), $\overrightarrow{OB} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OC} = a_y\vec{j}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OD} = = a_z\vec{k}$, де

$$a_x = np_x\vec{a}, \quad a_y = np_y\vec{a}, \quad a_z = np_z\vec{a},$$

тому що $AB \perp Ox$, $AC \perp Oy$, $AD \perp Oz$.

Припустимо, що задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Радіуси-вектори цих точок мають ті ж координати, що і самі точки (див. 4^0), отже,

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

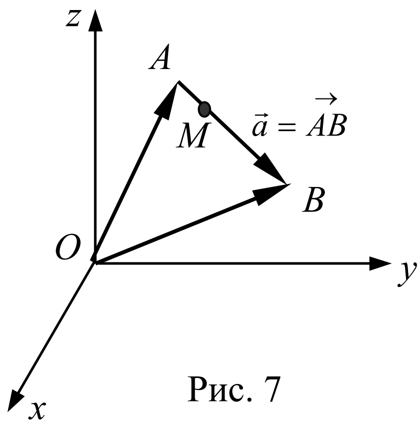


Рис. 7

Очевидно (рис. 7), $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ або $\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

Порівнюючи цей запис з формулою (4), робимо висновок:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1. \tag{5}$$

Щоб знайти проекції вектора на координатні осі, достатньо з координат кінця вектора відняти відповідні координати його початку.

Застосовуючи теорему Піфагора, знаходимо (рис. 6): $OA^2 = OP^2 + OD^2$, $OP^2 = OB^2 + OC^2$, $OA^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2$, $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Таким чином, визначається довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{6}$$

З рівностей (6) та (5) випливає формула відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{7}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, де λ – деяке число. При цьому $пр_x\vec{a} = пр_x\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\, пр_x\vec{b}$, тобто $a_x = \lambda b_x$. Так само $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$. Тому

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad - \tag{8}$$

паралельні вектори мають пропорційні проекції на відповідні осі координат. Вірним є й обернене: пропорції (8) приводять до рівності $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, яка означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні. Співвідношення (8) називають **умовою колінеарності** векторів.

6^0. ***Ділення відрізку в заданому відношенні***. Точки $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ та $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ є кінцями відрізку AB (рис. 7). Знайдемо точку $M(x,\ y,\ z)$, про яку відомо, що вона ділить відрізок AB у відношенні $AM/MB = \lambda$. Маємо $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$, $пр_x\,\overrightarrow{AM} = пр_x\left(\lambda\,\overrightarrow{MB}\right) = \lambda\, пр_x\,\overrightarrow{MB}$, інакше $x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x)$.

Звідси виходить: $x\ (1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$. Аналогічні рівності можна отримати для невідомих y та z. З цих співвідношень випливають формули, що визначають координати точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{9}$$

При діленні відрізку навпіл $\lambda = 1$. Тому для середини відрізку

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{10}$$

Приклад. У трикутнику з вершинами $A(5,\ 0)$, $B(2,\ 4)$, $C(-4,\ 2)$ знайти точку перетину медіан.

Розв`язування. Кожна з вершин задана тільки двома координатами. Це означає, що розглядання ведеться у площині xOy. Достатньо провести дві медіани, наприклад, BK та CD. Точка D – середина відрізку AB. Тому

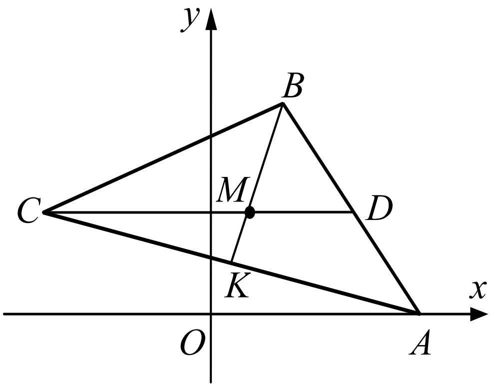


Рис. 8

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Точка M ділить відрізок CD у відношенні $\lambda = CM/MD = 2$. Отже,

$$x_M = \frac{x_C + \lambda x_D}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_C + \lambda y_D}{1+\lambda},$$ тобто

$x_M = \dfrac{x_C + 2 \cdot \dfrac{x_A + x_B}{2}}{1+2}$, $y_M = \dfrac{y_C + 2 \cdot \dfrac{y_A + y_B}{2}}{1+2}$. Дістаємо

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Підставивши сюди координати вершин, знайдемо $x_M = 1,\ y_M = 2.$ Маємо точку $M(1, 2)$.

7^0. ***Центр мас системи матеріальних точок***. Розглянемо таку задачу.

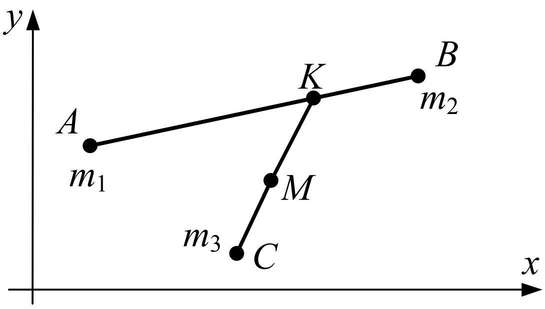


Рис. 9

На площині xOy у точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ зосереджені маси m_1, m_2, m_3 відповідно. Потрібно знайти центр мас системи. З фізики відомо, що центр мас m_1 і m_2 знаходиться на відрізку AB у точці K, яка ділить відрізок у відношенні $\lambda = AK/KB = m_2/m_1$. За формулами (9) визначаються координати точки K:

$$x_K = \frac{x_1 + \dfrac{m_2}{m_1} \cdot x_2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}, \quad y_K = \frac{y_1 + \dfrac{m_2}{m_1} \cdot y_2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}},$$

тобто

$$x_K = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_K = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Центр мас m_1, m_2, m_3 розташований у точці M, яку можна розглядати як центр системи, що складається з маси m_3 та маси $m_1 + m_2$, що віднесена до точки K. При цьому $\lambda = KM/MC = m_3/(m_1 + m_2)$.

$$x_M = \frac{x_K + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2} \cdot x_3}{1 + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Аналогічно знаходимо y_M.

У загальному випадку n матеріальних точок, що довільно розташовані у просторі, координати центра мас визначаються формулами

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i\,; \quad \bar{y}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i\,; \quad \bar{z}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i\,. \qquad (11)$$

♦ У 1637 р. Декарт у доповнення до своєї філософської праці «Міркування про метод» видає книгу «Геометрія», в якій положення точки визначає за допомогою відрізків змінної довжини, числа інтерпретує як відрізки, у результаті чого виникає поєднання алгебри з геометрією. Книга Декарта стала початком аналітичної геометрії, хоча в ній ще немає звичних «декартових осей». Нові ідеї викладені в стислій та складній для розуміння формі, на що скаржився навіть Ньютон. Декарт в одному з листів стверджував, що зробив це навмисно, щоб осоромити противників, які, не зрозумівши книги, у своїй критиці пошилися б у дурні.

♦ Термін «координати» введений Лейбніцем в 1692 р.

♦ **Рене Декарт** (фр. математик, філософ, фізик, фізіолог, 1596 – 1650) служив у армії, вів життя дворянина, мандрував Європою. У 1629 р. переселився із Франції в Нідерланди, де 20 років наодинці займався наукою. Шукав загальний метод мислення, який дозволив би знаходити істину і робити винаходи. Математика з її переконливістю уявлялася йому найсприятливішим засобом для розуміння Всесвіту. За переконанням Декарта, ключем до пізнання мають бути власні роздуми й аналіз явищ, а не віра в авторитети. Його кредо: «Думаю, отже, існую мислю».

§ 7. Множення векторів

Алгебра – моя головна страва,
геометрія – десерт.
Ф. Вієт, фр. математик XVI ст.

1^0. *Скалярний добуток*.

1. Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають скаляр, що дорівнює добутку довжин цих векторів та косинуса кута між ними:

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)}. \qquad (1)$$

Під кутом між векторами $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ розуміють найменший кут, на який треба повернути один з векторів, щоб його напрямок збігся з напрямком другого вектора.

Оскільки $|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=np_{\vec{a}}\vec{b}$, $|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=np_{\vec{b}}\vec{a}$, то нарівні з (1) можна також записати

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \quad \text{або} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}\,. \qquad (2)$$

2. **Властивості**.

1) Для ненульових векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тільки у тому випадку, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Дійсно, згідно з (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff |\vec{a}||\vec{b}|cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0 \iff$

$\iff cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0 \iff \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=90^0$.

Рівність

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0} \tag{3}$$

називають **умовою ортогональності** (перпендикулярності) векторів.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (див. (1)).

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Насправді, на підставі (2)

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=|\vec{c}|np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

4) $\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$.

На підтвердження цієї властивості, застосовуючи формулу (2), одержуємо

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a} \quad \text{та} \quad \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ (див. (1)).

3. **Скалярний добуток у декартових проекціях**. Орти $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – це одиничні за довжиною взаємно перпендикулярні вектори, тому

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|^2=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|^2=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=\left|\vec{k}\right|^2=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Враховуючи ці рівності та встановлені вище властивості, перемножуємо вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ як многочлени. Отримуємо

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}. \tag{4}$$

Зокрема, $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$ і через те, що $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, маємо формулу (6.6) довжини вектора, що вже зустрічалася вище

$$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \tag{5}$$

4. **Кут між векторами**. З означення (1) і формул (4), (5) випливає, що

$$cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{6}$$

Знаючи $cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, неважко знайти і сам кут $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

Приклад 1. У трикутнику з вершинами $A(1;\,2;\,0)$, $B(0;\,1;\,2)$, $C(3;\,0;\,0)$ знайти кут φ при вершині A.

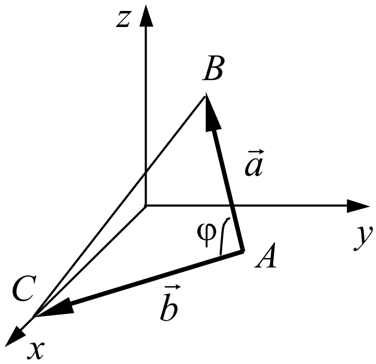


Рис. 1

Розв`язування. Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 1). Тоді $a_x = x_B - x_A = 0 - 1 = -1$, $a_y = y_B - y_A = 1 - 2 = -1$, $a_z = z_B - z_A = 2 - 0 = 2$, тобто $\vec{a} = \{-1, -1, 2\}$. Так само $\vec{b} = \{2, -2, 0\}$. Знаходимо $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 0 = 0$, $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$,

$cos\,\varphi = cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$. Отже, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 90^0$.

5. **Напрямні косинуси**. Так називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор утворює з осями координат. Ці кути повністю визначають напрямок вектора у просторі. Очевидно (рис. 2)

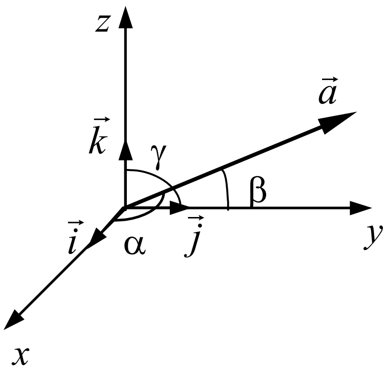


Рис. 2

$$cos\,\alpha = cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{i}\right|} = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\quad \alpha = arccos\left(\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}\right).$$

Аналогічно знаходяться кути β і γ. Маємо формули

$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\quad cos\,\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\quad cos\,\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}}. \tag{7}$$

З огляду на (5) звідси випливає рівність

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1. \tag{8}$$

Змінюючи напрям вектора, з трьох кутів α, β, γ довільно можна задати тільки два, а третій, що залежить від вибору перших двох, визначається із співвідношення (8).

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ косинус кута φ між ними можна виразити через напрямні косинуси цих векторів. Дійсно, згідно з (6)

$$cos\,\varphi = cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\frac{b_x}{\left|\vec{b}\right|} + \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\frac{b_y}{\left|\vec{b}\right|} + \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\frac{b_z}{\left|\vec{b}\right|},$$

тобто

$$cos\,\varphi = cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2 + cos\,\beta_1\,cos\,\beta_2 + cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2. \tag{9}$$

Якщо $\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, то одиничний вектор $\vec{a}^{\,0}$ у напрямку $\vec{a}$ подається у формі

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\vec{i} + \frac{a_y}{|\vec{a}|}\vec{j} + \frac{a_z}{|\vec{a}|}\vec{k}$$

або

$$\vec{a}^{\,0} = \vec{i}\,cos\alpha + \vec{j}\,cos\beta + \vec{k}\,cos\gamma, \qquad \vec{a}^{\,0} = \left\{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\right\}. \quad (10)$$

Координатами одиничного вектора є його напрямні косинуси.

Так, для вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{-1; -1; 2\}$ з прикладу 1 одиничним вектором того ж напрямку буде вектор $\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{6}}$, тобто $\vec{a}^{\,0} = \left\{-1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}\right\}$. Його координати – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$: $cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $cos\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2^0. ***Векторний добуток***.

1. **Означення**. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який 1) перпендикулярний до цих векторів; 2) направлений у той бік, куди рухається буравчик з правою нарізкою, якщо його рукоятку повертати від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут; 3) має довжину, що чисельно дорівнює площині паралелограму із сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

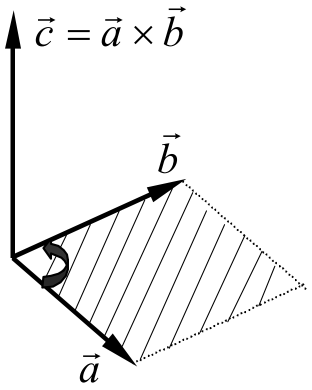


Рис. 3

З умови 3) випливає рівність

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right). \quad (11)$$

Означення сформульоване, загально кажучи, для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, але завдяки формулі (11) воно поширюється також на випадок, коли $\vec{a} \parallel \vec{b}$. При цьому вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

2. **Властивості**.

1) Для ненульових векторів $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ тільки у тому випадку, коли $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Насправді, згідно з (11) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0 \Leftrightarrow sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0^0$ або $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 180^0$.

Рівність

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \tag{12}$$

називають **умовою колінеарності** векторів (див. також 6.8).

Вектор $\vec{a}$ паралельний до самого себе, тому для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедливо:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}. \tag{13}$$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$. Це твердження випливає з п. 2) означення.

3) $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$.

Змінення сторони паралелограму в λ разів у стільки ж разів змінює його площу. Наслідок цього факту – записані вище рівності.

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Доведення цієї властивості можна знайти у підручниках (наприклад, [2, с. 206]).

3. **Векторний добуток у декартових проекціях**. Згідно з означенням та рівністю (13) маємо $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$. З урахуванням цих співвідношень та наведених вище властивостей одержуємо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \vec{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Останній вираз можна розглядати як розкладання визначника 3-го порядку, а саме:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Приклад 2. Знайти площу трикутника із вершинами $A(2;\ 5;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 4)$, $C(4;\ -1;\ 1)$.

Розв`язування. Утворимо два вектори із загальним початком в одній з вершин трикутника (рис. 4). Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Тоді $\vec{a} = \{-2; -4; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -6; 1\}$,

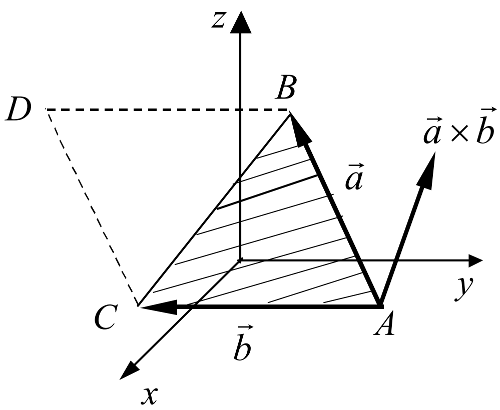


Рис. 4

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & -6 & 1\end{vmatrix}=20\vec i+10\vec j+20\vec k.$$

Довжина цього вектора, тобто

$$\left|\vec a\times\vec b\right|=\sqrt{20^2+10^2+20^2}=30,$$

чисельно дорівнює площі паралелограму $ABDC$. Тому, площа трикутника

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec a\times\vec b\right|=15 \text{ (кв. од.)}.$$

3^{0}. ***Мішаний добуток***.

1. **Геометричний зміст**. Векторно-скалярний або мішаний добуток трьох векторів $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c$ – це скаляр, абсолютна величина якого дорівнює об`єму паралелепіпеда з ребрами $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

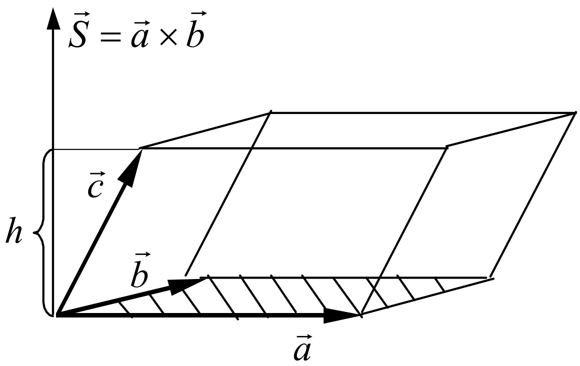


Рис. 5

Дійсно, нехай $\vec a\times\vec b=\vec S$. Тоді

$$\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\vec S\cdot\vec c=\left|\vec S\right|\cdot np_{\vec S}\vec c=\left|\vec S\right|\,h.$$

Перший множник тут визначає площу основи, другий з точністю до знаку – висоту паралелепіпеда ($h=np_{\vec S}\vec c>0$, якщо $\left(\widehat{\vec c,\vec S}\right)<90^0$, $h=np_{\vec S}\vec c<0$ при $\left(\widehat{\vec c,\vec S}\right)>90^0$). Тому об`єм паралелепіпеда

$$V=\left|\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c\right|. \tag{15}$$

2. **Вираз у декартових проекціях**. Маємо

$$\vec S=\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},\qquad \vec S\cdot\vec c=S_xc_x+S_yc_y+S_zc_z.$$

Скалярний добуток $\vec S$ на $\vec c$ зводиться до заміни у векторі $\vec S=S_x\vec i+S_y\vec j+$ $+S_z\vec k$ ортів $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ відповідними проекціями вектора $\vec c$. Тому

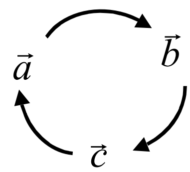
$$\vec{S}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

через те, що подвійна перестановка рядків визначника не змінює його величину, остаточно здобудемо

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

3. **Властивості**.

1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$.



Циклічна, тобто кругова перестановка співмножників не змінює величину мішаного добутку. Це випливає з формули (16), адже циклічна перестановка співмножників супроводжується подвійною перестановкою рядків визначника. Разом з тим переміна місцями двох сусідніх співмножників веде до однієї перестановки рядків, а значить, – до зміни знаку визначника:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}, \qquad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}.$$

Оскільки важливий лише циклічний порядок слідування векторів, то добуток $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ можна записати простіше: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, причому операцію векторного множення допустимо віднести до будь-якої пари сусідніх векторів.

2) Для ненульових векторів $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$ тільки у тому випадку, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

Дійсно, якщо вектори компланарні, то паралелепіпед вироджується у частину площини, отже, фігура має нульовий об`єм. Навпаки, якщо $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$, то або $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (при цьому $\vec{a}\parallel\vec{b}$), або $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\perp\vec{c}$. В обох випадках вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

Рівність

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0 \qquad (17)$$

називають **умовою компланарності** трьох векторів.

Приклад 3. Точки $A(2;\,5;\,0)$, $B(0;\,1;\,4)$, $C(4;\,-1;\,1)$, $E(1;\,4;\,3)$ – вершини піраміди. Знайти її об`єм та висоту, що опущена на грань ABC.

Розв`язування. Три ребра піраміди при який-небудь з її вершин подамо векторами.

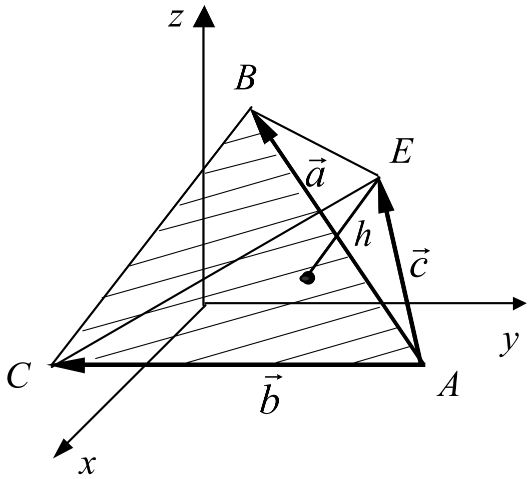


Рис. 6

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ (рис. 6). Маємо $\vec{a} = \{-2;-4;4\}$, $\vec{b} = \{2;-6;1\}$, $\vec{c} = \{-1;-1;3\}$.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 30.$$

Останнє число визначає об`єм паралелепіпеда з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Об`єм піраміди з тими самими ребрами у шість разів менше (площа основи вдвічі менша, крім того, формула для об`єму містить множник 1/3).

Тому

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ од}^3.$$

Площу грані ABC знайдено у прикладі 2: $S_{\Delta ABC} = 15$ од^2. Через те, що $V_{пир} = \frac{1}{3} S \cdot h$,

$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 5}{15} = 1$ од.

♦ Операції множення векторів походять від абстрактних алгебраїчних побудов Гамільтона і Грассмана. Терміни «вектор», «скаляр», «скалярний добуток», «векторний добуток», позначення ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ з`явились у роботах Гамільтона 1843 – 1845 р.р. Грассман виклав основи векторного числення у 1844 р. Формальні дії над векторами як зручний апарат дослідження знайшли швидке застосування й були впроваджені у механіку і фізику багатьма славнозвісними вченими, серед яких Сен-Венан (фр. механік, 1797 – 1886), Дж. Максвелл (англ. фізик, 1831 – 1879), Дж. Гіббс (амер. фізик, 1839 – 1903).

♦ **Уільям Гамільтон** (ірл. математик, механік, 1805 – 1865) вже у дитячі та юнацькі роки виявив багатогранну обдарованість – в 10-річному віці знав напам`ять Гомера, у 13 років оволодів 13-ма мовами, вивчив «Начала» Евкліда, 17-річним прочитав Ньютона і Лапласа, у 22 роки став професором університету і директором обсерваторії у Дубліні, у 32 – президентом Ірландської академії наук. Водночас математик, механік, астроном і поет.

§ 8. Лінійний простір

Чим вище людина піднімається у своєму пізнанні,
тим ширші горизонти відкриваються перед нею.
О.М. Радищев, рос. письменник і філософ XVIII ст.

Математика будує модель явища, опираючись на властиві йому кількісні відношення. Останні часто виявляються загальними для різних об`єктів. Так, лінійні операції з векторами мають зміст для функцій, многочленів, матриць, систем чисел і т.п. Ця обставина стала підставою для узагальненого трактування поняття вектора, що широко застосовується в математиці.

1^0. ***Абстрактний векторний простір***. Множину R елементів $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ... довільної природи називають **лінійним або векторним простором**, а самі елементи векторами, якщо

а) означена дія додавання, тобто правило, що кожній парі елементів $\vec{x}$, $\vec{y}$ із R ставить у відповідність елемент $\vec{z} \in R$, який називається їх сумою: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$;

б) означена дія множення на дійсне число, тобто правило, що кожному елементу $\vec{x} \in R$ і будь-якому дійсному числу λ ставить у відповідність елемент $\vec{z} \in R$, який називається їх добутком: $\vec{z} = \lambda\vec{x}$;

в) введені операції додавання і множення на число задовольняють аксіоми, які повторюють властивості 1) – 8) із 5^0 § 5:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$; 2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;

існують нульовий елемент $\vec{\theta} \in R$ і для будь-якого $\vec{x} \in R$ протилежний елемент $(-\vec{x}) \in R$ такі, що

3) $\vec{x} + \vec{\theta} = \vec{x}$; 4) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{\theta}$;

при множенні на число діють правила:

5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$; 6) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;

7) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$; 8) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.

Приклади лінійних просторів: множина усіх дійсних чисел; множина многочленів, степінь яких обмежена деяким числом; множина геометричних векторів зі звичайними для цих об`єктів правилами додавання і множення на число.

2^0. ***Вимірність простору. Базис***. Лінійна незалежність векторів у просторі R визначається так само, як для геометричних векторів (2^0 § 6). Вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ із R – лінійно незалежні, якщо рівність

$$\alpha_1\vec{x}^{(1)} + \alpha_2\vec{x}^{(2)} + \cdots + \alpha_k\vec{x}^{(k)} = \vec{\theta} \qquad (1)$$

можлива тільки за умови, що усі числа α_1, α_2, ... , α_k дорівнюють нулю.

Якщо у просторі R існує сукупність n лінійно незалежних векторів, а будь-які $n+1$ векторів цього простору лінійно залежні, то простір називають ***n*-вимірним** і позначають R^n. **Вимірність простору** – це максимальна кількість лінійно незалежних векторів у цьому просторі. Система n лінійно незалежних векторів простору R^n, що взяті у певному порядку: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$, утворюють **базис простору**.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{x}$ n-вимірного простору можна розкласти за базисом цього простору. Таке розкладання єдине.

Доведення. Вектори $\vec{x}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ – лінійно залежні, тому що їх кількість перевищує вимірність простору. Тому існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, серед яких хоча б одне відрізняється від нуля, такі, що згідно з (1)

$$\alpha\vec{x} + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{\theta}.$$

Тут $\alpha \neq 0$, інакше вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ були б лінійно залежними. Отже,

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\vec{e}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\vec{e}_n \quad \text{або} \quad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Цей запис і означає, що вектор $\vec{x}$ розкладений за базисом.

Якщо припустити, що можливі два розкладання

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \quad \text{та} \quad \vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \cdots + x_n'\vec{e}_n,$$

то відніманням отримаємо $\vec{\theta} = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + \cdots + (x_n - x_n')\vec{e}_n$. Звідси з огляду на лінійну незалежність базисних векторів випливає $x_1 - x_1' = 0$, ... , $x_n - x_n' = 0 \Rightarrow x_1' = x_1$, ... , $x_n' = x_n$, тобто розкладання вектора $\vec{x}$ єдине.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – **координати вектора $\vec{x}$** у даному базисі. Записують $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Приклад 1. Множина многочленів степеня не вище n $P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ являє собою простір R^{n+1}. Його базис утворює степені змінної t: $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$, ... , $\vec{e}_{n+1} = t^n$. Вони лінійно незалежні між собою і кожний многочлен P_n за цим базисом розкладається однозначно: $P_n(t) = a_0\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_{n+1}$. Коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_n мають значення координат «вектора» P_n, тобто $P_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Так, якщо $n = 3$, а $P(t) = 2-5t$, то у вказаному вище базисі $\vec{P} = \{2; -5; 0; 0\}$.

3⁰. ***Евклідів простір***. Окрім додавання і множення на число, уведемо ще одну операцію над векторами простору R. Нехай визначено правило, яке кожній парі елементів $\vec{x}$, $\vec{y} \in R$ ставить у відповідність деяке число, що позначається символом $(\vec{x}, \vec{y})$, так що виконуються умови

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$; 2) $\lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda\vec{x}, \vec{y})$;

3) $(\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)}, \vec{y}) = (\vec{x}^{(1)}, \vec{y}) + (\vec{x}^{(2)}, \vec{y})$;

4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, причому $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, тільки якщо $\vec{x} = \vec{\theta}$.

Число $(\vec{x}, \vec{y})$ називають **скалярним добутком** елементів $\vec{x}$ та $\vec{y}$. Лінійний простір, в якому визначена операція скалярного множення, іменують **евклідовим простором**.

Число $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ називають **довжиною або нормою** вектора $\vec{x}$. Говорять, що вектор $\vec{x}$ **нормований**, якщо його довжина $|\vec{x}| = 1$. Будь-який ненульовий вектор можна нормувати, тобто зробити одиничним, помноживши його на число $1/|\vec{x}|$.

Для оцінки величини скалярного добутку застосовують нерівність Коші – Буняковського

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|. \tag{2}$$

Насправді, нехай t – довільне дійсне число. Тоді з огляду на прийняті вище погодження $(tx + y, tx + y) \geq 0 \;\Rightarrow\; (tx, tx) + 2(tx, y) + (y, y) \geq 0 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; t^2|\vec{x}|^2 + 2t(x, y) + |\vec{y}|^2 \geq 0$. Позначимо $|\vec{x}|^2 = A$, $(\vec{x}, \vec{y}) = B$, $|\vec{y}|^2 = C$. Отримаємо $At^2 + 2Bt + C \geq 0$ – квадратний тричлен невід`ємний, отже, його графік розташований вище осі t. Це можливо, тільки якщо дискримінант $D = B^2 - AC \leq 0$, тобто при $B^2 \leq AC$, що і приводить до формули (2).

Використовуючи (2), можна отримати так звану «нерівність трикутника»

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|. \tag{3}$$

Дійсно:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + |\vec{y}|^2 \leq$$
$$\leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 \Rightarrow\; |\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 \Rightarrow (3).$$

Вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ **ортогональні**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \tag{4}$$

Нульовий вектор $\vec{\theta}$ ортогональний до будь-якого вектора $\vec{x}$: $(\vec{\theta}, \vec{x}) =$ $= (0\vec{x}, \vec{x}) = 0(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Множину векторів називають ортогональною, якщо будь-які два її вектори ортогональні.

Теорема. Ортогональна система ненульових векторів $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ лінійно незалежна.

Доведення. Покладемо протилежне – вектори лінійно залежні, тобто

$$\alpha_1 \vec{x}^{(1)} + \alpha_2 \vec{x}^{(2)} + \dots + \alpha_k \vec{x}^{(k)} = \vec{\theta}, \tag{5}$$

де хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля. Нехай, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Помножимо обидві частини (5) на $\vec{x}^{(1)}$ скалярно:

$$\alpha_1\left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(1)}\right)+\alpha_2\left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(2)}\right)+\dots+\alpha_k\left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(k)}\right)=\left(\vec{x}^{(1)},\vec{\theta}\right).$$

Враховуючи властивість ортогональності: $\left(\vec{x}^{(i)},\vec{x}^{(j)}\right)=0$ при $i \neq j$, дістаємо $\alpha_1\left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(1)}\right)=0 \Rightarrow \left(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(1)}\right)=0 \Rightarrow \vec{x}^{(1)}=\vec{\theta}$, що суперечить умові. Отже, вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ лінійно незалежні.

Якщо кількість ортогональних векторів $\vec{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k$, із R^n збігається з вимірністю простору, тобто $k = n$, то такий набір векторів зручно вибирати як базис простору: $\vec{e}_1=\vec{x}^{(1)}$, $\vec{e}_2=\vec{x}^{(2)}$, ... , $\vec{e}_n=\vec{x}^{(n)}$. Маємо ортогональний базис, тому що $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)=0$ при $i \neq j$. Якщо, окрім того, кожний базисний вектор має одиничну довжину, тобто нормований, то буде виконуватися рівність

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)=\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера (1.3): $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$. У цьому випадку базис $\left\{\vec{e}_j\right\}$ називають **ортонормованим**.

Нехай довільні вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ із R^n розкладені за ортонормованим базисом:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n, \qquad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n.$$

Згідно з (6) добутки $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ перетворюються на нуль при $i \neq j$ або на одиницю при $i = j$, тому

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \tag{7}$$

Отже, **в ортонормованому базисі скалярний добуток векторів має вигляд (7)**.

Із (7) при $\vec{x} = \vec{y}$ одержуємо

$$\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Але $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = |\vec{x}|^2$, тому **довжина вектора у ортонормованому базисі подається формулою**

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \tag{8}$$

Зауваження. Якщо вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ подати стовпцевими матрицями X та Y, то скалярний добуток (7) можна записати у матричній формі:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = X^T Y. \qquad (7')$$

4⁰. ***Арифметичний простір***. Так називають простір R^n, елементи якого – упорядковані набори із n дійсних чисел – ***n*-вимірні вектори** $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ і т.п. з тими ж правилами додавання та множення на число у координатній формі, що й для звичайних векторів:

$$\vec{x} + \vec{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}, \quad \lambda\vec{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}.$$

Роль нульового вектора грає $\vec{\theta} = \{0, 0, \dots, 0\}$, а вектор $(-\vec{x})$, протилежний $\vec{x}$, має вид $(-\vec{x}) = \{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}$. Умова $\vec{x} = \vec{y}$ означає рівність відповідних координат: $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Скалярне множення векторів тут впроваджується за правилом (7), а довжина вектора знаходиться за формулою (8). Неважко переконатися, що усі аксіоми із 3^0, що властиві операції скалярного множення, виконуються.

Вектори $\vec{e}_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0\}$,..., $\vec{e}_n = \{0, 0, 0, \dots, 1\}$ мають одиничну довжину. Згідно з (7) вони попарно ортогональні, тому лінійно незалежні. Будь-який n-вимірний вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ однозначно розкладається за системою $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Це означає, що максимальна кількість лінійно незалежних векторів дорівнює n, тобто простір, що розглядається, n-вимірний, а вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ утворюють його природний базис. Виконується умова (6), отже, базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормований.

Будь-який простір R^n зводиться до арифметичного простору і має спільні з ним властивості.

5⁰. ***Ознака лінійної незалежності векторів у R^n***. Нехай вектори із простору R^n $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$, ... , $\vec{x}^{(k)}$ лінійно незалежні. Тоді рівність (1) можлива, тільки якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Векторній рівності (1) відповідають n координатних рівностей ($x_j^{(m)}$ – j-я координата вектора $x^{(m)}$ у деякому базисі):

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \dots + \alpha_k x_1^{(k)} = 0,\\
&\alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \dots + \alpha_k x_2^{(k)} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \dots\dots + \alpha_k x_n^{(k)} = 0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Відносно чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ система (9) однорідна. Вона має єдиний нульовий розв`язок, якщо ранг матриці $X$ з елементами $x_j^{(m)}$ збігається з кількістю невідомих, тобто $RgX = k$. Якщо ж $RgX < k$, то існують ненульові розв`язки. Таким чином, **система k векторів із R^n лінійно незалежна, якщо ранг матриці X, стовпцями якої є координати заданих векторів, збігається з кількістю векторів.**

Приклад 2. Дослідити на лінійну залежність систему векторів

$$\vec{x}^{(1)} = \{3; 1; 0; 4\}, \quad \vec{x}^{(2)} = \{1; 2; -1; 0\}, \quad \vec{x}^{(3)} = \{0; 4; 2; 3\}.$$

Розв`язування. Складаємо матрицю X і знаходимо її ранг:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; RgX = 3.$$

Кількість векторів $k = RgX = 3$, отже, вектори лінійно незалежні.

Приклад 3. Показати, що вектори $\vec{x}^{(1)} = \{2; 3; 4\}$, $\vec{x}^{(2)} = \{0; 1; 2\}$, $\vec{x}^{(3)} = \{1; 0; 0\}$ утворюють базис простору R^3. Знайти координати вектора $\vec{y} = \{4; 0; -2\}$ у цьому базисі.

Розв`язування. Визначаємо ранг матриці X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; RgX = 3.$$

Кількість векторів $k = RgX = 3 \Rightarrow$ вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}$ лінійно незалежні. Через те, що вимірність простору така сама ($n = 3$), ці вектори у даному випадку можуть бути базисом. Вектор $\vec{y}$ із того самого простору розкладається за новим базисом: $\vec{y} = \alpha_1 \vec{x}^{(1)} + \alpha_2 \vec{x}^{(2)} + \alpha_3 \vec{x}^{(3)}$. Щоб знайти числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, переходимо до координатних рівностей:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 4,\\
&\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0,\\
&\alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 0 = -2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = -3, \; \alpha_3 = 2,$$

тобто $\vec{y} = \vec{x}^{(1)} - 3\vec{x}^{(2)} + 2\vec{x}^{(3)}$, у новому базисі $\vec{y} = \{1; -3; 2\}$.

6⁰. ***Перетворення координат***. Для довільного вектора $\vec{y}$ із R^n перехід від одного базису до іншого приводить до зміни його координат. Як видно із приклада 3, нові координати визначаються у результаті розв`язування системи рівнянь. Якщо векторів багато, то виникає необхідність у розв`язуванні великої кількості систем. Задачу можна спростити, звернувшись до матричних методів.

Нехай $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ та $\vec{e}_1', \ \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ – два базиси простору R^n. Вектори з будь-якого базису, як і будь-які вектори із R^n, розкладаються за першим базисом:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1' = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + \cdots + p_{n1}\vec{e}_n, \\ &\vec{e}_2' = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + \cdots + p_{n2}\vec{e}_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\vec{e}_n' = p_{1n}\vec{e}_1 + p_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Лінійне перетворення (10) запишемо у матричній формі, для чого уведемо матрицю переходу $P = (p_{kj})$ та матриці-рядки e і e':

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$e = \begin{pmatrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \cdots, & \vec{e}_n \end{pmatrix}, \qquad e' = \begin{pmatrix} \vec{e}_1', & \vec{e}_2', & \cdots, & \vec{e}_n' \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що матриця P отримана транспонуванням матриці коефіцієнтів системи (10), тобто кожний рядок коефіцієнтів із (10) – це відповідний стовпець матриці P. Матриця P невироджена ($detP \neq 0$), тому що у противному разі система $\left\{\vec{e}_j'\right\}$ була б лінійно залежною (див. 5⁰), а значить не представляла б базис простору R^n.

Замість (10) маємо матричні рівності

$$e' = eP, \qquad e = e'P^{-1}. \tag{10'}$$

Припустимо, що у першому базисі $\vec{y} = \left\{y_1, y_2, \dots, y_n\right\}$, у другому – $\vec{y} = \left\{y_1', y_2', \dots, y_n'\right\}$, тобто $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n$ і $\vec{y} = y_1'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2' + {}$ $+ \cdots + y_n'\vec{e}_n'$. Праві частини цих рівностей подаються добутками рядкових матриць e і e' з відповідними матрицями-стовпцями Y і Y':

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = eY, \qquad \vec{y} = e'Y'. \qquad (12)$$

На підставі (12) та (10′) одержуємо

$$eY = e'Y', \qquad eY = ePY' \;\Rightarrow\; e\left(Y - PY'\right) = \theta.$$

Останнє співвідношення, записане у координатній формі, приводить до рівності виду (1). В силу лінійної незалежності базисних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ з нього випливає, що $Y - PY' = \theta$, тобто

$$Y = PY' \qquad \text{і} \qquad Y' = P^{-1}Y. \qquad (13)$$

Формули (13) встановлюють зв`язок між координатами вектора $\vec{y}$ у двох різних базисах простору R^n. Перша формула виражає старі координати через нові, друга визначає обернену залежність.

Приклад 4. Вектори $\vec{x}^{(1)} = \{2; 3; 4\}$, $\vec{x}^{(2)} = \{0; 1; 2\}$, $\vec{x}^{(3)} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{y} = \{4; 0; -2\}$ із прикладу 3 задані у деякому базисі $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Обирається новий базис $\vec{e}'_1 = \vec{x}^{(1)}$, $\vec{e}'_2 = \vec{x}^{(2)}$, $\vec{e}'_3 = \vec{x}^{(3)}$. Розкладання нового базису за старим відомо:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3, \end{aligned}$$

тобто відома матриця переходу до нового базису

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю P^{-1} (див. 1^0 § 4), після чого згідно з (13) записуємо $Y' = P^{-1}Y$, тобто

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -2 & 3/2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; y'_1 = 1,\ y'_2 = -3,\ y'_3 = 2.$$

Отримали координати вектора $\vec{y}$ у новому базисі: $\vec{y} = \{1; -3; 2\}$.

Нехай у просторі R^n вектор $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ одержано через лінійне перетворення вектору $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad \text{тобто} \quad Y = AX, \qquad (14)$$

де матриці $Y = (y_j)_{n,1}$, $X = (x_j)_{n,1}$, $A = (a_{kj})_{n,n}$.

При переході до нового базису координати векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ змінюються. На підставі (13) $Y = PY'$, $X = PX'$ і матрична рівність (14) записується тепер так: $PY' = APX'$. Звідси

$$Y' = P^{-1}APX' \quad \text{або} \quad Y' = A'X', \qquad (15)$$

де

$$A' = P^{-1}AP. \qquad (16)$$

Матриці A' та A, пов`язані між собою перетворенням (16), де P – невироджена матриця, називають **подібними**.

Із (14) та (15) випливає, що **при впровадженні нового базису форма лінійної залежності векторів $\vec{y}$ і $\vec{x}$ зберігається**. Однак матриця лінійного перетворення A змінюється, роль A тепер грає матриця A', що отримана із A перетворенням (16), де P – матриця переходу до нового базису.

Приклад 5. У базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ задано лінійне перетворення

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = -x_1 + 3x_2 + x_3, \\ y_3 = 2x_2 + 4x_3. \end{cases}$$

Знайти координатне представлення цього перетворення у базисі $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$, якщо $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1$.

Розв`язування. Маємо

$$\text{Y = AX}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Матриці P і P^{-1} тут ті самі, що й у прикладі 4. За формулою (16) знаходимо

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -2 & 3/2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

У новому базисі $Y' = A'X'$, тобто

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \text{ Отже, } \begin{cases} y_1' = -x_3', \\ y_2' = 11x_1' + 5x_2' + 2x_3',. \\ y_3' = 5x_1' + x_2' + 3x_3'. \end{cases}$$

7^0. ***Ортогональне перетворення***. Нехай невироджена матриця з дійсними елементами $P = \left(p_{kj}\right)_{n,n}$ така, що її обернена матриця P^{-1} та транспонована матриця P^T збігаються:

$$P^{-1} = P^T. \tag{17}$$

Матрицю P, що має таку властивість, називають **ортогональною**.

За умови (17) $P^T P = P^{-1} P = E$. Якщо $P = \left(p_{kj}\right)$, $P^T = \left(p_{kj}^T\right)$, де $p_{kj}^T = p_{jk}$, то згідно з правилом множення матриць (1.4) кожний елемент матричного добутку з індексом kj подається сумою $\sum_{l=1}^{n} p_{kl}^T p_{lj} = \sum_{l=1}^{n} p_{lk} p_{lj}$. Елемент одиничної матриці E з тим самим індексом є δ_{kj} – символ Кронекера. Рівність $P^T P = E$ рівносильна рівності відповідних матричних елементів, тому $\sum_{l=1}^{n} p_{lk} p_{lj} = \delta_{kj}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$.

Інакше $$p_{1k} p_{1j} + p_{2k} p_{2j} + \cdots + p_{nk} p_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ 1 & \text{при } k = j \end{cases}.$$

Співмножниками тут виступають відповідні елементи k-го і j-го стовпців матриці P. Якщо кожний стовпець цієї матриці розглядати як вектор, то отримана рівність означає: скалярний добуток таких векторних стовпців дорівнює нулю, коли стовпці різні, або дорівнює 1, якщо стовпець множиться сам на себе. Отже, вектори-стовпці матриці P із властивістю (17) **ортонормовані**.

Припустимо, із ортонормованим базисом з R^n $\vec{e}_1, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ здійснюють перетворення (10) з ортогональною матрицею P. Таке перетворення називають **ортогональним**. Довільні вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$, представлені у даному базисі матрицями-стовпцями X та Y, переходять згідно з (12) у вектори $\vec{x}'$ і $\vec{y}'$, яким у новому базисі відповідають стовпці X' та Y'. На підставі (13) $X = PX'$, $Y = PY'$. Скалярний добуток $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$, якщо використати його матричний запис (7′), з урахуванням (17) прийме вигляд

$$(\vec{x},\vec{y}) = X^T Y = (PX')^T PY' = X'^T P^T PY' = X'^T P^{-1} PY' = X'^T EY' =$$
$$= X'^T Y' = (\vec{x}',\vec{y}').$$

Таким чином, **ортогональне перетворення не змінює скалярного добутку векторів. Не змінюється й довжина векторів**. Через те, що у вихідному базисі $(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij}$, $(\vec{e}'_i,\vec{e}'_j) = \delta_{ij}$ також. Це означає, що ортогональне перетворення переводить ортонормований базис у ортонормований.

Перетворення подібності (16) у випадку (17) виражається формулою

$$A' = P^T AP. \tag{18}$$

8⁰. ***Власні вектори та власні числа***. Маємо два вектори $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $\vec{x} \in R^n$, $\vec{y} \in R^n$. Уведемо матриці-стовпці $X = (x_j)_{n,1}$, $Y = (y_j)_{m,1}$. Припустимо, відома матриця $A = (a_{kj})_{m,n}$, що здійснює лінійне перетворення $Y = AX$. Таке перетворення кожному вектору $\vec{x} \in R^n$ ставить у відповідність єдиний вектор $\vec{y} \in R^n$. При цьому простір R^n відображується у простір R^m. Правило, за яким відбувається відображення, називають оператором і позначають символом $\hat{\mathrm{A}}$: $R^n \to R^m$ або просто $\hat{\mathrm{A}}$. Записують також

$$\vec{y} = \hat{\mathrm{A}}\vec{x}. \tag{19}$$

Матрична рівність $Y = AX$, де A – матриця оператора $\hat{\mathrm{A}}$, конкретизує співвідношення (19), оскільки містить у собі алгоритм для відшукування величин y_1, y_2, …, y_m за набором x_1, x_2, …, x_n . Правила, що діють при множенні матриць (5^0 § 1), визначають властивості оператора $\hat{\mathrm{A}}$. Так, якщо $\vec{x}$ і $\vec{z}$ – будь-які два вектори із R^n, X та Z – матриці-стовпці, що їх представляють, A – матриця розміру $m \times n$, λ – довільне число, то

$$A(X+Z) = AX + AZ \quad \text{і} \quad A(\lambda X) = \lambda AX.$$

В операторній формі цим рівностям відповідають:

$$\text{а) } \hat{\mathrm{A}}(\vec{x}+\vec{z}) = \hat{\mathrm{A}}\vec{x} + \hat{\mathrm{A}}\vec{z}; \qquad \text{б) } \hat{\mathrm{A}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{\mathrm{A}}\vec{x}. \tag{20}$$

Властивості (20) – важливі характеристики оператора $\hat{\mathrm{A}}$, їм дають спеціальні найменування: а) **адитивність** (англ. *add* – додавати, добавляти), б) **однорідність**. Оператор $\hat{\mathrm{A}}$, який має такі властивості, називають **лінійним**.

Нехай $m = n$, тобто $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$. Серед різноманітних векторів $\vec{x}$ може знайтися і такий, лінійне перетворення якого дає той самий вектор $\vec{x}$ з деяким скалярним множником λ, тобто $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ (вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ колінеарні). Формула

(19) та її матричний запис у цьому випадку приймають вигляд

$$\hat{\mathrm{A}}\vec{x} = \lambda\vec{x}; \qquad AX = \lambda X. \tag{21}$$

Будь-який ненульовий вектор $\vec{x}$, що задовольняє рівності (21), називають **власним вектором**, а число λ – **власним числом** оператора $\hat{\mathrm{A}}$, лінійного перетворення (21) або, що те ж саме, матриці A цього перетворення.

Справедливі такі властивості.

1. Кожному власному вектору відповідає єдине власне число.

У противному разі $AX = \lambda X$ і $AX = \lambda_1 X \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)X = \theta \Rightarrow \lambda = \lambda_1$, тому що $X \neq \theta$.

2. Якщо оператор $\hat{\mathrm{A}}$ має власний вектор $\vec{x}$ при власному числі λ, то вектор $\alpha\vec{x}$, де α – довільна стала, також є власним вектором оператора $\hat{\mathrm{A}}$ з тим самим власним числом.

Насправді, згідно з (20) і (21): $\hat{\mathrm{A}}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{\mathrm{A}}\vec{x} = \alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda(\alpha\vec{x})$.

3. Якщо $\vec{x}^{(1)}$ і $\vec{x}^{(2)}$ – власні вектори оператора $\hat{\mathrm{A}}$ з одним й тим же власним числом λ, то сума $\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)}$ по відношенню до оператора $\hat{\mathrm{A}}$ також є його власним вектором з власним числом λ:

$\hat{\mathrm{A}}\vec{x}^{(1)} = \lambda\vec{x}^{(1)}$, $\hat{\mathrm{A}}\vec{x}^{(2)} = \lambda\vec{x}^{(2)} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}(\vec{x}^{(2)} + \vec{x}^{(1)}) = \hat{\mathrm{A}}\vec{x}^{(1)} + \hat{\mathrm{A}}\vec{x}^{(2)} =$
$= \lambda\vec{x}^{(1)} + \lambda\,\vec{x}^{(2)} = \lambda(\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)})$.

Для відшукування власних векторів та чисел лінійного оператора виходимо з матричного подання (21). Записавши його праву частину у вигляді λEX, де $E = (\delta_{ij})$ – одинична матриця, дістаємо

$$(A - \lambda E)\,X = \theta. \tag{22}$$

Матричній рівності (22) відповідає система координатних рівностей

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{22′}$$

За припущенням $\vec{x}$ – власний, а значить ненульовий вектор. Тому однорідна система (22′) з невідомими x_1, x_2, … , x_n повинна мати ненульові розв`язки. Це можливо, тільки якщо визначник системи дорівнює нулю:

$$det(A-\lambda E)=0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

Рівняння (23) називають **характеристичним**. Кожний дійсний корінь λ такого рівняння є власним числом матриці A. Визначивши λ, за системою (22′) можна потім знайти відповідний до нього власний вектор $\vec{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

Приклад 6. Знайти власні числа та вектори матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв`язування. Складаємо характеристичне рівняння (23), знаходимо його корені.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-4)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2.$$

Власні числа $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2$ по черзі підставляємо у систему виду (22′):

1) $\lambda_1=1,\quad \begin{cases} 0\cdot x_1+0\cdot x_2+x_3=0, \\ x_3=0, \\ 3x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Ранг системи і число невідомих в ній збігаються ($r=2$). Система має єдиний розв`язок $x_2=x_3=0$. Величину x_1 можна вибрати довільно. Нехай $x_1=t$, де t – будь-яке відмінне від нуля число. Тоді власний вектор $\vec{x}^{(1)}=\{1,0,0\}t$.

2) $\lambda_2=2,\quad \begin{cases} -x_1+x_3=0, \\ -x_2+x_3=0, \\ 3x_2-3x_3=0. \end{cases}$

Ранг системи $r=2$, число невідомих $n=3$. Система має ненульові розв`язки. Незалежних рівнянь тут тільки два, останнє рівняння можна відкинути. З перших двох рівнянь знаходимо $x_2=x_3=x_1$. Одне з невідомих вільне, нехай $x_1=t$, де t – будь-яке число, окрім нуля. Отримуємо другий власний вектор $\vec{x}^{(2)}=\{1,1,1\}t$.

3) $\lambda_3=-2,\quad \begin{cases} 3x_1+x_3=0, \\ 3x_2+x_3=0, \\ 3x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2,\ x_3=-3x_2,\ x_2$ – довільне число.

При $x_2=t$, де $t\neq 0$, маємо третій власний вектор $\vec{x}^{(3)}=\{1,1,-3\}t$.

Зауваження 1. Розглянемо перетворення (19) у просторі R^2, тобто $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y}\in R^2$, матриця $A=\left(a_{kj}\right)_{2,2}$. Припустимо, що матриця A має два власних вектори $\vec{e}_1'$ і $\vec{e}_2'$, що неколінеарні між собою, і λ_1, λ_2 – їх власні числа. Вектори $\vec{e}_1'$ і $\vec{e}_2'$ можна прийняти як новий базис. У цьому базисі $\vec{x}=x_1'\vec{e}_1'+x_2'\vec{e}_2'$, $\vec{y}=y_1'\vec{e}_1'+y_2'\vec{e}_2'$. Через те, що $\hat{A}\vec{e}_1'=\lambda_1\vec{e}_1'$, $\hat{A}\vec{e}_2'=\lambda_2\vec{e}_2'$, рівність $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$ можна звести до вигляду

$$y_1'\vec{e}_1'+y_2'\vec{e}_2'=\hat{A}\left(x_1'\vec{e}_1'+x_2'\vec{e}_2'\right)=x_1'\hat{A}\vec{e}_1'+x_2'\hat{A}\vec{e}_2'=x_1'\lambda_1\vec{e}_1'+x_2'\lambda_2\vec{e}_2'.$$

Отже,

$$\begin{cases} y_1'=\lambda_1 x_1'+0\cdot x_2', \\ y_2'=0\cdot x_1'+\lambda_2\cdot x_2' \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \quad \text{тобто}$$

$$Y'=A'X', \quad \text{де} \quad A'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічна ситуація має місце у просторі R^n.

Якщо базисом вибрати власні вектори перетворення (19), то матриця лінійного перетворення у такому базисі стане діагональною. Елементами її головної діагоналі є власні числа матриці A.

Приклад 7. У просторі R^3 в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ перетворення $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$ визначено матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, тобто $Y=AX$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1=x_1+x_3, \\ y_2=x_2+x_3, \\ y_3=3x_2-x_3. \end{cases}$$

Власні вектори й числа матриці A відомі (див. приклад 6): $\vec{x}^{(1)}=\{1,0,0\}t$, $\vec{x}^{(2)}=\{1,1,1\}t$, $\vec{x}^{(3)}=\{1,1,-3\}t$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$. Покладемо $t=1$ та перейдемо до нового базису $\vec{e}_1'=\{1,0,0\}$, $\vec{e}_2'=\{1,1,1\}$, $\vec{e}_3'=\{1,1,-3\}$. Легко перевірити (див. приклад 3), що ці вектори лінійно незалежні, отже, можуть бути базисом простору R^3. На підставі (10), (11) матриця переходу $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Знаходимо обернену матрицю:

$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. За формулою (16) визначаємо матрицю лінійного перетворення у новому базисі:

$$A'=P^{-1}AP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Згідно з (15)

$$Y'=A'X',\quad \begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y_1'=\lambda_1x_1'\\ y_2'=\lambda_2x_2'\\ y_3'=\lambda_3x_3'\end{cases}.$$

Таким чином, **у базисі, що утворений власними векторами перетворення, зв\`язок між координатами векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$ виглядає найпростіше**.

Зауваження 2. Нехай матриця перетворення (19) симетрична, тобто $A=(a_{kj})$ і $a_{kj}=a_{jk}$. Тоді

1) усі власні числа матриці A дійсні;

2) власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні;

3) якщо власне число λ повторюється k разів, то можна підібрати k взаємно ортогональних власних векторів, що відповідають λ.

Покажемо це на прикладі симетричної матриці другого порядку

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}.$$

1) Характеристичне рівняння (23) для такої матриці має вигляд

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \text{або} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0. \qquad (24)$$

Корені рівняння (24) – дійсні числа:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-ac+b^2}=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}. \qquad (25)$$

2) Розглянемо випадок $\lambda_1 \neq \lambda_2$. При $b \neq 0$ координати власного вектора можна знайти із системи типу (22′):

$$\begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ bx_1 + (c-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Якщо λ – власне число, то визначник системи дорівнює нулю, рівняння залежні, одне з них, наприклад друге, можна відкинути. Щоб перше рівняння виконувалося, достатньо прийняти $x_1 = -b$, $x_2 = a - \lambda$. Покладаючи $\lambda = \lambda_1$ і $\lambda = \lambda_2$, маємо два власних вектори:

$$\vec{x}^{(1)} = \{-b; a - \lambda_1\} \quad \text{та} \quad \vec{x}^{(2)} = \{-b; a - \lambda_2\}.$$

З урахуванням (24) і теореми Вієта скалярний добуток

$$\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = b^2 + (a-\lambda_1)(a-\lambda_2) = b^2 + a^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) = a^2 +$$
$$+ b^2 + ac - b^2 - a(a+c) = 0.$$

Отже, вектори $\vec{x}^{(1)}$ і $\vec{x}^{(2)}$ ортогональні. Якщо ж $b = 0$, то $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$. Відповідними власними векторами будуть $\vec{x}^{(1)} = \{1; 0\}$, $\vec{x}^{(2)} = \{0; 1\}$. Тут також $\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = 0$.

3) Випадок $\lambda_1 = \lambda_2$, як видно з (25), є можливим тільки при $a = c$, $b = 0$. Тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = a = c$ і систему (26) задовольняють будь-які числа x_1, x_2. Тому усі вектори з R^2 будуть власними векторами. Серед них завжди можна вибрати два взаємно перпендикулярних вектора.

Приклад 8. Для симетричної матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, діючи так, як у прикладі 6, знаходимо власні числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ та власні вектори $\vec{x}^{(1)} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{x}^{(2)} = \{1; -1; -1\}$, $\vec{x}^{(3)} = \{2; 1; 1\}$. Ці вектори між собою ортогональні: $\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = 0$, $\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(3)}\right) = 0$, $\left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right) = 0$. Якщо кожний вектор нормувати, тобто поділити на його довжину, то отримаємо систему ортонормованих векторів $\vec{e}_1 = \left\{0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}\right\}$, $\vec{e}_2 = \left\{1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}\right\}$, $\vec{e}_3 = \left\{2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}\right\}$. Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють ортонормований базис простору R^3. Згідно з (10), (11) матриця переходу до такого базису $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ ортогональна. Можна переконатися в тому, що $det\, P = -1$ і $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, тобто $P^{-1} = P^T$. Перетворення подібності (16) приводить матрицю A до діагонального вигляду:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Елементами головної діагоналі матриці A' є власні числа матриці A.

♦ Геометрія абстрактного простору n вимірювань розвинута у роботі Грассмана «Вчення про протяжність» (1844). Незважаючи на складність теорії, знайшлися послідовники, котрі засвоїли та удосконалили ідеї вченого. Застосування отримав перш за все чотиривимірний простір, де роль четвертої координати грає час.

♦ **Евклід** (гр. математик, близько 340 – близько 287 до н.е.) займався геометрією, оптикою, музикою. Його відома праця «Начала» унікальна за своїм впливом не лише на усю подальшу математику, але й на розвиток людської думки у багатьох інших галузях знань.

♦ **Герман Грассман** (нім. математик, фізик, філолог, 1809 – 1877) свій шлях в науці розпочав з богослів`я і філології. Самостійно вивчив математику. З 1836 р. і до кінця життя – вчитель математики у гімназії Штеттіна (Германія). Виключно неординарна, щедро обдарована, діяльна та творча людина. Глибокі роботи з математики поєднував з дослідженнями у галузі теорії електричного струму, вчення про світло, акустики, ботаніки, лінгвістики, цікавився питаннями політичного і церковного життя, редагував газету. За життя визнання як вчений не здобув, у вищу школу допущений не був.

§ 9. Квадратичні форми

У математиці кожне покоління добудовує новий поверх тієї самої споруди.
Г. Ганкель, нім. математик XIX ст.

1⁰. ***Означення та матричний запис***. **Квадратичною формою** змінних x_1, x_2, … , x_n називають довільну лінійну комбінацію квадратів та попарних добутків цих змінних. Так, у випадку трьох змінних x_1, x_2, x_3 квадратична форма має вигляд

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \quad (1)$$

Двійки у коефіцієнтах тут виділено для зручності.

Покладаючи нижче, що $a_{kj} = a_{jk}$, замість (1) можна записати

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \\ + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

При заданій кількості змінних квадратична форма повністю визначається симетричною матрицею коефіцієнтів $A = (a_{kj})$, де $a_{kj} = a_{jk}$. Її називають матрицею квадратичної форми. У подальшому усі елементи матриці A вважатимемо дійсними числами.

Очевидно,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned}$$

Вирази у дужках є елементами стовпцевої матриці, що отримана множенням квадратної матриці A на матрицю-стовпець X з елементами x_1, x_2, x_3, а співмножники перед дужками – елементи матриці $X^T = (x_1, x_2, x_3)$. Тому $F(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$. Рівність справедлива для будь-якої кількості змінних. Довільна квадратична форма

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

має матричне представлення

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX, \tag{2}$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$a_{kj} = a_{jk}, \text{ тобто } A^T = A. \tag{3}$$

Приклад 1. Квадратична форма з двома змінними

$$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + \frac{5}{2}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2x_1 + 3x_2^2.$$

Матриця цієї квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}$, сама ж квадратична форма зводиться до вигляду (2):

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T AX, \text{ причому } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, x_2).$$

2^0. *Заміна змінних*. Нехай змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що подані стовпцевою матрицею X, зазнають невиродженого перетворення (8.14), у результаті якого з`являється стовпець $Y$ з елементами $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Зв`язок між змінними у матричній формі виражається рівностями:

$$X = LY \quad \text{або} \quad Y = L^{-1}X,$$

де L – квадратна матриця порядку n така, що $det\, L \neq 0$.

Згідно з правилом транспонування матричного добутку, що наведено у 5^0 § 1, $X^T = (LY)^T = Y^T L^T$. Підставимо вирази для X та X^T у формулу (2): $F = Y^T L^T ALY$. Позначимо добуток $L^T AL = B$. Тоді

$$F = Y^T BY, \tag{4}$$

причому

$$B = L^T AL. \tag{5}$$

Матриця B – симетрична, тому що при $A = A^T$ справедливо:

$$B^T = \left(L^T AL\right)^T = (AL)^T \left(L^T\right)^T = L^T A^T L = L^T AL = B.$$

Стовпець Y і рядок Y^T утворюють величини $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Отже, рівність (4) є виразом для квадратичної форми через нові змінні. Матрицею квадратичної форми тепер є матриця B, яка з матрицею A пов`язана формулою (5).

Припустимо, що L – ортогональна матриця, що визначає перехід (8.10) від одного ортонормованого базису до іншого, тобто $L = P$ (кожен стовпець матриці P – це відповідний рядок коефіцієнтів перетворення (8.10)). У цьому випадку згідно з (8.18) формула (5) виражає перетворення подібності матриці A при переході до нового базису, а матриця $Y = L^{-1}X$ – ніщо інше, як представлення X у новому базисі (див. (8.13)).

Таким чином, перехід від формули (2) до рівності (4) рівносильний заміні змінних, що викликана ортогональним перетворенням базису.

3⁰. ***Зведення до канонічного вигляду***. Квадратичну форму називають **канонічною**, якщо вона містить тільки квадрати змінних, тобто

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

Матриця A такої квадратичної форми – діагональна:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Щоб довільну квадратичну форму звести до канонічного вигляду, матрицю A, що її визначає, потрібно перетворити на діагональну матрицю B. Для цього слід знайти власні числа матриці A. Через те, що A – симетрична матриця, її власні значення – дійсні числа. За допомогою власних векторів матриці A можна побудувати ортонормований базис, при переході до якого матриця A перетворюється на діагональну матрицю B. Для зведення квадратичної форми F до канонічного вигляду матрицю переходу P можна не знаходити, достатньо знати тільки власні числа матриці A: вони заповнюють головну діагональ матриці B, решта елементів цієї матриці – нулі.

Приклад 2. Квадратична форма $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Її власні числа $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$ (див. приклад 8.8) і

$B = P^T AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Згідно з (4) зводимо квадратичну форму до канонічного вигляду:

$$F(y_1, y_2, y_3) = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} -2y_1 \\ 3y_2 \\ 6y_3 \end{pmatrix} = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2.$$

4^0. ***Знаковизначені форми***. Існують задачі, у яких важливо знати, чи зберігає свій знак квадратична форма, коли її змінні довільно змінюються. Квадратичну форму $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ називають додатно визначеною, якщо для будь-яких дійсних значень її змінних, що не дорівнюють одночасно нулю, справджується нерівність $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$. При оберненій нерівності форму $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ називають від`ємно визначеною. Наведемо два критерії, за якими можна судити про знаковизначеність квадратичної форми [4, с. 422].

1. Для того, **щоб квадратична форма була знаковизначеною, необхідно і достатньо, щоб власні числа її матриці A мали однакові знаки** (плюс для додатно визначеної форми, а мінус – для від`ємно визначеної).

2. ***Критерій Сильвестра***. Щоб квадратична форма була знаковизначеною, необхідно і достатньо виконання декількох нерівностей для таких мінорів матриці A:

$$det\,A_1 = a_{11},\quad det\,A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\quad det\,A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а саме: 1) у випадку додатно визначеної форми

$$det\,A_1 > 0,\ det\,A_2 > 0, \ldots,\ det\,A_n > 0;$$

2) у випадку від`ємно визначеної форми

$$det\,A_1 < 0,\ det\,A_2 > 0,\ det\,A_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n\,det\,A_n > 0.$$

♦ Теорія квадратичних форм розвивалася у працях Якобі й математиків англійської школи – Келі, Сільвестра та ін.

♦ **Карл Якобі** (нім. математик, 1804 – 1851) у 27 років став професором університету у Кенігсбергу (нині – Калінінград). З 1836 р. працював у Берліні. Зробив відчутний внесок у розвиток майже усіх галузей математики XIX століття. Створив славнозвісну кенігсберзьку школу, що мала тривалий та позитивний вплив на математиків Німеччини, Англії, Франції, Росії. Висунув тезу: «Математика належить до числа тих наук, які зрозумілі самі собою». Встановив традицію поєднання університетської освіти з самостійною науковою роботою студентів. Своїм учням з Росії, які зволікали з початком самостійних досліджень, посилаючись на те, що їх знання недостатні, Якобі зауважував: «Якщо ваші близькі умовлятимуть вас одружитися, чи будете ви пояснювати свою відмову тим, що не вивчили ще усіх дівчат світу?».

Розділ II

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

При розгляді просторових форм геометрія користується досягненнями алгебри – за допомогою формул і чисел знаходить довжину відрізків та дуг, площі фігур, об`єми тіл. Її можливості дуже розширилися з винаходом у XVII столітті аналітичної геометрії – розділу математики, у якому алгебраїчними методами вирішується питання не лише про розміри фігур, але й про їх розташування у просторі.

В основі аналітичної геометрії лежить метод координат – ідея фіксувати положення точки за допомогою відрізків відповідної довжини, що відкладені на координатних осях.

Будь-яку рівність із змінними значеннями x та y система координат дозволяє інтерпретувати геометрично як множину точок, для яких числа x та y, що задовольняють дану рівність, є координатами. Завдяки цій обставині різноманітні залежності реального світу набули наочність, з`явилась можливість вивчати змінні величини і процеси.

§10. Поняття про рівняння поверхонь та ліній

Основною ідєю, якою наповнена уся математика, є ідея рівності.
Г. Спенсер, англ. філософ XIX ст.

1^0. ***Рівняння поверхні***. Нехай $C(x_0,\, y_0,\, z_0)$ – центр сфери радіуса R, а $M(x, y, z)$ – довільна точка сфери (рис. 1). Тоді $|CM|^2 = R^2$ або згідно з формулою відстані між точками (6.7)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

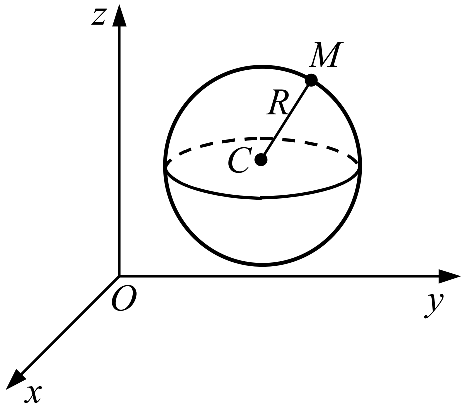


Рис. 1

Це рівняння виражає загальну властивість усіх точок даної сфери. Воно справджується для точок сфери і тільки для них. Рівняння (1) називають **рівнянням сфери**.

У загальному випадку рівнянням поверхні у просторі називають таке рівняння із змінними x, y, z, яке задовольняють координати будь-якої точки поверхні і не задовольняють координати всякої точки, що не належить до неї.

Рівняння довільної поверхні записують у формі

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

де $F(x, y, z)$ – деякий аналітичний вираз, що містить координати x, y, z довільної точки поверхні. Такі координати називають поточними.

Зауваження. Зокрема рівняння вигляду (2) може представляти деяку лінію ($x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ y = 0$ – вісь Oz), точку $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ – початок координат) або зовсім не мати геометричного образу у просторі (не існує, наприклад, точка, координати якої задовольняли б рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$).

2^0. ***Рівняння лінії у просторі***. Нехай поверхні $F(x, y, z) = 0$ та $\Phi(x, y, z) = 0$ перерізаються вздовж деякої лінії L (рис.2). Координати будь-якої точки лінії повинні задовольняти обидва рівняння. Тому два рівняння

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

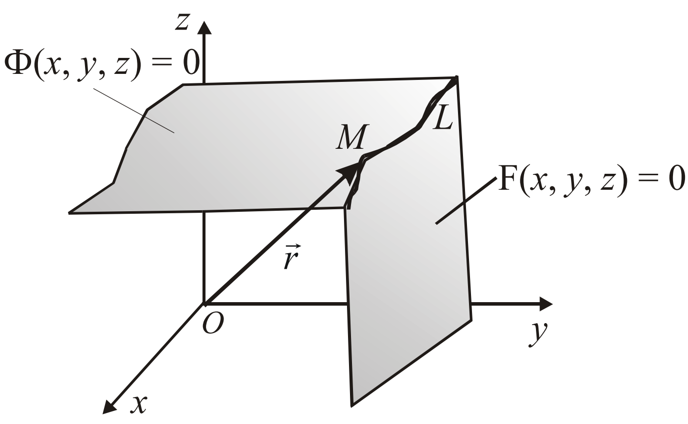


Рис. 2

спільно визначають лінію L у просторі. Їх називають рівняннями цієї лінії. Якщо координати довільної точки $M(x, y, z)$ лінії L задані як функції деякої допоміжної змінної t (наприклад, часу), тобто

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t), \tag{4}$$

то рівності (4) при кожному значенні t фіксують положення точки M на лінії L, тим самим вони визначають і саму лінію L. Змінну t називають параметром, а формули (4) – **параметричними рівняннями** лінії L.

Виключення з (4) параметра t перетворює ці рівняння до вигляду (3).

Замість трьох координатних рівностей (4) можна записати одну векторну:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{4$'$}$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор точки M, а $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ – векторна функція змінної t. Співвідношення (4$'$) – векторна форма параметричного задання кривої L.

3^0. ***Рівняння лінії на площині***. Для лінії, що повністю лежить на площині xOy, положення кожної її точки визначається двома координатами x і y. Загальна властивість усіх точок такої лінії можна виразити одним рівнянням вигляду

$$F(x, y) = 0 \tag{5}$$

або двома параметричними рівняннями

$$x = x(t), y = y(t). \tag{6}$$

Рівності (5) і (6) називають **рівняннями лінії на площині**.

♦ Аналітична геометрія базується на понятті системи координат, що веде свій початок від Декарта і Ферма. У 1636 р. Ферма написав невеличку роботу «Вступ до плоских та тілесних місць» (видана лише у 1679 р., але набула відомості у Парижі ще напередодні виходу в світ «Геометрії» Декарта), де ідея системи координат присутня у формі, більш близькій до сучасного тлумачення, ніж у Декарта. Саме у творі Ферма стверджується, що рівняння з двома змінними на площині описує деяку лінію.

♦ **П`єр Ферма** (фр. математик, 1601 – 1665) вільний від діяльності радника юстиції у парламенті Тулузи час віддавав математиці. В цьому захопленні він досяг величезних успіхів, став одним із засновників теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії ймовірностей та математичного аналізу. Власні дослідження, як правило, не публікував, його відкриття ставали відомими лише завдяки листуванню та особистому спілкуванню.

§ 11. Площина

Геометрія є наймогутнішим засобом для
витончення наших розумових здібностей і дає
нам можливість правильно мислити й міркувати.
Г. Галілей, іт. вчений XVI – XVII ст.

1^0. ***Рівняння площини, що проходить через задану точку. В`язка площин***. Рівняння площини – це рівність, що містить координати довільної точки площини, тобто поточні координати x, y, z. Щоб отримати таке рівняння, потрібно спочатку якимось чином зафіксувати площину у просторі. Це можна зробити, якщо задати одну точку, наприклад, M_1 (x_1, y_1, z_1), що лежить на площині, і деякий вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, перпендикулярний до площини. Задання точки M_1 і вектора $\vec{N}$ повністю визначає положення площини у просторі. Для довільної точки M (x, y, z) площини утворюємо вектор (рис.1)

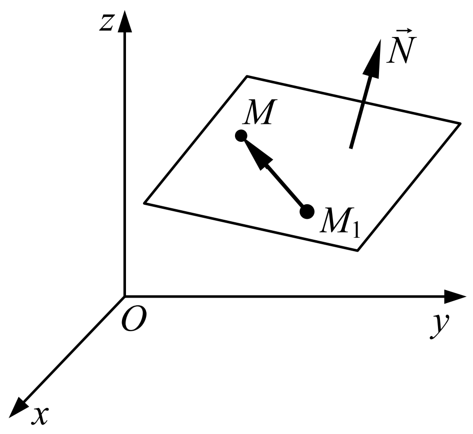


Рис. 1

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}.$$

Очевидно, $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_1M}$. Отже,

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0 \quad \text{або}$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (1)$$

Цю рівність задовольняють координати будь-якої точки площини. Її називають рівнянням площини, що проходить через задану точку.

Із зміною коефіцієнтів A, B, C **нормальний вектор** $\vec{N} = \{A, B, C\}$, тобто вектор, що направлений перпендикулярно (нормально) до площини, у загальному випадку змінює свій напрямок, і площина обертається навколо точки M_1.

Рівняння (1), в якому коефіцієнти A, B, C можуть приймати різні значення, являє собою **в`язку площин**, що проходять через точку M_1.

2⁰. ***Загальне рівняння площини***. Рівняння (1) можна перетворити до вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

де $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Таким чином, всяка площина представляється рівнянням першого степеня відносно поточних координат. Справджується і обернене: **будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z визначає у просторі деяку площину**. Дійсно, нехай (x_1, y_1, z_1) – який-небудь розв`язок рівняння (2), тоді $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Віднімаючи від рівняння (2) останню рівність, одержуємо $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, тобто рівняння (1), яке завжди можна розглядати як рівняння площини, що проходить через точку (x_1, y_1, z_1) перпендикулярно до вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$. Окремими випадками загального рівняння (2) є:

1. $Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат (координати точки $O(0, 0, 0)$ задовольняють це рівняння);

2. $Ax + By + D = 0$ – площина паралельна до осі Oz, тому що вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ перпендикулярний до осі Oz ($N_z = C = 0$);

3. $Ax + Cz + D = 0$ – площина паралельна до осі Oy, оскільки вектор $\vec{N} = A\vec{i} + C\vec{k}$ перпендикулярний до осі Oy ($N_y = B = 0$);

4. $By + Cz + D = 0$ – площина паралельна до осі Ox, тому що вектор

$\vec{N} = B\vec{j} + C\vec{k}$ перпендикулярний до осі Ox ($N_x = A = 0$);

5. $Cz + D = 0$ або $z = c$ ($c = -D/C$) – площина перпендикулярна до осі Oz (рис. 2*а*);

6. $By + D = 0$ або $y = b$ ($b = -D/B$) – площина перпендикулярна до осі Oy (рис. 2*б*);

7. $Ax + D = 0$ або $x = a$ ($a = -D/A$) – площина перпендикулярна до осі Ox (рис. 2*в*);

8. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ – координатні площини (рис. 2*г*).

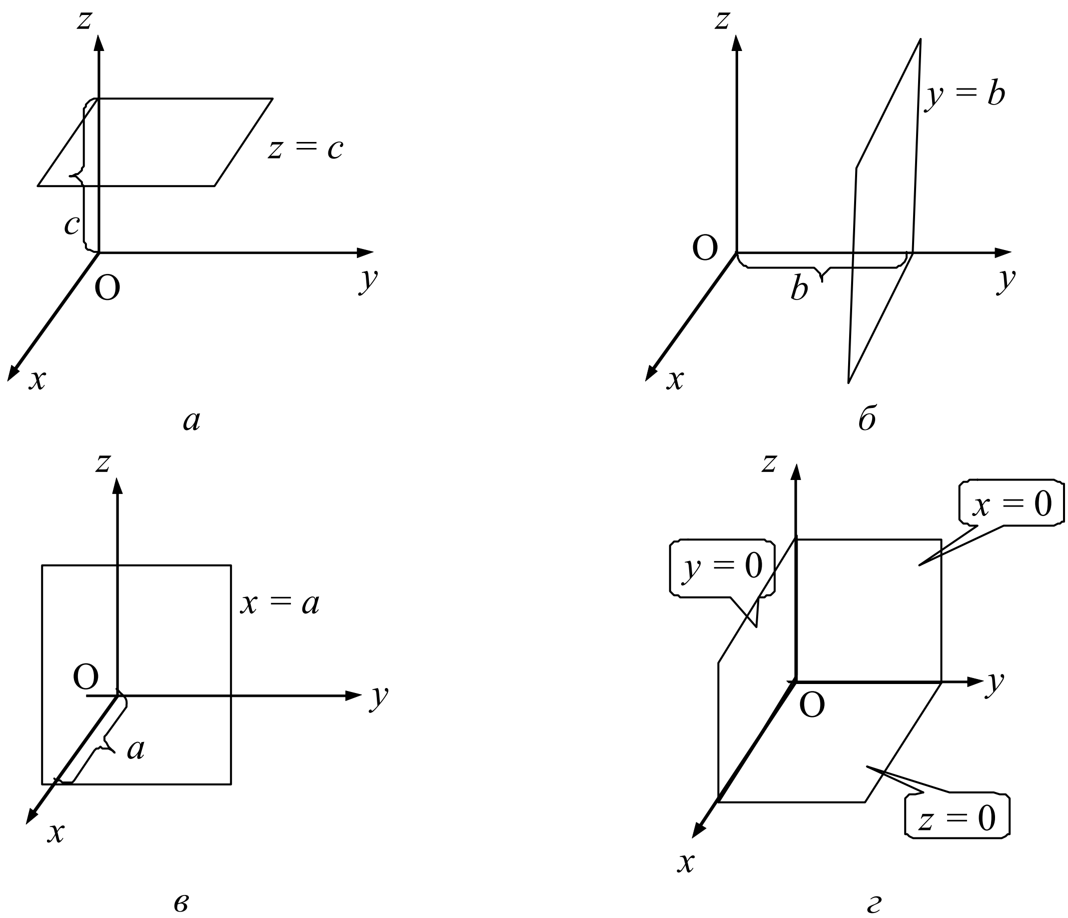


Рис. 2

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 (1; –2; 1), M_2 (6; 2; –2), M_3 (2; 3; 0).

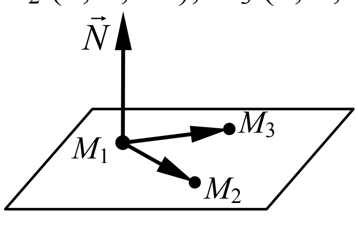


Рис. 3

**Розв`язування**. Запишемо рівняння в`язки площин, що проходять через точку M_1:

$$A(x-1) + B(y+2) + C(z-1) = 0.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \{5; 4; -3\}$ і $\overrightarrow{M_1M_3} = \{1; 5; -1\}$ лежать в шуканій площині. Їх векторний добуток і буде вектором, що нормальний до площини, тобто

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 21\vec{k}.$$

Тому $A = 11$, $B = 2$, $C = 21$. Підставивши знайдені числа до рівняння в`язки площин, одержимо

$$11(x-1) + 2(y+2) + 21(z-1) = 0 \quad \text{або} \quad 11x + 2y + 21z - 28 = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3;\ 0;\ 5)$, $M_2\ (1;\ 2;\ 4)$ і паралельна до осі Oy.

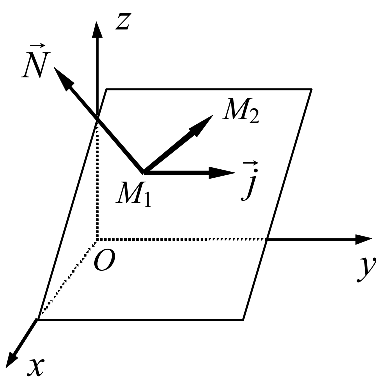


Рис. 4

**Розв`язування**. Використаємо рівняння в`язки площин, що проходять через точку M_1:

$$A(x-3) + B(y-0) + C(z-5) = 0.$$

У шуканій площині лежить вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-2; 2; -1\}$. У цю ж площину можна внести вектор $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, який згідно з умовою паралельний до неї. Вектор

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

перпендикулярний до площини. Візьмемо його як нормальний вектор площини. Маємо $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$. Отже, рівнянням шуканої площини буде

$$(x-3) - 2(z-5) = 0 \quad \text{або} \quad x - 2z + 7 = 0.$$

3^0. ***Рівняння площини у відрізках на осях***. Нехай a, b, c – величини відрізків, що площа відсікає від осей Ox, Oy, Oz відповідно. Підставляючи до рівняння (2) почергово координати точок $M_1\ (a,0,0)$, $M_2\ (0,b,0)$, $M_3\ (0,0,c)$, одержимо

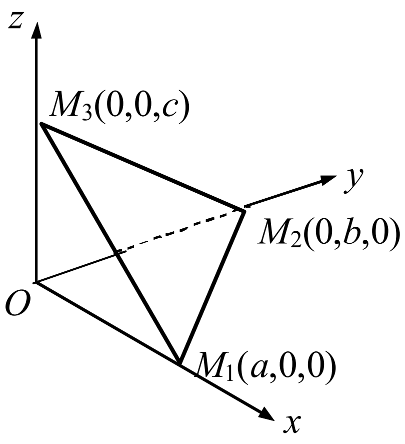


Рис. 5

$$Aa + D = 0,\ \ Bb + D = 0,\ \ Cc + D = 0.$$

Знаходимо $A = -D/a$, $B = -\ D/b$, $C = -D/c$. Рівняння (2) приймає вигляд

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Звідси після скорочення на число $D \neq 0$ випливає:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3}$$

4⁰. ***Кутові співвідношення***. Нехай відомі рівняння площин Π і Π_1 у загальному вигляді:

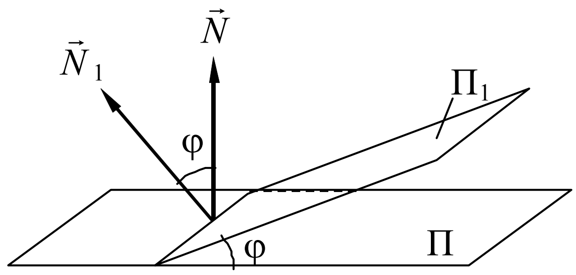


Рис. 6

$$\Pi:\ Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\Pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Кут φ між площинами Π і Π_1 можна знайти як кут між їх нормальними векторами

$$\vec{N} = \{A, B, C\} \text{ і } \vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}.$$

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{N}_1}{|\vec{N}|\cdot|\vec{N}_1|} \text{ або } cos\,\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \qquad (4)$$

Для паралельних площин $\vec{N} \parallel \vec{N}_1$, проекції цих векторів пропорційні, тому умова паралельності площин має вигляд

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \qquad (5)$$

Якщо площини Π і Π_1 перпендикулярні, то $\vec{N} \perp \vec{N}_1$, $\vec{N}\cdot\vec{N}_1 = 0$. Отже, умова перпендикулярності площин подається рівністю

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (6)$$

Приклад 3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;\ 2;\ 4)$ перпендикулярно площинам $3x + y - z - 5 = 0$ і $2x - y + 3z + 1 = 0$.

**Розв`язування**. В`язка площин, що проходять через точку M, має рівняння

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z-4) = 0.$$

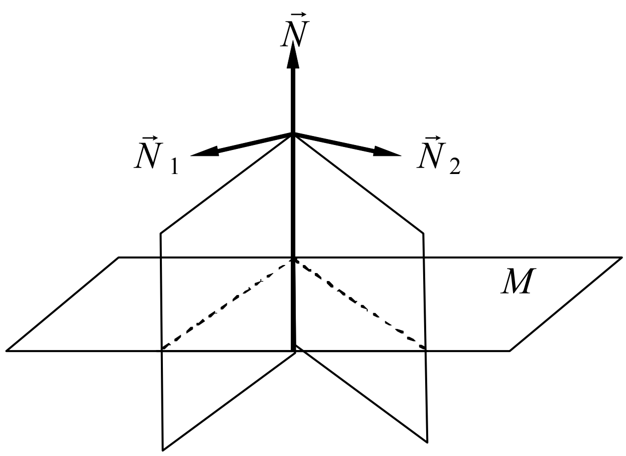


Рис. 7

Нормальний вектор шуканої площини $\vec{N}$ можна знайти як векторний добуток нормальних векторів заданих площин (рис. 7):

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 5\vec{k}\,\cdot$$

Отже, $A = 2$, $B = -11$, $C = -5$. Підставивши ці числа у в`язку площин, отримаємо рівняння шуканої площини

$$2(x-1) - 11(y-2) - 5(z-4) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x - 11y - 5z + 40 = 0.$$

5⁰. ***Відстань точки від площини***. Знайдемо формулу, що визначає відстань d точки M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ від площини, заданої рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

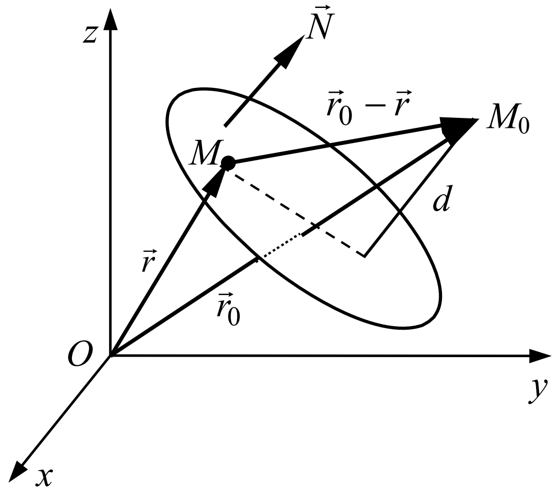


Рис. 8

Нехай $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$ площини, тобто

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Тоді (рис. 8) шукана відстань

$$d = \left|np_{\vec{N}}\left(\vec{r}_0 - \vec{r}\right)\right|,$$

де $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – нормальний вектор площини. Згідно з формулою (7.2) маємо $np_{\vec{N}}\left(\vec{r}_0 - \vec{r}\right) = \dfrac{\vec{N}\cdot\left(\vec{r}_0 - \vec{r}\right)}{\left|\vec{N}\right|} = \dfrac{\vec{N}\cdot\vec{r}_0 - \vec{N}\cdot\vec{r}}{\left|\vec{N}\right|}$. Через те, що точка $M(x,y,z)$ належить до площини, $\vec{N}\cdot\vec{r} = Ax + By + Cz = -D$. Разом з тим

$$\vec{N}\cdot\vec{r}_0 = Ax_0 + By_0 + Cz_0, \qquad \left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Тому

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

Приклад 4. Знайти найкоротшу відстань між площинами $2x - y + 2z + 4 = 0$ і $4x - 2y + 4z - 7 = 0$.

Розв\`язування. Площини паралельні, тому що виконується умова (5): $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{2}{4}$. Достатньо взяти яку-небудь точку на перший площині, наприклад $(0;\ 0;\ -2)$, та знайти її відстань від другої площини за формулою (7)

$$d = \frac{\left|4\cdot 0 - 2\cdot 0 + 4\cdot(-2) - 7\right|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{15}{6} = 2{,}5.$$

Зауваження. Аналогічно із звичайним тривимірним простором в абстрактному просторі R^n будь-який вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ можна розглядати як радіус-вектор точки $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ у n-вимірній системі координат. Рівняння першого степеня відносно поточних координат $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ такої точки, тобто

$$A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \ldots + A_n\xi_n + D = 0,$$

подібно до рівності (2) називають рівнянням гіперплощини.

♦ Декартові координати точки у просторі й рівняння поверхонь з`являються у роботах французьких математиків кінця XVII – початку XVIII століття. А. Паран (1666 – 1716) одним з перших застосував прямокутні координати до просторової задачі аналітичної геометрії. А. Клеро (1713 – 1765) надіслав академії наук свою першу роботу з геометрії у віці 13 років. Його праця «Дослідження ліній подвійної кривизни», що була надрукована у 1731 р., дозволила 18-річному авторові стати членом Французької академії наук. У цій роботі він впро-ваджує третю координату z, наводить рівняння деяких поверхонь та просторових кривих, розглядаючи їх як переріз двох поверхонь, виводить рівняння площини, відзначаючи, що воно неодмінно є рівнянням першого степеня.

Систематичний виклад аналітичної геометрії на площині та у просторі подав Ейлер у другому томі своєї класичної праці «Вступ до аналізу» (1748).

♦ **Леонард Ейлер** (математик, механік, фізик, астроном, 1707 – 1783) народився у Базелі (Швейцарія), з 1727 по 1741 рік, а згодом з 1766 р. і до кінця життя працював у Петербурзькій академії наук (1741 – 1766 роки віддав Берлінській академії наук). Написав близько 850 наукових праць, що охопили усі розділи математики, механіки XIX століття, зробив внесок у математичну фізику, оптику, теорію машин, картографію, балістику, морську науку, страхову справу, теорію музики та ін. Видав кілька класичних монографій. Разом з досягненнями зростали його авторитет і популярність у світі. І. Бернуллі звертався у листах до власного учня Ейлера так: у 1728 р. – до «найосвіченішого та найобдарованішого юного мужа Леонарда Ейлера», у 1737 р. – до «найславетнішого та найдотепнішого математика», у 1745 р. – до «неперевершеного Леонарда Ейлера – головного серед математиків».

§ 12. Пряма у просторі

Хто вільно знає пряму й площину, той
не матиме труднощів у нарисній геометрії.
Г. Монж, фр. математик XVIII ст.

1^0. ***Канонічні рівняння***. Нехай відомі точка $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$, що належить прямій, та деякий вектор

$$\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k},$$

паралельний до цієї прямої. Для довільної точки $M(x, y, z)$ прямої утворимо вектор

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}.$$

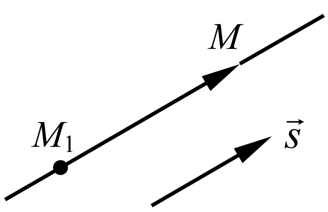


Рис. 1

Очевидно, $\overrightarrow{M_1M} \parallel \vec{s}$, отже,

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \tag{1}$$

Ці рівності, що являють собою два незалежних рівняння, називають **канонічними рівняннями прямої** у просторі. Числа m, n, p – **напрямні коефіцієнти** прямої.

2⁰. ***Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***. Якщо пряма визначена двома її точками $M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то за вектор $\vec{s}$ можна взяти $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$. При цьому $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ p=z_2-z_1$ і рівняння (1) приймають вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2}$$

3⁰. ***Параметричні рівняння***. Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{s}$, що розглянуті у 1^0, колінеарні, тому $\overrightarrow{M_1M}=t\vec{s}$, де t – деякий числовий параметр, із зміною якого точка M зміщується вздовж прямої. З рівності векторів випливає рівність їх координат: $x-x_1=mt,\quad y-y_1=nt,\quad z-z_1=pt.$

Три співвідношення

$$x=x_1+mt,\quad y=y_1+nt,\quad z=z_1+pt \tag{3}$$

утворюють **параметричні рівняння прямої** у просторі.

4⁰. ***Загальні рівняння***. Пряму у просторі можна визначити як лінію перерізу двох площин. Рівняння цих площин, що розглядаються спільно, називають **загальними рівняннями прямої**

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \end{cases} \tag{4}$$

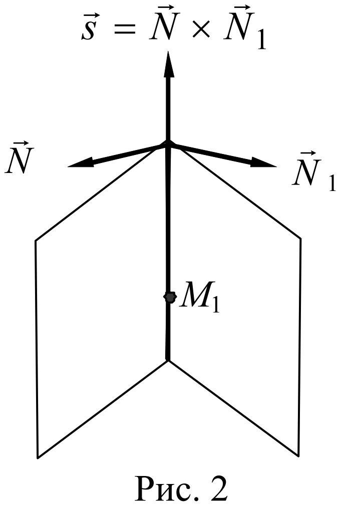


Рис. 2

Щоб від рівнянь (4) перейти до канонічних рівнянь (1), достатньо знайти деякий вектор $\vec{s}$, паралельний до прямої, та яку-небудь точку M_1, що належить до прямої. Як $\vec{s}$ можна прийняти вектор $\vec{s}=\vec{N}\times\vec{N}_1$, де

$\vec{N}=\{A,B,C\}$ і $\vec{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ – нормальні вектори площин, що визначають пряму (рис. 2). Спільна точка цих площин – M_1, тому, якщо одну з її координат задати довільно, наприклад, покласти $x=0$, то дві інші знайдуться з системи

$$\begin{cases} By + Cz + D = 0, \\ B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases}$$

за умови, що її розв`язок існує. У противному разі можна прийняти $y = 0$ або $z = 0$.

5⁰. ***Кутові співвідношення***. Кут φ між прямими L та L_1 – це кут між напрямними векторами заданих прямих

$$\vec{s} = \{m, n, p\} \text{ і } \vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}.$$

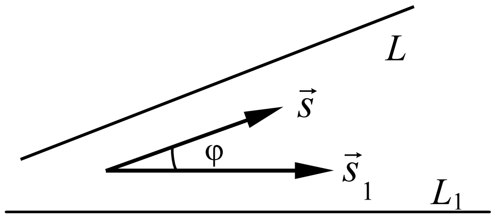


Рис. 3

Отже, $cos\,\varphi = \dfrac{\vec{s}\cdot\vec{s}_1}{|\vec{s}||\vec{s}_1|} =$

$$= \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}. \quad (5)$$

Якщо прямі L та L_1 – паралельні, то $\vec{s} \,||\, \vec{s}_1$. Тому **умова паралельності прямих** має вигляд

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}. \quad (6)$$

Для перпендикулярних прямих $\vec{s} \perp \vec{s}_1$, $\vec{s}\cdot\vec{s}_1 = 0$, тобто

$$mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0. \quad (7)$$

Рівність (7) – **умова перпендикулярності прямих**.

Кут θ між прямою і площиною визначається як кут між цією прямою та її проекцією на площину ($0 < \theta < 90^0$). Якщо $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – нормальний вектор площини, а $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – напрямний вектор прямої, то при будь-якому їх розташуванні

$$\left|cos\left(\vec{N}\,\hat{,}\,\vec{s}\right)\right| = \left|cos\left(90^0 \pm \theta\right)\right| = sin\,\theta.$$

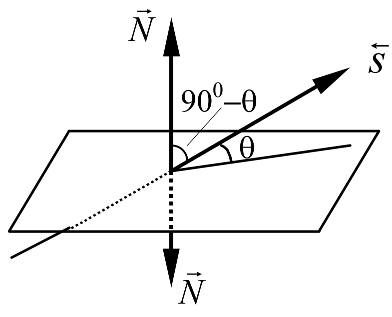


Рис. 4

Отже, $$sin\,\theta = \frac{|\vec{N}\cdot\vec{s}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}. \quad (8)$$

У випадку паралельності прямої і площини вектори $\vec{N}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні (рис. 5), $\vec{N}\cdot\vec{s} = 0$, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (9)$$

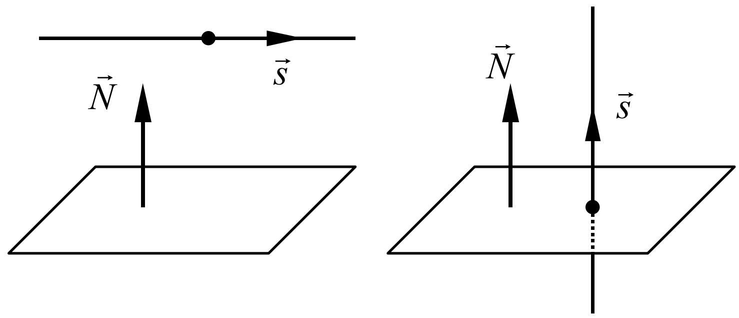


Рис. 5

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вектори $\vec{N}$ та $\vec{s}$ паралельні (рис. 5). При цьому

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}. \qquad (10)$$

Співвідношення (9) та (10) виражають **умови паралельності і перпендикулярності прямої та площини** відповідно.

Приклад 1. Дані точка $M(4;-5;\ 0)$ і пряма L_1: $\begin{cases} 3x + y - z - 5 = 0, \\ 2x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$ Знайти такі, що проходять через точку M: а) пряму L, паралельну до L_1; б) площину Π, перпендикулярну до L_1; в) площину Π_1, що вміщує L_1.

Розв`язування. а) Перетворимо рівняння прямої L_1 до канонічного виду.

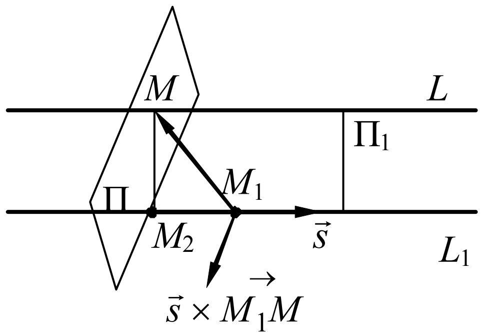


Рис. 6

Напрямний вектор прямої $\vec{s} = \vec{N} \times \vec{N}_1$, де

$$\vec{N} = \{3;1;-1\},\ \ \vec{N}_1 = \{2;-1;3\} \text{ (рис. 6).}$$

Знайдемо $\vec{s} = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 5\vec{k}$. Покладаючи $x = 0$, маємо

$$\left.\begin{matrix} y - z - 5 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 7,\ z = 2.$$

Отримаємо точку $M_1(0;\ 7;\ 2)$, що належить до прямої L_1. Отже, пряма L_1 має рівняння

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-7}{-11} = \frac{z-2}{-5}.$$

Шукана пряма L паралельна до L_1. За її напрямний вектор можна взяти той самий вектор $\vec{s}$. Тому канонічні рівняння прямої L з точкою M на ній запишуться так:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{-11} = \frac{z-0}{-5};$$

б) Вектор $\vec{s}\ \perp \Pi$ є нормальним вектором площини Π. Підставивши його координати замість коефіцієнтів A, B, C в рівняння в`язки площин, що проходять через точку M, тобто у рівність $A(x-4) + B(y+5) + C(z-0) = 0$, знайдемо: $2(x-4) - 11(y+5) - 5(z-0) = 0$ або $2x - 11y - 5z - 63 = 0$ – рівняння Π;

в) Вектори $\vec{s} = \{2;-11;-5\}$ і $\overrightarrow{M_1M} = \{4;-12;-2\}$ належать до площини Π_1. Їх векторний добуток дає нормальний вектор цієї площини $\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M} = \{-38;-16;\ 20\}$. Як числа A, B, C у рівнянні в`язки площин, що проходять через точку M, візьмемо координати цього вектора. Одержимо

$-38(x-4)-16(y+5)+20(z-0)=0$ або $19x+8y-10z-36=0$ – рівняння Π_1.

6^0. *Точка перетину прямої та площини* визначається спільним розв`язуванням їх рівнянь. Для прямої, що задана у канонічній формі (1), зручно перейти до параметричного запису (3), внести вираз для x, y, z у рівняння площини, знайти параметр t, що відповідає точці перетину, а потім за формулами (3) обчислити координати шуканої точки.

Приклад 2. Знайти точку M_2 перетину прямої L_1 з площиною Π з попереднього прикладу (рис. 6).

Розв`язування. Канонічні рівняння прямої L_1 перетворимо до параметричної форми:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-7}{-11}=\frac{z-2}{-5}=t \quad\Rightarrow\quad x=2t,\ y=-11t+7,\quad z=-5t+2.$$

Підставляємо ці вирази у рівняння площини Π:

$$2\cdot 2t-11(-11t+7)-5(-5t+2)-63=0,\quad 150\,t=150,\quad t=1.$$

Отже, $x=2$, $y=-4$, $z=-3$. Точка перетину $M_2(2;-4;-3)$.

Зауваження. Якщо у запису $\overrightarrow{M_1M}=t\vec{s}$ вважати, що $M(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ і $M_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ – точки, а $\vec{s}=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$ – вектор простору R^n, то це приведе до системи рівностей

$$\xi_1=x_1+m_1t,\ \xi_2=x_2+m_2t,\ \ldots\ ,\ \xi_n=x_n+m_nt. \qquad (11)$$

Систему (11) називають рівняннями прямої у просторі R^n.

♦ Багато основних задач на пряму та площину у просторі було розв`язано Монжем у 1771 р.

♦ **Гаспар Монж** (фр. математик, механік, 1746 – 1818) отримав фундаментальні результати в галузі нарисної та аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, науки про машини. Засновник та професор Політехнічної школи у Парижі. Морський міністр (1793), організатор військової промисловості Франції у період революції 1789 – 1793 рр. Учасник походу Наполеона в Єгипет (1798), президент організованого Наполеоном Каїрського інституту наук та мистецтв.

§13. Пряма на площині

Точка, що рухається з нескінченною швидкістю, миттєво утворює лінію.
Г. Лейбніц, нім. математик XVII ст.

1⁰. ***Загальне рівняння***. Будь-яку пряму, що розташована у площині xOy, можна визначити як лінію перерізу деякої площини $Ax + By + Cz + D = 0$ з координатною площиною $z = 0$. Загальна властивість точок такої прямої передається рівнянням

$$Ax + By + D = 0. \qquad (1)$$

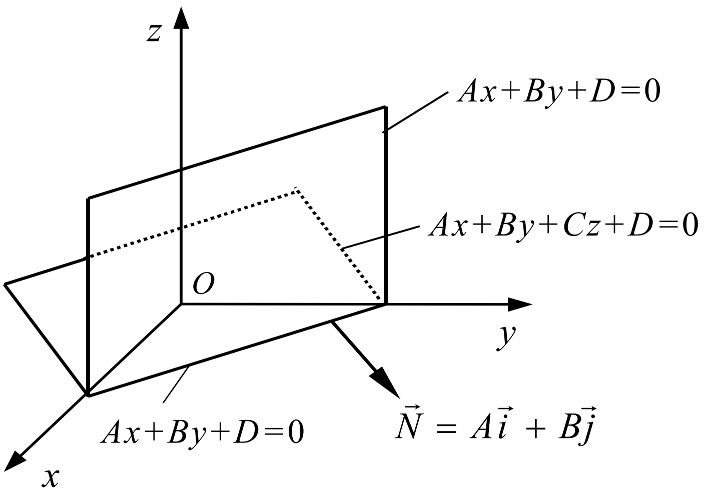


Рис. 1

При фіксованих числах A, B, D через пряму (1) проходить безліч площин

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

які відрізняються лише значенням коефіцієнта C (рис. 1). Серед них знаходиться площина, паралельна до осі Oz, з тим самим рівнянням, що і пряма (1). Нормальний вектор цієї площини

$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$$

разом з тим називають нормальним вектором прямої (1). Будь-яку пряму на площині xOy можна задати рівнянням вигляду (1) і навпаки: **будь-яке рівняння першого степеня відносно $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ на площині $\boldsymbol{xOy}$ являє собою деяку пряму**. Зокрема, $Ax + By = 0$ – пряма, що проходить через початок координат, $x = a$, $y = b$ – прямі, паралельні осям координат, $x = 0$ – вісь Оy, $y = 0$ – вісь Оx (рис. 2).

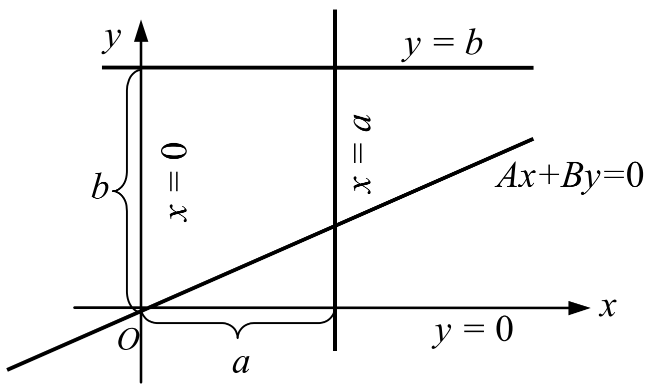


Рис. 2

2^0. ***Рівняння з кутовим коефіцієнтом***. Якщо $B \neq 0$, то рівняння (1) зводиться до вигляду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$. Покладаючи $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{D}{B} = b$, маємо **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**

$$y = kx + b, \tag{2}$$

причому $k = -\frac{A}{B}$.

При $x = 0$, $y = b$. Отже, b – це величина відрізку, який пряма відсікає від осі Oy. При $b = 0$ пряма проходить через початок координат, її рівняння $y = kx$. Із рівності (2) та рис. 3 знаходимо $k = \frac{y-b}{x} = tg\,\varphi$.

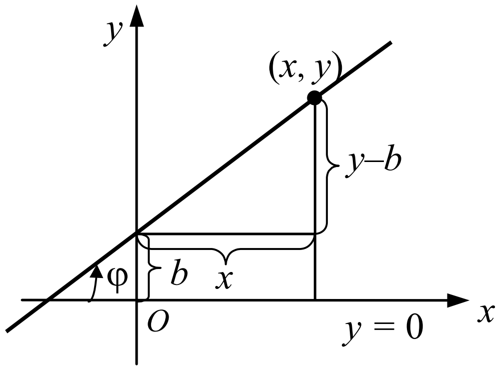


Рис. 3

Параметр k називають кутовим коефіцієнтом прямої. Він дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Кут φ відраховують від додатного напрямку осі Ox до прямої проти ходу годинникової стрілки. Усі прямі мають кутовий коефіцієнт за виключенням прямих вигляду $x = a$, які перпендикулярні до осі Ox (при цьому кут $\varphi = 90^0$ і його тангенс не існує).

3^0. ***В\`язка прямих***. Нехай $M_1(x_1, y_1)$ – деяка точка прямої $y=kx+b$. Тоді $y_1 = kx_1+b$ і відніманням отримаємо

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad – \tag{3}$$

рівняння прямої, що проходить через задану точку (x_1, y_1) з відомим нахилом k. Якщо k може приймати різні значення, то рівняння (3) представляє множину прямих, що проходять через точку M_1. Цю множину називають в\`язкою прямих.

4^0. ***Кутові співвідношення***. Кут θ між прямими L_1 та L_2 можна знайти як кут між нормальними векторами прямих $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$:

$$cos\,\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}.$$

Проте, частіше використовують формулу, в якій задіяні кутові коефіцієнти прямих k_1 і k_2.

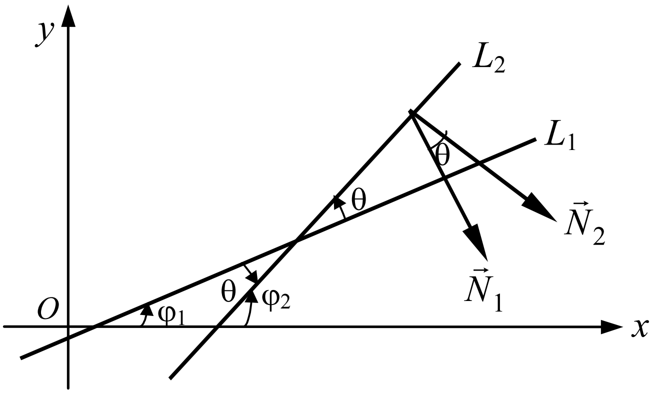


Рис. 4

Маємо $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ (рис. 4),

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_1}.$$

Враховуючи, що $tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$, одержуємо

$$tg\,\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (4)$$

Формула (4) визначає кут θ, який відраховується від прямої L_1 до прямої L_2 проти ходу годинникової стрілки. Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то вони однаково нахилені до осі Ox. Разом з тим будуть паралельні й їх нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Тому **умова паралельності прямих** подається однією з таких рівностей:

$$k_1 = k_2 \qquad \text{або} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (5)$$

Для перпендикулярних прямих кут між ними $\theta = 90^0$. Тангенс цього кута не існує, що має місце, коли у формулі (4) $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Нормальні вектори перпендикулярних прямих також перпендикулярні: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, отже, $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$. Тому **умова перпендикулярності прямих** записується так:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad \text{або} \qquad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (6)$$

Кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих обернені за величиною та протилежні за знаком.

5^0. ***Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***. Якщо пряма визначена двома її точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, то так само, як і в просторовому випадку, можна записати $\overrightarrow{M_1 M} \,||\, \overrightarrow{M_1 M_2}$, де $M(x, y)$ – точка прямої з поточними координатами. Проекції паралельних векторів пропорційні, тому

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (7)$$

Випадки $x_2 = x_1$ та $y_2 = y_1$ слід розглядати окремо. Перший з них означає, що пряма перпендикулярна до осі Ox. Її рівняння: $x = x_1$. У другому випадку пряма перпендикулярна до осі Oy, вона має рівняння $y = y_1$.

6^0. ***Рівняння прямої у відрізках на осях***. Пряма, що відсікає на осях Ox і Oy відрізки величиною a і b відповідно (рис. 5), проходить через точки

$M_1(a, 0)$ і $M_2(0, b)$. Підставляючи почергово координати цих точок у загальне рівняння (1), знаходимо A=–D/a, B=–D/b, а значить, $-\dfrac{D}{a}x-\dfrac{D}{b}y+D=0$. Звідси випливає

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8)$$

7⁰. ***Відстань точки від прямої***. Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$ і пряму L: $Ax + By + D = 0$ (рис. 5). Відстань d точки M_0 від прямої L можна знайти подібно до того, як знаходилася відстань точки від площини (5^0 §11):

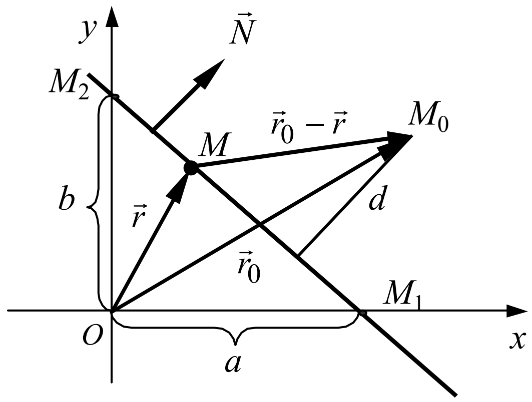


Рис. 5

$$d=\left|np_{\vec N}(\vec r_0-\vec r)\right|,$$

де $\vec r_0=x_0\vec i+y_0\vec j$, $\vec r=x\vec i+y\vec j$ – радіуси-вектори точки M_0 і довільної точки $M(x, y)$ прямої відповідно, $\vec N=\{A,B\}$ – нормальний вектор прямої. Маємо

$$np_{\vec N}(\vec r_0-\vec r)=\frac{\vec N\cdot(\vec r_0-\vec r)}{\left|\vec N\right|};$$

$$\vec N\cdot\vec r_0=Ax_0+By_0;\quad \vec N\cdot\vec r=Ax+By=-D;\quad \left|\vec N\right|=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Таким чином, приходимо до формули

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (9)$$

8⁰. ***Перетин прямих***. Координати точки перетину двох прямих знаходяться у результаті спільного розв`язування рівнянь цих прямих:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+By+D=0,\\ A_1x+B_1y+D_1=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ A_1 & B_1\end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}-D & B\\ -D_1 & B_1\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}A & -D\\ A_1 & -D_1\end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи $\Delta\neq 0$, то існує єдиний розв`язок цієї системи, отже, існує точка перетину прямих. При $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ система не має розв`язку, прямі паралельні, тому що у цьому випадку $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}\neq\dfrac{D}{D_1}$. Якщо ж

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то з огляду на пропорційність коефіцієнтів $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{D}{D_1}$ одне з рівнянь є наслідком другого, існує безліч розв`язків системи. Обидва рівняння мають той самий геометричний образ, тобто прямі зливаються.

Приклад. У трикутнику з вершинами $A(4;\,1)$, $B(-3;\,0)$, $C(3;\,8)$ знайти рівняння висоти AD, її довжину і точку перетину із стороною BC (рис. 6).

Розв`язування. Застосувавши формулу (7), за двома точками B і C знайдемо рівняння сторони BC: $\dfrac{x+3}{3+3} = \dfrac{y-0}{8-0}$ або $4x - 3y + 12 = 0$. Кутовий коефіцієнт цієї прямої $k = 4/3$. Згідно з умовою перпендикулярності (6) кутовий коефіцієнт висоти AD $k_1 = -3/4$. Знаючи нахил прямої AD і точку A на ній, за формулою (3) одержимо $y - 1 = -\frac{3}{4}(x-4)$. Отже, висота AD має рівняння $3x + 4y - 16 = 0$. Довжину відрізку AD знайдемо як відстань точки A від прямої BC, використовуючи формулу (9):

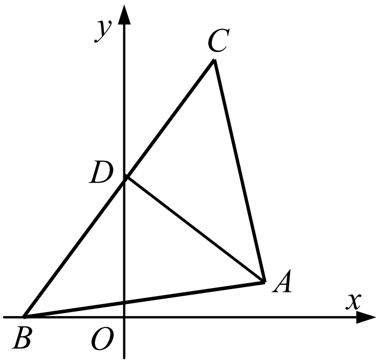


Рис. 6

$$AD = \frac{|4\cdot 4 - 3\cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5\,.$$

Розв`язуючи спільно рівняння $4x - 3y + 12 = 0$ (BC) і $3x + 4y - 16 = 0$ (AD), визначаємо координати точки їх перетину D: $x = 0$, $y = 4$, тобто $D(0;\,4)$.

♦ Загальне рівняння прямої отримано Ферма спільно з впровадженням системи координат (1636). Він стверджував: якщо жодна з невідомих у даному рівнянні не має степеня вище другого, то рівняння описує або пряму, або конічний переріз (див. зауваження у § 17), тобто криву 2-го порядку.

§14. Криві 2-го порядку. Коло

Чия рука це коло століття розімкне?
Хто кінець і початок у кола знайде?
О. Хайям, тадж. поет і математик XI ст.

1^0. ***Загальне рівняння кривої 2-го порядку***. Будь-яке рівняння 1-го степеня із змінними x та y на площині xOy визначає деяку пряму, тобто лінію 1-го порядку. Лініями або кривими 2-го порядку називають плоскі криві, які описують рівняння 2-го степеня відносно поточних координат. У загальному випадку таке рівняння із змінними x і y має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,, \tag{1}$$

де хоча б один з старших коефіцієнтів A, B, C відрізняється від нуля. Найпростіша лінія 2-го порядку – коло.

2⁰. ***Рівняння кола***. Коло – це множина точок площини, що рівновіддалені від даної точки площини, яка зветься центром.

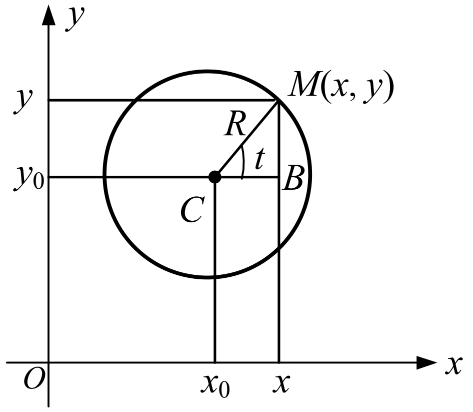


Рис. 1

Якщо $C(x_0,\ y_0)$ – центр, R – радіус, а $M(x,\ y)$ – довільна точка кола, то очевидно (рис. 1), що $|CM|^2 = R^2$ або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Цю рівність називають **канонічним рівнянням кола**.

Розкриваючи у (2) дужки, після перетворень $-2x_0 = m$, $-2y_0 = n$, $x_0^2 + y_0^2 - R^2 = p$ одержуємо **загальне рівняння кола**

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0. \qquad (3)$$

Порівнюючи (3) з (1), приходимо до висновку, що загальне рівняння (1) лише в тому випадку може представляти коло, якщо у ньому $A = C$ і $B = 0$, тобто член з добутком xy відсутній.

Під час руху точки $M(x,\ y)$ вздовж кола у додатному напрямі, тобто проти ходу годинникової стрілки, центральний кут t (рис. 1), який рухомий радіус CM утворює з віссю Ox, змінюється при повному обході від 0 до 2π. Із прямокутного трикутника BCM випливає: $x - x_0 = R\cos t$, $y - y_0 = R\sin t$. Отримуємо дві рівності для поточних координат точки:

$$x = x_0 + R\cos t, \quad y = y_0 + R\sin t. \qquad (4)$$

Їх називають **параметричними рівняннями кола**.

При виключенні параметра t рівняння (4) зводиться до канонічного рівняння (2):

$$(x - x_0)^2 = R^2\cos^2 t,\ (y - y_0)^2 = R^2\sin^2 t \ \Rightarrow\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Приклад. Знайти відстань між центрами кіл

$$x^2 + y^2 - 3x + 8y + 12 = 0 \ \text{ і } \ 4x^2 + 4y^2 + 20x + 8y + 13 = 0.$$

Чи перетинаються ці кола?

Розв`язування. Приведемо рівняння кіл до канонічного вигляду, для чого виділимо повні квадрати змінних:

1) $\left(x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + \left(y^2 + 2\cdot 4y + 16\right) - 16 + 12 = 0$, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = \frac{25}{4}$;

2) $4\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 4\left(y^2 + 2\cdot 1y + 1 - 1\right) + 13 = 0$;

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+4(y+1)^2=16, \qquad \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+1)^2=4.$$

Отже, перше коло має центр у точці $C_1(3/2;\,-4)$, її радіус $R_1 = 5/2$. Центром другого кола є точка $C_2(-5/2;-1)$, радіус $R_2 = 2$. Відстань $C_1C_2=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)^2+(-4+1)^2}=5$. Оскільки $R_1 + R_2 < C_1C_2$, то задані кола загальних точок не мають.

3⁰. ***Циклоїда***. Нехай коло радіуса a котиться вздовж осі Ox. Фіксована точка M кола описує при цьому траєкторію, яку називають циклоїдою (рис. 2).

Циклоїда не є лінією 2-го порядку, тому що її рівняння у декартових координатах не належить до вигляду (1). Найпростіше записується параметричні рівняння цієї кривої. Позначимо через x, y координати точки M, через t кут $\widehat{MCN}$, де C – центр кола, $CN \perp Ox$. Вихідним вважаємо положення, коли точка M збігається з точкою O (при цьому $t = 0$). Якщо коло покотити назад так, щоб точка M прийняла положення O, то дуга $\smile{MN}$ за довжиною укладеться на відрізку ON, тобто $ON = \smile{MN} = at$. Із трикутника MCK маємо $MK = a\sin t$, $CK = a\cos t$, $0 \le t \le \pi/2$. Очевидно, $x = ON - MK$, $y = CN - CK$ або $x = at - a\sin t$, $y = a - a\cos t$. Таким чином, дістаємо параметричні рівняння циклоїди

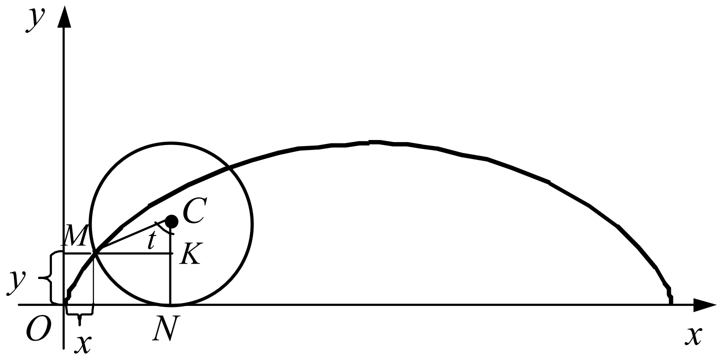


Рис. 2

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \tag{5}$$

Параметр t може тут приймати, власно кажучи, будь-які значення. Першій арці циклоїди відповідають значення $0 \le t \le 2\pi$.

♦ Під час руху під дією сили тяжіння по циклоїді, що обернена донизу, маятник коливається із сталим періодом, незалежно від початкового відхилення. Це встановив Х. Гюйгенс (гол. фізик і математик, 1629 – 1695) у зв`язку з проблемою маятникових годинників (1658 – 1665, надруковано у 1673 г.) Відтоді циклоїда звертає на себе увагу багатьох відомих математиків XVII – XVIII ст.

§15. Еліпс

В світі є речі важливіші за найпрекрасніші відкриття – це знання методу, яким вони були здійснені..
Г. Лейбніц, нім. математик XVII ст.

1⁰. ***Канонічне рівняння***. Еліпс – це множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок площини, що звуться фокусами, є величина стала. Оберемо систему координат так, щоб фокуси F_1 і F_2 розташувалися на осі Ox симетрично відносно точки O (рис. 1). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпсу. Уведемо позначення:

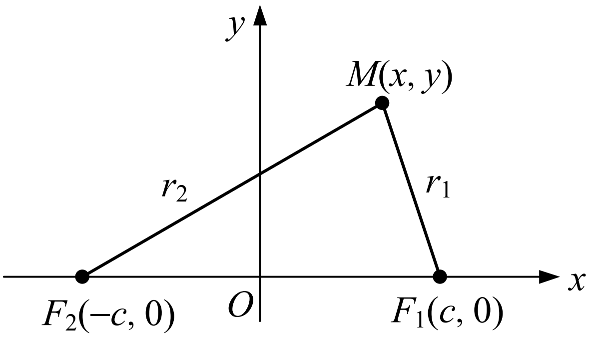


Рис. 1

$$F_1M = r_1, F_2M = r_2,\ F_1F_2 = 2c,$$
$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Припустимо, що $2a > 2c$, тобто $a > c$. У цих позначеннях визначаються координати фокусів: $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ та відстань $F_1M = 2a - F_2M$, тобто

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\,.$$

Далі, підносячи до квадрату, отримаємо

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx;\ a^2\left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right); \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ і можна покласти $a^2 - c^2 = b^2$. Маємо **канонічне рівняння еліпса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2\ . \tag{2}$$

2⁰. ***Форма еліпса***. З рівняння (1) випливає, що еліпс симетричний відносно осей та початку координат. Якщо еліпсу належить точка $M(x_0, y_0)$, то й точки $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ також належать йому. Це і приводить до вказаної симетрії. Для точок еліпсу у першій чверті із рівняння (1) випливає $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. При $x > a$ $a^2 - x^2 < 0$ і y приймає уявні значення. Отже, на еліпсі (1) немає точок, для яких $y > b$, і по мірі збільшення x від 0 до a

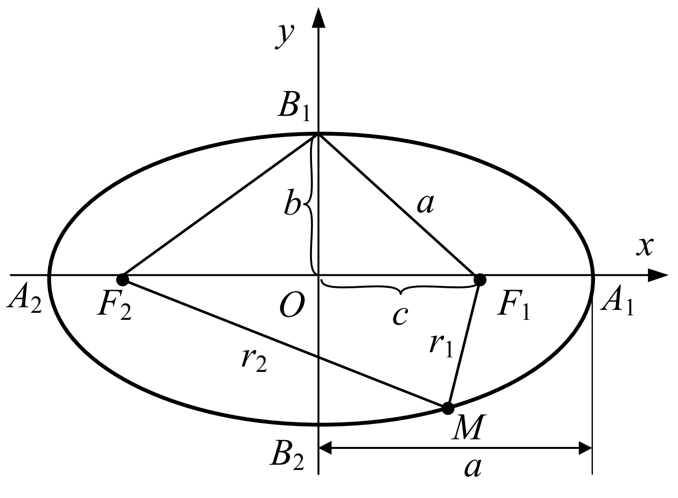


Рис. 2

y зменшується від b до 0. У результаті цього дослідження визначається форма еліпса (рис. 2). Точки перетину еліпса з його осями симетрії $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0; -b)$ – вершини еліпса. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2 – осі еліпса; $A_1A_2 = 2a$; $B_1B_2 = 2b$; a – велика, b – мала піввісі; $c = OF_1 = OF_2$ – півфокусна відстань; центр еліпса – це точка перетину його осей симетрії.

3^0. ***Ексцентриситет і фокальні радіуси***. Величину

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{3}$$

називають **ексцентриситетом** еліпса. Через те, що $0 \le c < a$, $0 \le \varepsilon < 1$. Ексцентриситет характеризує форму еліпса. Щоб переконатися у цьому, зробимо такі перетворення. Згідно з (3) і (2) маємо

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2.$$

При $\varepsilon = 0$, $a = b$, $c = 0$ еліпс перетворюється на коло, його фокуси зливаються з центром. По мірі наближення ε до 1 дріб b/a спадає до нуля. Еліпс при цьому стає все більш сплюснутим.

Фокальні радіуси точки $M(x, y)$ еліпса визначається так (рис. 1):

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Звідси знаходимо $r_2^2 - r_1^2 = 4cx$ або $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx$. За означенням еліпса $r_2 + r_1 = 2a$, тому $r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x$. Розв`язуючи систему двох рівнянь $r_2 + r_1 = 2a$ і $r_2 - r_1 = 2\varepsilon x$, одержуємо формули, зручні для відшукування фокальних радіусів точки еліпса з абсцисою x:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \qquad r_2 = a + \varepsilon x. \tag{4}$$

Приклад. Еліпс, симетричний відносно осей координат, з ексцентриситетом $\varepsilon = 3/5$ проходить через точку $M(4;\ 12/5)$. Знайти канонічне рівняння еліпса, його параметри, фокальні радіуси точки M.

Розв`язування. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ містить два невідомих параметри: a і b. Щоб їх знайти, підставимо у це рівняння координати точки M, що лежить на еліпсі. Отримаємо $\frac{16}{a^2}+\frac{144}{25b^2}=1$. Відомо також, що $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$. Маємо дві рівності з трьома невідомими a, b, c. Приєднаємо до них ще одну рівність: $b^2=a^2-c^2$. Розв`язуючи систему, знайдемо: $c=\frac{3}{5}a$, $b^2=a^2-\frac{9}{25}a^2=\frac{16}{25}a^2$, $\frac{16}{a^2}+\frac{144}{25\cdot\frac{16}{25}a^2}=1$, $\frac{16}{a^2}+\frac{9}{a^2}=1$,

$\frac{25}{a^2}=1$, $a^2=25$, $b^2=16$, $a=5$, $b=4$, $c=3$. Маємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

За формулами (4) обчислюємо фокальні радіуси точки M:

$$r_1=5-\frac{3}{5}\cdot 4=2{,}6;\quad r_2=5+\frac{3}{5}\cdot 4=7{,}4.$$

4⁰. ***Параметричні рівняння***. Побудуємо два кола із загальним центром на початку координат і радіусами a та b ($a>b$). Під довільним кутом t до осі Ox з точки O проведемо промінь. Через точки його перетину з колами проведемо прямі AM і BM, $AM \| Oy$, $BM \| Ox$. Для координат точки $M(x,y)$ за рис.3 знайдемо

$$x=a\,cos\,t,\ y=b\,sin\,t. \qquad (5)$$

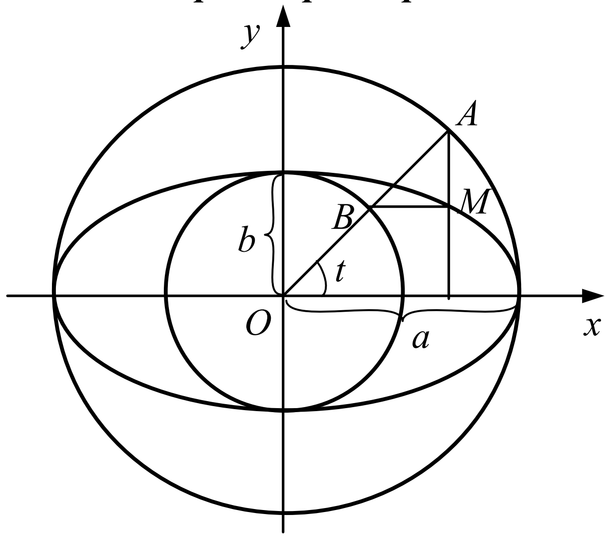


Рис. 3

Множина точок M, що відповідають значенням t від 0 до 2π, представляє еліпс. Справді, виключивши з рівностей (5) параметр t, одержимо

$$x^2/a^2=cos^2 t,\ \ y^2/b^2=sin^2 t \ \Rightarrow\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

тобто канонічне рівняння (1).

Рівності (5) називають **параметричними рівняннями еліпса**.

♦ Теорія конічних перерізів, створена древньогрецькими математиками, не знаходила застосування дві тисячі років, поки Кеплер не скористався нею для опису руху планет Сонячної системи. Один з законів Кеплера наголошує: планети переміщуються по еліптичних орбітах, у фокусі яких знаходиться Сонце.

♦ **Іоганн Кеплер** (нім. математик, астроном, механік, 1571 – 1630) – син солдата-наймита, що мандрував Європою і згодом зник безвісті. Хворобливий та кволий Іоганн працював прислужником у корчмі, яку утримувала його мати. З 13 років навчався у семінарії, жив на невелику грошову допомогу близьких та стипендію, яку за видатні здібності йому сплачувало рідне місто Вейль. Заняття розпочиналися влітку о 4 годині ранку, взимку – о 5-й. Навчання Кеплер продовжив в університеті на теологічному факультеті. Не закінчивши курс, змушений був займатися викладанням математики в протестантській школі (м. Грау, Австрія). У 25 років видав книгу «Таємниця Всесвіту», де підтримав погляди Коперніка. Звернув на себе увагу Г. Галілея і астронома Тіхо Браге, у 1600 р. став помічником останнього. Після смерті Тіхо Браге – астроном і математик при дворі імператора Рудольфа II у Празі. Вперто шукав потаємні пропорції й закони симетрії, що правлять світом. Його робота «Нова астрономія» (1609) була внесена Ватиканом у список заборонених книг. Постійні хвороби, нестачі, смерть дітей і дружини, переслідування церкви, блукання – ніщо не збило Кеплера з обраного шляху: «…Я пишу мою книгу. Чи прочитають її сучасні мені люди або нащадки, мені це байдуже: вона очікуватиме свого читача – хіба Господь Бог не чекав 6000 років на споглядача свого творіння».

§16. Гіпербола

Важко позбавитися відчуття, що ці математичні формули живуть незалежним життям, ... , що вони мудріші, ніж ми самі, ... і що ми запозичаємо у них більше, ніж було закладено в них первісно.
Г. Герц, нім. фізик XIX ст.

1^0. ***Канонічне рівняння***. Гіпербола – це множина точок площини, для яких абсолютна величина різниці їх відстаней від двох даних точок площини, що називаються фокусами, є величиною сталою. Оберемо систему координат так, щоб фокуси F_1 та F_2 розташувалися на осі Ox симетрично відносно точки O (рис. 1). Візьмемо довільну точку $M(x,y)$ гіперболи і введемо позначення:

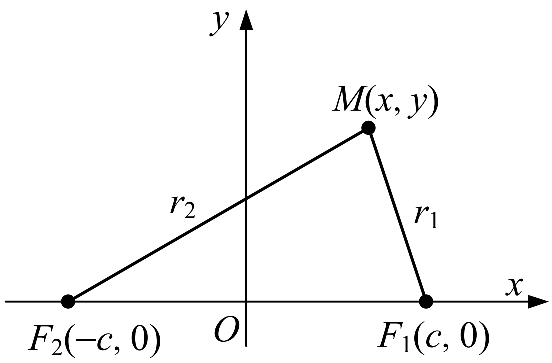


Рис. 1

$$F_1M = r_1,\ F_2M = r_2,\ F_1F_2 = 2c,$$
$$|r_2 - r_1| = 2a.$$

Припускаємо $c > a$. Маємо:

$$F_1(c;0),\quad F_2(-c;0),$$

$$r_2 - r_1 = \pm 2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} \pm 2a.$$

Позбавляючись від радикалів, знаходимо

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2;$$

$$cx-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2};\ c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right);$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right); \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Оскільки $c > a$, то $c^2 - a^2 > 0$. Покладаючи $c^2 - a^2 = b^2$, одержуємо **канонічне рівняння гіперболи**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

де

$$b^2=c^2-a^2. \tag{2}$$

2^0. ***Форма гіперболи***. Рівняння (1) вміщує лише квадрати змінних і якщо його задовольняє точка $(x_0,\ y_0)$, то таку саму властивість мають усі чотири точки $(\pm\ x_0,\ \pm\ y_0)$. Тому гіпербола (1) симетрична відносно осей та початку координат. З рівняння (1) випливає $x^2/a^2 \ge 1$, $x^2 \ge a^2$, тобто на гіперболі (1) немає точок, для яких $|x| < a$, отже – вона не перетинає вісь Oy. Цю вісь симетрії кривої називають уявною. Через те, що $y^2/b^2 = x^2/a^2 - 1$, при $x = a$ $y = 0$, причому із зростанням x від a до ∞ абсолютна величина y зростає від нуля до ∞. У результаті визначається форма гіперболи (рис. 2). Крива складається з двох віток – лівої та правої. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини гіперболи; B_1B_2 – уявна вісь; A_1A_2 – дійсна вісь; $A_1A_2 = 2a$; $B_1B_2 = 2b$, a і b – піввісі; $c = OF_1 = OF_2$ – півфокусна відстань.

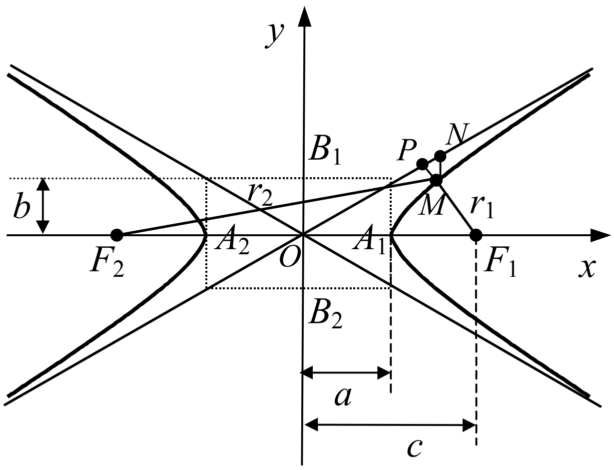


Рис. 2

3^0. ***Асимптоти гіперболи***. Для точок гіперболи, що розташовані у першій чверті,

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

При достатньо великих x величиною a^2 під коренем можна знехтувати: $y \approx \frac{b}{a}x$. Значить, гіпербола наближається до прямої $y=\frac{b}{a}x$. Дійсно, нехай у 1-й чверті $M(x,y)$ – точка гіперболи, $N(x,Y)$ – точка з тією самою абсцисою, яка належить до прямої $y=\frac{b}{a}x$.

Тоді $MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Помноживши і поділивши цю різницю на суму $x+\sqrt{x^2-a^2}$, після нескладних перетворень одержимо $MN = ab\Big/\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$.

Із зростанням x знаменник стає як завгодно великим, чисельник же зберігає стале значення. Величина MN, а разом з нею і найкоротша відстань MP при цьому стають як завгодно малими. Таку ж властивість має пряма $y=-\dfrac{b}{a}x$. Прямі

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{3}$$

називають **асимптотами гіперболи**. Вони проходять через центр гіперболи, причому так, що відстань від точки гіперболи до відповідної асимптоти прямує до нуля, коли точка віддаляється вздовж гіперболи в нескінченність. Для більшої точності побудову гіперболи починають з побудови її асимптот.

4^{0}. ***Ексцентриситет і фокальні радіуси***. Величину

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \tag{4}$$

називають **ексцентриситетом гіперболи**. Через те, що $c>a$, у гіперболи $\varepsilon>1$. Згідно з (4) і (2) маємо

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Отже, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\varepsilon^2-1$. Із зростанням ε відношення b/a зростає, що приводить до збільшення нахилу асимптот, а значить – до розпрямлення віток гіперболи.

Як і у випадку еліпса, можна показати, що фокальні радіуси точки гіперболи з абсцисою x, розташованої на будь-якій з віток гіперболи, визначаються формулами

$$r_1=|a-\varepsilon x|,\qquad r_2=|a+\varepsilon x|. \tag{5}$$

Приклад. Знайти параметри гіперболи $16x^2-9y^2=144$, її асимптоти і точки на ній, відстань яких від лівого фокуса дорівнює 7.

Розв`язування. Зведемо рівняння до канонічного виду: $\dfrac{16x^2}{144}-\dfrac{9y^2}{144}=1$;

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Маємо $a^2=9,\ :b^2=16,\ c^2.=a^2+b^2=25$. Отже, $a=3,\ b=4,\ :c=5,$

$\varepsilon = \dfrac{5}{3}$. Рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$. Знаючи, що фокальний радіус точки $r_2 = 7$, згідно з 2-ю з формул (5) отримаємо $\left|3 + \dfrac{5}{3}x\right| = 7$, $3 + \dfrac{5}{3}x = \pm 7$, $\dfrac{5}{3}x = -3 \pm 7$, $5x = -9 \pm 21$, $x_1 = \dfrac{12}{5}$, $x_2 = -6$. Очевидно, значення $x_1 = 2{,}4$ треба відкинути, тому що на гіперболі немає точок, у яких $|x| < a = 3$. Підставивши значення $x_2 = -6$ до рівняння гіперболи, знайдемо ординату шуканої точки: $16 \cdot 36 - 9y^2 = 144$, $9y^2 = 16 \cdot 36 - 144$, $y^2 = 64 - 16 = 48$, $y = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$. Отже, умову задачі задовольняють дві точки гіперболи: $\left(-6; \pm 4\sqrt{3}\right)$.

♦ Асимптота гіперболи (*asymptotus* – така, що не збігається, гр.) – пряма, що не має спільних точок, тобто не збігається з гіперболою.

§17. Парабола

Парабола лише причаїлась у рівнянні,
не вмерла в ньому так, як і цифра у формулі.
О. Герцен, рос. письменник XIX ст.

Параболою називають множину точок площини, рівновіддалених від даної точки – фокуса і даної прямої – директриси, що належать тій самій площині. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно до директриси DN у напрямку, що вказано на рис.1, а відстань DF ділилася точкою O навпіл. Позначимо $DF = p$. Тоді фокус $F(p/2;\ 0)$, директриса DN: $x = -\,p/2$. Для довільної точки параболи $M(x,\ y)$ за означенням $FM = NM$ або $r = d$. У координатній формі ця рівність подається так:

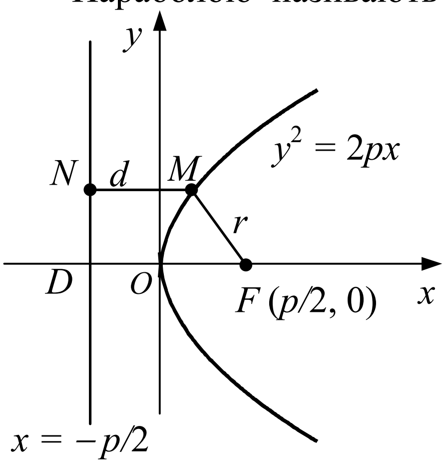


Рис. 1

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Далі знайдемо $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$. У результаті отримаємо **канонічне рівняння параболи**

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Оскільки тут $p > 0$, то можливі лише невід`ємні значення x, причому кожному $x > 0$ відповідають два значення y, які відрізняються тільки знаком. Із зростанням x від 0 до ∞ абсолютна величина y також зростає від 0 до ∞. Парабола (1) симетрична відносно осі Ox і має вигляд, що зображений на рис. 1. Якщо параметр p, що входить до рівняння (1), збільшити, то при фіксованому x абсолютна величина y стане більше, що приведе до розширення параболи.

З рівності $r = d$ випливає формула для **фокального радіуса** точки параболи з абсцисою x:

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (2)$$

Очевидно, рівняння параболи з вершиною у точці O і симетричної відносно осі Oy можна здобути з рівняння (1), якщо в ньому x та y поміняти місцями, тобто воно має вигляд

$$x^2 = 2py. \qquad (3)$$

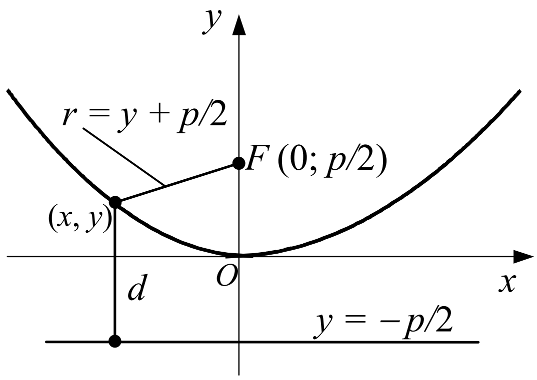


Рис. 2

Основні співвідношення для такої параболи наведені на рис. 2. Якщо у рівнянні (1) або (3) параметр $p < 0$, то таке рівняння також визначає параболу з вершиною на початку координат, симетричну відносно відповідної від`ємної координатної півосі ($y^2 = 2px$ – відносно Ox, $x^2 = 2py$ – відносно Oy). У цьому випадку відстанню від фокуса до директриси є $|p|$. За модулем слід брати і вираз для фокального радіуса r (рис. 3).

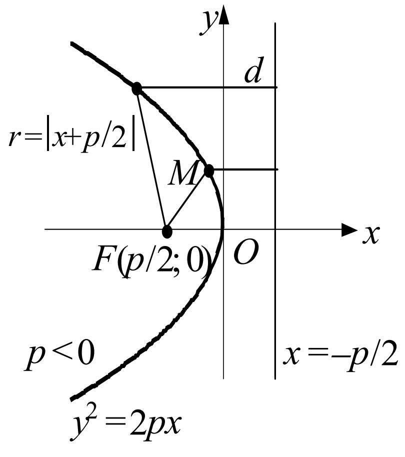


Рис. 3

Приклад. Парабола з вершиною на початку координат симетрична відносно осі Ox і проходить через точку $M(-1;\ 3)$. Знайти рівняння параболи, її директрису, фокус F, відстань FM.

Розв`язування. Шукана парабола має рівняння $y^2 = 2px$. Через те, що точка M належить до цієї кривої, координати точки можна підставити до рівняння параболи: $9 = -2p \cdot 1$.

Отже, параметр $p = -9/2$. Рівняння параболи $y^2 = -9x$, її директриса $x = 9/4$, фокус $F(-9/4;\, 0)$, фокальний радіус точки M $r = = |-1 - 9/4| = 3{,}25$ (рис. 3).

Зауваження. Криві 2-го порядку – коло, еліпс, гіпербола, парабола являють собою різні плоскі перерізи прямого кругового конуса (рис. 4). При збільшенні нахилу січної площини зростає ексцентриситет кривої. При переході через критичне значення $\varepsilon = 1$, що відповідає параболі (січна площина паралельна до твірної конуса), форма перерізу якісно змінюється: виникає незамкнена крива.

Еліпс та гіпербола, як і парабола, мають директриси, тобто прямі, що перпендикулярні фокальній осі, і такі, що для усіх точок кривої $\frac{r}{d} = \varepsilon$ (r – фокальний радіус точки; d – відстань точки від відповідної директриси). У параболи за означенням відношення $\frac{r}{d} = 1$, тому для усіх парабол покладають $\varepsilon = 1$. На рис. 5 зображені еліпс, гіпербола і парабола із загальним фокусом F і директрисою.

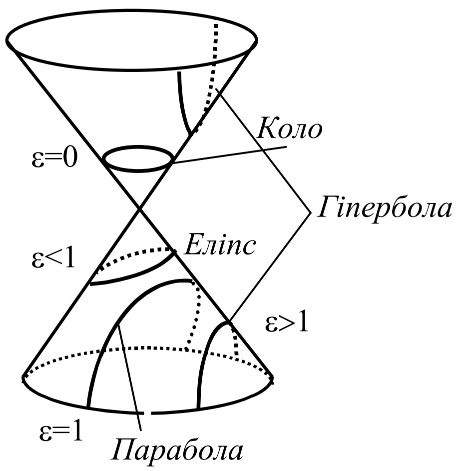


Рис. 4

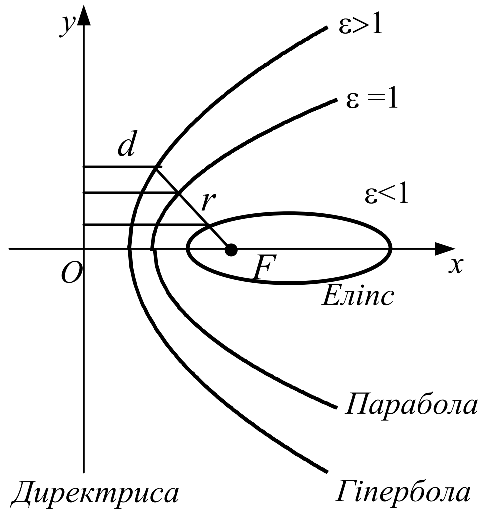


Рис. 5

♦ Криві 2-го порядку вивчалися понад двох тисячоліть тому грецькими математиками. Аполлонію (~ 260 – 170 до н. е.), що жив у Олександрії й Пергамі, належить трактат з восьми книг (частин) «Конічні перерізи». До наших часів дійшло сім книг, перші чотири – грецькою мовою, ще три – у арабському перекладі. Алгебра тоді не існувала, опис кривих як плоских перерізів конуса дається в словесній формі. У сучасних позначеннях означення Аполлонія відповідають формулам $y^2 = 2px$ – парабола, тобто рівність, $y^2 = px + px^2/a$ – гіпербола, тобто надлишок, $y^2 = px - px^2/a$ – еліпс, тобто нестача (a, p – сталі).

♦ Термін «фокус» (*focus* – вогнище, вогонь, лат.) у 1604 р. увів Кеплер. Йому було відомо, що промені, паралельні до вісі параболічного дзеркала, відбиваючись від його поверхні, збираються у фокусі, отже, здатні запалити вміщену туди речовину, яка може спалахувати.

§18. Перетворення координат на площині

Точка – це те, менше чого не може бути ніщо інше. Отже, точка є першим початком геометрії.
Леонардо да Вінчі, іт. художник і вчений XV ст.

1⁰. ***Паралельне перенесення системи***. Нехай нова система координат має осі, напрямки яких збігаються з напрямками старих осей Ox і Oy, а її початок розміщений у точці $O_1\ (x_0, y_0)$ (рис. 1). Координати довільної точки M позначимо у старій системі (x, y), а у новій (X, Y). Радіуси-вектори цієї точки у системах, що розглядаються і мають один і той базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, подаються так:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad \vec{r}\,' = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

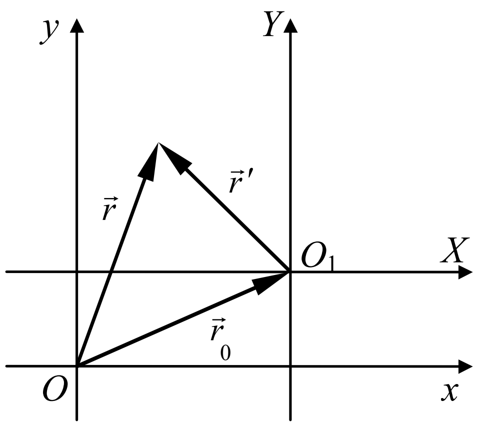


Рис. 1

Радіус-вектор точки O_1 у старій системі $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Очевидно, $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$ або $x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j} + x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. З рівності векторів випливає рівність їх координат. Тому

$$x = X + x_0, \qquad y = Y + y_0. \tag{1}$$

Ці формули встановлюють зв`язок між старими й новими координатами точки.

Перехід до нової системи виконують, зокрема, коли загальне рівняння кривої 2-го порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

хочуть спростити і звести до канонічного вигляду. За допомогою перетворення (1) це можливо, якщо у рівнянні (2) член з добутком xy відсутній, тобто коли рівняння має вигляд

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{3}$$

Тип кривої при цьому визначається старшими коефіцієнтами A і C. Так, якщо A і C одного знаку, то крива (3) еліптичного типу (при $A = C$ – коло, дійсне чи уявне). Якщо A і C різних знаків, то крива гіперболічного типу (гіпербола або пара прямих, на які розпадається крива, наприклад, $x^2 - y^2 = 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm x$). При $A \neq 0, C = 0$ або $A = 0,\ C \neq 0$ – крива параболічного типу (до першого випадку належить парабола з віссю симетрії, паралельній до осі Oy, до другого – парабола з віссю, паралельною до осі Ox).

Приклад. Привести до канонічного вигляду і побудувати криву

$$4x^2 + y^2 - 12x + 4y - 3 = 0.$$

Розв`язування. Коефіцієнти $A = 4$, $C = 1$ одного знаку, отже, це крива еліптичного типу. Виділимо повні квадрати змінних:

$$4\left(x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 2\cdot 2y + 4 - 4\right) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Перенесемо систему координат у невизначену поки що точку $O_1(x_0, y_0)$. Згідно з формулами (1) рівняння перетворюється так:

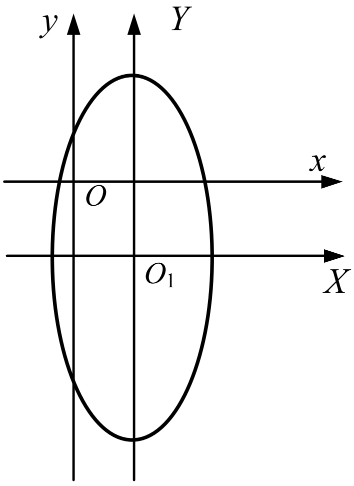


Рис. 2

$$4\left(X + x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(Y + y_0 + 2\right)^2 = 16.$$

Рівняння прийме найпростішу форму, якщо покласти $x_0 = 3/2$, $y_0 = -2$, тобто помістити новий початок координат у точку $O_1(3/2;-2)$. При цьому

$$4X^2 + Y^2 = 16 \quad \text{або} \quad \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння еліпса у новій системі координат. Побудуємо стару і нову системи, а потім, знаючи півосі еліпса $a = 2$, $b = 4$, будуємо і саму криву у новій системі координат (рис. 2).

2⁰. ***Поворот системи***. Нехай нова система XOY одержана поворотом навколо точки O на кут α старої системи xOy (рис. 3). Радіуси-вектори довільної точки M у цих системах записуються:

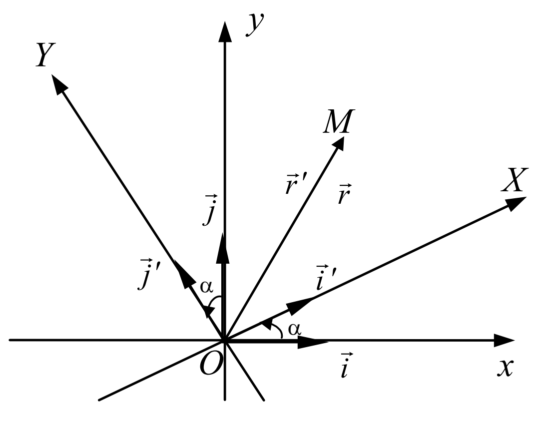


Рис. 3

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{и} \quad \vec{r}' = X\vec{i}' + Y\vec{j}',$$

де x, y і X, Y, $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{i}', \vec{j}'$ – координати точки M та базисні вектори у старій і новій системах координат відповідно. Вектори $\vec{r}$ і $\vec{r}'$ рівні, але ця рівність нічого не дає, поки вони не зведені до спільного базису. Відомо (7.10), що координатами одиничного вектора у прямокутному базисі є його напрямні косинуси. Тому

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\left(90^0 - \alpha\right), \qquad \vec{j}' = \vec{i}\cos\left(90^0 + \alpha\right) + \vec{j}\cos\alpha.$$

Із врахуванням останніх співвідношень рівність $\vec{r} = \vec{r}'$ зводиться до вигляду

$$x\vec{i}+y\vec{j}=X\left(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha\right)+Y\left(-\vec{i}\sin\alpha+\vec{j}\cos\alpha\right).$$

Порівнявши координати векторів, отримаємо формули

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\qquad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha. \tag{4}$$

У матричному запису (див. 6^0 § 8, формули (8.10), (8.13))

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\quad\text{або}\quad\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

де $P=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ – матриця переходу до нового базису.

Маємо $\det P=1$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, тобто $P^{-1}=P^T$.

Перетворення з матрицею P – ортогональне.

Якщо у загальному випадку (2) коефіцієнт $B\neq 0$, то зведення такого рівняння до канонічної форми можливе лише за допомогою повороту системи на деякий кут α, що підбирають так, щоб у нових осях член з добутком XY був відсутній. Згідно з (4) до появи добутку XY приводять лише три старших члени рівняння (2), що перетворюються при повороті системи на такий вираз:

$$A(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+B(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+$$
$$+C(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2=X^2(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)+$$
$$+Y^2(A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)+XY(-A\sin2\alpha+B\cos2\alpha+C\sin2\alpha).$$

Бажане спрощення має місце, якщо виконується рівність

$$(-A+C)\sin2\alpha+B\cos2\alpha=0,$$

з якої випливає формула, що визначає кут повороту системи координат:

$$tg2\alpha=\frac{B}{A-C}. \tag{5}$$

Поворотом систем рівняння (2) зводиться до вигляду (3), після чого, якщо це необхідно, виконують паралельний переніс осей.

Зауваження. У загальному випадку тип кривої визначається трьома старшими коефіцієнтами рівняння (2): якщо $B^2-4AC<0$, то крива еліптичного типу, при $B^2-4AC>0$ – гіперболічного, а при $B^2-4AC=0$ – параболічного.

Приклад. Привести до канонічного виду і побудувати криву $xy=h^2$.

Розв`язування. Тут старші коефіцієнти $A=0$, $B=1$, $C=0$, $B^2-4AC=1>0\Rightarrow$ крива гіперболічного типу. Знаменник у формулі (5) $A-C=0$, $tg\,2\alpha$ не існує, що має місце при $2\alpha=90^0$, $\alpha=45^0$. Виконавши поворот системи координат на цей кут, згідно з

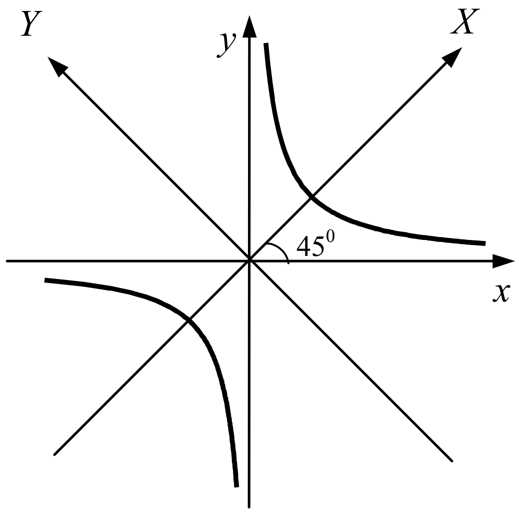


Рис. 4

(4) одержимо

$$x = X\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - Y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = X\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + Y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Вихідне рівняння прийме вигляд

$$\frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right) = h^2 \quad \text{або} \quad \frac{X^2}{2h^2} - \frac{Y^2}{2h^2} = 1.$$

Це канонічне рівняння рівнобічної гіперболи з піввісями $a = b = h\sqrt{2}$. Її асимптотами у новій системі є прямі $Y = \pm X$, що збігаються зі старими осями координат (див. рис. 4).

♦ Формули перетворення координат отримав Дж. Грегорі (шотл. математик, 1638 – 1675). Його дослідження стали істотним внеском у підготовку найважливіших математичних відкриттів XVII ст.

§19. Полярна система координат

Математик, подібно митцю або поету, створює візерунки. І якщо ці візерунки більш стійкі, то лише завдяки тому, що вони складені з ідей.
Г. Харді, англ. математик XX ст.

1⁰. ***Полярні координати***. Полярну систему утворюють полюс O – фіксована точка, яка є початком координат, і полярна вісь OP – промінь, що виходить з полюса з встановленим масштабом довжини.

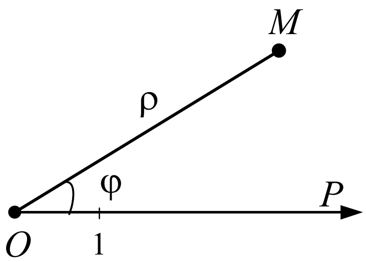


Рис. 1

Положення довільної точки M на площині визначається двома координатами – полярним радіусом $\rho = OM$ і полярним кутом φ, який промінь OM утворює з віссю OP. Записують $M(\varphi,\ \rho)$. Додатним вважають відлік кута φ від полярної осі до променя OM проти ходу годинникової стрілки. Пара чисел $(\varphi,\ \rho)$ однозначно визначає положення точки. Разом з цим для даної точки M вибір кутової координати не однознач-

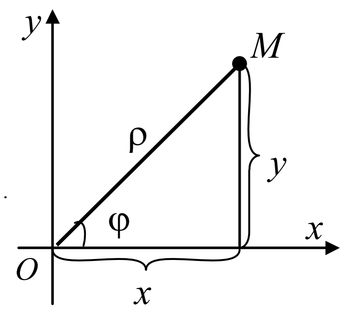


Рис. 2

ний, тому що усі значення $\varphi \pm 2\pi n$, де n – будь-яке ціле число, відповідають одному й тому самому променю OM. Якщо сумістити вісь Ox прямокутної системи координат з полярною віссю OP так, щоб початки цих систем збіглися, то зв`язок між декартовими і полярними координатами точки M прийме вигляд

$$x = \rho cos\varphi\ , \qquad y = \rho sin\varphi$$

або

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \ tg\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \varphi = arctg\frac{y}{x} + k\pi, \quad k \in Z\,,$$

$$cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

2⁰. ***Рівняння деяких ліній***. Багато кривих у полярних координатах мають більш прості рівняння, ніж у декартовій системі. Зокрема, це має місце для ліній, що наведені нижче:

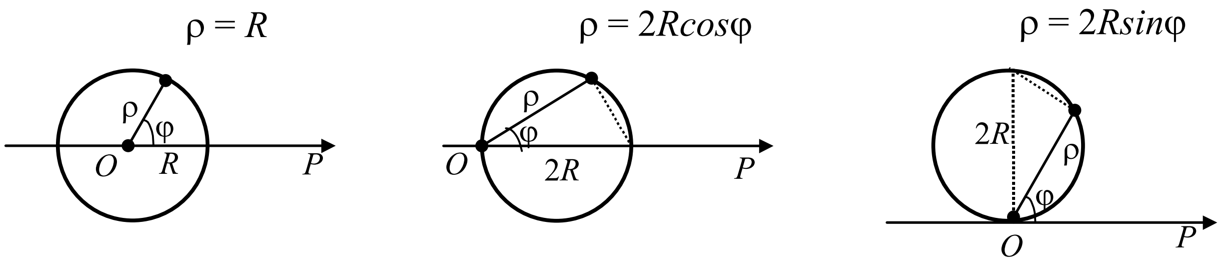
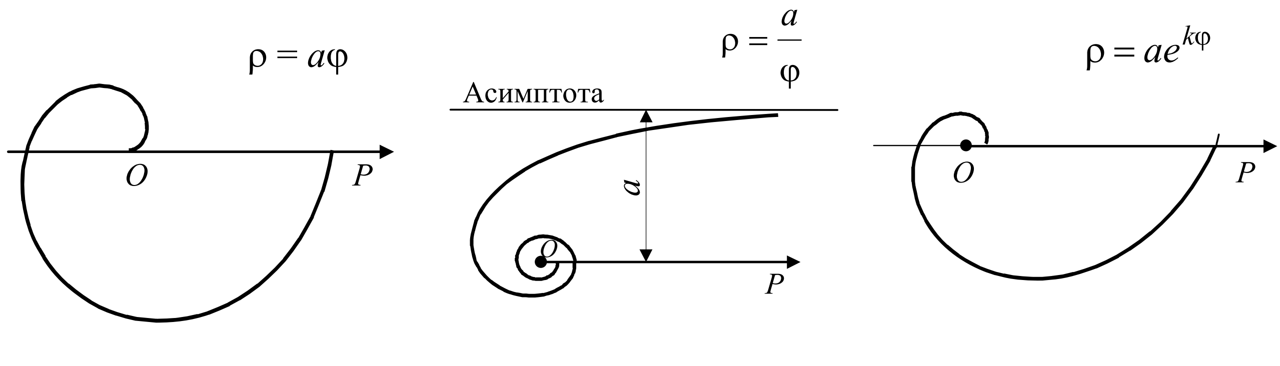


Рис. 3. Кола



Спіраль Архімеда

Гіперболічна спіраль

Логарифмічна спіраль ($e > 1$, a, $k > 0$)

Рис. 4. Спіралі

$\rho = a(1 - cos\varphi)$ $\rho = a(1 + cos\varphi)$

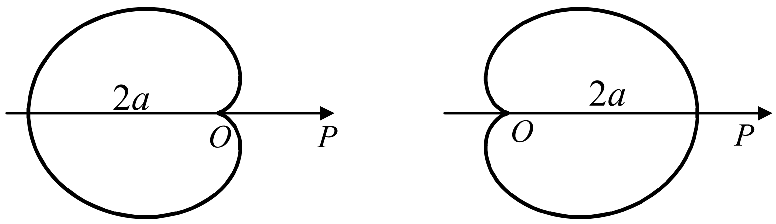


Рис. 5. Кардіоїди

$\rho^2 = a^2 cos\, 2\varphi$

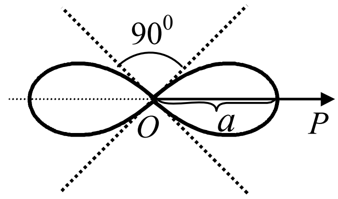


Рис. 6. Лемніската Бернуллі

Криву у полярних координатах зазвичай будують по точках. Задаючи з деяким кроком кут φ (обов`язково у радіанній мірі, якщо $\varphi$ не знаходиться під знаком тригонометричної функції), за рівнянням лінії обчислюють відповідні значення $\rho$, будують точки, а потім з`єднують їх плавною лінією. Так, для побудови кардіоїди $\rho = a(1 + cos\,\varphi)$ маємо таблицю значень:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
ρ	$2a$	1,86 a	1,5 a	a	0,5 a	0,14 a	0

Рівняння нашої кривої містить величину φ лише під знаком косинуса і, через те, що $cos(-\varphi) = cos\,\varphi$, крива симетрична відносно полярної осі. Тому значення ρ при $\pi < \varphi < 2\pi$ можна не знаходити. Вибираючи за a відрізок певної довжини, будуємо точки за значеннями, що наведені у таблиці. У результаті одержуємо криву, яка зображена на рис. 5.

♦ Полярні координати – інструмент, за допомогою якого Я. Бернуллі вивчав лемніскату, що названа його ім`ям, та логарифмічну спіраль. Останню, за побажанням вченого, викарбувано на його могильному камені.

♦ **Якоб Бернуллі** (швейц. математик, 1654 – 1705) – професор математики у Базелі. Один з перших (як за часом, так і за результатами) послідовників Лейбніца у галузі математичного аналізу, засновник (спільно з братом Іоганном) варіаційного числення. Відіграв важливу роль у становленні теорії ймовірностей.

§20. Поверхні

«Той, хто не знає геометрії, нехай не входить сюди» – напис біля входу у академію грецького філософа Платона, IV ст. до н. е.

1^0. ***Циліндричні поверхні***. Циліндричною називають поверхню, що описується прямою – твірна, яка переміщується паралельно сама до себе і перетинається з даною кривою – напрямною.

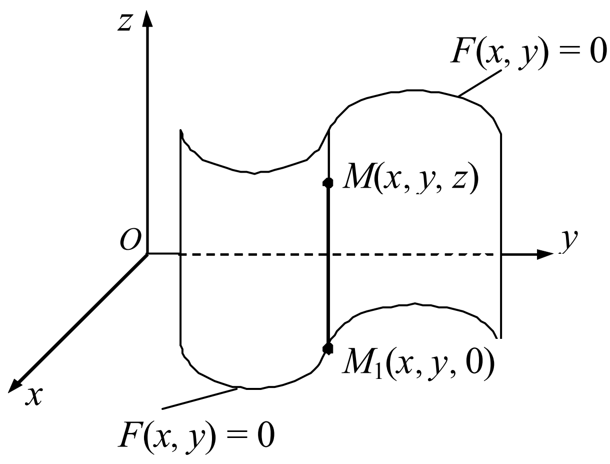


Рис. 1

Важливим є випадок, коли напрямна належить до координатної площини, а твірні перпендикулярні до цієї площини. Нехай напрямна лежить у площині xOy і має рівняння $F(x,\ y) = 0$ (рис. 1). Це рівняння разом з цим задовольняє будь-яка точка M поверхні, оскільки вона розташована на перпендикулярі до площини xOy і має ті самі значення x та y, що і відповідна точка M_1 напрямної. Тому рівняння $F(x,\ y) = 0$, яке розглядається у просторі, являє собою рівняння циліндричної поверхні.

У загальному випадку рівняння з двома змінними у просторі представляє циліндричну поверхню з твірними, паралельними тій осі координат, вздовж якої змінюється змінна, яка не увійшла до рівняння. Напрямною для такої поверхні служить лінія на координатній площині з тим самим рівнянням, що й сама поверхня.

2^0. ***Поверхня обертання***. Нехай у площині yOz задана крива $F(y, z) = 0$ (рис. 2). Координати довільної точки $N(0, \bar{y}, \bar{z})$ цієї кривої задовольняють її рівняння, отже, $F(\bar{y}, \bar{z}) = 0$. Крива обертається навколо осі Oy і утворює поверхню обертання. Точка N описує коло. Для координат довільної точки $M(x,\ y,\ z)$ такого кола маємо $y = \bar{y}$, $\sqrt{x^2 + z^2} = \bar{z}$. Отже, координати точки M задовольняють рівняння

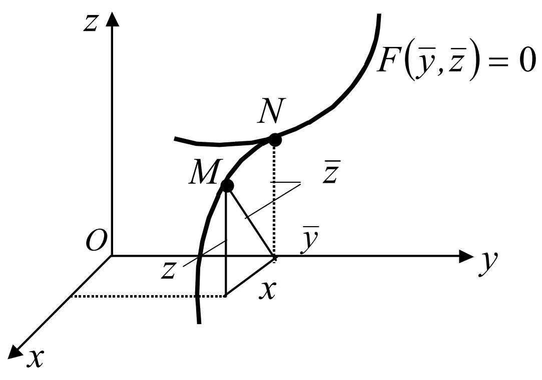


Рис. 2

$$F\left(y, \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0.$$

Це і є рівняння поверхні обертання.

Таким чином, рівняння поверхні, що утворена обертанням навколо осі координат кривої, яка належить до координатної площини, можна отримати з рівняння цієї кривої, якщо у ньому змінну, що відповідає осі обертання, залишити такою самою, а другу змінну замінити на корінь квадратний із суми квадратів другої та третьої координат.

Приклад. Еліпс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ обертається навколо осі Oy. Виникає поверхня $\frac{y^2}{b^2}+\frac{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{c^2}=1$ або $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – еліпсоїд обертання.

3^0. *Поверхні 2-го порядку*. Так називають поверхні, що визначаються рівняннями 2-го степеня відносно поточних координат. У загальному випадку це рівняння вигляду

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Mx+Ny+Pz+Q=0.$$

Перетворенням координат – поворотом і паралельним перенесенням системи таке рівняння можна звести до однієї з дев`яти канонічних форм, після чого вигляд поверхні встановлюється методом перерізів. Суть цього метода така. Нехай, наприклад, задано канонічне рівняння $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, де p і q – деякі додатні числа.

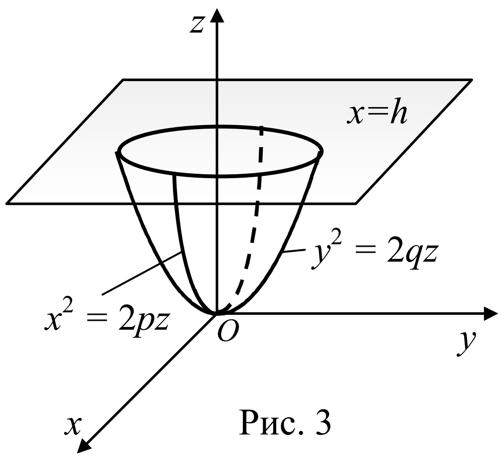


Рис. 3

Будемо перерізати цю поверхню координатними площинами, тобто такими площинами, на яких одна координата зафіксована, а дві інші координати довільні. Площина yOz має рівняння $x=0$. Підставивши це значення у рівняння поверхні, отримаємо $y^2=2qz$. Маємо канонічне рівняння параболи, що належить до площини yOz. Вісь параболи збігається з віссю Oz. Так само в іншому перерізі $y=0$ (площина xOz) одержимо параболу $x^2=2pz$. Переріз площиною $z=0$ (площина xOy) дає лише одну точку O: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x=0,\ y=0$. Перерізаючи поверхню площиною $z=h$ ($h>0$), маємо $\frac{x^2}{2hp}+\frac{y^2}{2hq}=1$. Це рівняння еліпса, що розташований у площині $z=h$, з півосями $a=\sqrt{2hp}$, $b=\sqrt{2hq}$. Із збільшенням h будуть зростати і півосі еліпса. У результаті визначається форма поверхні (рис. 3). Розглянуту поверхню називають еліптичним параболоїдом.

4^0. ***Канонічні рівняння поверхонь 2-го порядку***.

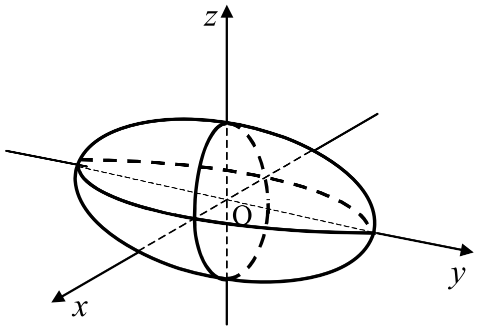


Рис. 4

Тривісний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(при $a=b=c$ – сфера радіуса a).

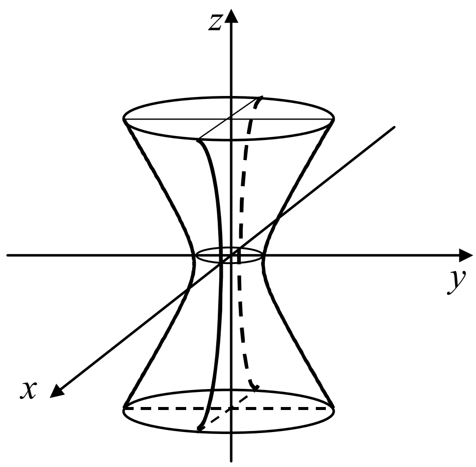


Рис. 5

Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

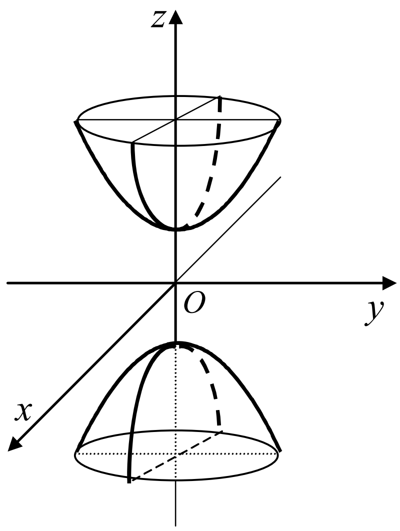


Рис. 6

Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

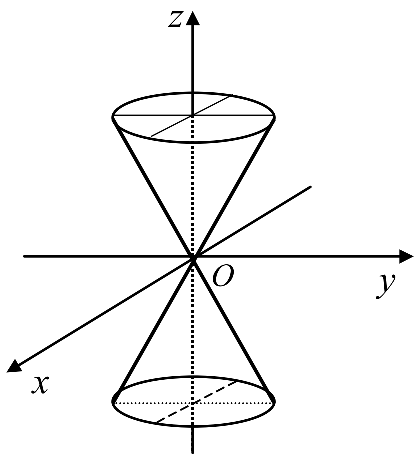


Рис. 7

Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

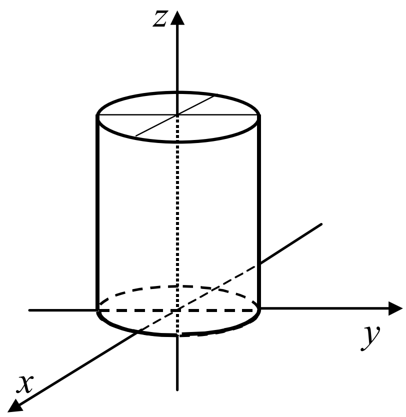


Рис. 8

Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

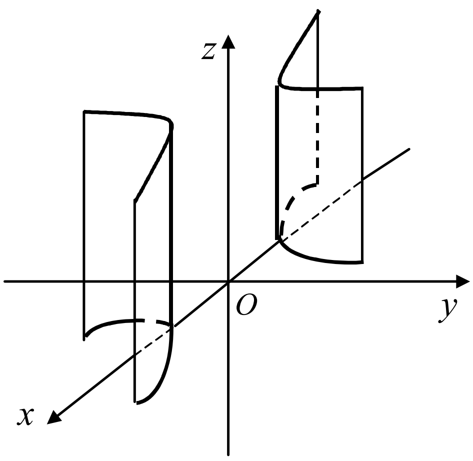


Рис. 9

Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

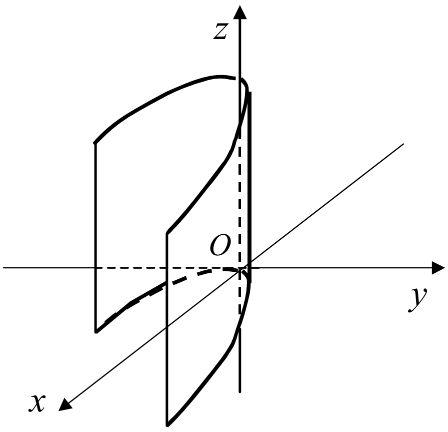


Рис. 10

Параболічний циліндр

$$y^2 = 2px.$$

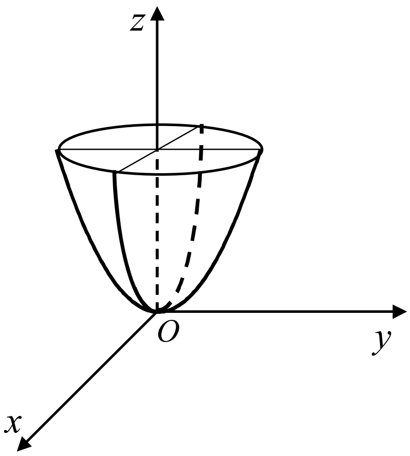


Рис. 11

Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

$(pq > 0)$.

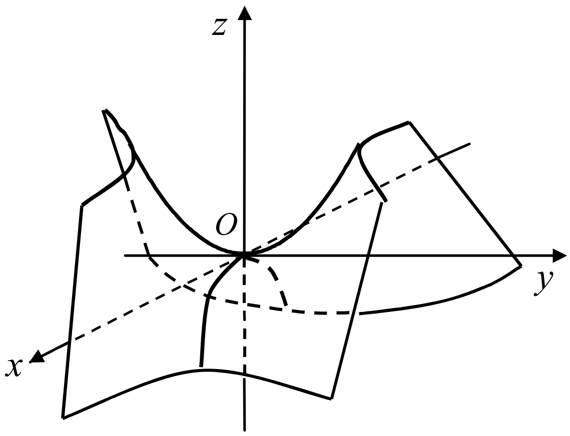


Рис. 12

Гіперболічний параболоїд
(сідло)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

$(pq > 0)$.

♦ Поверхні 2-го порядку було вивчено у XVIII ст. Французькі математики Паран (1700), а потім Клеро (1731) одержали рівняння сфери і деяких поверхонь обертання. Ейлер (1748) дав класифікацію поверхонь і вивів канонічні рівняння еліпсоїда, параболоїда, однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів.

♦ Свої книги Ейлер писав просто і зрозуміло, докладно пояснюючи хід міркувань. Це робило його праці популярними і сприяло якнайскорішому поширенню математичних знань. Сотні математиків йшли услід за порадою Лапласа, який говорив: «Читайте Ейлера, він – наш великий вчитель». У «Листах до деякої німецької принцеси» (племінниці Фридриха II) Ейлер доступно виклав уявлення про сучасне йому природознавство. За життя Ейлера «Листи» виходили в світ понад 20 разів практично усіма мовами Європи.

Розділ III

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У своїй практичній діяльності людина стикається з великою кількістю змінних величин, багато з яких зв`язані між собою функціональною залежністю. Дослідження таких величин і складає предмет математичного аналізу. Незважаючи на різноманіття змінних, їх можна класифікувати за характерними особливостями поведінки і, отже, вивчати. Із множини типових задач та частинних способів розв`язування за останні три з половиною століття викристалізувалися загальні методи аналізу. Був розроблений спеціальний математичний апарат, основним інструментом якого став перехід до границі. Виділений найважливіший клас змінних, які змінюються неперервно. По мірі розвитку науки з`являються нові засоби і підходи, уточнюються старі означення. Разом з тим фундамент аналізу залишається незмінним. Його утворюють такі поняття, як функція, нескінченно мала величина, границя, неперервність.

§21. Множини. Числа. Проміжки

Ідея Числа – ось з чого почалася
історія найвеличнішої з наук.
М.М. Лузін, рос. математик XX ст.

1⁰. ***Поняття множини***. Будь-яку сукупність деяких об`єктів називають множиною, а самі об`єкти з даної сукупності – елементами множини. Якщо елемент x належить до множини X, то пишуть $x \in X$. Запис $x \notin X$ (або $x \overline{\in} X$) означає, що x не є елементом множини X. Множину задають перерахуванням його елементів: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ або вказівкою деякої загальної для усіх його елементів властивості. Так, вираз $X = \{x | S\}$ читають як «множина X, елементи x якої мають властивість S». Наприклад, множина $X = \{x | x > 1\}$ складається з чисел x, що задовольняють нерівність $x > 1$. Порожню множину, тобто таку, що не містить жодного елементу, позначають $\varnothing$. Множина A є частиною (підмножиною) множини B, тобто $A \subset B$, якщо з $x \in A \Rightarrow$(витікає) $x \in B$. Дві множини рівні, тобто $A = B$, якщо $A \subset B$ и $B \subset A$. **Об`єднанням** множин A і B, тобто $A \cup B$, називають множину, яка містить всі елементи з A та B і не містить інших елементів. Наприклад, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. **Перерізом** множин A і B, тобто $A \cap B$, називають множину, що складається тільки з усіх загальних для A і B елементів. Так, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, то $A \cap B = \{3\}$. **Різниця** множин A і B: $A \setminus B$ – це множина усіх елементів з A, які не належать до B. При тих же A і B, що і вище, $A \backslash B = \{1, 2\}$, $B \backslash A = \{4\}$.

Для скорочення записів застосовують спеціальні символи: $\exists$ і $\forall$. Перший замінює слова «існує», «знайдеться» (от англ. Existence – існування), другий відповідає словам «будь-який», «усякий», «кожний» (от англ. Any – будь-який).

2^0. *Дійсні числа*. Найпростішими з чисел є **натуральні**, тобто цілі додатні числа. Множину, яку вони утворюють, позначають N. Приєднання до цієї множини нуля приводить до множини N_0. Об`єднання $N_0$ та множини всіх цілих від`ємних чисел дає множину цілих чисел Z. Числа, що можна подати як відношення p/q, де p і q – цілі числа, причому $q \neq 0$, називають раціональними. Всілякі раціональні числа утворюють множину Q. Ірраціональне число виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Множина I таких чисел і усі раціональні числа разом складають множину R дійсних чисел: $R = Q \cup I$. Очевидно, що $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$.

3^0. *Числова вісь. Проміжки*. Координатну вісь, тобто пряму, на якій вибраний додатний напрямок, фіксована точка O – початок координат та одиниця масштабу, називають числовою віссю. Кожній точці M осі відповідає число x – величина напрямленого відрізку OM та навпаки: кожному числу x відповідає деяка точка M осі. За допомогою числової осі дійсні числа зображуються геометрично. Вираз «число x» часто замінюють на еквівалентний термін «точка x». Уся числова вісь є множиною дійсних чисел: $R = \{x | -\infty < x < \infty\}$, записують також $x \in (-\infty, \infty)$. Множина $X = \{x | a < x < b\}$ або просто $a < x < b$, інакше $x \in (a, b)$ є відкритим проміжком (інтервалом). Якщо $a \leq x < b$ або $x \in [a, b)$, то проміжок напіввідкритий (або напівзамкнений). Нескінченні проміжки вигляду $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ називають також променями. При $a \leq x \leq b$ пишуть $x \in [a, b]$. Такий проміжок іменують замкненим або відрізком.

4^0. *Абсолютні величини*. За означенням модуль числа x, тобто його абсолютна величина, $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$

Справедливі властивості:

1. $|x| \geq 0$; 2. $|-x| = |+x|$; 3. $|xy| = |x||y|$;

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$; 5. $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Геометрично $|x|$ є відстанню точки x від початку координат. Якщо $|x| < \varepsilon$, де число $\varepsilon > 0$, то точка x видалена вліво або вправо від початку координат на відстань, меншу за ε. Тому нерівності $|x| < \varepsilon$ рівносильний запис $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Також еквівалентні нерівності $|x - x_0| < \varepsilon$ і $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ ($|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$). Проміжок $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ називають ε-околом точки x_0 (рис. 1).

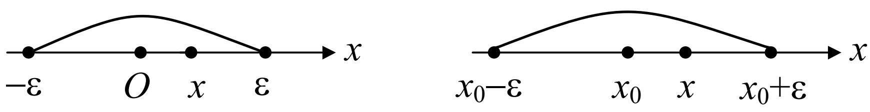


Рис. 1

♦ XVI – XVII століття – час інтенсивного розвитку алгебри в Європі. Розроблюється математична символіка, з`являються знаки = (1557, Р. Рекорд), > та < (1631, Т. Гарріот), круглі дужки (1556, Н. Тарталья, М. Штіфель), буквені позначення відомих та невідомих величин (1591, Ф. Віет), $a, b, c$ – сталі, $x, y, z$ – змінні (1637, Декарт), вводяться від`ємні числа (М. Штіфель).

♦ Дійсні числа застосовують не одну тисячу років, однак їх строга теорія з`явилась лише наприкінці XIX ст. Класичні роботи в цій області належать німецьким математикам Р. Дедекінду (1831 – 1916) та Г. Кантору (1845 – 1918).

♦ Теорія нескінченних множин, що створена Кантором, зазнала потужної протидії з боку наукового світу, подавши привід для різних суперечок, які призвели до душевної хвороби її творця.

§ 22. Функція

Весь аналіз нескінченних обертається навколо змінних кількостей та їх функцій.
Л. Ейлер, математик XVIII ст.

1^0. ***Змінна величина***. Так називають величини, що приймають різні числові значення. Наприклад, вік конкретної людини, температура повітря, день місяця і т.п. Стала – це величина, що зберігає в даній задачі незмінним своє числове значення.

Множина всіх значень змінної величини утворює область її змінення. Остання може містити скінченний або нескінченний набір чисел – окремих точок числової осі (наприклад, екзаменаційна оцінка за п`ятибальною шкалою має область змінення {2, 3, 4, 5}), вона може також являти собою деякий проміжок (наприклад, для змінної $x = sin\,\alpha$ областю змінення слугує відрізок $-1 \le x \le 1$).

Приклад. Знайти область змінення змінної x, що задовольняє нерівність а) $|x-1| \le 2$; б) $|x+1| \ge 3$.

Розв`язування. а) $|x-1| \le 2 \;\Leftrightarrow\; -2 \le x-1 \le 2 \;\Leftrightarrow\; -1 \le x \le 3$, або $x \in [-1, 3]$. Областю змінення x є множина $X = [-1, 3]$;

б) $|x+1| \ge 3 \;\Leftrightarrow\; \{x+1 \le -3$ або $x+1 \ge 3\} \;\Leftrightarrow\; \{-\infty < x \le -4$ або $2 \le x < \infty\}$, тобто $x \in (-\infty, -4] \cup [2, \infty)$. Областю змінення x слугує множина $X = (-\infty, -4] \cup [2, \infty)$.

2⁰. ***Поняття функції***. Нехай X – деяка множина значень змінної x та задано правило, яке кожному числу x з множини X ставить у відповідність певне число y. Цю відповідність називають функцією y від x, записують $y = f(x)$.

Змінну x іменують аргументом або незалежною змінною. Множина X є областю визначення, а множина Y всіх значень $y = f(x)$ – областю змінення функції. Іноді замість X та Y пишуть відповідно $D(f)$ та $E(f)$ (Definition – означення, Existence – існування, англ.). Таким чином, функцію $y = f(x)$ задано, якщо

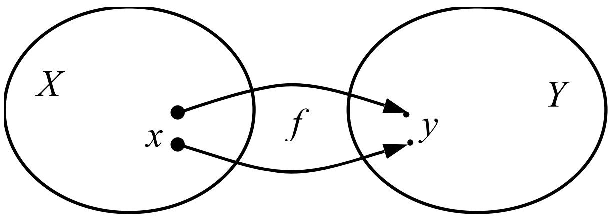


Рис. 1

1) визначена множина X, з якої беруться числа x;
2) вказаний закон f, за яким відбувається відображення множини X на множину Y (рис. 1).

Область визначення функції випливає з фізичного змісту задачі або з її математичної постановки. Так, при вільному падінні тіла шлях S є функцією часу t: $S = gt^2/2$. Областю визначення цієї функції слугує проміжок $0 \le t \le T$, де T – повний час падіння тіла. Для функції $y = \sqrt{9 - x^2}$, що не пов`язана з конкретною задачею, область визначення – це множина значень x, при яких функція y має сенс: $X = [-3, 3]$ $(9 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 9 \Rightarrow |x| \le 3 \Rightarrow -3 \le x \le 3)$. Таку множину X, що випливає виключно з аналізу формули, називають природною областю визначення.

3⁰. ***Способи задання функції***. Відповідність між x та y, яка визначає функціональну залежність $y = f(x)$, задається різними способами. **Табличний** передбачає наявність деякої таблиці, де розташовані частинні значення аргументу x і відповідні до них значення y. Наприклад, тригонометричні, логарифмічні та інші таблиці. **Графічний** задає графік функції $y = f(x)$, тобто визначає на площині xOy лінію, для якої рівність $y = f(x)$ слугує її рівнянням. **Аналітичний** виражає відповідність $y = f(x)$ за допомогою деякого аналітичного виразу, тобто за допомогою однієї або декількох формул, рівняння. Наприклад:

1) $y = x^2, \ -\infty < x < \infty.$

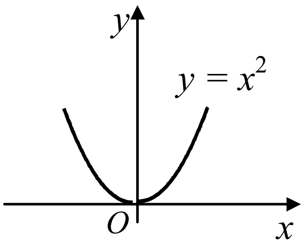


Рис. 2

Тут
$X = D(f) = R,$
$Y = E(f) = [0, \infty);$

2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

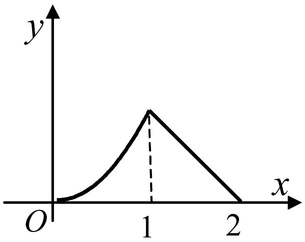


Рис. 3

$X = D(f) = [0, \infty),$
$Y = E(f) = [0, 1];$

3) $y^3 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{1 - x}, \qquad X = D(f) = R, \ Y = E(f) = R.$

В останньому прикладі функція y визначена рівнянням, тобто задана неявно. Легко знаходиться явна залежність y від x. Це, однак, не завжди так. У загальному випадку рівняння $F(x, y) = 0$, яке задовольняють деякі дійсні числа x та y, задає функцію y неявно, незалежно від того, чи можливо з даного рівняння дістати явний вираз y через x. До неявного типу належать також **параметричний** спосіб задання функції, коли величини x та y виступають функціями допоміжної змінної, що називається параметром: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Наприклад, співвідношення $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ при $0 \le t \le \pi$ визначають частину еліпса, що розташована вище осі Ox (див. (15.5)). Вилучивши параметр t, замість двох рівнянь отримаємо одне:

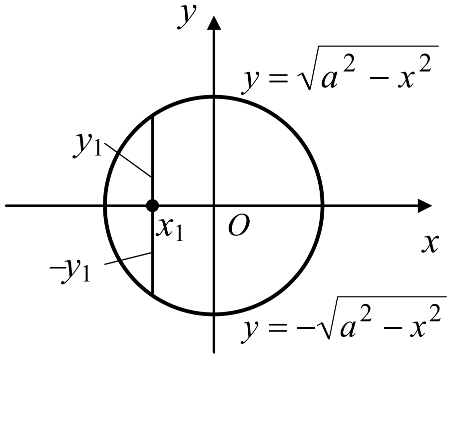


Рис. 4

$x/a = \cos t, \ y/b = \sin t \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($y \ge 0$, тому що при $t \in [0, \pi]$ $\sin t \ge 0$). Таким чином, два параметричних рівняння неявно задають функцію $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, де $x \in [-a, a]$.

Разом з тим одне рівняння, як і одна крива, не обов`язково представляє тільки одну функцію. Наприклад, рівняння кола

$$x^2 + y^2 = a^2$$

і сама крива при $x \in [-a,\ a]$ визначають дві функції $y=\sqrt{a^2-x^2}$ та $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. Кожному значенню x з проміжку $(-a,\ a)$ вони ставлять у відповідність різні значення y (рис. 4).

4^0. *Спеціальні класи функцій*.

1. Парні і непарні функції. Функцію $y=\varphi(x)$, задану на симетричному проміжку $(-l,\ l)$, називають парною, якщо $\varphi(-x)=\varphi(x)\ \forall x\in(-l,\ l)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 5). До парних функцій, що задані на всій числовій осі, належать функції $y=x^2$, $y=\cos x$, $y=x\sin x$.

Функцію $\psi(x)$, що задана на проміжку $(-l,\ l)$, називають непарною, якщо $\psi(-x)=-\psi(x)\ \ \forall x\in(-l,\ l)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 6). Прикладами непарних функцій, що задані на всій числовій осі, слугують функції $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=x\cos x$.

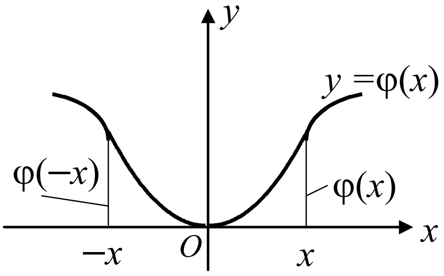


Рис. 5

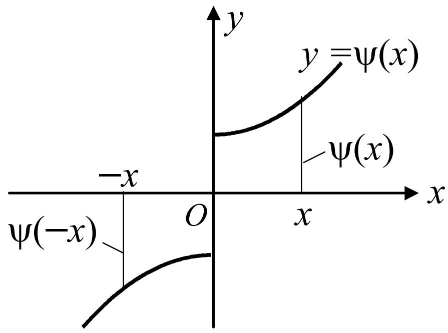


Рис. 6

2. Періодичні функції. Функцію $f(x)$, задану на всій числовій осі, називають періодичною, якщо існує таке число $T\neq 0$, що $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in(-\infty,\ \infty)$. Величина T – період функції. Якщо T – період, то для будь-якого цілого числа k добуток kT також є періодом функції. Наприклад, функції $y=\sin x$, $y=\cos x$ мають період 2π, але також і $T=2k\pi$, де $k\in N$.

3. Монотонні функції. Функція $y=f(x)$, задана на деякому проміжку, є зростаючою, якщо для будь-якої пари точок x_1 та x_2 з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто при $x_2>x_1$ $f(x_2)>f(x_1)$. Обернена нерівність $f(x_2)<f(x_1)$ за тієї самої умови $x_2>x_1$ відповідає спадній функції. Зростаючі та спадні функції називають монотонними.

4. Взаємно обернені функції. Нехай $y=f(x)$ − монотонна на відрізку $[a,\ b]$ функція. Тоді кожному значенню $x\in[a,\ b]$ відповідає одне значення

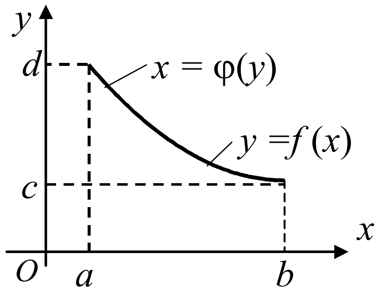


Рис. 7

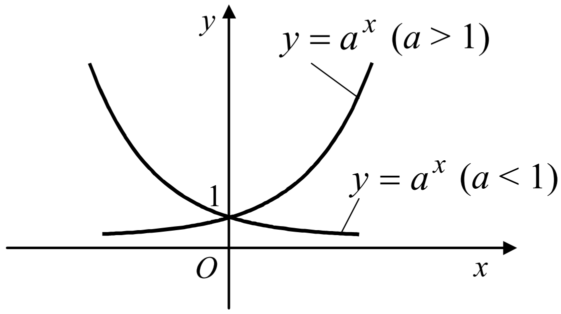
$y \in [c,\ d]$ і обернено: $\forall y \in [c,\ d]$ відповідає одне значення $x \in [a,\ b]$ (рис.7). Отже, x можна розглядати як функцію аргументу y: $x = \varphi(y)$. У цьому випадку функції $y = f\,(x)$ та $x = \varphi(y)$ називають взаємно оберненими. До таких функцій, наприклад, належать $y = a^x$ та $x = log_a\, y$, $y = sin\, x$ та $x = arcsin\, y$.

5^0. ***Основні елементарні функції***.

1. **Степенева**: $y = x^{\alpha}$, де α – будь-яке дійсне число.

2. **Показникова**:

$y = a^x$, де $a > 0,\ a \neq 1$.

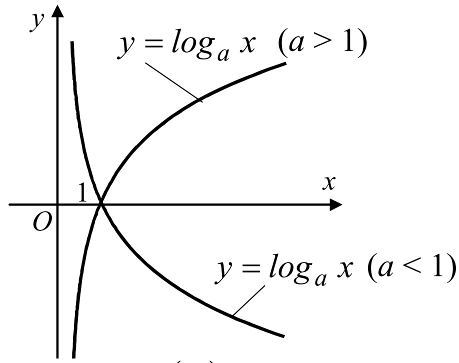


$X = D(f) = (-\infty, \infty)$,
$Y = E(f) = (0, \infty)$.

Рис. 8

3. **Логарифмічна**:

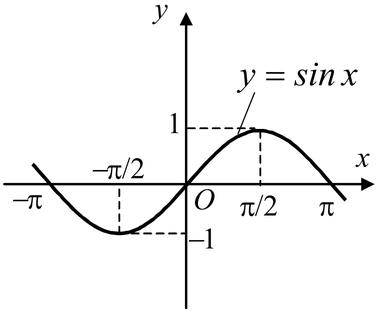
$y = log_a\, x$, де $a > 0,\ a \neq 1$.



$X = D(f) = (0,\ \infty)$,
$Y = E(f) = (-\infty,\ \infty)$.

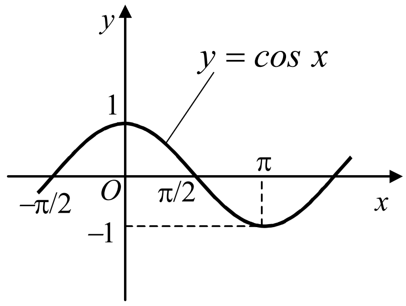
Рис. 9

4. **Тригонометричні**: $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = tgx$.



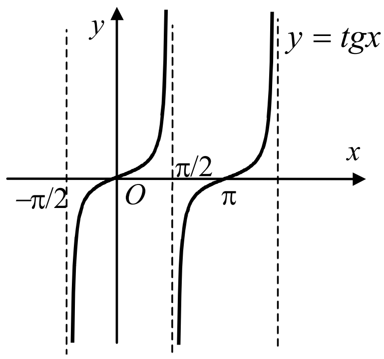
$X = D(f) = (-\infty,\ \infty)$,
$Y = E(f) = [-1,\ 1]$.

Рис. 10



$X = D(f) = (-\infty,\ \infty)$,
$Y = E(f) = [-1,\ 1]$.

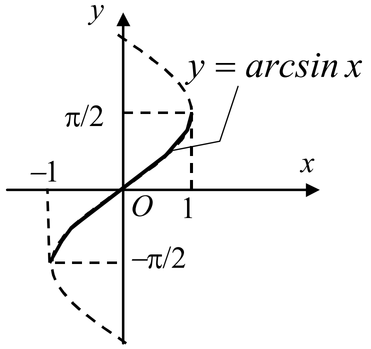
Рис. 11



$X = D(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) + k\pi$,
$k \in Z$,
$Y = E(f) = (-\infty,\ \infty)$.

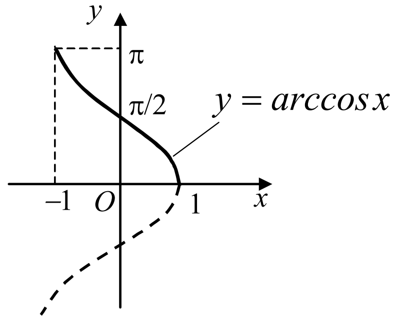
Рис. 12

5. Обернені тригонометричні: $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$, $y = arctg\, x$.



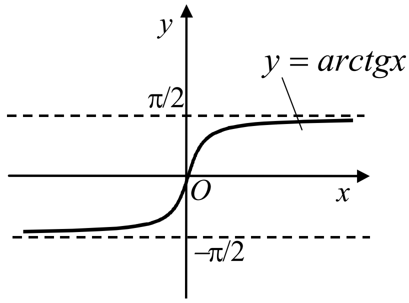
$X = D(f) = [-1, 1]$,
$Y = E(f) = [-\pi/2, \pi/2]$.

Рис. 13



$X = D(f) = [-1, 1]$,
$Y = E(f) = [0, \pi]$.

Рис. 14



$X = D(f) = [-\infty, \infty]$,
$Y = E(f) = (-\pi/2, \pi/2)$.

Рис. 15

Функції, що отримані з основних елементарних функцій у результаті застосування до них кінцевої кількості операцій додавання, множення і суперпозиції, тобто через утворення функції від функції, називають **елементарними**. Розрізняють функції **алгебраїчні** та **трансцендентні**. Перші виникають, коли аргумент x піддають лише алгебраїчним операціям. До цього класу належать ціла раціональна функція, інакше многочлен: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, дробово-раціональна функція (відношення двох многочленів): $y = \dfrac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$, ірраціональна функція, тобто така, що містить радикали від раціональних функцій. Решту функцій називають трансцендентними.

♦ Змінні величини й функції фактично застосовувались ще в давнину – площа кола і об`єм сфери залежали від радіуса, об`єм конуса – від висоти і радіуса основи. Однак тільки у XVII ст. (після робіт Декарта і Ферма) змінні величини вийшли на перший план. Поняття функції, постійно розвиваючись, стає домінуючим у математичному аналізі. Перше означення функції, як і сам термін *functio*, увів Лейбніц у 1694 р. Ейлер застосував позначення $f(x)$ (1734). На протязі ста років у наукових колах йшла уперта боротьба думок стосовно змісту поняття функції. Сучасному уявленню функції більш за все відповідають означення, що дали Лобачевський (1834) і Діріхле (1837).

♦ **Микола Іванович Лобачевський** (рос. математик, 1792 – 1856) – ректор Казанського університету. Створив нову неевклідову геометрію (1829), в якій відсутній постулат Евкліда про те, що через точку можна провести тільки одну пряму.

ною прямою. Його ідеї піддавалися різкій критиці з боку вченого світу, але знайшли підтримку у Гаусса. Лобачевский знаний також своїми роботами з алгебри й математичного аналізу.

§ 23. Нескінченно мала величина

Найбільш важлива галузь математики – обчислення нескінченно малих – є вченням про змінення й може бути названо, у найкращому розумінні, математикою природи.
Дж. Янг, амер. математик XX ст.

1^0. ***Послідовності***. Змінну x називають нумерованою і позначають x_n, якщо усі її значення можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел, причому змінна приймає ці значення у порядку зростання номерів. Значення x_n, тобто числа x_1, x_2, … , утворюють послідовність $\{x_n\}$, x_n – загальний член послідовності. Послідовність задана, якщо вказаний закон, за яким кожному порядковому номеру n ставиться у відповідність член послідовності x_n. Цей закон виражає зв`язок загального члена x_n з номером n, як правило, у вигляді функції, що задана на множині натуральних чисел: $x_n = f(n)$, $n \in N$, іноді у вигляді рекурентної рівності, яка наступні члени послідовності виражає через попередні. Наприклад, $x_1 = 1$, а при $n \geq 2$, $x_n = 3 + 2x_{n-1}$, тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 13$,… Функція $x_n = 1/n$ визначає послідовність 1, 1/2, 1/3,…, 1/n,…, а функція $y_n = 2^n$ задає послідовність $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$

Зауваження. Існують змінні, значення яких не можуть бути перенумеровані, наприклад, змінна x з областю змінення [0, 1]. На відміну від нумерованої змінної, яка має зчисленну (тобто піддається рахунку) множину значень, про такі змінні говорять, що множина їх значень незчисленна.

2^0. ***Поняття про нескінченно малу величину***. Змінну x_n називають **нескінченно малою**, якщо, яким би малим ні було число $\varepsilon > 0$, всі значення x_n, починаючі з деякого, задовольняють нерівність

$$|x_n| < \varepsilon. \tag{1}$$

Якщо x_n – нескінченно мала, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N, що залежить від ε, після якого для усіх $n > N$ виконується нерівність (1).

Приклад. а) $x_n = 1/n$ – нескінченно мала. Дійсно, при $\varepsilon = 0{,}1$ $|x_n| = \dfrac{1}{n} < 0{,}1$ як тільки $n > N = 10$, при $\varepsilon = 0{,}01$ $|x_n| = \dfrac{1}{n} < 0{,}01$ як тільки $n > N = 100$ і т.п. Взагалі $|x_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ як тільки $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$;

б) $x_n = 0{,}01 + 1/n$ – не є нескінченно малою. Це випливає з того, що нерівність $\left|x_n\right| = 0{,}01 + \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ справджується не при усякому $\varepsilon > 0$. Зокрема, вона не має місця, якщо $\varepsilon = 0{,}001$;

в) $x_n = 0{,}01 - 1/n$ – не є нескінченно малою, хоча при $n = 100$ $x_n = 0$, що менше будь-якого $\varepsilon > 0$. Однак при $n > 100$ із зростанням n величина x_n зростає і нерівність (1) для будь-якого $\varepsilon > 0$ вже не виконується;

г) $x_n = 10000/10^n$ – нескінченно мала, хоча значення $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10$ у порівнянні з одиницею не малі.

Таким чином, нескінченно малі і просто малі величини – поняття різні. Нескінченно мала – це насамперед змінна величина, яка змінюється так, що при будь-якому заданому $\varepsilon > 0$ з деякого моменту, тобто після деякого номера N, вона починає задовольняти нерівність (1).

3⁰. ***Обмежена і нескінченно велика величина***. Змінну x_n називають **обмеженою зверху**, якщо існує число M таке, що всі значення x_n задовольняють нерівність $x_n < M$. Так само, якщо для усіх n виконується нерівність $m < x_n$, де $m = const$, то змінна x_n **обмежена знизу**. Змінні, що обмежені зверху та знизу, називають **обмеженими**. Це має місце, якщо існує число $M > 0$ таке, що усі значення x_n задовольняють нерівність

$$\left|x_n\right| < M . \tag{2}$$

Коли ж скільки завгодно велике число M не забезпечує нерівність (2), змінну x_n називають **необмеженою**. Наприклад, до цього типу належить змінна $x_n = \left[1 + (-1)^n\right] n^2$. Серед її значень знайдуться такі, що перевершать будь-яке число $M > 0$.

Окремий випадок необмеженої величини – **нескінченно велика величина**. Так називають змінну x_n, якщо яким би великим не було число $M > 0$, усі значення x_n, починаючі з деякого, задовольняють нерівність

$$\left|x_n\right| > M . \tag{3}$$

Останнє означає, що при будь-якому заданому числі $M > 0$ існує номер $N = N(M)$, після якого для усіх $n > N$ буде виконуватися нерівність (3). Наприклад, $x_n = (-1)^n n^2$, $y_n = 2^n$ – нескінченно великі величини. Якщо $M = 1000$, то нерівність (3) для величини x_n виконується при $n > N = 31$, а для величини y_n – при $n > N = 9$. Так само номер N у кожному випадку можна підібрати і для будь-якого іншого M.

Величина, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою величиною і навпаки. Дійсно, нехай x_n – нескінченно мала, причому $x_n \neq 0$. Тоді для будь-якого скільки завгодно великого числа $M > 0$ маємо $\left|x_n\right| < \varepsilon = 1/M \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left|1/x_n\right| > 1/\varepsilon = M$. Але це й означає, що $y_n = 1/x_n$ – нескінченно велика величина.

4^0. ***Основні властивості нескінченно малих***.

1. Сума скінченної кількості нескінченно малих є величиною нескінченно малою.

Насправді, нехай $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, де всі доданки справа – нескінченно малі. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна підібрати номер N, після якого одночасно будуть виконуватися нерівності $\left|\alpha_1\right| < \varepsilon/k$, $\left|\alpha_2\right| < \varepsilon/k$,..., $\left|\alpha_k\right| < \varepsilon/k$. При цьому $\left|S\right| = \left|\alpha_1 + \cdots + \alpha_k\right| \le \left|\alpha_1\right| + \cdots + \left|\alpha_k\right| < \underbrace{\varepsilon/k + \cdots + \varepsilon/k}_{k} =$ $= \varepsilon$, тобто $\left|S\right| < \varepsilon$. Це й означає, що S – нескінченно мала величина.

Зауваження. Твердження втрачає силу, якщо кількість доданків необмежено зростає. Наприклад, у записаних нижче сумах

$$S_1 = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n} = \frac{1}{n};\; S_2 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n} = 1;\; S_3 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = \sqrt{n}$$

із зростанням n усі доданки ведуть себе як нескінченно малі, але їх кількість необмежено збільшується, в результаті виявляється, що S_1 – нескінченно мала, S_2 – стале число, а S_3 – нескінченно велика величина.

2. Добуток нескінченно малої та обмеженої величин є величиною нескінченно малою.

Нехай α_n – нескінченно мала, а x_n – обмежена величина. Завжди можна підібрати номер N, після якого одночасно будуть виконуватися нерівності $\left|x_n\right| < M$, $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon/M$, де M – деяке, а ε – скільки завгодно мале додатні числа. При цьому $\left|\alpha_n x_n\right| = \left|\alpha_n\right|\left|x_n\right| < \left(\varepsilon/M\right) \cdot M = \varepsilon$, тобто $\left|\alpha_n x_n\right| < \varepsilon$. Значить, $\beta_n = \alpha_n x_n$ є нескінченно малою величиною.

У ролі обмеженої величини може, зокрема, виступати стале число або деяка нескінченна мала величина. Отже: **1) добуток нескінченно малої та сталої є величиною нескінченно малою**, **2) добуток двох та більше нескінченно малих є величиною нескінченно малою**.

♦ У 10-й книзі «Начала» Евкліда у словесній формі доводиться пропозиція, яку приписують Евдоксу (близько 408 – 355 до н. е.): якщо додатні величини $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \le 1/2$ і $a > b$, то при достатньо великому n добуток $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n a < b$. Подібні добутки, що залежать від вибору n, утворюють послідовність. Твердження Евдокса є основою метода вичерпування – головного засобу визначення площ і об`ємів, яким користувалися протягом двох тисячоліть математики від Евдокса (IV ст. до н. е.) до Кеплера (XVII ст.). Наприклад, у коло вписували многокутник, його площа приблизно дорівнювала площі кола, потім кількість сторін многокутника подвоювали, площа многокутника наближалася до площі кола, відбувалося наче вичерпування кола.

♦ Аналіз нескінченно малих лежить в основі диференціального числення. Правила, за якими слід поводитися з нескінченно малими, виробили Ньютон та Лейбніц, однак строге обгрунтування цих операцій було досягнуто тільки у кінці XIX ст.

♦ **Ісаак Ньютон** (англ. математик, фізик, механік, астроном, 1642 – 1727) – засновник (разом з Лейбніцем) диференціального та інтегрального числень. У 18-річному віці вступив до Трініті-коледжу Кембриджського університету, майже не знаючи математики, окрім, хіба що, арифметики. У 1665 р. закінчив університет із вченим ступенем бакалавра (за рік до цього спроба отримати той самий ступень завершилася невдачею через провал іспиту з геометрії). Чотири роки потому очолив фізико-математичну кафедру університету, якою у визнання заслуг учня поступився Ньютонові його вчитель І. Барроу. В 1699 р. великий вчений став директором Монетного двору, членом парламенту, з 1703р. – президент Лондонського королівського суспільства (англ. академія наук). Ньютон не квапився з публікацією своїх відкриттів, що згодом призвело до суперечок про пріоритет. Основні результати в галузі диференціального числення отримані Ньютоном вже у 1664 – 1665 рр., коли він рятувався від чуми на своїй батьківщині у Вулсторні. Присвячений цій теорії трактат «Метод флюксій» (1670 – 1671) опублікований лише в 1736 р. Ще за життя слава Ньютона стала всесвітньою. На його могилі у Вестмінстерському абатстві (Лондон) зроблений напис «Нехай смертні радіють, що існувала така прикраса роду людського».

§ 24. Границя змінної

Границю визначити не важче і не легше,
ніж нескінченно малу величину.
Л. Карно, фр. математик XVIII – XIX ст.

1^0. ***Границя послідовності***. Число a називають границею змінної x_n або, що теж саме, границею послідовності $\{x_n\}$, якщо різниця $x_n - a$ є величиною нескінченно малою. Записують $\lim x_n = a$ або $x_n \to a$.

Детальніше: число a є $\lim x_n$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна підібрати номер $N = N(\varepsilon)$, після якого для усіх $n > N$ буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Таким чином, означення границі можна сформулювати, залучаючи геометричні уявлення: число a – границя змінної x_n, якщо, який би малий не взяти ε-окіл точки a, усі значення x_n, починаючи з деякого, попадуть у нього (рис. 1). Застосовуючи математичну символіку, означення границі послідовності записують так:

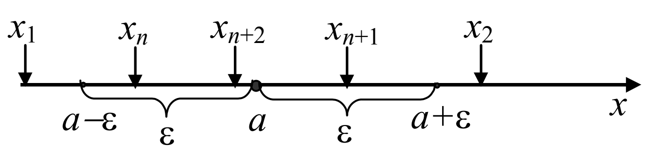


Рис. 1

$$lim\, x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon\right). \qquad (1)$$

Послідовність $\{x_n\}$ називають збіжною, якщо існує границя її загального члена $lim\, x_n = a$.

Приклад 1. $x_n = 1+1/n \to 1$, тому що величина $\alpha_n = x_n - 1 = 1/n$ є нескінченно малою. Виберемо довільно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $\varepsilon = 0{,}01$, тоді $\left|\alpha_n\right| = \dfrac{1}{n} < 0{,}01$ при $n > N = 100$. Всі значення x_n, починаючі з $n = 101$, належать інтервалу $(1–0{,}01;\ 1+0{,}01)$.

Зауваження. Згідно з наведеним вище означенням, якщо існує $lim\, x_n = a$, то змінну x_n завжди можна записати у формі $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – деяка нескінченно мала величина.

Змінні по-різному наближаються до своєї границі. Значення змінної можуть зростати, спадати, коливатися (рис. 2 *а*, *б*, *в*).

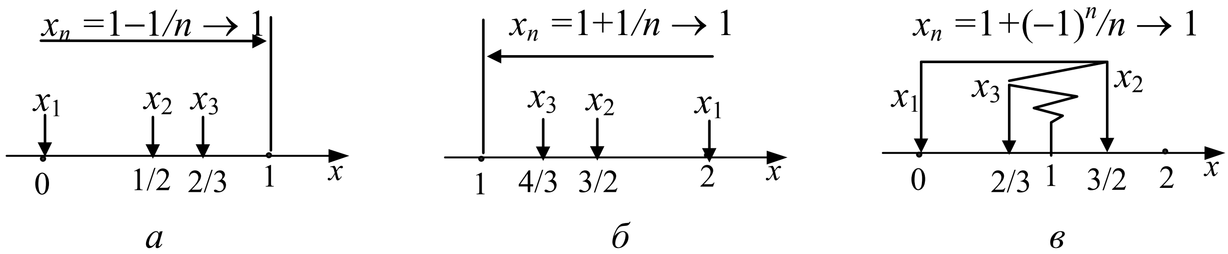


Рис. 2

Прямуючи до границі, змінна може приймати значення, що збігаються із самою границею. Наприклад, змінна $x_n = \dfrac{1}{n}\left[1 + \left(-1\right)^n\right] \to 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1/3$, … , тобто значення x_n з непарним n дорівнюють $lim\, x_n$.

Якщо всі значення величини x_n збігаються з числом a, тобто $x_n = a$, то x_n – стала. Очевидно, у цьому випадку

$$lim\, a = a, \qquad (2)$$

тобто ***границею сталої є сама стала***.

Разом з цим існують змінні, які границі не мають. Так, величина $x_n = 1 + (-1)^n$ приймає тільки два значення: 0, 2, 0, 2, 0, 2, … , але жодне з цих чисел, як і будь-яке інше число, означення границі не задовольняє. Для нескінченно великої величини x_n ніяке скінченне число a не може слугувати границею (означення (1) і (23.3) несумісні). Якщо, однак, нескінченно велика величина x_n, принаймні для достатньо великих значень n, зберігає знак постійним, то відповідно до знаку пишуть $lim\, x_n = +\infty$ або $lim\, x_n = -\infty$. Це й означає відсутність у змінної скінченної границі, але одночасно вказує на характер змінної як нескінченно великої величини того чи іншого знака.

2^0. *Властивості границі*.

1. Змінна x_n не може мати дві різні границі. В іншому разі при $x_n \to a$ та $x_n \to b$, $a \neq b$, для будь-якого $\varepsilon > 0$, починаючі з деякого номера, виконуються нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ і $|x_n - b| < \varepsilon$, тобто значення x_n належать ε-околу точок a та b одночасно. Це неможливо, якщо ε достатньо мале.

2. Границею нескінченно малої величини є нуль і навпаки: якщо $\lim x_n = 0$, то x_n – нескінченно мала величина.

3. Якщо змінна x_n монотонно зростає та обмежена зверху, тобто для всякого номера n $x_n < x_{n+1} < A = const$, то існує скінченна границя $\lim x_n = a \le A$.

4. В нерівності можна переходити до границі: якщо змінні x_n та y_n мають скінченні границі і, починаючі з деякого номера, $x_n < y_n$, то $\lim x_n \le \lim y_n$.

5. Якщо виконуються нерівності $x_n < z_n < y_n$ (принаймні, починаючі з деякого номера n) і змінні x_n та y_n прямують до тої самої границі: $x_n \to a$, $y_n \to a$, то змінна z_n має таку саму границю: $z_n \to a$.

3^0. *Границя суми, добутку, частки*. Якщо змінні x_n та y_n мають скінченні границі: $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то їх сума, добуток і частка (при $y_n \neq 0$ і $b \neq 0$) також мають скінченні границі, а саме:

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = a + b; \tag{3}$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b; \tag{4}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b} \qquad (y_n \neq 0, \quad b \neq 0). \tag{5}$$

Дійсно, через те, що $\lim x_n = a$ і $\lim y_n = b$, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – деякі нескінченно малі. Маємо $(x_n + y_n) - (a + b) = (a + \alpha_n + b + \beta_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n = \gamma_n$, причому γ_n – нескінченно мала величина (див. 4^0 § 23). З огляду на означення границі це й означає, що змінна $x_n + y_n$ має своєю границею стале число $a + b$, тобто дістали рівність (3). Так само $x_n \cdot y_n - a \cdot b = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - a \cdot b = \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n = \gamma_n$, де γ_n – нескінченно мала величина, що й доводить формулу (4).

Далі $$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{b + \beta_n} \cdot \gamma_n = \delta_n,$$

причому $\gamma_n = \dfrac{\alpha_n b - \beta_n a}{b}$ – нескінченно мала величина. Покажемо, що $\dfrac{1}{b+\beta_n}$ – обмежена величина. Нехай для визначеності $b > 0$. Тоді, починаючі з деякого номера, $b+ \beta_n > b/2$, $1/(b+\beta_n) < 2/b$, значить $1/(b+\beta_n)$ – величина обмежена. При цьому δ_n як добуток обмеженої та нескінченно малої величин буде величиною нескінченно малою. Дістаємо: $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \delta_n$ і δ_n – нескінченно мала величина. Згідно з означенням границі звідси випливає твердження (5).

Наслідок. При $y_n = C = const$ з (4), якщо врахувати (2), витікає рівність

$$lim\, Cx_n = lim\, C \cdot lim\, x_n = C\, lim\, x_n. \tag{6}$$

Сталий множник можна виносити за знак границі. Аналогічний висновок справедливий також для сталого дільника, що не дорівнює нулю:

$$lim \frac{x_n}{C} = \frac{1}{C} lim\, x_n.$$

Приклад 2. Нехай $x_n \to 2$ за довільним законом. Застосувавши формули (2)–(6), знайдемо

$$\lim_{x_n \to 2} \frac{2x_n^2+1}{1+x_n} = \frac{lim(2x_n^2+1)}{lim(1+x_n)} = \frac{lim\, 2x_n^2 + lim 1}{lim 1 + lim\, x_n} = \frac{2\, lim\, x_n\, lim\, x_n + 1}{1 + lim\, x_n} = \frac{2\cdot 2\cdot 2+1}{1+2} = 3.$$

4⁰. ***Границя функції***. Коли аргумент x пробігає деяку послідовність значень $\{x_n\}$, відповідні значення функції $y = f(x)$ утворюють послідовність $\{y_n\}$, де $y_n = f(x_n)$. Припустимо, що $x_n \to a$, $x_n \in D(f)$, тоді як саме число a області визначення функції може і не належати. Послідовностей $\{x_n\}$, що мають границю a, – нескінченна множина. Кожній з них відповідає власна послідовність $\{y_n\}$. Якщо при будь-якому способі наближення $x_n \to a$, $x_n \neq a$, відповідна послідовність $\{y_n\}$ усякий раз має одну й ту саму границю A, то її називають границею функції $f(x)$ при $x \to a$. Означення поширюється також на випадки, коли a і (або) A – нескінченно великі величини того чи іншого знака. Записують $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

У прикладі 2 незалежно від способу наближення $x_n \to 2$ змінна $y_n = \dfrac{2x_n^2+1}{1+x_n} \to 3$.

Отже, в процесі $x_n \to 2$ функція $y = \dfrac{2x^2+1}{1+x}$ має границю: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+1}{1+x} = 3$.

Якщо при двох різних способах прямування $x_n \to a$ змінна y_n має різні границі, то це означає, що в процесі $x \to a$ функція $y = f(x)$ взагалі не має границі.

Приклад 3. Нехай $y_n = \sin x$. При $x_n = n\pi \to \infty$ $\lim \sin x_n = \lim \sin n\pi = 0$, при $x_n^1 = 2\pi n + \pi/2 \to \infty$ $\lim \sin x_n^1 = \lim \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$. Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не існує.

Наведене вище означення границі сформульовано «мовою послідовностей». Існує й інше, рівносильне першому [5, с.75], означення: число A – границя функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо різниця $f(x) - A$ за модулем стає як завгодно малою, коли x наближається до числа a достатньо близько, причому так, що $x \neq a$. «Мовою $\varepsilon - \delta$» це означає: яким би малим не було число $\varepsilon > 0$, можна підібрати число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ буде мати місце при усякому $x \neq a$, як тільки станеться $|x - a| < \delta$. Символічний запис останнього означення має такий вигляд:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \neq a, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \quad (7)$$

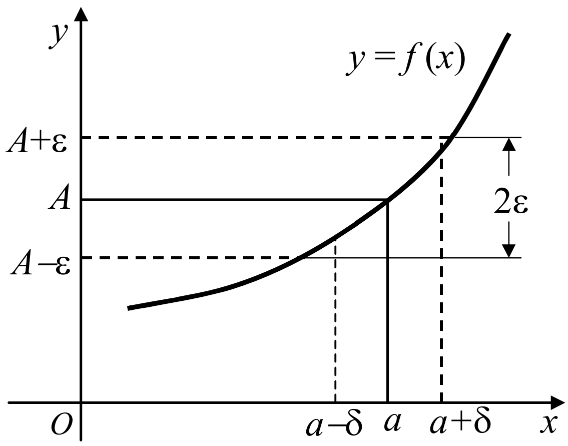


Рис. 3

Означення (7) інтерпретується геометрично: якщо A є $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то для будь-якого ε-околу точки A на осі Oy існує δ-окіл точки a на осі Ox такий, що для усіх $x \neq a$ з δ-околу відповідні значення функції потрапляють в ε-окіл, тобто точки графіка функції розташовані усередині смуги шириною 2ε з віссю симетрії $y = A$ (рис. 3).

Приклад 4. Задана функція $y = 5x - 1$, її аргумент $x \to 2$. Тоді $\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2}(5x - 1) = 9$ з тієї причини, що $|(5x-1) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| < \varepsilon$ як тільки $|x - 2| < \delta = \varepsilon/5$. Саме такий вибір δ приводить до нерівності $|f(x) - 9| = 5|x - 2| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$, тобто $|f(x) - 9| < \varepsilon$.

5^0. ***Односторонні границі функції***. Означення з 4^0, в яких наближення $x \to a$ обмежене умовою $x < a$ або $x > a$, стають означеннями односторонніх границь функції у точці $x = a$:

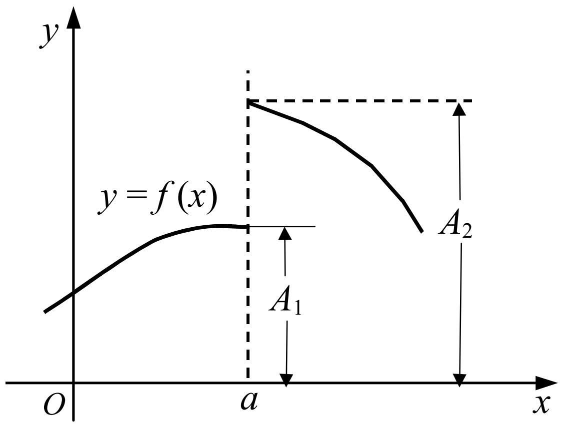


Рис. 4

одностороння границя зліва

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=A_1;$$

одностороння границя справа

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A_2 \text{ (рис. 4).}$$

Позначення $x \to a-0$ вказує на наближення x до точки a зліва від неї вздовж осі Оx, тобто при значеннях $x < a$. Саме так $x \to a+0$ характеризує наближення x до точки a справа від неї, тобто при значеннях $x > a$. При $A_1 \neq A_2$ звичайна границя функції у точці $x = a$ не існує. Якщо $A_1 = A_2$ (у цьому випадку індекс не пишуть, тобто $A_1 = A_2 = A$), то число A буде разом з тим й звичайною границею функції у точці $x = a$. Обернено: якщо A – звичайна границя функції у точці $x = a$, то у цій точці існує односторонні границі, що також дорівнюють A.

Приклад 5. Знайти односторонні границі функції $y = 2^{1/(1-x)}$ при $x \to 1$.

Розв`язування. Якщо $x \to 1-0$, то $1-x \to 0$, причому $1-x > 0$, тобто $1-x$ є додатною нескінченно малою величиною, а дріб $1/(1-x)$ – додатна нескінченно велика величина. При цьому $2^{1/(1-x)}$ також нескінченно велика додатна величина.

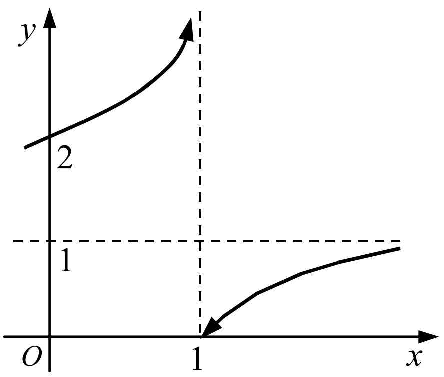


Рис. 5

Застосувавши умовні позначення: $1/0$ – величина, обернена до нескінченно малої, ∞ – нескінченно велика величина, знайдемо односторонню границю зліва:

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty .$$

Аналогічно дістанемо односторонню границю справа:

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

Оскільки односторонні границі не збігаються, то звичайної границі функція y при $x \to 1$ не має. Поведінку функції в околі точки $x = 1$ зображено на рис. 5.

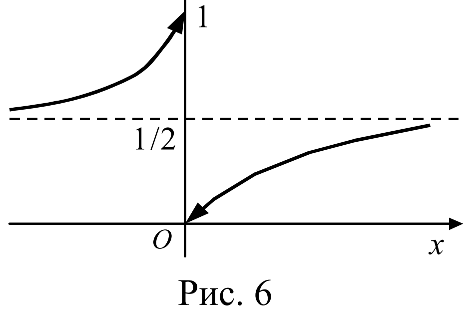


Рис. 6

Приклад 6. $y = 1/\left(1+2^{1/x}\right)$, $x \to 0$. Подібно до попереднього випадку знаходимо (рис. 6)

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-0}}} = \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{+0}}} = \frac{1}{1+2^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

Зауваження. 1. Функцію $f(x)$ називають нескінченно малою у деякому процесі, якщо у цьому процесі вона має границю, що дорівнює нулю. При $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ говорять, що функція є нескінченно малою у точці x_0.
2. Функція $f(x)$ – нескінченно велика у деякому процесі, якщо обернена до неї функція у тому самому процесі веде себе як нескінченно мала величина. 3. Властивості нескінченно малих та границь, що сформульовані для послідовностей у пунктах $1^0 – 3^0$, без змін переносяться на відповідні функції.

♦ Нескінченно мала у Ньютона і Лейбніца носить двоїстий характер: вона менша за будь-яку скінченну величину й разом з цим не є нулем. У Лейбніца з нескінченної кількості нескінченно малих складається скінченне число, але коли нескінченно мала додається до скінченної величини, вона веде себе як нуль. Визначаючи туманність подібних уявлень, Ньютон намагався замінити нескінченно малу поняттям границі. Строгого означення він не дав, але його твердження про властивості границь і способи їх обчислення були правильні. У IX томі французької енциклопедії Даламбер навів майже сучасне означення границі (1765). Повної чіткості поняття нескінченно малої та границі досягли у роботах Коші (1821), а потім в працях Веєрштрасса (у термінах «мови ε-δ») (1880).

♦ **Жан Даламбер** (фр. математик, механік, філософ, 1717 – 1783) самостійно вивчив математику і став її видатним представником. Приймав участь у створенні «Енциклопедії наук, мистецтв, ремесел» (1751 – 1757). Вчений, просвітник, філософ, письменник. Незалежна людина із шляхетними помислами й поступками.

♦ **Карл Веєрштрасс** (нім. математик, 1815 – 1897) роки розквіту творчого життя провів у маленьких провінційних містечках, працюючи шкільним вчителем математики. У 1854 р. став почесним доктором Кенігсбергського університету, де на протязі 30-ти років читав лекції, намагаючись досягти досконалого викладення курсу математики. Кількість його слухачів коливалася від 50 до 250. Він став Вчителем багатьох видатних математиків з різних країн Європи. Найкращою з його учениць була С.В. Ковалевська. Веєрштрасс майже не друкував свої праці, пояснюючи це відразою до типографської фарби. Однак конспекти курсів, які він читав, поширювались в Германії та за кордоном й істотно впливали на розвиток математики.

§ 25. Обчислення границь

Приклади повчальні не менші за правила.
І.Ньютон, англ. математик і фізик XVII – XVIII ст.

1^0. ***Невизначені вирази***. У прикладах § 24 границя функції визначалась безпосередньо міркуваннями із залученням властивостей границі і нескінченно малих величин. В багатьох випадках цього недостатньо через появу так званих невизначеностей. Дріб, у якого чисельник та знаменник – змінні величини, що прямують до нуля, називають невизначеністю виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Існують й інші види невизначеностей: $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$. Ці умовні записи характеризують поведінку змінних величин. Наприклад, вираз 1^∞ є символічним записом того факту, що розглядається змінна типа x^y, причому $x \to 1$, а $y \to \infty$.

Щоб знайти границю невизначеного виразу, необхідно усунути (розкрити) невизначеність. Перелічимо деякі заходи, що ведуть до цієї цілі.

1. **Розкладання многочлена на множники і скорочення «критичного» множника**. У випадку дробово-раціональної функції невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкривається після розкладання чисельника і знаменника дробу на множники. Із алгебри відомо, що многочлен 2-го степеня $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені многочлена. Аналогічно розкладуються многочлени більш високих степенів:

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Приклад 1. $$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{x^2+2x-8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}3x^2-7x+2=0\Rightarrow x_1=2,\, x_2=1/3\\ x^2+2x-8=0\Rightarrow x_1=2,\, x_2=-4\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x-1/3)}{(x-2)(x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-1/3)}{(x+4)}=\frac{5}{6}.$$

2. **Множення на спряжений вираз**. Цей прийом усуває ірраціональність у чисельнику або знаменнику дробу або змінює її форму, приводить до спрощень і як результат – до розкриття невизначеності.

Приклад 2. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{2-\sqrt{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3-1)\left(2+\sqrt{x}\right)}{(4-x)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=-\lim_{x\to 4}\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}+1}=-2.$$

3. **Ділення чисельника і знаменника дробу на вищій степінь змінної**. Застосовується для розкриття невизначеності типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ при $x \to \infty$. За дільник зручніше брати вищій степінь x у знаменнику дробу.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{3-2x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{x^2}}{\dfrac{3-2x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^4}}}{\dfrac{3}{x^2}-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+1/x^4}}{3/x^2-2}=\frac{1+1}{-2}=-1.$$

4. **Підстановка**. Заміна змінної в багатьох випадках приводить до спрощення і потім – до розкриття невизначеності.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{покладаємо}\quad 1+x=t^4,\\ \text{тоді } x=t^4-1,\ \text{при } x\to 0\ \ t\to 1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^4-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{4}.$$

2⁰. ***Перша визначна границя***: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$ (1)

Для доведення рівності (1) розглянемо круговий сектор $\overset{\smile}{OAB}$ радіуса R з центральним кутом α $(0<\alpha<\pi/2)$. Порівнюючи площі фігур ($\widehat{OAC}=90^0$), маємо $S_{\Delta OAB}<S_{\overset{\smile}{OAB}}<S_{\Delta OAC}$,

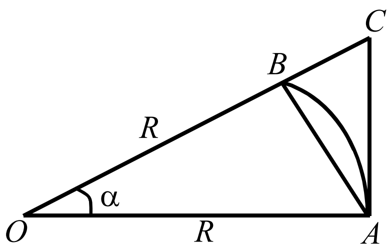


Рис. 1

$$\frac{1}{2}R^2\sin\alpha<\frac{1}{2}R^2\alpha<\frac{1}{2}R^2 tg\alpha\Rightarrow \sin\alpha<\alpha<tg\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}\Rightarrow 1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha.$$

При $\alpha\to 0$ $\cos\alpha\to 1$ $\left(1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\le 2(\alpha/2)^2\to 0\right)$ і величина $\sin\alpha/\alpha$, яка міститься між 1 та $\cos\alpha$, також прямує до 1 (властивість 5 з 2^0 § 24). Заміна α на $-\alpha$ не змінює дріб $\sin\alpha/\alpha$, тому формула (1) справедлива і при $\alpha<0$.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax}=\{ax=\alpha,\quad \alpha\to 0\}=a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=a.$$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax/x}{\sin bx/x}=\dfrac{a}{b}.$

3^0. ***Друга визначна границя***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad (2)$$

де ірраціональне число e = 2,718281828459…

Перша з формул (2) стверджує, що послідовність $y_n = (1+1/n)^n$ має скінченну границю, що дорівнює числу e. Можна довести [5, с.32], що при будь-якому n $y_n < y_{n+1} < 3$. Через те, що послідовність монотонно зростає і обмежена зверху, у неї є скінченна границя, яка й позначена через e. Саме ж значення e визначається обчисленнями.

В другій з формул (2) число e виступає як границя функції $y = (1+1/x)^x$ в процесі $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, що виводиться на підставі властивості послідовності y_n.

Останню формулу в (2) можна здобути з попередньої заміною $1/x = \alpha$.

Приклад 7. $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left\{1^\infty\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a} = \left\{\frac{x}{a} = t, \quad t\to\pm\infty\right\} =$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^a = e^a.$$

Отриманий результат

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad (3)$$

можна розглядати як самостійну формулу, яку зручно використовувати при обчисленнях інших більш складних границь.

Приклад 8. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{3}{2x}}\right)^{x+1} = \left\{1^\infty\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1/2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{-3/2}{x}\right)^x}\cdot\frac{(1+1/2x)}{(1-3/2x)} = \frac{e^{1/2}}{e^{-3/2}} = e^2.$$

Зауваження. Число e грає в математиці таку ж важливу роль, як і число π. Логарифми з основою e називають натуральними: $\ln x = \log_e x$. З десятковими логарифмами вони пов`язані рівністю $ln\,x = 2{,}302\,lg\,x$. Широко застосовуються показникові функції $y = e^x$, $y = e^{-x}$ – експоненти та їх комбінації:

$shx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ – гіперболічний синус;

$chx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ – гіперболічний косинус;

$thx = shx/chx$ – гіперболічний тангенс.

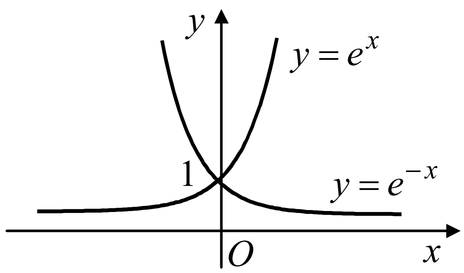


Рис. 2

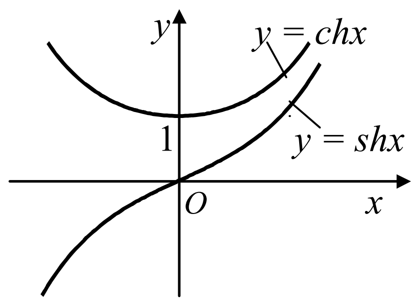


Рис. 3

♦ Позначення сталих π, e, а також функцій $sin\ x$, $cos\ x$, $tg\ x$ впроваджені Ейлером. Збіжність послідовності $(1 + 1/n)^n \to e$ встановив Д. Бернуллі (швейц. фізик і математик, 1700 – 1782). Щоб упевнитися в ірраціональному характері чисел π, e, математики обчислювали їх з високою точністю. Т. Ланьї (1660 – 1734) отримав 128 десяткових знаків числа π (1717). Витративши 80 годин інтенсивної праці, Ейлер перевірив встановлений результат іншим способом. Він знайшов похибку, яку Ланьї зробив у 113-му знаку. Показовим для Ейлера є такий епізод. У 1735 р. уряд запропонував академії наук провести вкрай важке обчислення, на що академіки вимагали декілька місяців. Ейлер виконав цю роботу за три дні. Паризька академія наук 14 разів відзначувала Ейлера преміями – більш, ніж будь кого з його сучасників. Навіть утрата зору не зупинила вченого, він продовжував творити, диктуючи свої роботи секретарю.

§ 26. Порівняння нескінченно малих

Нескінченність в математиці завжди підносить сюрпризи, якщо зневажають її властивостями.
Е. Каснер, Дж. Ньюмен, амер. математики XX ст.

1^0. ***Класифікація***. Нехай при $x \to a$ $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, тобто обидві функції у точці $x = a$ ведуть себе як нескінченно малі величини.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$ і $A \neq 0, A \neq \infty$, то про змінні $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ говорять, що вони нескінченно малі одного порядку.

Якщо, зокрема, $A = 1$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі α та β називають **еквівалентними**. Застосовують позначення: $\alpha \sim \beta$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то величина α відносно β є нескінченно малою більш високого порядку.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A$ та $A \neq 0, A \neq \infty$, то відносно β величина α є нескінченно малою порядку k.

Приклад 1. Застосувавши формулу (25.1), знайдемо а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{3x^2} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\sin 3x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 3x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{3x^2} = 0\cdot 1 = 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x^2}{3x^2} = 3$.

Отже, а) нескінченно малі $\sin 3x^2$ та $3x^2$ при $x \to 0$ еквівалентні, тобто $\sin 3x^2 \sim$ $\sim 3x^2$; б) відносно x нескінченно мала $\sin 3x^2$ більш високого порядку, тобто вона швидше наближається до нуля; в) величина $\sin 3x^2$ має той самий порядок малості, що й величина x^2, по відношенню до x змінна $\sin 3x^2$ – мала 2-го порядку (щоб порядки змінних зрівнялися, знадобилося піднести x до другого степеня).

2^0. *Властивості еквівалентних нескінченно малих*.

1. Якщо $\alpha \sim \beta$, то різниця $\alpha - \beta$ є нескінченно малою порядку більш високого, ніж кожна з цих величин:

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad\Rightarrow\quad \lim\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right) = \lim\frac{\alpha}{\beta} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

2. Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо кожну з них (або тільки одну) замінити на еквівалентну нескінченно малу:

$$\alpha\sim\gamma,\ \beta\sim\delta \quad\Rightarrow\quad \lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\beta}\right) = \lim\frac{\gamma}{\delta}.$$

Останню властивість зручно застосовувати для розкриття невизначеностей. Згідно з (25.1) при $\alpha \to 0$ $sin\alpha \sim \alpha$. Замінивши синуси еквівалентними величинами, в прикладі 25.6 отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,ax}{sin\,bx} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

Володіючи набором еквівалентних нескінченно малих, таким чином можна розкривати невизначеності і в більш складних випадках. Корисно знати, що при $\alpha \to 0$ не тільки $sin\alpha \sim \alpha$, але й також $tg\alpha \sim \alpha$, $arc\,sin\alpha \sim \alpha$, $arc\,tg\alpha \sim \alpha$, $ln(1+\alpha) \sim \alpha$, $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$ (див. 4^0 § 31).

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x \cdot ln(1+arcsin\,x)}{\left(e^x - 1\right)^3} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2 \cdot arcsin\,x}{x^3} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x^2 \cdot x}{x^3} = 4.$$

3^0. ***О-символіка***. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, не обов`язково нескінченно малі, в деякому процесі, наприклад, при $x \to a$ ведуть себе так, що їх відношення α/β є величиною обмеженою. Зокрема, це має місце, якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq \infty$. Тоді пишуть $\alpha = O(\beta)$. У випадку нескінченно малих α і β такий запис відповідає ствердженню, що порядок малості величини α не нижче, ніж у β, тобто такий самий або більш високий.

Якщо в даному процесі $\alpha/\beta \to 0$, то застосовують позначення $\alpha = o(\beta)$. Для нескінченно малих α і β це означає, що величина α – більш високого порядку малості, ніж β.

Приклад 3.

а) $x \to 0 \;\Rightarrow\; x^2 = o(x);\quad 3x + x^2 = O(x);\quad sin\,x = O(x);\quad x = o(1);$

б) $x \to \infty \;\Rightarrow\; x = o\left(x^2\right);\quad 3x + x^2 = O\left(x^2\right);\quad 1 = o(x);\quad sin\,x = o(x).$

§ 27. Неперервність функції

Математичний аналіз визначає усі відчутні взаємозв`язки. Його головний атрибут – ясність; в ньому зовсім немає знаків для вираження туманних понять.
Ж. Фур`є, фр. математик XVIII–XIX ст.

1^0. ***Приріст функції***. Нехай функція $y=f(x)$ визначена у точці x_0 та в деякому її околі. Значення функції в цій точці $y_0=f(x_0)$. Надамо x деякий приріст Δx (>0 або <0). Новому значенню аргументу $x=x_0+\Delta x$ відповідає нове «нарощене» значення функції $f(x_0+\Delta x)=y_0+\Delta y$ (рис. 1). Приріст функції визначається формулою

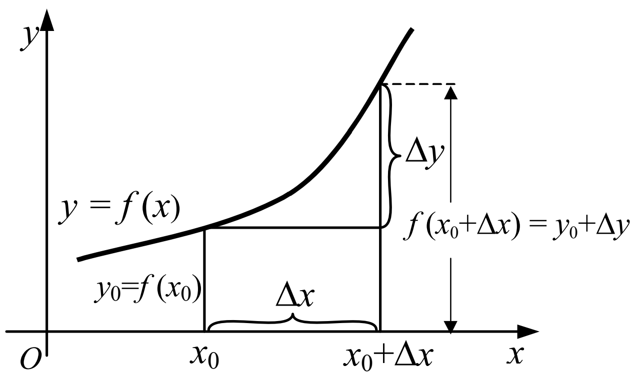


Рис. 1

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (1)$$

Приклад 1. Для функції $y=\sin x$ її приріст у точці x_0 запишеться так:

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

2^0. ***Неперервність у точці, означення* 1**. Функція $y=f(x)$ неперервна у точці x_0, якщо вона визначена у цій точці та деякому її околі і усякому нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (2)$$

Приклад 2. Функція $y=\sin x$ має в довільній точці x_0 приріст $\Delta y=$ $=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$ (див. приклад 1). Знаходимо границю цієї величини, коли $\Delta x\to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$ при будь-якому x_0. Отже, функція $y=\sin x$ при усіх значеннях x неперервна.

Приклад 3. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } 0\le x\le 2,\\ x, & \text{якщо } 2<x\le 4.\end{cases}$

Покажемо, що у точці $x_0=2$ умова неперервності (2) не виконується.

Якщо $x_0 = 2$, то $f(x_0) = 1$. Нехай $\Delta x > 0$, тоді при $x_0 = 2$ $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = 2 + \Delta x - 1 = 1 + \Delta x$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1 \neq 0$.

Отже, функція $f(x)$ у точці $x_0 = 2$ має розрив (рис. 2).

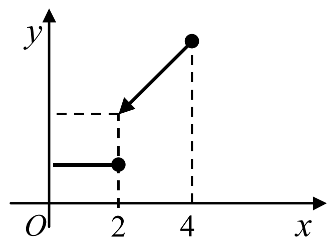


Рис. 2

Зауваження. Згідно з (1) умова неперервності (2) зводиться до вигляду

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

У позначеннях $x_0 + \Delta x = x$ замість (2) маємо еквівалентну йому умову

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3}$$

тобто функція неперервна у точці x_0, якщо границя функції та її значення у цій точці збігаються.

Якщо заздалегідь відомо, що функція $f(x)$ неперервна, то її границя визначається просто – достатньо аргумент функції замінити на його граничне значення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x \right)$.

Основні елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони визначені. Сума, добуток та частка неперервних функцій є неперервною функцією за виключенням точок, в яких знаменник перетворюється на нуль. Складна функція $f(\varphi(x))$, що складена з неперервних функцій, також неперервна.

3^0. *Неперервність у точці, означення* 2. Функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0, якщо 1) вона визначена в цій точці і деякому її околі; 2) існують скінченні односторонні границі $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$; 3) виконуються рівності $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Невиконання хоча б однієї з цих умов означає, що x_0 – точка розриву функції.

В еквівалентності цього та попереднього означень можна переконатися, аналізуючи поняття границі функції у точці [5, с. 87]. При дослідженні функції на неперервність друге означення часто зручніше за перше.

Означення дозволяє увести таку класифікацію точок розриву. Якщо у точці x_0 неперервність функції за якою-небудь причиною порушена, але односторонні границі $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$ існують та скінченні, то говорять про розрив 1-го роду. У таких точках функція $f(x)$ має скінченний скачок, величина якого визначається різницею $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Якщо хоча б одна з односторонніх границь у точці x_0 не існує або нескінченна, то розрив характеризують як розрив 2-го роду. В 5^0 § 24 вже розглядалися функції з розривами. Так, у прикладі 24.5 (рис. 24.5) мав місце розрив 2-го роду, а у прикладі 24.6 (рис. 24.6) – розрив 1-го роду.

Якщо неперервність у точці x_0 порушується тільки через те, що функція у цій точці не визначена, а решту умов неперервності дотримано, то розрив називають усувним – функцію можна довизначити так, що вона стане неперервною. Наприклад, функція $f(x) = \sin x/x$ при $x = 0$ не визначена, її односторонні границі у точці $x = 0$ існують, скінченні та дорівнюють одна одній: $f(0-0) = 1$, $f(0+0) = 1$. Тому після довизначення:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x/x & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

розрив у точці x_0 усувається.

4^0. ***Неперервність в проміжку***. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в проміжку (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку. Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна у відкритому проміжку (a, b), а на кінцях відрізку при $a < b$ виконуються рівності $f(a+0) = f(a)$, $f(b-0) = f(b)$.

Функцію називають кусково-неперервною в деякому проміжку, якщо вона неперервна в ньому за виключенням, можливо, скінченної кількості точок, де функція має розриви 1-го роду.

5^0. ***Властивості неперервних функцій***.

1. Неперервна на відрізку функція $y = f(x)$ досягає на ньому найбільшого (M) та найменшого (m) значень (рис. 3). Для функції, що має розриви, а також для функції, що неперервна у незамкненому проміжку, ця властивість не виконується. Так, неперервна в інтервалі (0; 1) функція $y = x^2$ не має там ані найбільшого, ані найменшого значень. Межі $x = 0$ та $x = 1$ не входять в область визначення функції, а наближатися до них можна як завгодно близько, при цьому і значення функції будуть необмежено наближатися до 0 та 1. Вказати саме мале й саме велике значення функції неможливо.

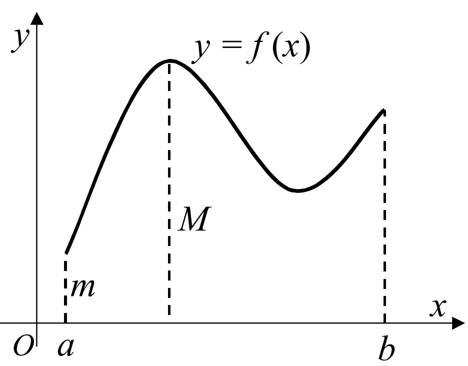


Рис. 3

2. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ на кінцях відрізку приймає значення різних знаків, то всередині відрізку знайдеться принаймні одна точка $x = c$, в якій функція перетвориться на нуль (рис. 4).

Геометрично це означає, що крива $y = f(x)$ хоча б один раз перетинає вісь Ox. Очевидно, що графік розривної функції, за таких самих умов, може не перетинатися з віссю Ox (рис. 5).

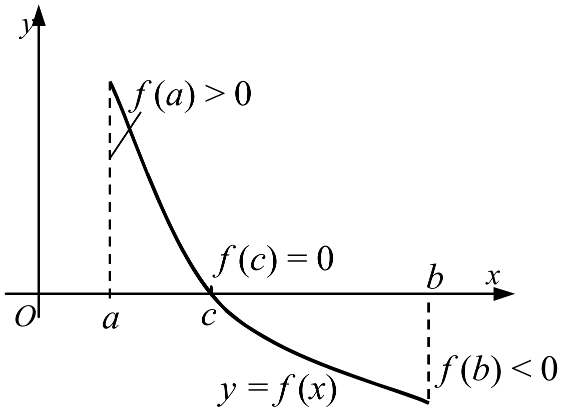


Рис. 4

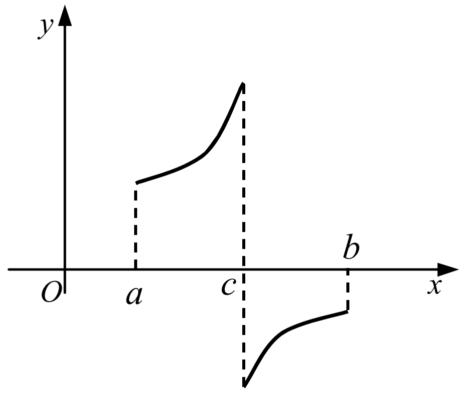


Рис. 5

3. Функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$ із значеннями на його кінцях $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$, приймає на цьому відрізку усі проміжні між A та B значення. Це означає, що для будь-якої точки C з відрізку $[A, B]$ на осі Oy знайдеться відповідна точка c на відрізку $[a, b]$ така, що $f(c) = C$ (рис.6).

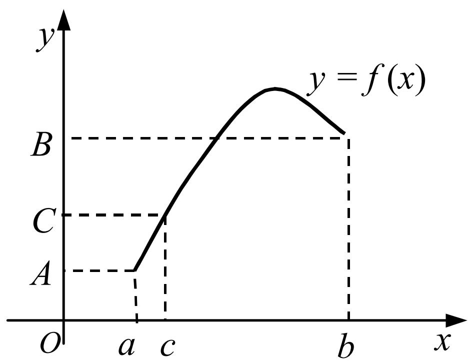


Рис. 6

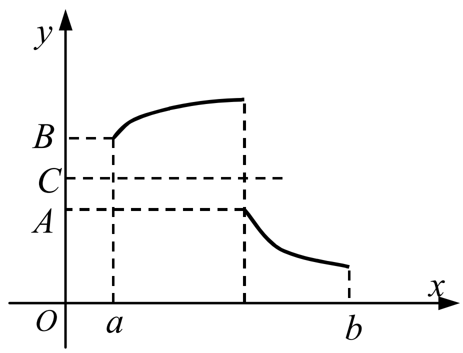


Рис. 7

Властивість несправедлива, якщо на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ має розрив (рис. 7).

♦ Числення нескінченно малих завдяки Ньютону, Лейбніцу та їх послідовникам було потужним інструментом дослідження. Але незабаром стало зрозуміло, що і цей чудовий засіб не завжди придатний, потрібне його обгрунтування. В процесі такого обгрунтування, яке робили Больцано, Коші, Веєрштрасс, було виділено клас неперервних функцій. Властивості, що наведені в 5^0, являють собою теореми, які доведені цими вченими за всіма правилами математики.

♦ Букву Δ для позначення приросту змінної величини впровадив Ейлер.

♦ **Бернард Больцано** (чеськ. математик, філософ, богослов, 1781 – 1848) – професор історії релігії Празького університету. Через ліберальні погляди був відсторонений від викладання і позбавлений права публічних виступів – як усних, так і друкованих. Його дослідження, що мали важливе значення для розвитку математики, здебільшого були опубліковані лише після смерті автора.

Розділ IV

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Будь-яка наукова проблема полягає, як правило, у вивченні зв`язків між змінними величинами. Дуже часто функція визначає деякий процес, який пропливає в часі. Це може бути механічний рух тіла, передача тепла, дифузія в рідині чи газі, переміщення повітряних мас або заряджених частинок в електричному колі, розвиток напружень та деформацій поблизу від гірничої виробки, розчинення речовини, тиск у кровоносній системі людини, ринкові коливання цін і таке інше. Приступаючи до вивчення залежних змінних, дослідник задається питанням, як веде себе функція при зміненні її аргументу – зростає чи спадає, як швидко це відбувається, чи досягає функція заданих значень, як виглядає її графік, як він скривлений в тій чи іншій точці. Найважливішу інформацію про змінення, які зазнає функція, можна отримати за допомогою спеціальної операції – диференціювання. Вона являє собою інструмент, який подібно до скальпеля хірурга діє локально, але глибоко розкриває суть змін, що відбуваються.

Диференціювання – один із основних і найпотужніших засобів математичного аналізу, незамінний як в практичних застосуваннях, так і при теоретичних дослідженнях.

§28. Похідна

Функція $f(x)$ зображує буття речей,
а похідна – їх становлення.
Г. Гегель, нім. філософ XVIII–XIX ст.

1^0. ***Миттєва швидкість***. Нехай матеріальна точка нерівномірно переміщується по прямій. Шлях S, що пройде точка за час t, є функцією $S = f(t)$. Приріст шляху за проміжок часу $[t,\ t + \Delta t]$ знаходиться за формулою (27.1): $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$. Рух відбувається із середньою швидкістю $V_{сер} = \Delta S/\Delta t$. Чим менше Δt, тим точніше середня швидкість характеризує рух в момент t. Природно миттєву швидкість V визначити як границю середньої швидкості при $\Delta t \to 0$, тобто $V = \lim\limits_{\Delta t\to 0} V_{сер} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Таку границю називають похідною функції $S = f(t)$. Визначення миттєвої швидкості руху – одна з багатьох задач, що призводять до поняття похідної.

2^0. ***Означення***. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Позначають похідну по-різному: y', y'_x, $f'(x)$, $\dot{y}$, dy/dx. У запису y'_x нижній індекс указує за якою змінною береться похідна. Операцію визначення похідної називають диференціюванням. Якщо функцією є шлях, що залежить від часу t: $S = f(t)$, то похідна dS/dt – це миттєва швидкість механічного руху. У загальному випадку похідна $y'(x)$ визначає, як швидко змінюється функція $y(x)$ із зміненням її аргументу x.

3^0. *Схема визначення похідної.*

Задана функція $y = f(x)$. Проведемо такі дії:

1) надамо x приріст Δx і дістанемо нарощене значення функції $f(x + \Delta x)$;
2) визначимо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
3) складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ та знайдемо його границю при $\Delta x \to 0$, тобто получимо $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Приклад 1. $y = x^3$.

1) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;

2) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;

3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2$,

тобто $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

Приклади 2 – 6.

2. $y = x$. 1) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)$; 2) $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$;

3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \Rightarrow x' = 1$.

3. $y = \sqrt{x}$. 1) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$; 2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $y = \sin x$. 1) $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$; 2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$ $= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$; 3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot (\Delta x/2) cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = cos\, x \quad \Rightarrow \quad (sin\, x)' = cos\, x\,.$$

5. $y = cos\, x$. 1) $f(x + \Delta x) = cos(x + \Delta x)$; 2) $\Delta y = cos(x + \Delta x) - cos\, x =$

$$= -2\, sin\frac{\Delta x}{2} sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \; 3)\; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\, sin(\Delta x/2) sin(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,(\Delta x/2) sin(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = -sin\, x \quad \Rightarrow \quad (cos\, x)' = -sin\, x\,.$$

6. $y = log_a\, x$. 1) $f(x + \Delta x) = log_a(x + \Delta x)$; 2) $\Delta y = log_a(x + \Delta x) - log_a\, x =$

$$= log_a \frac{x + \Delta x}{x}; \; 3)\; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\frac{\Delta x}{x} = \alpha, \Delta x = \alpha x,\right.$$

$$\left.\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \to 0\right\} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha x} log_a(1 + \alpha) = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \to 0} log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha} = \frac{1}{x} log_a\, e \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (log_a\, x)' = \frac{1}{x} log_a\, e \quad \Rightarrow \quad (ln\, x)' = \frac{1}{x}.$$

4^0. *Геометричний зміст похідної. Дотична і нормаль.*

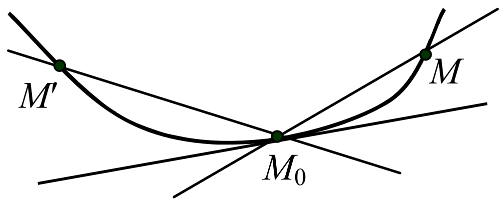


Рис. 1

Розглянемо січну M_0M до деякої кривої. Якщо точка M_0 нерухома, а точка M переміщується вздовж кривої, наближаючись до точки M_0, то січна повертається. Може статися, що існує однозначно визначене граничне положення січної, яке не залежить від того, з якого боку по кривій точка M наближається до точки M_0.

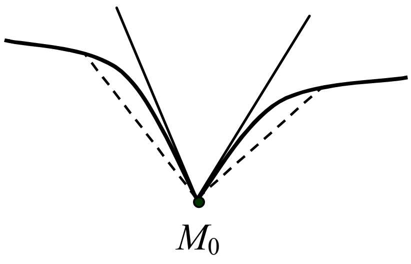


Рис. 2

Таку граничну пряму називають дотичною до кривої у точці M_0 (рис. 1). Якщо M_0 – точка злому кривої, то граничне положення січної неоднозначне (рис. 2). У такому випадку говорять, що крива у точці M_0 не має дотичної або говорять про існування односторонніх дотичних.

Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$. Відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha_1$, α_1 – кут між січною до кривої та віссю Ox. При $\Delta x \to 0$ січна переходить в дотичну, кут $\alpha_1 \to \alpha$ (рис. 3). Маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha, \qquad (2)$$

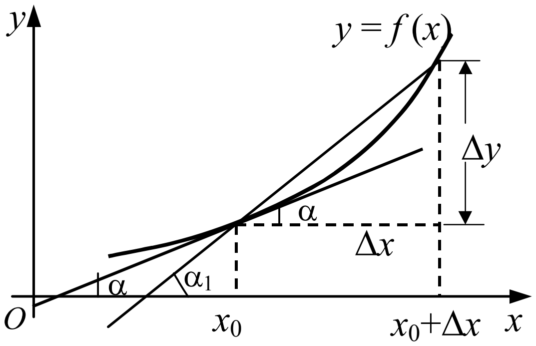


Рис. 3

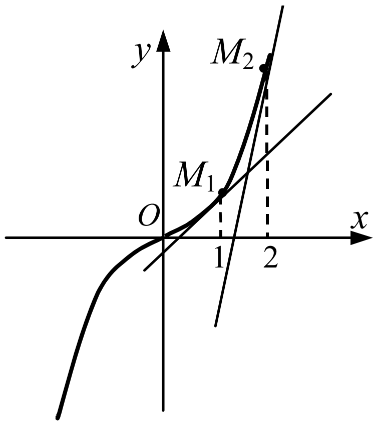


Рис. 4

де α – кут між додатним напрямком осі Ox і дотичною до кривої, $tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Отже, **похідна y', знайдена від функції $y = f(x)$ та обчислена у точці x_0, тобто $f'(x_0)$, є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$.**

Приклад 7. Функція $y = x^3$, $y' = 3x^2$. В точці $x = 1$ похідна $f'(1) = 3\cdot1^2 = 3$, в точці $x = 2$ $f'(2) = 3\cdot2^2 = 12$. Це означає, що дотична до кривої $y = x^3$ у точці $M_1(1;\ 1)$ має кутовий коефіцієнт $k_1 = 3$, а у точці $M_2(2;\ 8)$ кутовий коефіцієнт дотичної $k_2 = 12$ (рис. 4).

У загальному випадку, якщо $M(x_0, y_0)$ – точка кривої $y = f(x)$, то в`язка прямих, що проходять через цю точку, задається рівністю

$$Y - y_0 = k(x - x_0).$$

Для дотичної до кривої у точці M $k = f'(x_0)$, для прямої, що перпендикулярна до дотичної (якщо вона проходить через ту саму точку M, її називають нормаллю), $k = -1/f'(x_0)$. Тому **дотична має рівняння**

$$Y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (3)$$

Рівняння нормалі запишеться так:

$$Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4)$$

Для точки $M(1;\ 1)$ у прикладі 7 рівняння дотичної: $y - 1 = 3(x - 1)$, а рівняння нормалі: $y - 1 = -(x-1)/3$.

5^0. *Диференційовність функції*. Згідно з означенням (1)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує та скінченна, то говорять, що функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x_0. Функцію називають диференційовною у деякому проміжку, якщо вона диференційовна, тобто має похідну, у кожній точці цього проміжку. У точках розриву функції $y = f(x)$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ та скінченна границя відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує. Отже, **неперервність функції – необхідна умова її диференційовності**. Однак функція, що неперервна у точці, не обов`язково має похідну у цій точці.

Приклад 8. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ (див. рис. 22.3).

Вивчимо поведінку функції у точці $x_0 = 1$. Якщо $\Delta x < 0$, то $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2$. При $\Delta x > 0$ $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [2 - (1 + \Delta x)] - 1 = -\Delta x$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$. Виходить, що відношення $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ має різні односторонні границі. Отже, звичайна границя дробу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ у точці $x_0 = 1$ не існує, в цій точці функція $f(x)$ не має похідної. Разом з цим при $\Delta x \to 0$ приріст $\Delta y \to 0$ також, тобто функція $f(x)$ неперервна.

Відсутність похідної в деякій точці x_0 геометрично означає, що у відповідній точці на графіку функції або не існує однозначно визначеної дотичної (рис. 5*а*,*б*), або дотична перпендикулярна до осі Ox (рис. 5*в*).

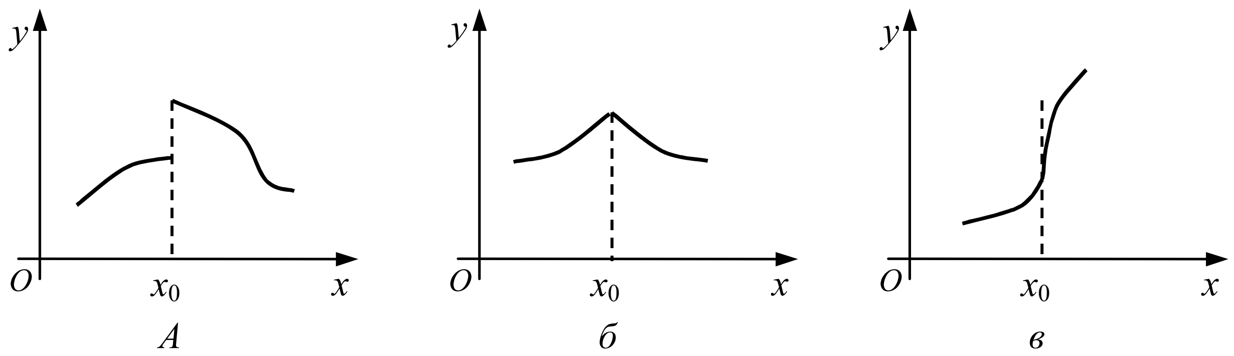


Рис. 5

Функцію $f(x)$ називають **гладкою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку вона сама та її похідна $f'(x)$ неперервні. Графік такої функції іменують гладкою кривою. У будь-якій точці гладкої кривої існує дотична, кутовий коефіцієнт якої неперервно змінюється разом з точкою дотику.

♦ Похідні введені Ньютоном та незалежно від нього Лейбніцем ($\dot{y}$ – позначення Ньютона, dy/dx – Лейбніца, y' – Лагранжа). Перші результати, отримані Ньютоном у 1664 – –1665 рр., викладені у трактаті «Метод флюксій» (написаний у 1670 – 1671 рр., опублікований у 1736 р.). Лейбніц опублікував своє відкриття нового числення у 1684 р. Шість сторінок тексту містять суть числення, у тому числі й основні правила диференціювання. Похідна у Ньютона з`являється у вигляді швидкості, у Лейбніца – як кутовий коефіцієнт дотичної.

§ 29. Основні правила диференціювання

Ця наука (математика) дає надійніші
правила: тому, хто їх дотримується,
не страшний обман почуттів.
Л. Ейлер, математик XVIII ст.

1^0. *Похідна сталої*: $\mathbf{C' = 0}$. (1)

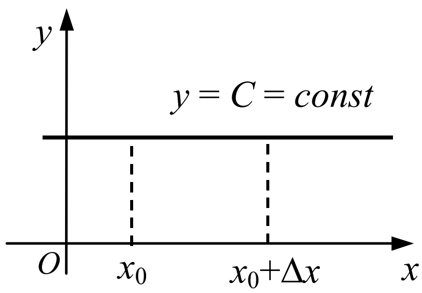


Рис.1

Дійсно, якщо $y = C = const$, то

1) $f(x + \Delta x) = C$;

2) $\Delta y = C - C = 0$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 .$$

2^0. *Похідна суми та різниці*: $(U + V - W)' = U' + V' - W'$. (2)

Насправді, якщо $y = U(x) + V(x) - W(x)$, то змінення аргументу x на величину Δx приводить до того, що функції U, V та W отримують приріст ΔU, ΔV і ΔW відповідно. При цьому

1) $f(x+\Delta x) = (U + \Delta U) + (V + \Delta V) - (W + \Delta W)$; 2) $\Delta y = [(U + \Delta U) + (V + \Delta V) - (W + \Delta W)] - (U + V - W) = \Delta U + \Delta V - \Delta W$; 3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U + \Delta V - \Delta W}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta x} - \frac{\Delta W}{\Delta x} \right) = U' + V' - W' .$$

3^0. *Похідна добутку*: $(U\,V)' = U'V + U\,V'$. (3)

Нехай $y = U(x)V(x)$. Надамо x приріст Δx. Тоді

1) $f(x+\Delta x) = (U+\Delta U)(V+\Delta V)$; 2) $\Delta y = (U+\Delta U)(V+\Delta V) - UV = \Delta UV + U\Delta V + \Delta U\Delta V$; 3) якщо $\Delta x \to 0$, то для неперервних функцій $\Delta U \to 0$, $\Delta V \to 0$, тому $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta UV + U\Delta V + \Delta U\Delta V}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}V + U\frac{\Delta V}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}\cdot\Delta V\right) = U'V + UV'.$$

Зокрема, якщо $U = C = const$, то у силу (1) маємо: $(CV)' = CV'$, тобто **сталий множник можна виносити за знак похідної**.

Приклад 1. $y = 2\sqrt{x}\cos x,\quad y' = \left(2\sqrt{x}\cos x\right)' = 2\left[\left(\sqrt{x}\right)'\cos x + \sqrt{x}\left(\cos x\right)'\right] =$

$$= 2\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x + \sqrt{x}\left(-\sin x\right)\right] = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sin x.$$

4⁰. ***Похідна частки***: $$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}. \tag{4}$$

Нехай $y = \frac{U(x)}{V(x)}$. Надамо x приріст Δx. Тоді

1) $f(x+\Delta x) = \frac{U+\Delta U}{V+\Delta V}$; 2) $\Delta y = \frac{U+\Delta U}{V+\Delta V} - \frac{U}{V} = \frac{\Delta UV - U\Delta V}{V(V+\Delta V)}$;

3) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta U}{\Delta x}V - U\frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(V+\Delta V)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

При $C = const$ згідно з (1) із формули (4) випливають рівності:

$$\left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{U'}{C},\quad \left(\frac{C}{V}\right)' = -\frac{CV'}{V^2}.$$

Приклад 2. $y = \frac{\sin x}{\cos x},\quad y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\quad \text{тобто}\quad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5^0. *Похідна складної функції*: $\boldsymbol{y'_x = y'_u\, u'_x}$. (5)

Нехай y – складна функція x, тобто $y = y(u)$, а $u = u(x)$, інакше $y = y[u\ (x)]$. Якщо x надати приріст Δx, то функція u отримає приріст Δu, який у свою чергу викличе приріст функції $y(u)$, що дорівнює Δy. Для неперервних функцій при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta y \to 0$. Припускаючи, що $\Delta u \neq 0$, маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$.

У загальному випадку, якщо існує похідні y'_u і u'_x, то згідно з (28.1) і зауваженням з 1^0 §24 $\Delta y / \Delta u = y'_u + \alpha$, де $\alpha \to 0$ разом із Δu, $\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u$, що справджується й при $\Delta u = 0$, тому що у цьому випадку $\Delta y = 0$ також. Поділивши останню рівність на $\Delta x \to 0$, з врахуванням поведінки α дістаємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to y'_u u'_x$, тобто $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Приклад 3. $y = \sin x^3$, тобто $y = \sin u$, а $u = x^3$.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot \left(x^3\right)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

6^0. *Похідна неявної функції*. Якщо з рівняння $F(x, y) = 0$, яке визначає залежність y від x, виразити y в явній формі, тобто знайти $y = f(x)$ (міркування більш теоретичне, тому що практично це часто не вдається зробити), а потім внести до вихідного рівняння, то отримаємо тотожність $F(x, f(x)) \equiv 0$. Наприклад, $x^3 + y^3 = a$, $y = \sqrt[3]{a - x^3}$, $x^3 + \left(\sqrt[3]{a - x^3}\right)^3 = a \Rightarrow a \equiv a$. Рівність $F(x, y) = 0$, в якій y є функцією, що визначена цим же рівнянням, являє собою тотожність. Тому похідні від обох її частин також дорівнюють одна одній при всіх значеннях x. Диференціювання рівності $F(x, y) = 0$ приводить до появи похідної y', яку потім можна виділити алгебраїчними методами.

Приклад 4. $x^3 + y^3 = a$, де $a = const$. З урахуванням правила (5) маємо

$$\left(x^3 + y^3\right)'_x = a'_x,\ 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

7^0. *Диференціювання степеневої та показникової функцій*. Розглянемо степенево-показникову функцію $y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, причому $u \neq 0$. Логарифмуванням дістанемо $\ln y = v \ln u$. Тепер y виступає як неявна функція x. Продиференціюємо останню рівність за x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\,ln\,u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u' \Rightarrow y' = y\left[v\cdot\frac{1}{u}\cdot u' + v'\,ln\,u\right] = u^v\left[v\cdot\frac{1}{u}\cdot u' + v'\,ln\,u\right].$$

Звідси знаходимо

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v\,ln\,u\cdot v'. \tag{6}$$

При $v = \alpha = const$ функція u^v стає степеневою: $y = u^\alpha$. Через те що $\alpha' = 0$, згідно з (6) маємо формулу диференціювання степеневої функції

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'. \tag{7}$$

Якщо $u = a = const$, то функція $y = u^v$ приймає вигляд звичайної показникової функції $y = a^v$. Враховуючи, що $a' = 0$, на підставі (6) приходимо до формули диференціювання показникової функції

$$\left(a^v\right)' = a^v\,ln\,a\cdot v'. \tag{8}$$

При $a = e$ $\ ln a = ln e = 1$, і формула (8) спрощується:

$$\left(e^v\right)' = e^v\cdot v'. \tag{8'}$$

Приклад 5. $y = (sin\,x)^x$. Згідно з формулою (6) маємо

$$y' = x(sin\,x)^{x-1}(sin\,x)' + (sin\,x)^x\,ln\,sin\,x\cdot x' = x\,cos\,x(sin\,x)^{x-1} + (sin\,x)^x\,ln\,sin\,x.$$

8⁰. ***Похідна оберненої функції***. Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ взаємно обернені функції. Друга рівність неявно задає функцію $y = f(x)$. Продиференціювавши її за x, знайдемо $1 = \varphi'_y\cdot y'_x$ або $1 = x'_y\cdot y'_x$. Звідси, якщо тільки $x'_y \neq 0$, випливає формула

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{9}$$

Приклад 6. $y = arctg\,x,\quad y\in(-\pi/2,\,\pi/2)$ (див. 5^0 §22). Отримаємо $x = tg\,y$,
$x'_y = \dfrac{1}{cos^2 y} = sec^2 y = 1 + tg^2 y = 1 + x^2,\quad y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{1+x^2}$, тобто

$$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Формули диференціювання за x основних елементарних функцій аргументу $u = u(x)$ та деякі загальні правила наведені у таблиці.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1. $C' = 0$ **2**. $x' = 1$	**8**. $(log_a u)' = \frac{1}{u} log_a e \cdot u'$ $(a = const)$
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$	**8а**. $(ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4. $(uv)' = u'v + uv'$	**9**. $(sin u)' = cos u \cdot u'$
4а. $(Cv)' = Cv'$	**10**. $(cos u)' = -sin u \cdot u'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	**11**. $(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u' = sec^2 u \cdot u'$
5а. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$	**12**. $(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u' = -cosec^2 u \cdot u'$
5б. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$	**13**. $(arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$ $(\alpha = const)$	**14**. $(arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6а. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	**15**. $(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7. $(a^u)' = a^u ln a \cdot u'$ $(a = const)$	**16**. $(arcctg u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7а. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	**17**. $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v ln u \cdot v'$

9⁰. ***Похідні вищих порядків***. Похідну, що знайдена від похідної y', називають похідною 2-го порядку: $y'' = (y')'$. Застосовують також позначення $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ (на операцію $\frac{dy}{dx}$ нашаровується наступне диференціювання:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, що й приводить до позначення $\frac{d^2 y}{dx^2}$). Якщо функцією є шлях S, що залежить від часу t, тобто $S = f(t)$, то похідна $\frac{d^2 S}{dt^2}$ – це прискорення механічного руху ($\frac{dS}{dt} = V$ – миттєва швидкість, $\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{dV}{dt}$ – швидкість змінення швидкості, тобто прискорення).

Похідні вищих порядків визначаються аналогічно: $\frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = \left(y''\right)'$, $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$ (іноді порядок похідної позначають римськими цифрами: замість $y^{(4)}$, $y^{(5)}$,… пишуть y^{IV}, y^{V},…). Розшукуються вони за тими самими правилами, що й похідна y'. Перед тим, як брати наступну, доцільно спростити попередню похідну.

Приклад 7. $y = sin^4 x + cos^4 x$. Найти y'''.

Розв`язування. $y' = 4sin^3 x \cdot (sin x)' + 4cos^3 x \cdot (cos x)' = 4sin^3 x cos x -$
$$- 4cos^3 x sin x = -2 \cdot 2 sin x cos x\left(cos^2 x - sin^2 x\right) = -2 sin 2x cos 2x = -sin 4x .$$
Далі знаходимо: $y'' = (-sin 4x)' = -cos 4x \cdot (4x)' = -4 cos 4x$, $y''' = (-4 cos 4x)' =$
$$= -4(-sin 4x) \cdot (4x)' = 16 sin 4x .$$

♦ Мемуар Лейбніца 1684 р. з викладенням основ диференціального числення, написаний стисло й без доведень, був достатньо важким для розуміння. Не відразу з ним розібрався й Я. Бернуллі. Коли ж це вдалося, вчений став завзятим прибічником нової теорії і разом з братом Іоганном інтенсивно включився до її подальшої розробки. Браття Бернуллі викликали інтерес до нового напряму в своїх учнях: питанням займались Лопіталь, Крамер, Д. Бернуллі (син Іоганна), Ейлер. Так склалася наукова школа Лейбніца.

♦ **Іоганн Бернуллі** (швейц. математик, 1667 – 1748) з 1697 р. – професор у м. Гронінгені (Голландія), в 1705 р., після смерті брата Якоба, перейшов на його кафедру в Базельському університеті, де викладав 43 роки. Автор курсу «Інтегральне числення» (1742).

§30. Диференціал функції

Гідно подиву, наскільки простою може бути ідея і наскільки важливі наслідки з неї випливають. Навіть не віриться, що можна отримати так багато з такого малого.
Л. Морделл, англ. математик XX ст.

1^0. ***Поняття диференціала***. Функція $y = f(x)$ диференційовна, якщо для неї існує похідна $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При кожному фіксованому x значенням $f'(x)$ є число, яке відрізняється від змінного відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ на нескінченно малу величину, тобто $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ разом з Δx (див. зауваження у 1^0 § 24). Дістаємо рівність

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Якщо у точці x $f'(x) \neq 0$, то по відношенню до $\Delta x \to 0$ перший доданок справа – нескінченно мала 1-го порядку, тоді як другий доданок – мала більш високого порядку, тобто $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$. Отже, при малих Δx величина $f'(x)\Delta x$ утворює основну частину приросту Δy. Її називають диференціалом функції та позначають dy. Отже, **диференціал функції $y = f(x)$ – це головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту Δx її аргументу** :

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Застосувавши формулу (2) до функції $y = x$, одержимо

$$dx = \Delta x, \tag{3}$$

тобто диференціал незалежної змінної збігається з її приростом. Для довільної функції це не так: $dy \neq \Delta y$, але $\Delta y = dy + \alpha\Delta x = dy + o(\Delta x)$ і при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \approx dy$ (точніше, $\Delta y \sim dy$, тобто нескінченно малі еквівалентні, тому що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha\Delta x}{dy} = 1 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1$).

Приклад 1. Для функції $y = x^2$ маємо приріст $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, а її диференціал $dy = y'\Delta x = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$. При $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ отримаємо $\Delta y = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21$, а $dy = 0{,}2$, тобто розходження цих величин в $0{,}01$ на порядок менше, ніж самі величини.

З врахуванням (3) замість (2) зазвичай пишуть:

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{або} \qquad dy = y'dx. \tag{4}$$

З останньої рівності маємо $y' = dy/dx$, тобто права частина цього співвідношення слугує не тільки позначенням похідної, але має також зміст дробу з чисельником dy і знаменником dx.

2⁰. ***Геометричний і фізичний зміст диференціала***.

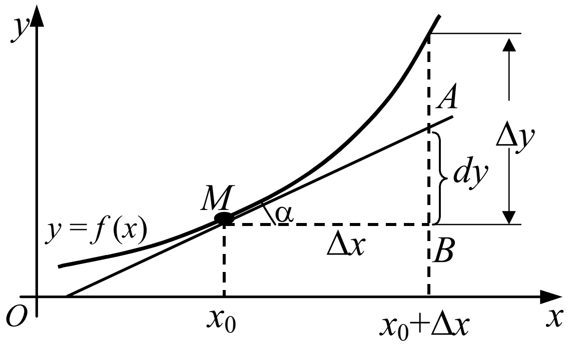


Рис. 1

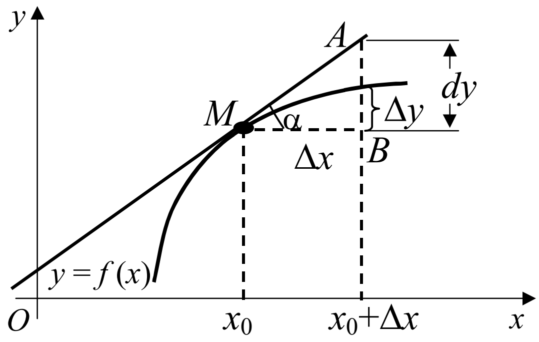


Рис. 2

Розглянемо прямокутний трикутник MAB, де MA – відрізок дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці M; α – кут нахилу дотичної до осі Ox (рис.1, 2). Оскільки $f'(x_0) = tg\alpha$, то враховуючи (4), дістанемо $AB = MB \cdot tg\alpha = f'(x_0)\Delta x = dy$. Отже, **диференціал функції $y = f(x)$, обчислений у точці $x = x_0$, дорівнює приросту ординати дотичної, що проведена до графіку функції у точці з абсцисою x_0**.

Похідна $f'(x)$ визначає швидкість змінення функції $y = f(x)$ із зміненням її аргументу. Різним значенням x відповідають різні значення $f'(x)$, тобто величина y змінюється нерівномірно. Диференціал $dy = f'(x_0)\Delta x$ є тим фіктивним приростом, який функція могла б отримати на проміжку $[x_0, x_0+\Delta x]$, якби її змінення там проходило рівномірно з постійною швидкістю $f'(x_0)$. Заміна приросту Δy на диференціал dy можлива в силу припущення, що величина Δy змінюється незначно, якщо на малому проміжку $[x_0, x_0 + \Delta x]$ нерівномірний процес наближено розглядати як процес рівномірний.

3⁰. ***Властивості диференціала***. Згідно з (4) формально диференціал dy від похідної y' відрізняється тільки множником dx. Тому наведені нижче властивості негайно випливають з відповідних правил диференціювання суми, добутку і частки.

$$d(U \pm V) = dU \pm dV; \quad d(UV) = UdV + VdU; \quad d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}. \tag{5}$$

4⁰. ***Інваріантність форми диференціала***. Нехай y – складна функція x, тобто $y = y(u)$, а $u = u(x)$. Припустимо, що обидві функції диференційовні. Тоді згідно до правила диференціювання складної функції (29.5) з урахуванням (4) отримаємо $dy = y'_x dx = y'_u u'_x dx = y'_u du$. Отже, $dy = y'_x dx$ і $dy = y'_u du$. Обидва вирази за формою збігаються, хоча змістом вони відрізняються: x – незалежна змінна, а u – функція від x. Таким чином, **форма диференціала не залежить від того, що приймати за аргумент при його визначенні – незалежну змінну x або функцію $u = u(x)$**.

5⁰. ***Диференціал і наближені обчислення***. При малих Δx приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ можна замінити з деякою похибкою на диференціал $dy = f'(x)\Delta x$. В результаті маємо наближену рівність
$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

Зокрема, згідно з (6)
$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x; \qquad \frac{1}{x+\Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Delta x;$$
$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x; \qquad \ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x}\Delta x.$$

Наприклад:
$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} = \left\{x=1,\ \Delta x = \frac{1}{16}\right\} \approx 4\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right) = 4{,}125;$$
$$\frac{1}{101} = \frac{1}{100+1} = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1+0{,}01} = \{x=1,\ \Delta x = 0{,}01\} \approx 0{,}01\left(1-\frac{1}{1^2}\cdot 0{,}01\right) = 0{,}0099;$$
$$\ln(1+0{,}1) = \{x=1,\ \Delta x = 0{,}1\} \approx \ln 1 + 0{,}1 = 0{,}1.$$

6⁰. ***Диференціали вищих порядків***. Диференціал $dy = f'(x)dx$ при фіксованому dx є деякою функцією від x. Може статися, що ця функція також має диференціал. Його називають диференціалом 2-го порядку: $d^2 y = d(dy)$. Аналогічно визначається диференціал довільного порядку: $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$.

Якщо x – незалежна змінна, то величина $dx = \Delta x$ не залежить від x і при диференціюванні з нею можна поводитися як зі сталою. При цьому
$$d^2 y = d[y'dx] = [y'dx]' dx = (y')'(dx)^2 = y''(dx)^2.$$
Так само
$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n. \tag{7}$$

У випадку, коли аргумент x не є незалежною змінною, а являє собою функцію деякої змінної t, рівність (7) не зберігає своєї форми. Наприклад: $d^2y = d[y'_x dx] = d(y'_x)dx + y'_x d(dx) = y''_{xx}(dx)^2 + y'_x d^2 x$, де $d^2 x \neq 0$. Таким чином, властивість інваріантності форми, що справджується для диференціалів 1-го порядку, на диференціали вищих порядків не поширюється.

7⁰. ***Диференціювання функцій, що задані у параметричній формі***. Нехай функція y від x задана параметрично, тобто за допомогою рівнянь $x = x(t)$; $y = y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр). Похідну dy/dx можна визначити, не знаючи явної залежності y від x. Достатньо врахувати, що 1) похідна dy/dx є часткою від ділення двох диференціалів; 2) форма диференціалів 1-го порядку не залежить від вибору аргументу. Одержуємо $dy = y'_t dt$, $dx = x'_t dt$. Відношення цих величин дає формулу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

Для похідної $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ запишемо $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(dy/dx)}{dx} = \dfrac{(dy/dx)'_t\, dt}{x'_t dt}$. Звертаючись до рівності (8), отримаємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t/x'_t)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Отже,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)'_t}{x'_t} \quad \text{або} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}. \tag{9}$$

Приклад 2. Розглянемо циклоїду, що задана у параметричній формі (див. 3⁰ § 14):

$$x = a(t - sint), \quad y = a(1 - cost).$$

Згідно з (8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\,\dfrac{t}{2}$. На підставі (9) знаходимо:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)'_t}{x'_t} = \frac{(ctg\, t/2)'_t}{a(1-\cos t)} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2 t/2}}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

♦ Термін «диференціал» (від слова *differentia* – відмінність, лат.) і знак d для його позначення впровадив Лейбніц. Він розглядав диференціал як нескінченно малий приріст функції, при визначенні якого відкидаються малі вищих порядків. У Лейбніца диференціал – вихідне поняття, відношення диференціалів дає похідну. Тільки після робіт Коші центральне місце стали відводити похідній, а потім на її основі визначати диференціал.

§ 31. Властивості диференційовних функцій

Якби я тільки мав теореми! Тоді я зміг би достатньо легко знайти доведення.
Б. Ріман, нім. математик XIX ст.

1⁰. ***Теорема Ролля***. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$, приймає на його кінцях рівні значення: $f(a) = f(b)$, диференційовна у відкритому проміжку $(a,\ b)$, то в цьому проміжку існує, принаймні, одна точка $x = c$ така, що $f'(c) = 0$.

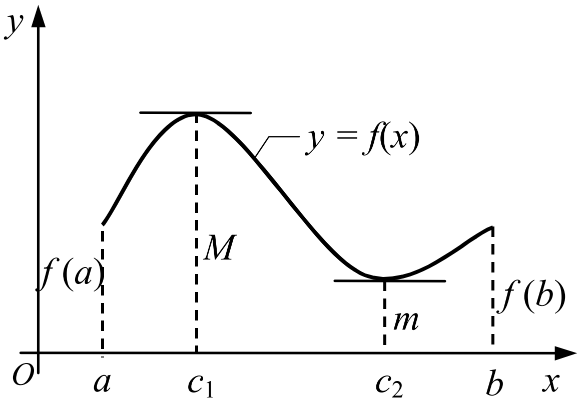


Рис. 1

Оскільки похідна $f'(x)$, обчислена у точці, є кутовим коефіцієнтом дотичної, то рівність $f'(c) = 0$ означає, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна до осі Ox (рис.1). Тому геометричний зміст теореми полягає в наступному: якщо гладка крива на кінцях відрізка має рівні ординати, то всередині відрізка знайдеться хоча б одна точка на кривій, де дотична паралельна до осі Ox. Значення $x = c$ таке, що $f'(c) = 0$, називають стаціонарною точкою функції $f(x)$.

Доведення. Функція $f(x)$ неперервна на $[a,\ b]$, значить вона досягає на цьому відрізку найбільшого (M) та найменшого (m) значень. Якщо $M = m$, то $f(x) = const$ і $f'(x) = 0\ \forall\ x \in (a,\ b)$. Якщо ж $M \neq m$, то хоча б одна з цих величин відмінна від $f(a)$. Нехай $M \neq f(a)$. Тоді найбільше значення досягається всередині відрізку у деякій точці $x = c$, тобто $M = f(c)$ і $a < c < b$. У точці $x = c$ надамо x приріст Δx. Очевидно, що $f(c + \Delta x) \leq f(c) = M$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$; при $\Delta x > 0$ $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$.

Для диференційовної функції $f(x)$ при $\Delta x \to 0$ обидва відношення прямують до однієї й тієї самої границі $f'(c)$. Із 1-ої нерівності випливає $f'(c) \geq 0$, з 2-ої – $f'(c) \leq 0$. Це можливо тільки у тому випадку, коли $f'(c) = 0$. При $m \neq f(a)$ доведення аналогічне.

Зауваження. Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля іноді формулюють так: *між двома нулями диференційовної функції існує нуль її похідної*.

2⁰. ***Теорема Коші***. Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$ неперервні, а у відкритому проміжку (a, b) – диференційовні, причому $\varphi'(x) \neq 0$, то у цьому проміжку існує, принаймні, одна точка $x = c$ така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

Доведення. Очевидно, що $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, інакше згідно з теоремою Ролля у проміжку (a, b) знайшлася б точка, де похідна $\varphi'(x) = 0$, що виключено за умовою. Створимо допоміжну функцію $F(x) = f(x) - \lambda\varphi(x)$ і підберемо сталу λ так, щоб функція $F(x)$ задовольняла умови теореми Ролля. Для цього достатньо, щоб виконувалась рівність $F(a) = F(b)$, тобто $f(a) - \lambda\varphi(a) = f(b) - \lambda\varphi(b)$. Звідси знайдемо

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \tag{2}$$

До функції $F(x)$, де λ визначено формулою (2), застосуємо теорему Ролля: знайдеться точка $x = c$, $a < c < b$, така, що $F'(c) = 0$. Маємо $F'(x) = f'(x) - \lambda\varphi'(x)$, $F'(c) = f'(c) - \lambda\varphi'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = f'(c)/\varphi'(c)$. Останнє співвідношення разом з рівністю (2) саме й приводить до формули (1).

3⁰. ***Теорема Лагранжа***. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна у відкритому проміжку (a, b), то у цьому проміжку існує, принаймні, одна точка $x = c$ така, що виконується рівність

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{3}$$

Доведення цієї формули випливає з теореми Коші, достатньо покласти в (1) $\varphi(x) = x$. Співвідношення (3) називають формулою скінченних приростів, завдяки рівності (3) на відрізку $[a, b]$ приріст функції $\Delta y = f(b) - f(a)$ виражається через приріст її аргументу $\Delta x = b - a$.

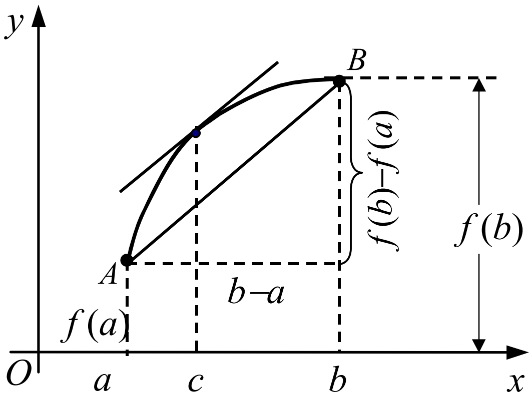


Рис. 2

Згідно з (3)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (3')$$

Зліва в (3′) записаний кутовий коефіцієнт хорди AB (рис. 2), справа – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ при $x=c$. Рівність кутових коефіцієнтів означає паралельність прямих. Тому геометрично теорема Лагранжа стверджує, що на гладкій дузі $\overset{\frown}{AB}$ існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна до хорди AB.

4^0. *Правило Лопіталя*.

Теорема. Нехай 1) на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми Коші; 2) $f(a)=0$ та $\varphi(a)=0$; 3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тоді існує також $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (4)$$

Доведення. Візьмемо довільну точку $x\in(a, b)$. На відрізку $[a, x]$ згідно з (1) справедлива рівність $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, де $a<c<x$. Оскільки $f(a)=\varphi(a)=0$, то співвідношення прийме вигляд $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Якщо $x\to a$, то також і $c\to a$. В останній рівності перейдемо до границі: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Наближення $c\to a$ – одна з частинних реалізацій процесу $x\to a$. За умовою $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує, отже, не залежить від способу наближення $x\to a$. Тому $\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, що й приводить до формули (4).

Рівність (4) називають **правилом Лопіталя**. За допомогою правила (4) розкривають невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, а також $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, причому прямування $x \to a$ можна поширити на випадок $a = \infty$, тобто коли $x \to \infty$.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{[ln(1+x)]'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

Таким чином, при $x \to 0$ $ln(1+x) \sim x$ (див. § 26).

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 1\right)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \text{при } x \to 0 \quad e^x - 1 \sim x.$$

Правило (4) можна застосувати повторно, поки зберігається невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ та дотримуються інші умови наведеної вище теореми.

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - sin\,x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x - sin\,x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - cos\,x}{3x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - cos\,x\right)'}{\left(3x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{6x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(sin\,x\right)'}{\left(6x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Нехай n – довільне, достатньо велике натуральне число. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^n\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(nx^{n-1}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{\infty}{1\cdot 2\cdots n} = \infty.$$

Це означає, що в процесі $x \to \infty$ показникова функція e^x випереджає у зростанні будь-який натуральний степінь x.

Приклад 5. Нехай $\alpha > 0$ – довільне число, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln\,x}{x^\alpha} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(ln\,x\right)'}{\left(x^\alpha\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, в процесі $x \to \infty$ функція $lnx \to \infty$ повільніше, ніж будь-який додатний степінь x.

Зауваження. До розкриття невизначеностей інших типів, крім вказаних вище, правило Лопіталя безпосередньо застосовувати не можна, але воно стає придатним, якщо невизначеність заздалегідь перетворити до одного з основних видів: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \{\infty - \infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = \left\{1^\infty\right\}$. За допомогою логарифмування цю невизначеність можна перетворити до невизначеності більш простого типу. Покладемо $y = (2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$ і запишемо $\ln y = tg\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)$. Тут при $x \to 1$ права частина являє собою невизначеність виду $\{\infty\cdot 0\}$. Знаходимо спочатку $\lim\limits_{x\to 1}\ln y = \lim\limits_{x\to 1} tg\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) =$

$$= \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1}\frac{[\ln(2-x)]'}{\left(ctg\frac{\pi x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$ Оскільки

$\lim\limits_{x\to 1}\ln y = \frac{2}{\pi}$ або, що те саме, $\ln\lim\limits_{x\to 1} y = \frac{2}{\pi}$, то потенціюванням отримаємо $\lim\limits_{x\to 1} y = e^{2/\pi}$.

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x/\sqrt{1+x^2}}{1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{x'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x/\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$ – повернулися до вихідного виразу. Правило Лопіталя тут не веде до розкриття невизначеності, але границя обчислюється просто: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$.

♦ Той факт, що Наполеон зробив Лагранжа графом, для математики несуттєвий. Значно більше враження справила оцінка теореми Лагранжа (3), яку дав Веєрштрасс – він вважав її однією з самих важливих теорем усього аналізу.

♦ На основі листування братів Бернуллі з Лейбніцем та конспекту лекцій І. Бернуллі його учень **Гійом Лопіталь** (фр. математик, 1661 – 1704) у 1696 р. видав перший у світі підручник з диференціального числення «Аналіз нескінченно малих для дослідження кривих ліній», де, зокрема, навів правило розкриття невизначеностей. В передмові до книги автор пише: «…повинен визнати, що я зобов`язаний знаннями пп. Бернуллі, особливо молодшому з них. Я без жодних вагань користувався їх відкриттями та відкриттями п. Лейбніца. Тому я не маю нічого проти того, щоб вони пред`явили свої авторські права на все, що їм завгодно, сам задовольнюся тим, що вони дозволять мені залишити».

♦ **Жозеф Лагранж** (фр. математик і механік, 1736 – 1813) разом з Ейлером – найбільш впливовий математик XVIII ст. З 17-ти років викладав математику в артилерійській школі м. Турина, а в 19 вже був професором. Організував наукове товариство, яке згодом стало Туринською академією наук. Прославився своїми дослідженнями в галузі математичного аналізу. Коли у 1766 р. Ейлер залишив Берлін та переїхав до Петербурга, його місце в Берлінській академії наук зайняв Лагранж. У запрошенні Фрідріха Великого сказано: «треба, щоб найвеличніший геометр Європи мешкав поблизу найвеличнішого з королів». В ті часи усіх математиків називали геометрами. Насправді ж Лагранж був першим чистим аналітиком, геометричною наочністю він неодноразово нехтував. В його головній праці «Аналітична механіка» (1788) немає жодного креслення, чим із задоволенням пишався сам автор. Після смерті короля Фрідріха переїхав до Парижа, де діяльно брав участь в організації провідних навчальних закладів Франції – Нормальної і Політехнічної шкіл.

♦ **Мішель Ролль** (фр. математик, 1652 – 1719) займався алгеброю та аналізом. У 1690 – 1691 рр., вивчаючи проблему розташування нулів многочлена, встановив, що між двома коренями рівняння $f'(x)=0$ знаходиться не більше одного кореня рівняння $f(x)=0$. Під час доведення цього ствердження була отримана теорема, яка тепер носить ім`я Ролля. Один з перших критиків вчення Лейбніца про нескінченно малі. До визнання нового вчення Ролль прийшов лише наприкінці життя.

§ 32. Дослідження функції

Хто вчився наукам й не застосовує їх,
схожий на того, хто орав, але не сіяв.
Сааді, перс. поет XIII ст.

1^0. ***Зростання та спадання функції***. Нехай неперервна та диференційовна функція $y=f(x)$ зростає у проміжку $(a,\ b)$. Дотична до графіку такої функції утворює з віссю Ox гострий кут, виключення можуть складати лише окремі точки, в яких дотична паралельна до осі Ox (рис. 1). При цьому кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x) \geq 0$. Так само кутовий коефіцієнт дотичної до графіку спадної функції $k = f'(x) \leq 0$ (рис. 2).

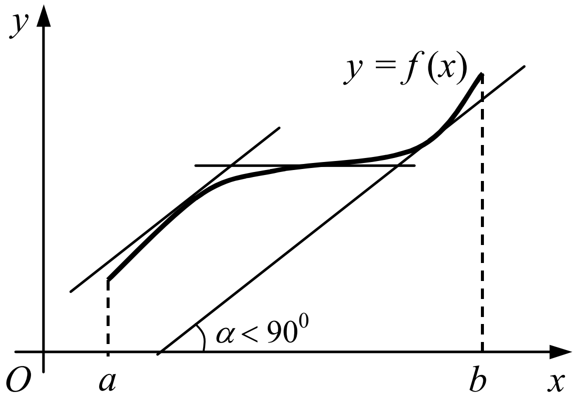


Рис. 1

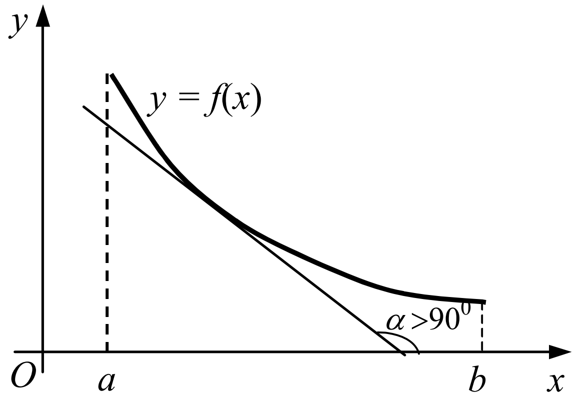


Рис. 2

Отже, за знаком похідної $f'(x)$ можна робити висновок про поведінку функції $f(x)$. Справедливе твердження: якщо у кожній точці проміжку (a, b) $f'(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ у цьому проміжку зростає, а при $f'(x) < 0$ – спадає.

Дійсно, для довільної пари точок x_1, x_2 з (a, b) такої, що $x_1 < x_2$, згідно з теоремою Лагранжа маємо $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$. Якщо $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (a, b)$, то $f'(c) > 0$ також. Права частина записаної вище рівності додатна, отже, $f(x_2) > f(x_1)$. Але це й означає, що функція $f(x)$ зростає. У випадку $f'(x) < 0$ аналогічним чином заключаємо, що функція $f(x)$ спадає.

Приклад 1. Дослідити поведінку функції $y = sin\dfrac{\pi x}{2}$ в околі точки $x = 2$.

Розв`язування. $y' = cos\dfrac{\pi x}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $\quad y'(2) = \dfrac{\pi}{2} cos\,\pi = -\dfrac{\pi}{2} < 0$. Через те, що y' – неперервна функція, $y' < 0$ не тільки в самій точці $x = 2$, але також у деякому околі цієї точки. Таким чином, функція y в околі точки $x = 2$ спадає.

Приклад 2. Знайти інтервали зростання та спадання функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв`язування. Функція y диференційовна на всій числовій осі, $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Похідна $y' = 0$ у точках $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, які розбивають числову вісь на проміжки $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$. У кожному з цих інтервалів y' зберігає знак постійним, тому достатньо визначити знак y' у довільній точці інтервалу. У проміжках $(-\infty, 0)$ та $(2, \infty)$ $y' > 0 \Rightarrow$ функція y зростає, а в інтервалі $(0, 2)$ $y' < 0 \Rightarrow$ функція y спадає (рис. 3, 4).

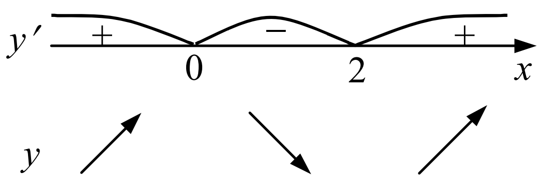


Рис. 3

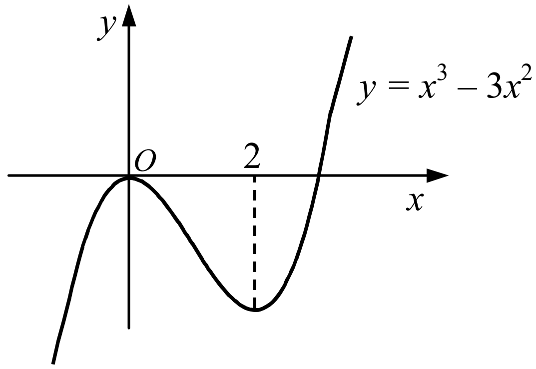
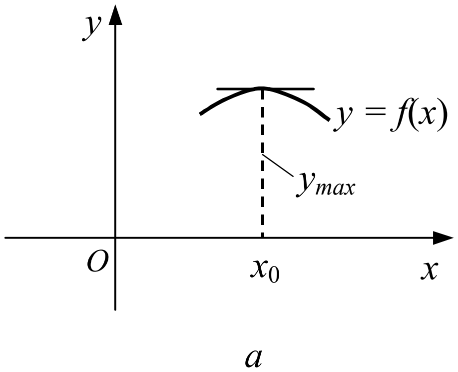


Рис. 4

2⁰. ***Поняття екстремуму***. Неперервна функція $y = f(x)$ досягає у точці x_0 **максимуму**, якщо для усіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки $f(x) < f(x_0)$ (рис. 5*а*). У випадку оберненої нерівності $f(x) > f(x_0)$ говорять, що у точці x_0 функція y має **мінімум** (рис. 5*б*).



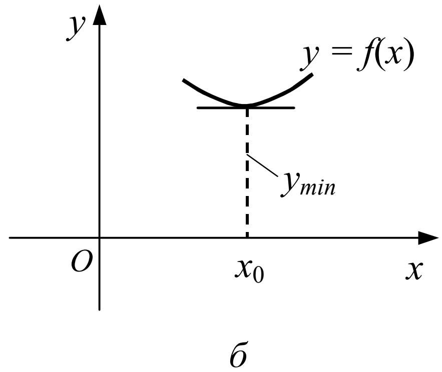


Рис. 5

Максимум (*max*) та мінімум (*min*) – це значення функції із загальною назвою – **екстремуми**. Пишуть $y_{max} = y(x_0)$ або $y_{min} = y(x_0)$, де x_0 – точка екстремуму. Окіл точки x_0, де виконується та чи інша з вказаних вище нерівностей, може бути дуже малим, тому екстремуми характеризують функцію локально – вони визначають найбільше або найменше значення функції, але тільки в околі даної точки. Щоб підкреслити вказану особливість, такі значення функції називають локальними екстремумами.

3⁰. ***Необхідні умови екстремуму***. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ має у точці x_0 екстремум, то в цій точці похідна y' перетворюється на нуль або не існує.

Дійсно, нехай диференційовна функція $y = f(x)$ досягає у точці x_0 максимуму. Тоді, повторюючи міркування, що вже використовувались для доведення теореми Ролля, одержимо:

при $\Delta x < 0$ $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, при $\Delta x > 0$ $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, якщо

$\Delta x \to 0$, то $f'(x_0) \geq 0$ і $f'(x_0) \leq 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$. У випадку мінімуму – результат той самий.

Геометрично це означає, що дотична до графіка гладкої функції у точках, де досягається екстремум, паралельна до осі Ox (рис. 5). Обернене твердження несправедливе: якщо $f'(x_0) = 0$ і дотична паралельна до осі Ox, то екстремуму у точці x_0 може і не бути (рис. 1). Отже, **у точці, де диференційовна функція $y = f(x)$ має екстремум, похідна y' повинна перетворюватися на нуль** (теорема Ферма). Разом з цим екстремум може досягатися також у точках, де похідна y' відсутня (рис. 6).

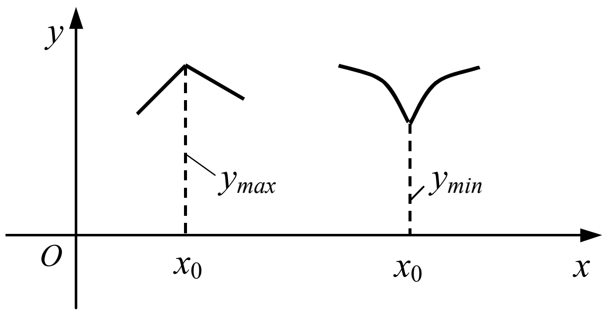


Рис. 6

Точки, в яких y' перетворюється на нуль або не існує, називають **критичними**. Тільки у таких точках ймовірні екстремуми функції.

4⁰. ***Достатні умови екстремуму***. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в околі своєї критичної точки x_0. Якщо при переході через цю точку зліва направо похідна y' змінює знак з «+» на «–», то в точці x_0 функція $y = f(x)$ має максимум. Зміна знака y' з «–» на «+» означає, що у точці x_0 функція $y = f(x)$ досягає мінімуму.

Дійсно, якщо при $x < x_0$ $y' > 0$, а при $x > x_0$ $y' < 0$, то зліва від точки x_0 функція y зростає, а справа від неї спадає. При цьому у самій точці x_0 досягається найбільше значення функції у порівнянні з її значеннями в околі цієї точки, тобто має місце максимум. Аналогічно у випадку мінімуму.

Таким чином, **змінення знака похідної y' при переході через критичну точку x_0 достатньо для того, щоб в цій точці неперервна функція $y = f(x)$ мала екстремум**.

Дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум виконують за такою схемою.

1) Знаходять похідну y'.

2) Визначають критичні точки, тобто точки, де $y' = 0$ або не існує.

3) В околі кожної критичної точки спочатку зліва, а потім справа від неї вивчають знак y'. Зміна знака y' з «+» на «–» означає, що у критичній точці функція y досягає максимуму, при зміні ж знака з «–» на «+» – мінімуму.

4) Обчислюють екстремальні значення функції.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y = x^5/5 - x^4 + x^3$.

Розв`язування. Функція y визначена на всій числовій осі. Вона неперервна і диференційовна при усіх значеннях x. Користуючись наведеною вище схемою, знаходимо

1) $y' = x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^2\left(x^2 - 4x + 3\right)$;

2) $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3$ – критичні точки;

3) розбиваємо числову вісь на проміжки $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$ і на кожному з них визначаємо знак y' по якій-небудь точці з даного проміжку (рис. 7). Зліва і справа від критичної точки $x = 0$ $y' > 0$, змінення знака y' немає, отже, функція y в околі точки $x = 0$ монотонно зростає, екстремуму тут немає. При переході через точку $x = 1$ знак y' змінюється з «+» на «–». Значить, у точці $x = 1$ функція досягає максимуму, причому $y_{max} = y(1) = 1/5$. При переході через точку $x = 3$ змінюється знак y' з «–» на «+». У точці $x = 3$ функція y має мінімум: $y_{min} = y(3) = -5{,}4$ (рис. 8).

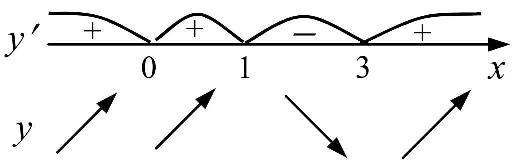


Рис. 7

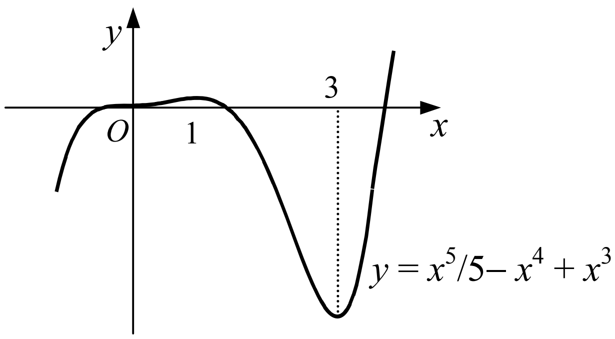


Рис. 8

Приклад 4. Знайти екстремум функції $y = 1 + \sqrt[3]{x^2}$.

Розв`язування. Функція y визначена і неперервна на всій числовій осі.

1) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 2) $y' \neq 0$, y' не існує при $x = 0$, отже, $x = 0$ – критична точка; 3) визначимо знак y' в околі точки $x = 0$: при $x < 0$ $y' < 0$, при $x > 0$ $y' > 0$ (рис. 9). Зміна знака y' з «–» на «+» означає, що у точці $x = 0$ дана функція досягає мінімуму: $y_{min} = y(0) = 1$ (рис. 10).

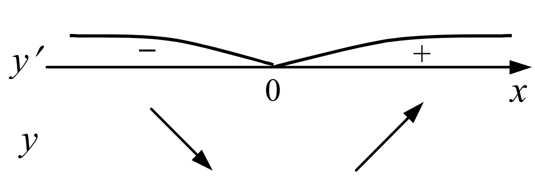


Рис. 9

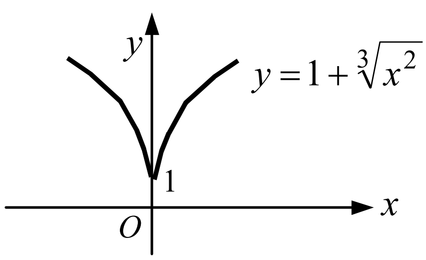


Рис. 10

5⁰. ***Відшукування екстремуму за допомогою другої похідної***. Нехай $f'(x_0) = 0$, тобто x_0 – стаціонарна точка функції $y = f(x)$. Припустимо, що у цій точці та у деякому її околі існує неперервна друга похідна $f''(x)$. Тоді, якщо

$f''(x_0) < 0$, то функція $y = f(x)$ у точці x_0 має максимум, якщо ж $f''(x_0) > 0$, то у точці x_0 досягається мінімум функції $f(x)$.

Справді, якщо $f''(x_0) < 0$, то через неперервність $f''(x) < 0$ не тільки у точці x_0, але й у деякому її околі. Остання нерівність, записана у формі $[f'(x)]' < 0$, означає, що похідна $f'(x)$ у такому околі спадає (рис.11). Оскільки $f'(x_0) = 0$, то при переході через точку x_0 повинна статися зміна знака $f'(x)$ з «+» на «–». При цьому, як відомо, функція $y = f(x)$ у точці x_0 має максимум (рис.12).

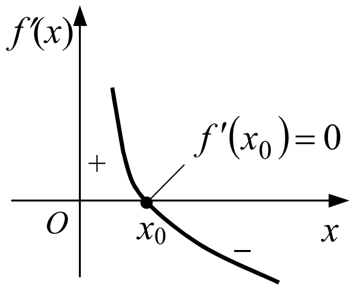


Рис. 11

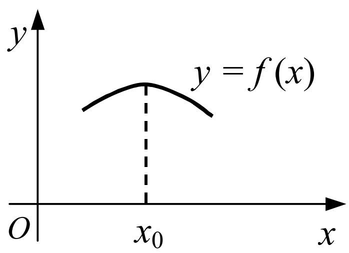


Рис. 12

Існування мінімуму доводиться аналогічно.

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум із використанням другої похідної $f''(x)$ містить такі кроки:

1) знаходження y';

2) відшукування стаціонарних точок функції $y = f(x)$, тобто точок, де $f'(x_0) = 0$;

3) знаходження y'' та визначення знака y'' у кожній стаціонарній точці. Якщо $f''(x_0) < 0$, то у точці x_0 максимум, при $f''(x_0) > 0$ – мінімум функції $y = f(x)$;

4) обчислення екстремальних значень функції.

Приклад 5. Знайти екстремум функції $y = x + cos\,2x, \quad x \in [0, \pi]$.

Розв`язування. Маємо 1) $y' = 1 - 2sin\,2x$; 2) $y' = 0 \Rightarrow 1 - 2sin\,2x = 0$, $sin\,2x = 1/2$, $2x_1 = \pi/6$, $2x_2 = 5\pi/6$. На проміжку $[0, \pi]$ існують дві стаціонарні точки $x_1 = \pi/12$, $x_2 = 5\pi/12$; 3) $y'' = -4cos\,2x$, $y''(\pi/12) = -4cos(\pi/6) < 0 \Rightarrow$ у точці $x = \pi/12$ функція y має максимум: $y_{max} = y(\pi/12) = \pi/12 + cos(\pi/6) = 0{,}262 + {}$ $+ 0{,}866 = 1{,}128$; $y''(5\pi/12) = -4cos(5\pi/6) > 0 \Rightarrow$ у точці $x = 5\pi/12$ функція y досягає мінімуму: $y_{min} = y(5\pi/12) = 5\pi/12 + cos(5\pi/6) = 1{,}310 - 0{,}866 = 0{,}444$.

Зауваження. Дослідження на екстремум у точках, де y' не існує або $y' = 0$ і $y'' = 0$ одночасно, виконують за допомогою першої похідної за схемою п. 4^0.

6^0. ***Найбільше та найменше значення функції на відрізку***. Як наголошувалося вище (5^0 §27), неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ має

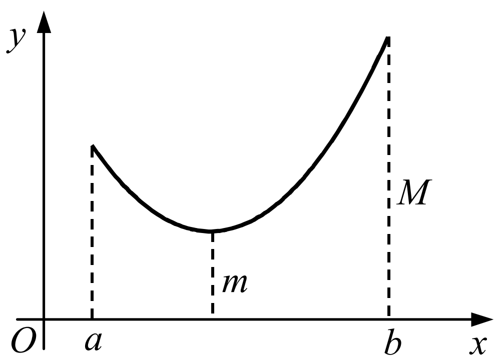


Рис. 13

на цьому відрізку найбільше (M) та найменше (m) значення, їх називають глобальними екстремумами. Ці значення функція приймає або у точках локального екстремуму всередині відрізку або на кінцях останнього (рис. 13). Достатньо у вказаних точках обчислити значення функції та порівняти їх між собою. У результаті визначаються саме велике та саме мале значення функції на відрізку і ті точки, де ці значення досягаються.

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x+1}{x^2+3}$ на відрізку $[-1,\ 3]$.

Розв`язування. Знаходимо $y' = \dfrac{3 - x^2 - 2x}{\left(x^2+3\right)^2}$; $y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow$ $x_1 = 1,\ \ x_2 = -3$. На відрізку $[-1,\ 3]$ міститься тільки одна критична точка $x = 1$. У цій точці $y(1) = 1/2$. На кінцях відрізку функція приймає значення $y(-1) = 0$, $y(3) = 1/3$. Порівнюємо знайдені значення функції. Робимо висновок: саме велике значення функції на відрізку $y_{наиб} = y(1) = 1/2$, а саме мале $-$ $y_{наим} = y(-1) = 0$.

7^0. ***Опуклість кривої. Точка перегину***. Нехай M – деяка точка кривої $y = f(x)$. Проведемо в цій точці дотичну до кривої. Якщо в околі точки M крива розташована під дотичною, то говорять, що у точці M крива **опукла уверх** (рис. 14). Крива у точці M **опукла униз**, якщо вона в околі цієї точки розташована над дотичною (рис. 15).

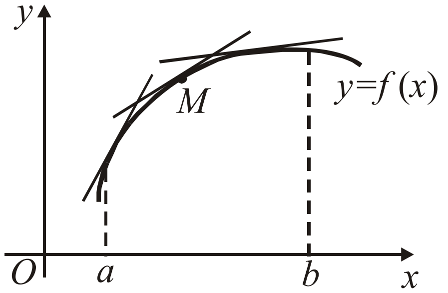


Рис 14

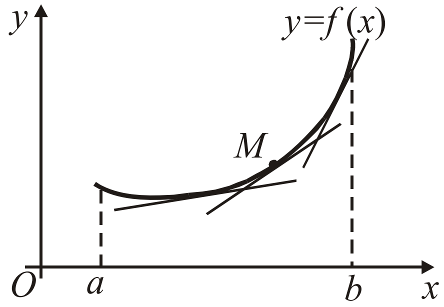


Рис. 15

Про напрямок опуклості кривої можна судити за знаком другої похідної $f''(x)$. **Якщо в усіх точках проміжку (a, b) $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ у цьому проміжку опукла уверх, а при $f''(x) > 0$ – униз.**

Дійсно, при $f''(x) < 0$ або, що те ж саме, $[f'(x)]' < 0$ похідна $f'(x)$ спадає. Таким чином, із зростанням x зменшується кутовий коефіцієнт, тобто нахил дотичної до осі Ox. При цьому крива опукла уверх (рис. 14). Так само при $f''(x) > 0$ або $[f'(x)]' > 0$ похідна $f'(x)$ зростає, нахил дотичної збільшується, крива опукла униз (рис. 15).

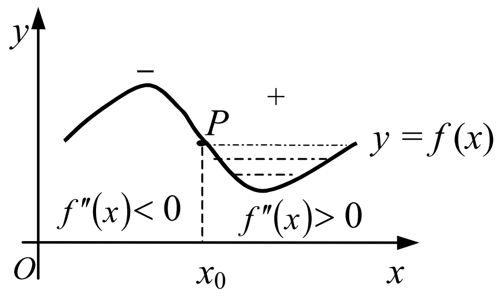


Рис. 16

Відповідність між знаком $f''(x)$ і напрямком опуклості кривої легко запам`ятати за допомогою «правила дощу»: $f''(x) > 0$ там, де у випадку умовного дощу утворюється калюжа (крива опукла униз), тобто накопичується додатна кількість вологи (рис. 16).

Точку на гладкій кривій, в якій відбувається зміна напряму опуклості кривої, називають точкою перегину

(на рис. 16 – це точка P). Крива в околі такої точки розташована по різні боки від дотичної до кривої. Зліва і справа від точки перегину похідна $f''(x)$ повинна мати різні знаки. Якщо $f''(x)$ – неперервна функція, то самій точці перегину відповідає рівність $f''(x) = 0$. Перегин можливий також у точках, де $f''(x)$ не існує. Щоб відшукати перегини кривої $y = f(x)$, потрібно: 1) знайти $f'(x)$ і $f''(x)$; 2) визначити критичні точки 2-го роду, тобто точки, де $f''(x)$ перетворюється на нуль або не існує; 3) дослідити знак $f''(x)$ в околі кожної з встановлених точок; якщо при переході через таку точку знак $f''(x)$ змінюється, то існує перегин; 4) обчислити ординати точок перегину.

Приклад 7. Знайти точки перегину і інтервали опуклості кривої $y = e^{-x^2}$.

Розв`язування. Функція визначена і неперервна на всій числовій осі. Маємо 1) $y' = e^{-x^2}(-2x)$, $y'' = -2e^{-x^2} + e^{-x^2}(-2x)^2 = 4e^{-x^2}\left(x^2 - 1/2\right)$; 2) $y'' = 0$, $e^{-x^2} \neq 0$ $\Rightarrow x^2 - 1/2 = 0,\quad x = \pm 1/\sqrt{2}$ – абсциси точок можливого перегину кривої. Точки $x = \pm 1/\sqrt{2}$ розбивають числову вісь на інтервали $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, \infty)$. Визначимо знак y'' на кожному інтервалі (рис.17). При $x < -1/\sqrt{2}$ і $x > 1/\sqrt{2}$ $y''>0$, на проміжку $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ $y''<0$. Отже, на інтервалі $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ крива $y = e^{-x^2}$ опукла уверх, а за його межами – униз. При $x = \pm 1/\sqrt{2}$ існують перегини, ординати точок перегину $y_{перег} = y\left(\pm 1/\sqrt{2}\right) = e^{-1/2}$ (рис. 18).

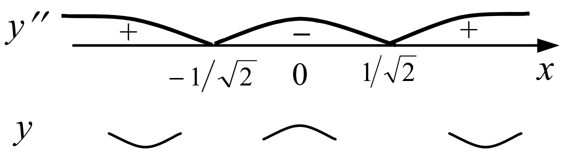


Рис. 17

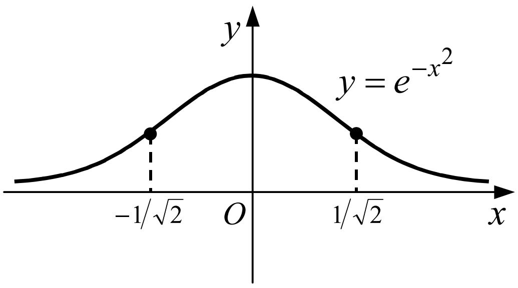


Рис. 18

Приклад 8. Знайти точки перегину кривої $y = (x-1)^{5/3}$.

Розв`язування. Функція визначена й неперервна на усій числовій осі. Одержуємо:

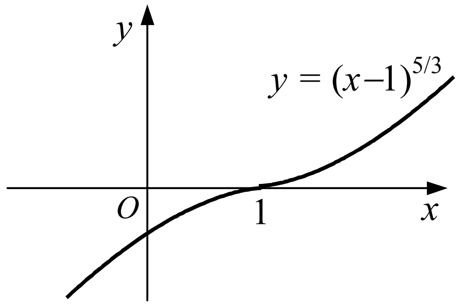


Рис. 19

1) $y' = \frac{5}{3}(x-1)^{2/3}$, $y'' = \frac{10}{9}(x-1)^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-1}}$;

2) $y'' \neq 0$, y'' не існує при $x = 1$, тут можливий перегин; 3) при $x < 1$ $y'' < 0$, при $x > 1$ $y'' > 0$; зліва від точки $x = 1$ крива опукла уверх, а справа від неї – униз, $x = 1$ – абсциса точки перегину. У цій точці $y_{перег} = y(1) = 0$ (рис. 19).

8⁰. ***Асимптоти кривої***. Пряму називають асимптотою кривої, якщо відстань від точки кривої до цієї прямої наближається до нуля, коли точка віддаляється вздовж кривої у нескінченність (рис. 20, 21). Розрізняють асимптоти вертикальні і похилі. До останнього типу належать, зокрема, горизонтальні асимптоти.

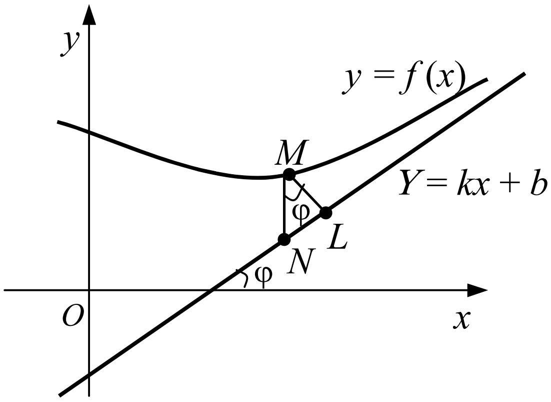


Рис. 20

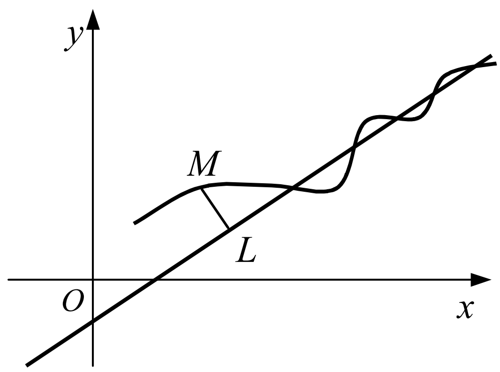


Рис. 21

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою** кривої $y = f(x)$, якщо при $x \to a$ хоча б одна з односторонніх границь функції $f(x)$ нескінченна. Таким чином, вертикальна асимптота $x = a$ існує тільки у тому випадку, якщо у точці $x = a$ функція $f(x)$ має нескінченний розрив.

Приклад 9. Функція $y = e^{1/x}$ при $x = 0$ має нескінченний розрив:

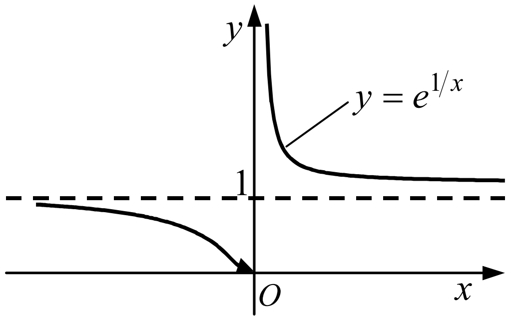


Рис. 22

$$\lim_{x\to 0-0} e^{1/x} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty.$$

Таким чином, $x = 0$ – вертикальна асимптота кривої $y = e^{1/x}$ (рис. 22).

Припустимо, що у кривої $y = f(x)$ при $x \to \infty$ існує похила асимптота. Як і будь-яку похилу пряму, її можна подати рівнянням $Y = kx + b$. Очевидно (рис. 20), що $ML = MN\cos\varphi$, де $\varphi = const$. За означенням асимптоти при $x \to \infty$ $ML \to 0$. Одночасно $MN = ML/\cos\varphi \to 0$ і $MN/x \to 0$. Дістаємо $\lim\limits_{x\to\infty} MN = \lim\limits_{x\to\infty} (y - Y) = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$ та $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{MN}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$. Оскільки b та k – сталі, то остання границя приводить до формули

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{1}$$

З попередньої границі випливає:

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]. \tag{2}$$

Отже, якщо при $x \to \infty$ $Y = kx + b$ – похила асимптота кривої $y = f(x)$, то її параметри визначаються за формулами (1), (2).

Так само можна знайти параметри похилої асимптоти при $x \to -\infty$. Вірно й обернене: якщо при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$ границі (1), (2) існують та скінченні, то крива $y = f(x)$ має відповідну похилу асимптоту $Y = kx + b$. Випадок, коли хоча б одна з границь (1), (2) не існує або нескінченна, означає, що при $x \to \infty$ (або $x \to -\infty$) у кривої $y = f(x)$ похилої асимптоти немає.

Приклад 10. Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$.

Розв`язування. Функція y у точці $x = 0$ має нескінченний розрив: $\lim\limits_{x\to 0} y =$

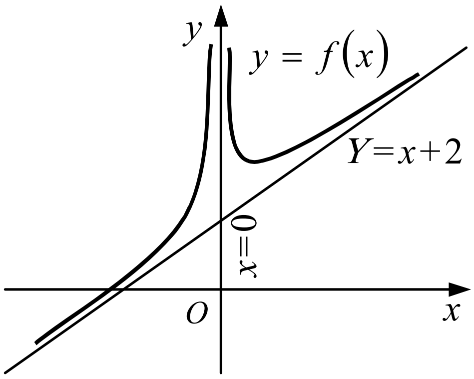


Рис. 23

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(x+2+\dfrac{1}{x^2}\right)=\infty$, отже, пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота кривої $y = f(x)$.

Шукаємо параметри похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x\cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=1,\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2}-x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$. Обидві границі існують та скінченні, значить, при $x \to \infty$ пряма $Y = x + 2$ буде асимптотою графіка функції. Легко побачити, що ті самі результати виходять при $x \to -\infty$. Тому пряма $Y = x + 2$ буде асимптотою кривої також при $x \to -\infty$ (рис. 23).

Приклад 11. Знайти асимптоти кривої $y = xe^{-x}$.

Розв`язування. Точки розриву у функції y відсутні, отже, немає і вертикальних асимптот. Далі

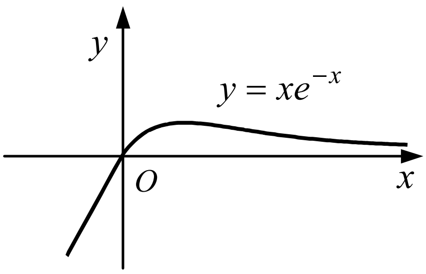


Рис. 24

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Таким чином, при $x \to \infty$ $k = 0, b = 0 \Rightarrow$ існує горизонтальна ($k = 0!$) асимптота $Y = 0$. При $x \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty \Rightarrow$ при $x \to -\infty$ крива не має асимптоти (рис. 24).

9^0. ***Побудова графіка функції***. Графічне зображення достатньо складної функції, як правило, потребує її грунтовного дослідження. Потрібно встановити:

1) область визначення функції, точки її розриву;

2) чи є функція парною або непарною й тим самим вирішити питання про симетрію графіка відносно осі Oy або початку координат;

3) точки перетину графіка з осями координат;

4) асимптоти графіка функції;

5) екстремуми та інтервали монотонності функції;

6) точки перегину та інтервали опуклості кривої.

Приклад 12. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.

Розв\`язування. **1) Область визначення функції**. Функція y як відношення двох неперервних функцій – неперервна на всій числовій осі, окрім точок $x=\pm\sqrt{3}$, в яких її знаменник перетворюється на нуль. Звідси випливає, що область визначення $D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$. Значення $x=\pm\sqrt{3}$ – точки розриву 2-го роду, тому що при $x\to\pm\sqrt{3}$ y веде себе як нескінченно велика величина.

2) Симетрія графіка. Область $D(f)$ симетрична відносно початку координат та можна ставити запитання про парність або непарність функції $f(x)$. Оскільки $f(-x)=$
$=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}=-f(x)$, то функція $f(x)$ – непарна, її графік симетричний відносно початку координат. Тому достатньо вивчити функцію при додатних значеннях x.

3) Перетин з осями. При $x=0$ $y=0$; навпаки, якщо $y=0$, то $\dfrac{x^3}{x^2-3}=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\ x^3=0\ \Rightarrow\ x=0$. Таким чином, $O(0,\ 0)$ – єдина загальна точка кривої з осями координат.

4) Асимптоти. Через те що $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3}{x^2-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3}{x^2-3}=\infty$, пряма $x=\sqrt{3}$ є вертикальною асимптотою. Визначимо параметр похилої асимптоти $Y=kx+b$ при $x\to\infty$: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x\left(x^2-3\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-3/x^2}=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-3}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x}=0;$$

$Y=x$ – похила асимптота.

5) Екстремуми та інтервали монотонності. Знаходимо y', а потім критичні точки функції:

$$y'=\frac{x^4-9x^2}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-3\right)^2},\quad y'=0\ \Rightarrow\ x^2\left(x^2-9\right)=0\ \Rightarrow\ x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-3;$$

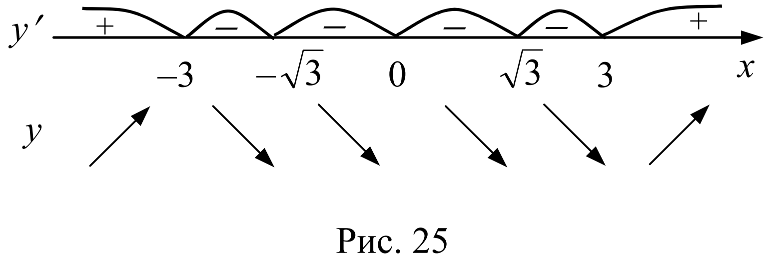


Рис. 25

y' не існує при $x = \pm\sqrt{3}$, однак ці значення вивчати тут не слід, тому що вони не належать $D(f)$. Область визначення функції розбиваємо на інтервали $(-\infty,-3)$, $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$, $(3, \infty)$ і на кожному з них визначаємо знак y' (рис. 25). Знаходимо інтервали монотонності: функція зростає на проміжках $(3, \infty)$ та $(-\infty, -3)$, поза цими інтервалами функція спадає. Похідна y' змінює знак з «+» на «–» при переході через точку $x = -3$, з «–» на «+» при переході через точку $x=3$. У точці $x=3$ $y_{min} = y(3) = 4{,}5$, у точці $x=-3$ $y_{max} = y(-3) = -4{,}5$. У точці $x = 0$ екстремуму немає, в околі цієї точки функція спадає.

6) Перегини та інтервали опуклості кривої. Визначаємо y'':

$$y'' = \left[\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2}\right]' = \frac{(4x^3 - 18x)(x^2-3)^2 - (x^4 - 9x^2)2(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-3)^4} = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0$. Вивчаємо знак y'' у проміжках $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$ (рис. 26). Робимо висновок про характер опуклості кривої: на інтервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ і $(\sqrt{3}, \infty)$ крива опукла униз, на проміжках $(-\infty,-\sqrt{3})$ і $(0, \sqrt{3})$ – опукла уверх. При переході через точку $x = 0$ y'' змінює знак, отже, у точці $x = 0$ відбувається перегин, ордината точки перегину $y_{перег} = y(0) = 0$. У точках $x = \pm\sqrt{3}$ знак y'' змінюється, але перегинів тут немає, тому що це точки розриву функції. За результатами дослідження будуємо графік функції (рис. 27).

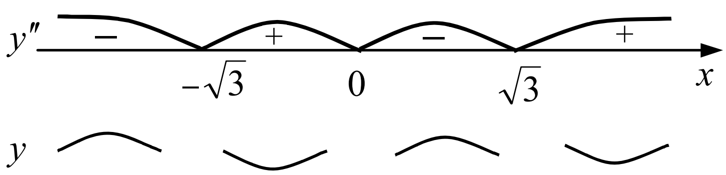


Рис. 26

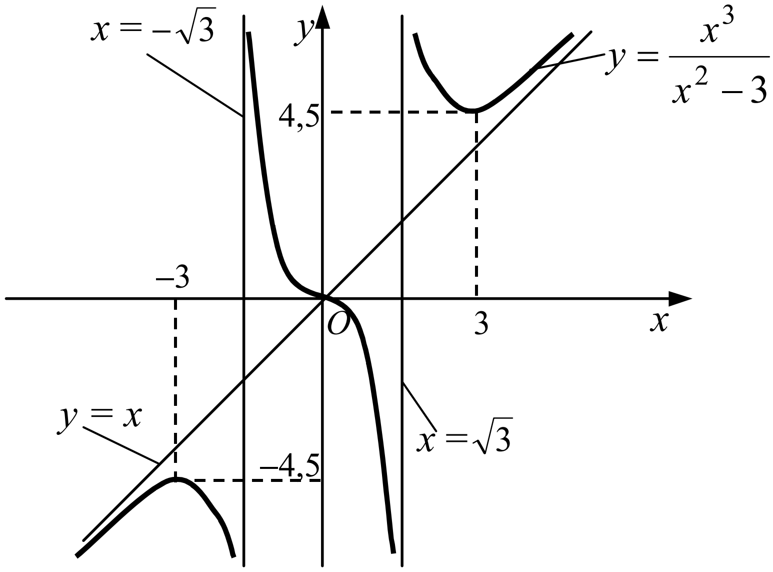


Рис. 27

♦ Кеплер звернув увагу на те, що поблизу власного максимуму змінна величина змінюється незначно (1615), однак способу знаходження екстремуму не запропонував. Це зробив Ферма (частково опублікував у 1642 – 1644 рр., але з листування вченого можна зрозуміти, що він володів цим прийомом вже у 1629 р.). У сучасній термінології Ферма встановив необхідну умову екстремуму, яку застосував для відшукування дотичних до різних кривих. Він вмів знаходити також точки перегину кривої. Слідом за Ферма Ньютон у «Методі флюксій» (1671) сформулював «принцип зупинки»: «Коли величина є найбільша або найменша, то вона у цей момент не пливе ні вперед, ні назад», отже, флюксія, тобто швидкість змінення величини, повинна перетворитися на нуль. Лейбніц за допомогою диференціала 1-го порядку визначив зростання або спадання функції, а також точки екстремуму, завдяки диференціалу 2-го порядку дослідив криві на опуклість (1684). Ейлер вказав на необхідність відрізняти локальні екстремуми від найбільших та найменших значень функції. Під час дослідження на екстремум він застосовував не тільки першу, а й другу похідну.

§ 33. Кривизна плоскої кривої

Радість бачити й розуміти є найпрекраснішим даром природи.
А. Ейнштейн, нім. фізик XX ст.

1^0. *Диференціал довжини дуги*. Нехай M_0 – фіксована, а $M(x, y)$ – поточна точка гладкої кривої $y = f(x)$. Довжину дуги $\overset{\smile}{M_0M}$, взяту із знаком «+» або «–» в залежності від положення точки M, позначимо l ($l > 0$, якщо $x_M > x_{M_0}$). Величина l визначає положення точки M на кривій, тобто грає роль дугової координати точки. Очевидно, що $l = l(x)$. Зміщення точки M по кривій у положення M_1 приводить до приросту $\Delta l = \overset{\smile}{MM_1}$.

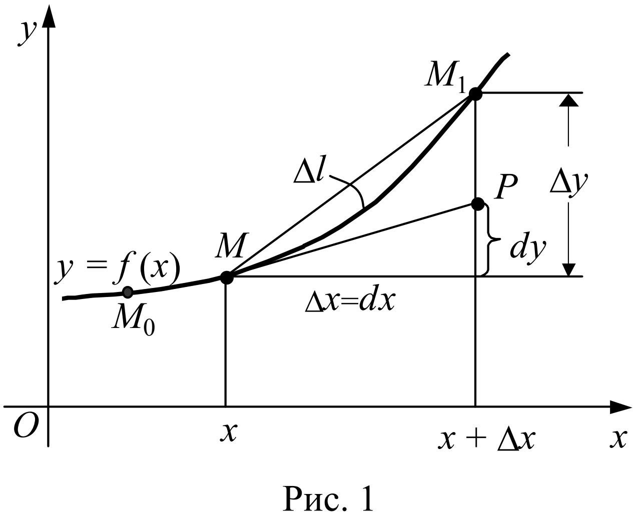


Рис. 1

Для хорди $\overline{MM_1}$ маємо

$$\left(\overline{MM_1}\right)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad \left(\frac{\overline{MM_1}}{\overset{\smile}{MM_1}}\right)^2 (\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad \left(\frac{\overline{MM_1}}{\overset{\smile}{MM_1}}\right)^2 \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Існує доведення того, що при $\Delta x \to 0$ відношення $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overset{\smile}{MM_1}} \to 1$. Тому з урахуванням (28.1) при переході до границі записане вище співвідношення приводить до рівностей

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{та} \quad (dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \qquad (1)$$

В силу теореми Піфагора $|dl|$ є довжиною гіпотенузи MP у трикутнику з катетами dx та dy (рис. 1). За означенням функція $l(x)$ із зростанням x зростає, значить, $\dfrac{dl}{dx} > 0$, величини dl та dx одного знака. Згідно з (1) маємо

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (2)$$

Формула (2) визначає диференціал довжини дуги кривої, що задана в декартовій системі координат.

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то на підставі (1) $(dl)^2 = (x'_t dt)^2 + (y'_t dt)^2$. У припущенні, що dl і dt одного знака, дістаємо

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \qquad (3)$$

Для кривої, що задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, декартові координати точки кривої подаються так: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$. Ці рівності можна розглядати як параметричні рівняння кривої, де роль параметра t грає полярний кут φ. При цьому з (3) випливає формула

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (4)$$

2^0. ***Кривизна***. Викривлення кривої в даній точці визначається тим, як швидко повертається дотична до кривої у цій точці. Нехай M та M_1 – дві точки гладкої кривої $y = f(x)$ (рис. 2). Дотична до кривої у точці M утворює з віссю Ox кут φ. Величина цього кута залежить від положення точки M, тобто від її дугової координати l: $\varphi = \varphi(l)$. Кут $\Delta\varphi$, на який повертається дотична при переході від точки M до точки M_1, називають кутом суміжності дуги $\overset{\smile}{MM_1}$. Середня кривизна цієї дуги $K_{cp} = \left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right|$, де Δl – довжина дуги $\overset{\smile}{MM_1}$. Чим мен-

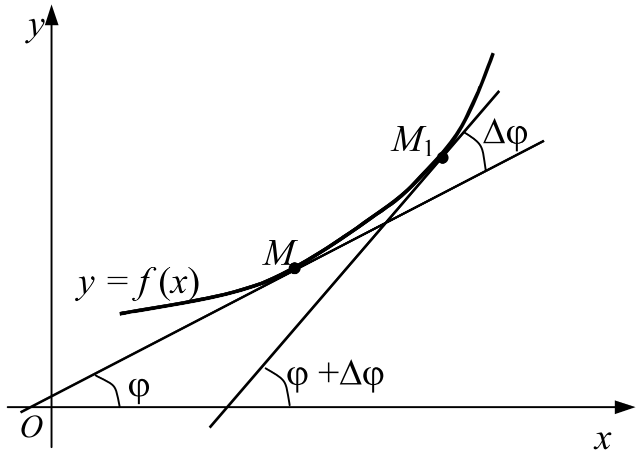


Рис. 2

ше Δl, тим точніше K_{cp} характер-ризує викривлення кривої у точці M. Тому кривизну K у точці M визначають як $\lim K_{cp}$, коли дуга $\overset{\smile}{MM_1}$ стягується до точки M, тобто

$$K = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dl}\right|. \qquad (5)$$

Зокрема, для кола радіуса R (рис.3)

$$\Delta l = R\Delta\varphi, \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

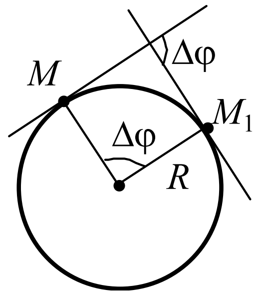


Рис. 3

Таким чином, кривизна кола в усіх його точках однакова і обернена до радіусу:

$$K = 1/R. \qquad (6)$$

У загальному випадку для декартових координат маємо (рис. 2) $tg\varphi = y'$, $\varphi = arctg\, y'$, $d\varphi = \dfrac{1}{1+y'^2}y''dx$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$ і на підставі (5) кривизна

$$K = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}. \qquad (7)$$

Для довільної прямої $y = kx + b$ похідна $y'' = 0$, значить, в будь-якій точці прямої кривизна $K = 0$. У точках перегину кривої, де $y'' = 0$, кривизна $K = 0$ також. Говорять, що в таких точках крива випрямляється, тобто має таку саму кривизну, що і пряма.

Якщо крива задана у параметричній формі, то y', y'' визначаються формулами (30.8) і (30.9). З урахуванням цих співвідношень формула (7) приймає вигляд

$$K = \frac{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{3/2}}. \qquad (8)$$

3⁰. ***Коло та радіус кривизни***. Нехай крива у деякій точці M має кривизну K. Величину

$$R = 1/K \tag{9}$$

називають радіусом кривизни кривої у точці M. Побудуємо у точці M нормаль до кривої та відкладемо на ній від точки M в бік вгнутості кривої відрізок довжини R (рис. 4). Кінець цього відрізку – точку C – називають центром кривизни, а коло радіуса R з центром C – колом кривизни кривої для точки M. Це коло і сама крива мають у точці M спільну дотичну. Коло кривизни уводиться для наочності. Воно в усіх своїх точках має таку саму кривизну, що й крива у точці M. Кожній точці кривої відповідає власне коло і власний центр кривизни.

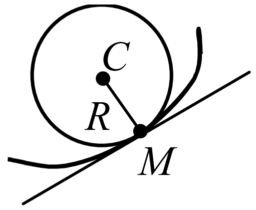


Рис. 4

Множина центрів кривизни для точок даної кривої представляє нову криву, що називають еволютою. Вихідна крива по відношенню до своєї еволюти називається евольвентою (розгорткою). Дотична до еволюти є нормаллю до евольвенти (рис. 5).

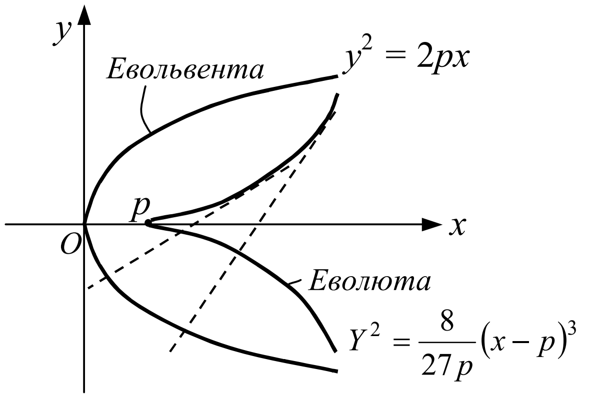


Рис. 5

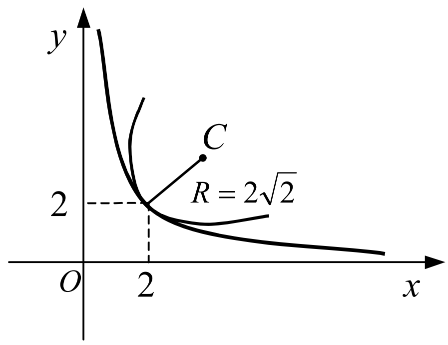


Рис. 6

Приклад. Знайти кривизну і радіус кривизни кривої $xy = 4$ у точці $x = 2$.

Розв`язування. Маємо: $y = 4/x$, $y' = -4/x^2$, $y'' = 8/x^3$, $y'(2) = -1$, $y''(2) = 1$. За формулою (7) кривизна $K = 1/(1+1)^{3/2} = 1/2\sqrt{2}$. Радіус кривизни $R = 2\sqrt{2}$. Крива $xy = 4$ у точці $x = 2$ викривлена так само, як коло радіуса $R = 2\sqrt{2}$ (рис. 6).

♦ У своїй роботі про рух маятників (1673) Гюйгенс використовує поняття радіуса кривизни і дає загальний прийом визначення еволюти даної кривої, зокрема, для параболи (рис. 5). Формула кривизни (7) міститься у «Методі флюксій» (1671, опубл. у 1736) Ньютона, їм же впроваджені терміни «центр» і «радіус кривизни». В «Аналізі нескінченно малих» (1696) Лопіталь наводить результати, що стосуються поняття кривизни, які були отримані братами Бернуллі.

Розділ V

ІНТЕГРУВАННЯ

Диференціювання та інтегрування – дві основні операції математичного аналізу. Якщо перша встановлює поведінку функції у кожній окремо взятій точці проміжку, тобто характеризує функцію локально, то друга описує той же об`єкт на проміжку в цілому, тобто є глобальною характеристикою функції. Виділення частинних особливостей поведінки – всього лише одна сторона аналізу. Цілісну картину явища можна отримати, тільки об`єднав усі його особливості. Похідна від шляху за часом dS/dt є миттєвою швидкістю руху $V(t)$. За допомогою інтегрування миттєвої швидкості розв`язується обернена задача – за відомою швидкістю $V(t)$ відшукується шлях S, що пройдений за якийсь інтервал часу. Геометрично диференціювання функції $y(x)$ визначає нахил дотичної до кривої $y = y(x)$ у кожній її точці, інтегрування – за відомим нахилом дотичної $y'(x)$ відновлює саму криву $y = y(x)$. Це – більш складна й неоднозначно вирішувана задача. Саме інтегрування дозволяє знайти роботу змінної сили, площу або об`єм криволінійної фігури, моменти інерції тіла, його масу і центр ваги, силу, з якою вода давить на греблю, міцність конструкції або споруди, загазованість шахти і безліч інших практично важливих величин.

§ 34. Первісна та невизначений інтеграл

Зміст – там, де змії інтеграла.
Між цифр і букв, між d і f.
В. Брюсов, рос. поет XX ст.

1⁰. ***Поняття первісної***. Функцію $F(x)$ називають **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

Очевидно, що означення (1) має сенс, тільки коли функція $F(x)$ диференційовна на проміжку X.

Приклад 1.

а) $f(x) = 2x$. Первісною для функції $f(x)$ в області $X = (-\infty, \infty)$ є функція $F(x) = x^2$. Дійсно, $F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x = f(x) \quad \forall x \in X$;

б) $f(x) = \sin 3x$. Тут також нескладно підібрати функцію $F(x)$, що задовольняє рівність (1): $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$, $x \in X = (-\infty, \infty)$. Справді, $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' =$

$= -\frac{1}{3}(-3\sin 3x) = \sin 3x = f(x) \quad \forall x \in X.$

Оскільки похідна сталої $C' = 0$, то додавання до функції $F(x)$ будь-якого сталого доданку не порушує рівність (1): $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Окрім $F(x) = x^2$ для функції $f(x) = 2x$ первісними будуть також $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 - 3$ та нескінченна множина інших функцій вигляду $F(x) + C$.

Знаходження первісної для даної функції $f(x)$ без якихось додаткових умов завжди неоднозначно. Якщо функція $f(x)$ має на проміжку X первісну $F(x)$, то вона має там також і нескінченну множину інших первісних вигляду $F(x) + C$, де $C = const$. Виявляється, що первісних відмінного вигляду на тому ж проміжку X функція $f(x)$ мати не може.

Теорема. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві первісні для функції $f(x)$ на проміжку X, то їх різниця дорівнює сталій: $F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Доведення. Позначимо $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$. Оскільки згідно з (1) $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$, то $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. У проміжку X зафіксуємо яку-небудь точку x_1 та розглянемо точку з поточною координатою $x \in X$. За теоремою Лагранжа (31.3) для проміжку $[x_1, x]$ маємо $\varphi(x) - \varphi(x_1) = \varphi'(c)(x - x_1)$, де $c \in (x_1, x)$. Оскільки $\varphi'(c) = 0$, то $\varphi(x) = \varphi(x_1) = const$, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Зазначимо, що для функції $f(x)$, що неперервна на проміжку X, первісна $F(x)$ завжди існує (3^0 §38). Операцію відшукування первісної називають інтегруванням.

2^0. ***Невизначений інтеграл***. Усю множину первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають її **невизначеним інтегралом** на цьому проміжку. Якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на X, то вся множина первісних для $f(x)$ на проміжку X подається виразом $F(x) + C$, де C – довільна стала. Це і є невизначений інтеграл. Записують

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{2}$$

Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; x – змінна інтегрування; $\int$ – знак інтеграла.

Наприклад, $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

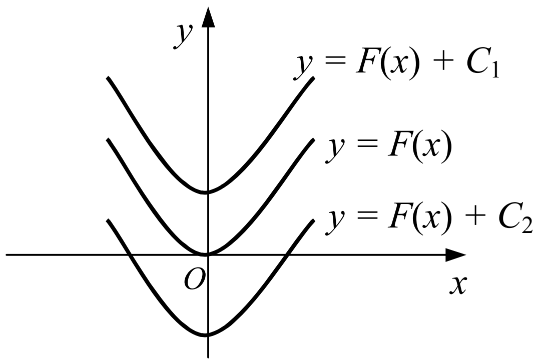


Рис. 1

При фіксованому C рівність

$$y = F(x) + C$$

визначає деяку криву. Із зміненням C ця крива (її називають інтегральною кривою) зміщується вздовж осі Oy. Отже, геометрично множина первісних – це сім`я інтегральних кривих, що відрізняються одна від одної зміщенням по осі Oy (рис. 1).

3^0. ***Властивості невизначеного інтеграла***. Через означення (1) та (2) справедливі такі твердження.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{3}$$

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$ і

$$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{4}$$

Справді, оскільки функція $F(x)$ є первісною для функції $F'(x)$, то $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$.

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла. Якщо $A = const \neq 0$, то

$$\int A\,f(x)dx = A\int f(x)dx. \tag{5}$$

Дійсно, згідно з (3) $\left(\int A\,f(x)dx\right)' = A\,f(x)$ і

$$\left(A\int f(x)dx\right)' = A\left(\int f(x)dx\right)' = A\,f(x),$$

отже, обидві частини співвідношення (5) являють собою множину первісних для однієї й тієї ж функції $A\,f(x)$. Саме це й стверджує рівність (5).

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (6)$$

Застосувавши формулу (3), як і вище, дістанемо

$$\left(\int [f(x) \pm g(x)]dx\right)' = f(x) \pm g(x) \text{ і } \left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm$$

$\pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$, що і доводить (6).

5. Нехай на одному й тому ж проміжку $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$ – довільна неперервно диференційовна функція. Тоді

$$\int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C. \qquad (7)$$

Дійсно, оскільки $F'(x) = f(x)$, то $F'_u(u) = f(u)$. Продиференціювавши обидві частини рівності (7) за x, з урахуванням (3) отримаємо

$$\left(\int f[u(x)]du(x)\right)'_x = \left(\int f[u(x)]u'(x)dx\right)'_x = f[u(x)]u'(x) \quad \text{та}$$

$$(F[u(x)] + C)'_x = F'_u(u)u'(x) = f(u)u'(x) = f[u(x)]u'(x).$$

Таким чином, обидві частини рівності (7) є множиною первісних для однієї і тієї функції, що збігається з твердженням (7).

Зокрема, при $u = ax + b$, де a та b – сталі, маємо

$$\int f(ax+b)d(ax+b) = F(ax+b) + C \qquad \text{або}$$

$$a\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C.$$

Отже, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (8)$$

Приклад 2.

а) $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + C \quad \Rightarrow \quad \int sin(3x+1)dx = -\frac{1}{3}cos(3x+1) + C$;

б) $\int e^x dx = e^x + C \quad \Rightarrow \quad \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$.

4^0. ***Таблиця основних інтегралів***. На основі означень (1), (2) та наведених вище властивостей складають таблиці невизначених інтегралів. Математичні довідники містять декілька сотень формул. Згідно з (3) справедливість цих формул можна перевірити диференціюванням. Однак навіть найдетальніші таблиці не вичерпують усіх виникаючих на практиці випадків. Необхідні навички роботи з таблицями, вміння зводити інтеграл до табличного виду, знання основних прийомів інтегрування. Будемо користуватися такою достатньо короткою таблицею, де в ролі змінної інтегрування виступає довільна гладка функція $u = u(x)$.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int du = u + C$	**8**. $\int ctgu\,du = ln\lvert sin\,u\rvert + C$
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	**9**. $\int \frac{du}{cos^2 u} = \int sec^2 u\,du = tgu + C$
2*а*. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	**10**. $\int \frac{du}{sin^2 u} = \int cosec^2 u\,du = -ctgu + C$
2*б*. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	**11**. $\int \frac{du}{sin\,u} = ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$	**12**. $\int \frac{du}{cos\,u} = ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
4. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{ln\,a} + C$	**13**. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$
4*а*. $\int e^u\,du = e^u + C$	**14**. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
5. $\int sin\,u\,du = -cos\,u + C$	**15**. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$
6. $\int cos\,u\,du = sin\,u + C$	**16**. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
7. $\int tgu\,du = -ln\lvert cos\,u\rvert + C$	**17**. $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

♦ Задача відшукування первісної $F(x)$ за заданою функцією $f(x)$ вперше виразно сформульована Ньютоном в його «Методі флюксій» (1671) при вивченні питання про квадратуру кривої, тобто визначення площі фігури, що розташована під кривою та прилягає до осі абсцис. Перша друкована робота, яка містить уявлення про первісну як функції $F(x)$ такої, що $F'(x) = f(x)$, належить Лейбніцу. В його мемуарі «Про глибоку геометрію і аналіз неподільних, а також нескінченних» (1686) з`являються знак $\int$ (початкова буква слова «*summa*»), запис $\int ydx$ та ствердження, що операції диференціювання та інтегрування так само взаємно зворотні, як степінь та корінь у звичайній алгебрі. У 1694 р. Лейбніц приходить до необхідності впровадити сталу інтегрування.

♦ Термін «інтеграл» (*integralis* – цілісний, лат.) запропонував І. Бернуллі. А вперше його застосував у друкованих виданнях Я. Бернуллі (1690).

§35. Основні методи інтегрування

Великі математики діяли за принципом: «Спочатку вгадати, а потім довести». Саме так здійснені майже усі важливі відкриття.
Е. Каснер, амер. математик XX ст.

1⁰. ***Інтегрування безпосереднє та підстановкою***. Та обставина, що інтеграл є табличним, нерідко виявляється тільки після деяких перетворень підінтегрального виразу. Наприклад, у випадку $I = \int \frac{dx}{sin^2 x cos^2 x}$ відповідності до таблиці (4^0 §34) не спостерігається. Однак

$$\frac{1}{sin^2 x cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{1}{sin^2 x},$$

таким чином, $I = \int \frac{dx}{cos^2 x} + \int \frac{dx}{sin^2 x} = I_1 + I_2$. Обидва інтеграли I_1 та I_2 відшукуються за формулами 9 та 10 таблиці. Маємо $I = tgx - ctgx + C$.

Можливий і інший прийом:

$$\frac{1}{sin^2 x cos^2 x} = \frac{4}{sin^2 2x}, \quad I = 2\int \frac{2dx}{sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{sin^2 2x} = \{u = 2x\} =$$

$$= 2\int \frac{du}{sin^2 u} = -2ctgu + C = -2ctg\, 2x + C.$$

Відповіді відрізняються тільки за формою, тому що $-2ctg\, 2x = -2\frac{cos\, 2x}{sin\, 2x} =$

$$= -2\frac{cos^2 x - sin^2 x}{2 sin\, x cos\, x} = -\frac{cos\, x}{sin\, x} + \frac{sin\, x}{cos\, x} = tgx - ctgx.$$

У загальному випадку нехай інтеграл $I(x) = \int f(x)dx$ не належить до табличного типу, але можливо таке перетворення: $f(x)dx = \varphi[u(x)]u'(x)dx = =\varphi(u)du$. Тоді $I(x) = \int \varphi(u)du = I_1(u)$.

Якщо інтеграл I_1 міститься у таблиці, то, визначивши його, після виключення допоміжної змінної $u = u(x)$ одержимо величину $I(x) = I_1[u(x)]$.

Приклад 1. $$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 1+\ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array}\right\} = \int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

Приклад 2.
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \left\{u = x^2+1\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Приклад 3. $$\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos 2x} = \left\{\begin{array}{l} u = 1+\cos 2x \\ du = -2\sin 2x\,dx \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x\,dx}{1+\cos 2x} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+\cos 2x)}{1+\cos 2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x) + C.$$

Приклад 4. $$\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \int \frac{x\,dx}{\left(x^2\right)^2+3} = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\left(x^2\right)^2+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

Нова змінна $u = u(x)$ обирається так, щоб у підінтегральному виразі був множник $u'(x)$ або його можна було б утворити множенням на стале число. Вдалий вибір функції $u(x)$, який зводить інтеграл до табличного вигляду, можливий лише у достатньо простих випадках. До тієї самої мети веде підстановка $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – деяка гладка функція. Маємо
$$I(x) = \int f(x)dx = \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}\right\} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int \Phi(t)\,dt = I_1(t). \quad (1)$$

Якщо заміна вдала, то інтеграл I_1 може виявитись табличним. Після його визначення змінну t виключають: $I(x) = I_1[\psi(x)]$, де $t = \psi(x)$ – функція, обернена відносно функції $x = \varphi(t)$. Справедливість рівності (1) при $\varphi'(t) \neq 0$ перевіряється диференціюванням за x:

$$\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x) \text{ та } \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)_x' = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)_t' \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{dx/dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Приклад 5. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{\begin{matrix} x = t^2-1, \ t = \sqrt{x+1} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}\right\} = \int\frac{\left(t^2-1\right)\cdot 2t\,dt}{t} =$

$$= 2\int\left(t^2-1\right)dt = 2\left(\int t^2dt - \int dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}+C.$$

Приклад 6. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = t^3, \ t = \sqrt[3]{x} \\ dx = 3t^2\,dt \end{matrix}\right\} = \int\frac{3t^2\,dt}{1+t^2} = 3\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt =$

$$= 3\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 3\left(\int dt - \int\frac{dt}{t^2+1}\right) = 3t - 3arctgt + C = 3\sqrt[3]{x} - 3arctg\sqrt[3]{x}+C.$$

2^0. *Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен*. Інтеграли вигляду

$$I_1 = \int\frac{dx}{X}; \qquad I_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{X}}; \qquad I_3 = \int\frac{Ax+B}{X}dx; \qquad I_4 = \int\frac{Ax+B}{\sqrt{X}}dx,$$

де $X = ax^2+bx+c$, зводяться до табличних через виділення з X повного квадрата: $X = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$.

Для інтегралів I_1, I_2 цієї операції достатньо, для інтегралів I_3, I_4 спочатку слід утворити в чисельнику диференціал величини X.

Дійсно, $\displaystyle I_3 = \int\frac{Ax+B}{X}dx = \left\{\begin{matrix} u = ax^2+bx+c \\ du = (2ax+b)dx \end{matrix}\right\} =$

$$= \int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c} + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Перший інтеграл справа типу $\int \frac{du}{u}$ знаходиться за формулою 3 таблиці, до другого інтегралу в залежності від знака виразу $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ застосовується формула 13 або 14 (4^0 § 34). Подібним чином знаходиться й інтеграл I_4.

Приклад 7.

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}} = \begin{Bmatrix} u = 4x^2 - 12x + 1 \\ du = (8x - 12)dx \end{Bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{8}(8x - 12) + \frac{12}{8}}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{8x - 12}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}} dx + \frac{3}{2 \cdot 2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4} \int \frac{d(x - 3/2)}{\sqrt{(x - 3/2)^2 - 2}} .$$

Обидва інтеграли справа мають тепер табличний вигляд. Перший відповідає формулі 2а таблиці, другий – формулі 16 при $u = x - 3/2$, $a^2 = 2$. Таким чином,

$$I = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{u} + \frac{3}{4} ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - 2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 - 12x + 1} + \frac{3}{4} ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - 2} \right| + C .$$

3^0. *Інтегрування деяких тригонометричних функцій*.

1. Інтеграли вигляду $\int sin^m x \, cos^n x \, dx .$

(2)

а) Якщо хоча б один з показників m або n – непарне додатне число, то інтегрування зводиться до відшукування первісних від степеневих функцій.

Дійсно, нехай $m = 2k + 1$, $k \in N_0$. Від непарного степеня синуса відокремлюємо його перший степінь – він призначається для утворення диференціала косинуса, парний степінь, що залишився, перетворюємо на косинус того самого аргументу за формулою $sin^2 x = 1 - cos^2 x$. Здійснюємо підстановку $u = cos x$:

$$\int sin^{2k+1} x \, cos^n x dx = \int sin^{2k} x \, cos^n x \, sin x dx =$$

$$= -\int \left(1 - cos^2 x\right)^k cos^n x d(cos x) = \{u = cos x\} = -\int \left(1 - u^2\right)^k u^n du .$$

Піднесемо двочлен до степеня k та розкриємо дужки. Дістанемо $k + 1$ доданків степеневого типу, які інтегруємо за формулами 1 – 3 таблиці (4^0 § 34).

Приклад 8. $\int \sqrt[3]{sin\,x}\,cos^5 x\,dx = \int \sqrt[3]{sin\,x}\,cos^4 x\,cos\,x\,dx =$

$$= \int \sqrt[3]{sin\,x}\left(1 - sin^2 x\right)^2 d\left(sin\,x\right) = \left\{u = sin\,x\right\} = \int u^{1/3}\left(1 - u^2\right)^2 du =$$

$$= \int \left(u^{1/3} - 2u^{7/3} + u^{13/3}\right)du = \frac{u^{4/3}}{4/3} - 2\frac{u^{10/3}}{10/3} + \frac{u^{16/3}}{16/3} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{sin^4 x} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{sin^{10} x} + \frac{3}{16}\sqrt[3]{sin^{16} x} + C.$$

б) Якщо обидва показники m та n – парні додатні числа (одне з них може дорівнювати нулю), то інтеграл відшукується через зниження степеня підінтегральних функцій за допомогою формул

$$sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - cos\,2\alpha\right), \qquad cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + cos\,2\alpha\right),$$
$$sin\,\alpha\,cos\,\alpha = \frac{1}{2}sin\,2\alpha. \tag{3}$$

Приклад 9. $I = \int sin^2 x\,cos^4 x\,dx = \int sin^2 x\,cos^2 x\,cos^2 x\,dx =$

$$= \int \frac{1}{4}sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}\left(1 + cos\,2x\right)dx = \frac{1}{8}\int sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int sin^2 2x\,cos\,2x\,dx.$$

Перший інтеграл справа містить $sin\,2x$ у парному степені і потребує подальшого зниження степеня, другий – відноситься до випадку а), тому що з`явився непарний степінь $cos\,2x$. Маємо

$$I = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\left(1 - cos\,4x\right)dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int sin^2 2x\,d\left(sin\,2x\right) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}sin\,4x\right) + \frac{1}{48}sin^3 2x + C.$$

2. Інтеграли вигляду $\int tg^m x\,sec^n x\,dx,\ \int ctg^m x\,cosec^n x\,dx.$ (4)

Якщо показник n – парне додатне число, то при будь-якому значенні m, використовуючи тригонометричні тотожності

$$1 + tg^2 x = sec^2 x, \qquad 1 + ctg^2 x = cosec^2 x, \tag{5}$$

можна за допомогою підстановки $u = tgx$ або $u = ctgx$ отримати інтеграли від степеневих функцій.

Приклад 10. $\int \frac{sec^4 x}{\sqrt{tgx}}dx = \int \frac{sec^2 x}{\sqrt{tgx}}sec^2 x\,dx = \int \frac{1 + tg^2 x}{\sqrt{tgx}}d\left(tgx\right) = \left\{u = tgx\right\} =$

$$= \int \frac{1 + u^2}{\sqrt{u}}du = \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int u^{3/2}\,du = 2\sqrt{u} + \frac{u^{5/2}}{5/2} + C = 2\sqrt{tgx} + \frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x} + C.$$

3. Інтеграли вигляду

$$\int sin\,mx\,cos\,nx\,dx,\ \int sin\,mx\,sin\,nx\,dx,\ \int cos\,mx\,cos\,nx\,dx. \tag{6}$$

Дані інтеграли зводяться до табличних за допомогою формул

$$\begin{aligned} sin\,\alpha\,cos\,\beta &= \frac{1}{2}\left[sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)\right], \\ sin\,\alpha\,sin\,\beta &= \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\right], \\ cos\,\alpha\,cos\,\beta &= \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Приклад 11.

$$\int sin\,7x\,sin\,3x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(cos\,4x - cos\,10x\right)dx = \frac{1}{2\cdot 4}\int cos\,4x\,d(4x) -$$

$$-\frac{1}{2\cdot 10}\int cos\,10x\,d(10x) = \frac{1}{8}sin\,4x - \frac{1}{20}sin\,10x + C.$$

4^0. ***Інтегрування частинами***. Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – дві неперервно диференційовні функції. Запишемо відоме співвідношення $(uv)' = u'v + uv'$. Добуток uv є первісною по відношенню до суми $u'v + uv'$. Тому $\int (u'v + uv')dx = uv + C$. Сталу C можна віднести до інтегралу з лівої частини рівності. Оскільки $u'dx = du$, $v'dx = dv$, то $\int vdu + \int udv = uv$. Звідси випливає **формула інтегрування частинами**

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{8}$$

При вдалому виборі множників u та dv в багатьох випадках за допомогою рівності (8) можливі спрощення. Інтеграл, що стоїть зліва, зводиться до більш простого інтегралу і таким чином визначається. Формулу (8) застосовують для інтегрування добутків типу $x^n\,sin\,x$, $x^n\,cos\,x$, $x^n e^x$, $x^n\,ln\,x$, де $n \in N$, а також обернених тригонометричних, логарифмічних та інших функцій. Через «u», як правило, вибирають множник, який при диференціюванні спрощується. Інша частина підінтегрального виразу утворює множник «dv». Його слід підбирати так, щоб інтегруванням можна було знайти v. Тут береться будь-яка первісна, зокрема, вважають $C = 0$. Інтегрування тільки частин під-інтегрального виразу dv стало підставою для назви формули (8).

Приклад 12. $\int x\cos 2x\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx & v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right\} =$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Нерідко формулу (8) доводиться застосовувати повторно декілька разів.

Приклад 13. $\int x^2 e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}\,dx & v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx & v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} +$$

$$+ 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C = -\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x} + C.$$

Навіть коли спрощення інтеграла не відбувається, формула (8) може виявитися корисною.

Приклад 14. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = \sqrt{x^2 + a^2} & du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right\} =$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{\left(x^2 + a^2\right) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} -$$

$$- \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|.$$

Отримали рівність вигляду $I = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$ або

$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$. Таким чином,

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right] + C. \qquad (9)$$

♦ Завдяки підстановці багато складних інтегралів зводяться до таких, спосіб визначення яких вже відомий. За рахунок тої чи іншої підстановки одному й тому самому інтегралу можна надати вельми різні вирази. Множник dx під знаком інтеграла забезпечує справедливість переходу від однієї форми до іншої. Саме тому Лейбніц і наполягав на його обов'язковій присутності.

♦ Великі можливості метода інтегрування частинами багато разів продемонстрував Ейлер у своїй тритомній праці «Інтегральне числення» (1768 – 1774).

§ 36. Інтегрування раціональних дробів

Заняття математикою – це таке тренування розуму, для якого потрібні вся гнучкість та витривалість молодості.
Н. Вінер, амер. математик XX ст.

1^0. ***Розкладання многочлена на множники***. Всякий многочлен степеня n $Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ має n коренів. Це твердження називають основною теоремою алгебри. Знаючи корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, многочлен $Q_n(x)$ можна розкласти на множники

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \tag{1}$$

Деякі корені або навіть усі можуть бути комплексними, тобто вигляду $\alpha = \lambda + \mu i$, де λ та μ – дійсні числа, а i – уявна одиниця ($i^2 = -1,\ i = \sqrt{-1}$). Якщо коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$ – дійсні числа, то його комплексні корені з`являються парами: $\alpha=\lambda+\mu i$ та $\overline{\alpha} = \lambda - \mu i$. При цьому

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = [x-(\lambda+\mu i)][x-(\lambda-\mu i)] = [(x-\lambda)-\mu i][(x-\lambda)+\mu i] =$$
$$= (x-\lambda)^2 + \mu^2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2 = x^2 + px + q$$
$$\left(p = -2\lambda, \quad q = \lambda^2 + \mu^2\right).$$

Отже, множники в (1), що відповідають парі комплексно спряжених коренів, після перемноження дають многочлен 2-го степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $Q_n(x)$ має m дійсних коренів, а решта корені комплексні, то розкладання (1) приймає вигляд

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdots\left(x^2+p_lx+q_l\right). \tag{2}$$

Кожний множник вигляду $x-\alpha$ відповідає дійсному кореню α, а множник типу x^2+px+q відповідає парі комплексно спряжених коренів та на більш прості дійсні множники не розкладається. Якщо корені повторюються, то відповідні множники у розкладанні (2) підносять до степеня, що дорівнює кратності кореня. У загальному випадку має місце подання

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{s_j}. \tag{3}$$

2^0. ***Розкладання раціонального дробу на найпростіші дроби***. Раціональний дріб являє собою відношення двох многочленів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}. \tag{4}$$

При $m < n$ дріб називають правильним, якщо $m \geq n$, то дріб (4) неправильний. Всякий неправильний дріб діленням многочлена на многочлен можна звести до вигляду

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = H_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

де H_{m-n} – многочлен степеня $m-n$, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб.

Можна довести [3, розд.10, § 8], що всякий правильний дріб (4) із знаменником у формі (3) розкладається на найпростіші дроби так, що кожному множнику у знаменнику вигляду $(x-\alpha)^r$ відповідає сума

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r},$$

а кожному множнику типу $\left(x^2 + px + q\right)^s$ – сума

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \cdots + \frac{M_s x + N_s}{\left(x^2 + px + q\right)^s},$$

де $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ – деякі дійсні числа. Наприклад,

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 6}{x^3(x+1)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Існують способи, що дозволяють у кожному конкретному випадку находити невідомі числа $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$

3⁰. ***Метод невизначений коефіцієнтів***. Помножимо на $Q_n(x)$ обидві частини розкладання:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{\left(x^2 + px + q\right)^{s_1}} + \cdots \tag{5}$$

Після скорочення та зведення подібних маємо нову рівність. В одній її частині многочлен $P_m(x)$, в другій – многочлен з коефіцієнтами, що виражені через величини $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ Рівність, що виникає, повинна справджуватися тотожно, тобто вона повинна бути вірною при будь-яких значеннях x. Це можливо тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x в обох її частинах збігаються. Зрівнявши коефіцієнти, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. З неї й визначаються шукані числа $A_1, A_2, \dots, M_1, N_1, \dots$

Приклад 1. Розкласти раціональний дріб $\dfrac{5x^3-4x^2+12x-16}{x^4-16}$ на найпростіші дроби.

Розв`язування. Даний дріб є правильним. Розкладемо знаменник на множники та запишемо загальний вигляд розкладання:

$$\frac{5x^3-4x^2+12x-16}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Звільнимося від знаменників. Після множення рівності на x^4-16 отримаємо тотожність

$$A(x+2)\left(x^2+4\right)+B(x-2)\left(x^2+4\right)+(Mx+N)\left(x^2-4\right)=5x^3-4x^2+12x-16. \quad (*)$$

Розкриємо дужки (це можна зробити усно) та зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа:

$$\begin{array}{l|l}
\text{при } x^3 & A+B+M=5, \\
\text{при } x^2 & 2A-2B+N=-4, \\
\text{при } x & 4A+4B-4M=12, \\
\text{при } x^0 & 8A-8B-4N=-16.
\end{array}$$

Знайдемо: з 1-го та 3-го рівнянь: $A+B=4$, з 2-го та 4-го: $A-B=-2$. Розв`яжемо систему

$$\left.\begin{array}{l} A+B=4 \\ A-B=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A=1, B=3, \text{ таким чином,}$$

$$M=1,\ N=0.$$

Отже, $$\frac{5x^3-4x^2+12x-16}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x^2+4}.$$

Зауваження. У вихідну тотожність, за якою складається система рівнянь з невідомими коефіцієнтами розкладання (5), можна підставляти будь-які значення x. Виникають нові рівності з тими ж невідомими. Якщо знаменник дробу з лівої частини (5) має дійсні корені, то зручно підставляти у тотожність саме ці значення. Зразу визначається якась з невідомих величин, що значно спрощує розв`язування системи або взагалі дозволяє без неї обійтися.

Так, у розглянутому вище прикладі 1, вважаючи по черзі $x=2$ та $x=-2$, за тотожністю $(*)$ знаходимо $32A=32$, $A=1$; $-32B=-96$, $B=3$. Для відшукування величин M та N достатньо зрівняти у $(*)$ коефіцієнти при якихнебудь двох степенях x, наприклад, самого високого та самого низького або, що те саме, вибрати з вже складеної раніше системи першу та останню рівності. При відомих значеннях A та B їх розв`язування не буде складним.

4⁰. ***Інтегрування найпростіших дробів***. У результаті розкладання правильного раціонального дробу можуть з`явитися найпростіші дроби чотирьох типів:

$$\frac{A}{x-\alpha};\quad \frac{A}{(x-\alpha)^k}\ (k>1);\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ (k>1).$$

Інтеграли від перших двох функцій є табличними:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx = A\,ln|x-\alpha| + C;$$

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = A\int(x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha) = A\frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k}+C.$$

Інтегрування дробу третього типу розглянуто в 2^0 §35.

Інтеграл $I=\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, де $q>p^2/4$, знаходимо тим самим прийомом, що й в 2^0 § 35: у чисельнику дробу формуємо диференціал функції $u=x^2+px+q$, після цього підінтегральний вираз розбиваємо на два доданки: перший дає табличний інтеграл вигляду $\int du/u^k$, другий приводить до інтегралу $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dx}{\left[(x+p/2)^2+q-p^2/4\right]^k}=\left\{\begin{array}{l} t=x+p/2, \\ dt=dx, \\ a^2=q-p^2/4 \end{array}\right\}=$

$=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$. Останній інтеграл можна знайти за так званою рекурентною формулою (*recurrence* – повторення, повернення, англ.):

$$I=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2(2k-2)}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right]. \quad (6)$$

Завдяки формулі (6) на одиницю знижується степінь знаменника підінтегральної функції. Формулу застосовують k–1 разів, після чого інтеграл зводиться до табличного виду.

Справедливість рівності (6) встановлюється за допомогою елементарних перетворювань і формули інтегрування частинами (35.8):

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t\cdot t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} u=t & du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k}\end{array}\right\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2-2k}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right],$$ що й дає праву частину (6).

Приклад 2. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\left\{\begin{array}{l}\text{застосуємо формулу } (6), \\ \text{де } k=3,\ a^2=1\end{array}\right\}=$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+3\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\right]=\left\{\begin{array}{l}\text{застосуємо формулу } (6), \\ \text{де } k=2,\ a^2=1\end{array}\right\}=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right]=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+C.$$

5^0. ***Інтегрування довільного раціонального дробу***. Будь-який раціональний дріб за описаною вище методикою розкладається на найпростіші дроби і потім інтегрується.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{2x^4-5x^3-x^2+3x-11}{\left(x^2-1\right)(x-3)}dx$.

Розв`язування. Функція, що стоїть під знаком інтеграла, представляє собою неправильний раціональний дріб, його чисельником є многочлен 4-го степеня, а знаменником – многочлен 3-го степеня. Діленням першого многочлена на другий виділимо з дробу цілу частину:

$$\frac{2x^4-5x^3-x^2+3x-11}{x^3-3x^2-x+3}=2x+1+\frac{4x^2-2x-14}{x^3-3x^2-x+3}=2x+1+\frac{4x^2-2x-14}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Останній дріб вже правильний. Знайдемо його розкладання на найпростіші дроби:

$$\frac{4x^2-2x-14}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x-3}.$$

Позбавившись від знаменників, одержимо тотожність

$$A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+D(x-1)(x+1)=4x^2-2x-14. \qquad (*)$$

Знаменник вихідного дробу має дійсні корені $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$. Підставимо по черзі ці значення у (∗). Маємо: при $x=1$ $-4A=-12,\ A=3$; при $x=-1$ $8B=-8,\ B=-1$; при $x=3$ $8D=16,\ D=2$. Отже,

$$I=\int\left[2x+1+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}\right]dx=x^2+x+3\,ln|x-1|-ln|x+1|+2\,ln|x-3|+C=$$

$$=x^2+x+ln\left|\frac{(x-1)^3(x-3)^2}{x+1}\right|+C.$$

Приклад 4. Знайти $I=\int\frac{x\,dx}{x^3-8}$.

Розв`язування. Раціональний дріб $x/(x^3-8)$ є правильним. Розкладемо знаменник на множники, а дріб – на найпростіші дроби:

$$\frac{x}{x^3-8}=\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+4}.$$

Помноживши рівність на x^3-8, прийдемо до тотожності

$$A(x^2+2x+4)+(Bx+D)(x-2)\equiv x. \qquad (*)$$

При $x=2$ маємо 12А = 2, А = 1/6. Інших зручних значень для x тут немає. Зрівняємо в (*) коефіцієнти при x^2 та x^0. Отримаємо

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\ 4A-2D=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad B=-A=-1/6,\quad D=2A=1/3.$$

Таким чином, $I=\int\left[\frac{1/6}{x-2}+\frac{-1/6x+1/3}{x^2+2x+4}\right]dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{6}\int\frac{x-2}{x^2+2x+4}dx=$

$$=\frac{1}{6}ln|x-2|-\frac{1}{6}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{6}ln|x-2|-\frac{1}{12}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{6}ln|x-2|-\frac{1}{12}ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

♦ Інтегруванню раціональних дробів присвячені дві роботи Лейбніца (1701, 1703) та мемуар І. Бернуллі (1704). Обидва дослідники розкладали складний дріб на найпростіші. Спосіб І. Бернуллі з деякими спрощеннями увійшов до усіх курсів інтегрального числення. Оригінальний прийом інтегрування раціональних дробів, який не потребує їх розкладання на більш прості дроби, належить М.В. Остроградському (рос. математик та механік, 1801 – 1862).

§37. Інтегрування деяких ірраціональних та трансцендентних функцій

Математика – це мистецтво називати однаково різні речі. Докази, підготовлені для відомого предмета, можна застосувати до багатьох нових предметів.
А. Пуанкаре, фр. математик XIX–XX ст.

У даному параграфі позначення $R(u, v, ..., w)$ вказує на те, що над величинами u, v, ..., w проводяться лише раціональні алгебраїчні операції, тобто дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого степеня. Наприклад, функцію $f(x) = (x+1)\Big/\left(1+\sqrt{(2x+1)^3}\right)$ слід віднести до типу $R\left(x, \sqrt{2x+1}\right)$, а функцію $f(x) = \left(e^x + 1\right)\Big/\left(e^{2x} + 4\right)$ – до типу $R\left(e^x\right)$.

При інтегруванні ірраціональностей, якщо інтеграл не табличний, задача, як правило, полягає в тому, щоб за допомогою підходящої підстановки раціоналізувати підінтегральний вираз. В окремих випадках це вдається.

1⁰. ***Інтеграли вигляду*** $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$. (1)

Тут n – натуральне число, a, b, c, d – дійсні числа, $ad \neq bc$. До раціонального підінтегрального виразу приводить підстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n. \tag{2}$$

Справді, $ax + b = cxt^n + t^n d$, $\quad x = \dfrac{b - t^n d}{ct^n - a}$, $\quad dx = \dfrac{nt^{n-1}(ad - bc)}{\left(ct^n - a\right)^2} dt$.

Вносячи ці вирази в (1), отримаємо

$$I = \int R\left(\frac{b - t^n d}{ct^n - a}, t\right) \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{\left(ct^n - a\right)^2} dt.$$

Під знаком інтеграла утворилась раціональна функція аргументу t – у загальному випадку раціональний дріб, який інтегрується за вже відомими правилами.

Приклад 1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x-1}} = \left\{\begin{matrix} x - 1 = t^2, & x = t^2 + 1 \\ dx = 2tdt, & t = \sqrt{x-1} \end{matrix}\right\} = \int \frac{\left(t^2+1\right)2t\,dt}{1+t} =$

$$=2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\,ln|t+1|\right)+C =$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-(x-1)+4\sqrt{x-1}-4\,ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+C.$$

Приклад 2. $I=\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \left\{\begin{matrix} \frac{x+1}{x}=t^2, \;\; x=\frac{1}{t^2-1} \\ dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}, \;\; t=\sqrt{\frac{x+1}{x}} \end{matrix}\right\} =$

$$=-\int\left(t^2-1\right)^2 t\,\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int t^2\,dt=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C.$$

Тут можливе й безпосереднє інтегрування:

$$I=-\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}d\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\frac{(1+1/x)^{3/2}}{3/2}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}+C.$$

Зауваження. У більш загальному випадку

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right)dx$$

раціоналізація досягається підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – найменше загальне кратне чисел $m, n, \ldots$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left\{\begin{matrix} x+1=t^6, \;\; x=t^6-1 \\ dx=6t^5dt, \;\; t=\sqrt[6]{x+1} \end{matrix}\right\} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} =$

$$=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int\frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-ln|t+1|\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\,ln\left(1+\sqrt[6]{x+1}\right)+C.$$

2^0. *Інтеграли вигляду* $I=\int R\left(x,\sqrt{bx^2+cx+g}\right)dx \quad (b\neq 0).$ (3)

Через виділення під коренем повного квадрата інтеграл зводиться до одного з таких типів:

$$а)\int R\left(u,\sqrt{a^2-u^2}\right)du;\; б)\int R\left(u,\sqrt{a^2+u^2}\right)du;\; в)\int R\left(u,\sqrt{u^2-a^2}\right)du. \quad (4)$$

Раціоналізація тепер можлива за допомогою тригонометричних підстановок:

$$а)\ u = a\sin t,\quad du = a\cos t\,dt;\qquad б)\ u = a\,tg\,t,\quad du = a\sec^2 t\,dt;$$
$$в)\ u = a\sec t,\quad du = a\sec t\ tg\,t\,dt. \tag{5}$$

Приклад 4. $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \{x-1 = 2\sin t,$

$dx = 2\cos t\,dt,\ t = \arcsin\frac{x-1}{2}\} = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int\cos^2 t\,dt =$

$= 2\int(1+\cos 2t)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = 2t + 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}+C =$

$$= 2\arcsin\frac{x-1}{2} + (x-1)\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}+C.$$

Приклад 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{(2+x^2)^3}} = \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2}tgt,\ t = arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ dx = \sqrt{2}\sec^2 t\,dt\end{array}\right\} = \int\frac{\sqrt{2}\sec^2 t\,dt}{\sqrt{(2+2tg^2 t)^3}} =$

$= \left\{1+tg^2 t = \sec^2 t,\ \sec t = \frac{1}{\cos t}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}dt = \frac{1}{2}\int\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Зауваження. До вигляду (3) належить, зокрема, інтеграл

$$I = \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{bx^2+cx+g}}. \tag{6}$$

У цьому випадку до цілі швидше веде підстановка, яку називають інверсією:

$$x-\alpha = \frac{1}{t}. \tag{7}$$

Приклад 6. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}} = \left\{\begin{array}{l} x-1 = 1/t,\ dx = -dt/t^2 \\ t = 1/(x-1)\end{array}\right\} =$

$$= \int\frac{-1/t^2\,dt}{1/t\sqrt{1/t^2+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C = -\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+1}\right|+C.$$

3^0. *Інтегрування диференціального біному*:

$$I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \,. \tag{8}$$

При раціональних показниках m, n, p інтеграл відшукується в елементарних функціях тільки в таких випадках:

1) p – ціле число. Якщо $p > 0$, то після піднесення двочлена до степеня під інтегралом утворюються степеневі функції. Їх інтеграли знаходяться за таблицею (4^0 § 34). Якщо $p < 0$, то при цілих m та n підінтегральна функція є раціональним дробом, а при дробових m та n вона зводиться до такого дробу підстановкою $x = t^k$, де k – найменше кратне знаменників чисел m та n;

2) $p = r/s$ – раціональний дріб і $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число. Раціоналізація досягається підстановкою

$$a + bx^n = z^s; \tag{9}$$

3) $p = r/s$ – раціональний дріб і $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число. До раціонального виразу тут приводить підстановка

$$a + bx^n = z^s x^n \,. \tag{10}$$

Приклад 7.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^3 \left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \begin{cases} m = 3,\, n = 2,\; p = -1/2,\; \dfrac{m+1}{n} = 2 - \\ -\text{ маємо випадок 2).} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Підстановка: } 1 - x^2 = z^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 - z^2; \\ x = \sqrt{1-z^2},\, dx = -z\left(1-z^2\right)^{-1/2} dz,\, z = \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} = -\int \left(1-z^2\right)^{3/2} \left(z^2\right)^{-1/2} z \left(1-z^2\right)^{-1/2} dz =$$

$$= -\int \left(1-z^2\right) dz = -z + \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} - \sqrt{1-x^2} + C \,.$$

Приклад 8.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int x^{-2} \left(1+x^2\right)^{-3/2} dx = \begin{cases} m = -2, n = 2, p = -3/2, \\ \dfrac{m+1}{n} + p = -2 - \text{ціле.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Має місце випадок 3). Підстановка: } 1 + x^2 = z^2 x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{z^2 - 1} = \left(z^2 - 1\right)^{-1}; \\ x = \left(z^2 - 1\right)^{-1/2},\; dx = -z\left(z^2 - 1\right)^{-3/2} dz,\; z = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{array}\right\} =$$

$$= -\int \left(z^2-1\right)\left[z^2\left(z^2-1\right)^{-1}\right]^{-3/2}\left(z^2-1\right)^{-3/2} z\,dz = -\int \left(z^2-1\right)z^{-2}dz = -\int \left(1-z^{-2}\right)dz =$$

$$= -z + \frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

4⁰. ***Універсальна тригонометрична підстановка***. Так називають заміну

$$t = tg\frac{x}{2}, \tag{11}$$

за допомогою якої інтеграл вигляду $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ на проміжку $(-\pi, \pi)$ перетворюється на інтеграл від раціональної алгебраїчної функції аргументу *t*. Щоб це показати, виразимо $\sin x$, $\cos x$ та dx через нову змінну *t*. Дістанемо

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg(x/2)}{sec^2(x/2)} = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-tg^2(x/2)}{sec^2(x/2)} = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} =$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В інтеграл I вносимо вирази

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{12}$$

Маємо $I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$. Під знаком R знаходяться раціональні дроби, над ними виконуються раціональні алгебраїчні операції. В результаті може вийти лише раціональна алгебраїчна функція. Інтегрування такої функції було розглянуто в § 36.

Приклад 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \left\{\begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right\} =$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+4t-1}=2\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-5}=\frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

В інтегралі типу $I=\int R\left(sin^2x, cos^2x, tgx\right)dx$ окрім (11) до раціонального алгебраїчного виразу, причому більш простого, веде підстановка

$$t=tgx. \tag{13}$$

В цьому випадку $sin^2x=tg^2x\,cos^2x=\frac{tg^2x}{sec^2x}=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$,

$cos^2x=\frac{1}{sec^2x}=\frac{1}{1+tg^2x}$, $x=arctgt$. Таким чином,

$$tgx=t, \quad sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}, \quad cos^2x=\frac{1}{1+t^2}, \; dx=\frac{dt}{1+t^2}. \tag{14}$$

Інтеграл I приймає вигляд:

$I=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$, де $R_1(t)-$ раціональна функція аргументу t.

Приклад 10. $\int\frac{dx}{2-sin^2x}=\left\{t=tgx, \quad sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\right\}=$

$$=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

5⁰. ***Інтеграли вигляду*** $I=\int R\left(e^x\right)dx$. За допомогою підстановки

$$t=e^x \tag{15}$$

тут можна прийти до інтегрування раціональної алгебраїчної функції $\frac{R(t)}{t}$.

Дійсно, $t = e^x$, $x = ln\,t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ та $I = \int R(t)\dfrac{dt}{t}$.

Приклад 11. $\int \dfrac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1} = \left\{ t = e^x, \quad dx = \dfrac{dt}{t} \right\} = \int \dfrac{t^3}{t^2+1}\cdot\dfrac{dt}{t} = \int \dfrac{t^2}{t^2+1}dt =$

$$= \int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt = \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - arctgt + C = e^x - arctg\left(e^x\right) + C.$$

Зауваження. В § 35 – 37 розглянуті деякі прийоми, що дозволяють виразити інтеграл від тої чи іншої елементарної функції через інші елементарні функції. Кількість прийомів можна було б значно збільшити. Однак серед елементарних функцій існують і такі, первісні для яких вже не є елементарними функціями. Останнє відбувається через вузькість класу елементарних функцій. При цьому говорять, що інтеграл в елементарних функціях «не береться». Сказане стосується e^{x^2}, $1/ln\,x$, $sin\,x/x$, $\sqrt{1+x^3}$ та нескінченної множини інших функцій. У таких випадках задачу інтегрування вирішують наближеними методами.

♦ Технікою інтегрування ірраціональностей та інших складних функцій займалися усі видатні математики. Наведені у 3^0 випадки інтегрованості диференціального бінома (8) в елементарних функціях були відомі ще Ньютону (1676). У 1853 р. П.Л. Чебишев (рос. математик, 1821 – 1894) довів, що при раціональних показниках m, n, p інших випадків, що приводять до раціоналізації інтеграла, не існує. Для інтегралів типу (3) Ейлер увів спеціальні підстановки, які названі його ім`ям [5, с.174]. Він також досліджував інтеграли типу (1) та багато інших, у том числі інтеграли, що «не беруться». За виразом М.М. Лузіна (рос. математик, 1883 – 1950), «математики на протязі 150 років після Ейлера не змогли пробити пролом в тому кільці інтеграцій, яке було викуване Ейлером».

§ 38. Визначений інтеграл

Я постійно тримаю в пам`яті предмет свого дослідження та терпляче чекаю, поки перший проблиск поволі перетвориться на повне й блискуче світло.
І. Ньютон, англ. математик і фізик XVII ст.

1^0. ***Обчислення шляху при нерівномірному русі та задача про площу криволінійної трапеції***. Якщо тіло рухається рівномірно зі швидкістю V, то шлях S, пройдений за проміжок часу від моменту $t = t_0$ до моменту $t = t_*$, визначається за формулою $S = Vt$, де $t = t_* - t_0$ – тривалість руху.

Шлях S в системі координат tOV геометрично є площею прямокутника (рис. 1). При рівноприскореному русі швидкість $V=V_0+at$ (V_0 – початкова швидкість, a – прискорення) і шлях $S=V_0t+\dfrac{at^2}{2}=\dfrac{V_0+(V_0+at)}{2}\cdot t$. Геометрично – це площа трапеції (рис. 2).

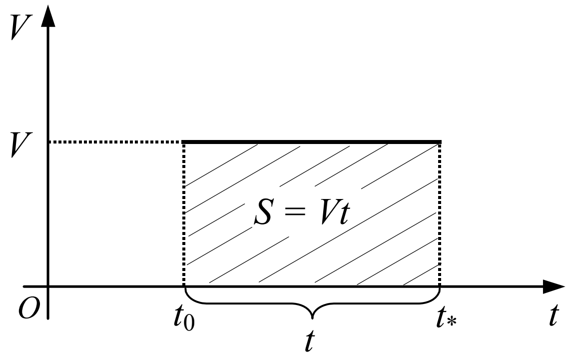


Рис. 1

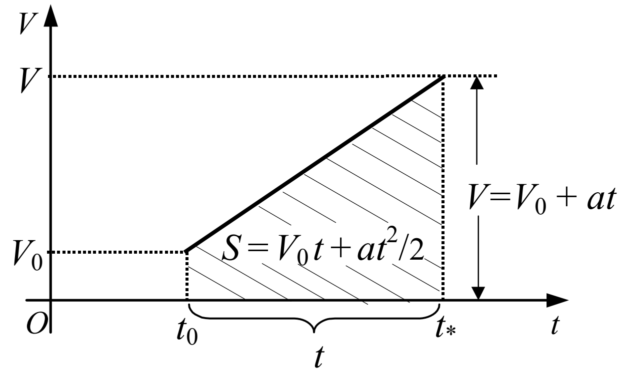


Рис. 2

Нехай тепер $V=V(t)$ – довільна неперервна функція. Задачу відшукання шляху S можна розв`язати так. Проміжок $[t_0,\ t_*]$ розіб`ємо довільним чином на n малих проміжків точками $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = t_*$ (рис.3). Якщо елементарний проміжок $[t_{i-1},\ t_i]$, $i = 1, 2,\ldots, n$, малий, то на ньому унаслідок неперервності мало змінюється й функція $V(t)$, рух близький до рівномірного, його швидкість $V(t)\approx V(\tau_i)$, де довільно вибрана точка $\tau_i \in [t_{i-1},\ t_i]$. Шлях, що пройдений за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, є $\Delta S \approx V(\tau_i)\Delta t_i$. Повний шлях, що пройдений за час $t = t_* - t_0$, виражається сумою $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} V(\tau_i)\Delta t_i$.

Тут кожний доданок геометрично представляє собою площу прямокутника з основою Δt_i та висотою $V(\tau_i)$, а уся сума – площа ступінчастої фігури, що складена з таких прямокутників. Наближено вона дорівнює площі криволінійної трапеції, яка розташована на відрізку $[t_0,\ t_*]$ під кривою $V=V(t)$. Природно очікувати, що точний результат буде отриманий при переході до границі, коли всі інтервали $\Delta t_i \to 0$. Цю границю називають **визначеним інтегралом**

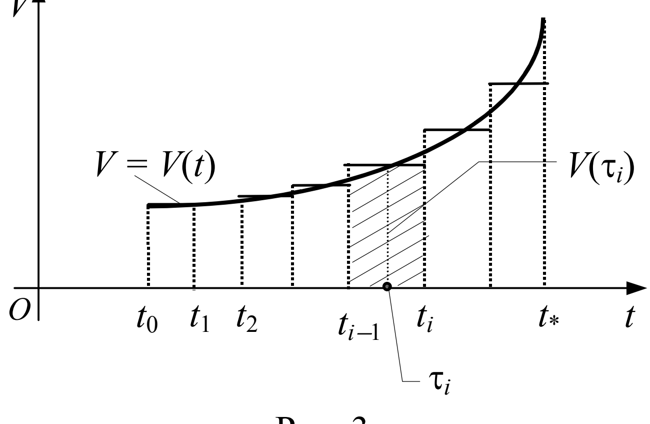


Рис. 3

$$\lim_{\text{усі } \Delta t_i \to 0} \sum_i V(\tau_i)\Delta t_i = \int_{t_0}^{t_*} V(t)dt .$$

Отже,

$$S = \int_{t_0}^{t_*} V(t)dt . \tag{1}$$

Формула (1) визначає шлях S при русі зі швидкістю $V(t)$ і разом з тим площу фігури, що розташована під кривою $V=V(t)$ на відрізку $[t_0, t_*]$.

2⁰. ***Означення***. Нехай на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, задана функція $f(x)$. Довільно розіб`ємо відрізок на проміжки точками $x_0=a, x_1, x_2, \ldots , x_n = b$ так, що $x_{i-1} < x_i$ (рис. 4). Позначимо: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = max\, \Delta x_i$, i = 1, 2,..., n. Параметр λ, який характеризує степінь роздробленості відрізку, називають рангом дроблення. На кожному проміжку $[x_{i-1,}\, x_i]$ довільно виберемо точку ξ_i, знайдемо в ній значення функції $f(x)$, тобто $f(\xi_i)$, та утворимо так звану інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{2}$$

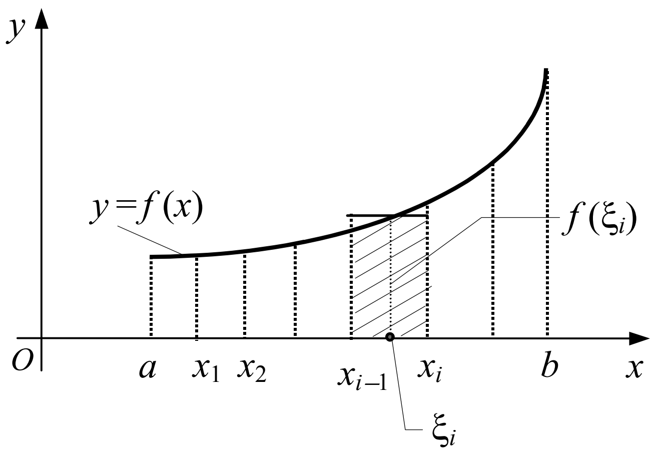


Рис. 4

Величина S_n залежить від 1) функції $f(x)$; 2) відрізку $[a, b]$; 3) способу розбиття відрізку; 4) вибору точок ξ_i. Якщо при нескінченному подрібненні розбиття, коли усі $\Delta x_i \to 0$, інтегральна сума S_n має скінченну границю, яка не залежить ані від способу дроблення відрізку, ані від вибору точок ξ_i, то цю границю називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ по відрізку $[a, b]$. Записують

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx . \tag{3}$$

Числа a та b – межі інтегрування, x – змінна інтегрування. Якщо інтеграл (3) існує, то говорять, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$. Це має місце не для усякої функції. Очевидно, що означення (3) придатне лише для обмеженої на $[a, b]$ функції. Інакше за рахунок вибору значення ξ_i окремий доданок суми (2), а разом з ним й суму S_n можна було б зробити як завгодно великою величиною. Скінченна границя (3) при цьому неможлива. Обмеженість функції – необхідна умова її інтегрованості. Однак однієї тільки обмеженості недостатньо. Наприклад, функція Діріхле $f(x)=1$ при x – раціональному, $f(x) = 0$ при x – ірраціональному обмежена на відрізку $[0, 1]$, але не інтегрована, тому що при раціональних значеннях ξ_i згідно з (2) сума $S_n = \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = 1$, а при ірраціональних значеннях ξ_i величина $S_n = 0$, отже, єдиної границі (3) не існує. Достатньою умовою інтегрованості обмеженої функції може слугувати її неперервність або кускова неперервність, або монотонна поведінка на відрізку [11, § 179; 5, розд. 8, § 2].

Якщо на проміжку $[a, b]$ функція $f(x) \geq 0$, то інтегральна сума (2) є площею ступінчастої фігури, що складена з прямокутників з основами Δx_i та висотами $f(\xi_i)$. Границю (3) природно прийняти як означення площі криволінійної трапеції, тобто фігури, що обмежена віссю Ox, кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 4). Очевидно, що площа не зміниться, якщо, зберігаючи функцію та межі, інакше позначити змінну інтегрування, тому справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \qquad \text{і т.д.}$$

Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування.

Зауваження. В означенні (3) припущено, що $a < b$. При оберненій нерівності дроблення відрізку $[a, b]$ в напрямку від a до b призведе до того, що $x_{i-1} > x_i$ та усі $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$. При тому самому способі розбиття і тих же значеннях ξ_i інтегральна сума (2) тепер буде відрізнятися від складеної для відрізку $[b, a]$ тільки знаком. Границі цих сум при $\lambda = max|\Delta x_i| \to 0$ разом існують або разом не існують, вони збігаються за абсолютною величиною, але різняться за знаком, тому

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4}$$

З рівності (4) при $a = b$ випливає

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \tag{5}$$

що повністю узгоджується з геометричним змістом інтеграла: якщо $a = b$, то основа криволінійної трапеції стягується в точку і площа фігури перетворюється на нуль.

3^0. ***Визначений інтеграл як функція верхньої межі***. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ неперервну функцію $f(x) \geq 0$ та криволінійну трапецію, що розташована під кривою $y = f(x)$. Нехай змінна $x \in (a, b)$. Площа трапеції з основою $[a, x]$ є функцією x:

$$S_{ax} = S_{ax}(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{6}$$

Надамо x приріст $\Delta x > 0$ так, щоб $x + \Delta x \in [a, b]$. Функція $S_{ax}(x)$ отримає приріст ΔS_{ax}. Геометрично ΔS_{ax} є площею криволінійної трапеції з основою $[x, x + \Delta x]$. Позначимо через m та M саме мале й саме велике значення функції $f(x)$ на проміжку $[x, x + \Delta x]$. Площу ΔS_{ax} порівняємо з площами прямокутників висотою m та M, що побудовані на тій самій основі (рис. 5). Маємо нерівності

$$m\Delta x \leq \Delta S_{ax} \leq M\Delta x \qquad \text{або} \qquad m \leq \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} \leq M.$$

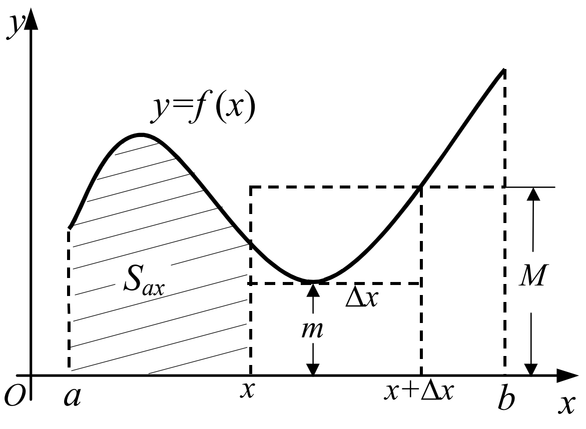


Рис. 5

При $\Delta x \to 0$ величини m та M змінюються, вони прямують до значення функції у точці x, тобто

$$m \to f(x), \;\; M \to f(x),$$

а величина $\dfrac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} \to \dfrac{dS_{ax}}{dx}$.

Переходячи до границі, дістаємо

$$f(x) \leq \frac{dS_{ax}}{dx} \leq f(x).$$

Таким чином, $\dfrac{dS_{ax}}{dx} = f(x)$ або

$$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]'_x = f(x). \tag{7}$$

У випадку $\Delta x < 0$ доведення формули (7) аналогічне.

Отже, **похідна визначеного інтеграла від неперервної функції за змінною верхньою межею дорівнює підінтегральній функції, аргументом якої є верхня межа**.

Порівнюючи рівність (7) із означенням первісної (34.1), робимо висновок, що відносно функції $f(x)$ інтеграл (6) є однією з її первісних. Будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ має там первісну. Зокрема, такою первісною є $\int\limits_a^x f(t)dt$.

4⁰. ***Формула Ньютона – Лейбніца***. Нехай $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Оскільки дві первісні для функції $f(x)$ на одному й тому ж проміжку можуть відрізнятися тільки сталим доданком, то в силу останнього твердження в 3^0 при всіх значеннях x з даного проміжку справедлива рівність

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + A, \qquad A = const.$$

При $x = a$ згідно з (5) маємо: $F(a) + A = 0$, $A = -F(a)$, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Поклавши тут $x = b$, приходимо до основної формули інтегрального числення – **формули Ньютона – Лейбніца**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Величина визначеного інтеграла від функції $f(x)$ дорівнює різниці значень якої-небудь її первісної, що обчислені на верхній та нижній межах інтегрування.

Рівність (8) справедлива для будь-якої інтегрованої на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$. Згідно з (4) та (5) вона вірна як при $a < b$, так і при $a \geq b$.

Приклад 1. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^3 = 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2$.

Приклад 2. $\int\limits_0^{\pi/2} cos\,2x\,dx = \frac{1}{2} sin\,2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(sin\,\pi - sin\,0) = 0$.

Отже, щоб обчислити визначений інтеграл, спочатку потрібно знайти невизначений інтеграл, узяти яку-небудь первісну (достатньо відкинути сталу інтегрування C), встановити значення цієї первісної на верхній та нижній межах інтегрування, потім із першого значення відняти друге.

Безпосереднє відшукування границі (3), що приводить до визначеного інтегралу, представляє значні труднощі. Ця операція практично може бути здійснена тільки для дуже простих функцій. Формула (8) кардинально спрощує задачу обчислення інтеграла.

5⁰. ***Властивості визначеного інтеграла***. Рівності (4) та (5), встановлені в 2^0, можна розглядати як властивості інтеграла. Наведемо їх повторно під тими самими номерами.

1. При перестановці меж інтегрування величина визначеного інтеграла змінює знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{4}$$

2. Визначений інтеграл із збіжними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{5}$$

3. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто при $A = const$

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx. \tag{9}$$

Дійсно, в силу означення (3)

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i Af(\xi_i)\Delta x_i = A\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

4. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{10}$$

Справді: $\displaystyle\sum_i [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i$.

Переходячи у цій рівності до границі при $\lambda \to 0$, згідно із означенням (3) дістанемо формулу (10).

5. Для будь-яких дійсних чисел a, b, c за умови, що записані нижче інтеграли існують, справедлива рівність (її називають властивістю адитивності інтеграла відносно проміжку інтегрування):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (11)$$

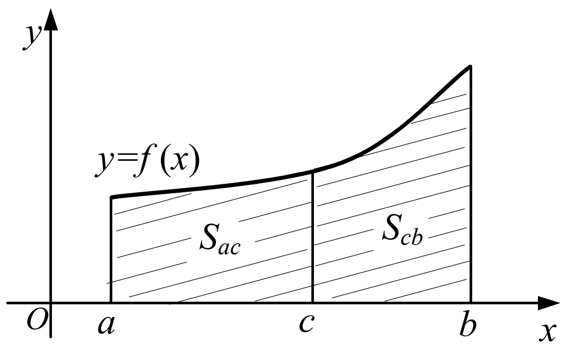


Рис. 6

Зміст останньої рівності при $a<c<b$ та $f(x)\geq 0$ геометрично очевидний (рис. 6): площа S_{ab} криволінійної трапеції з основою $[a, b]$ дорівнює сумі площ S_{ac} та S_{cb}. Разом з тим формула (11) вірна при довільних значеннях a, b, c та будь-якій інтегрованій функції $f(x)$, тому що згідно з (8)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = [F(c)-F(a)] + [F(b)-F(c)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Якщо $a < b$ та $f(x)\leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad (12)$$

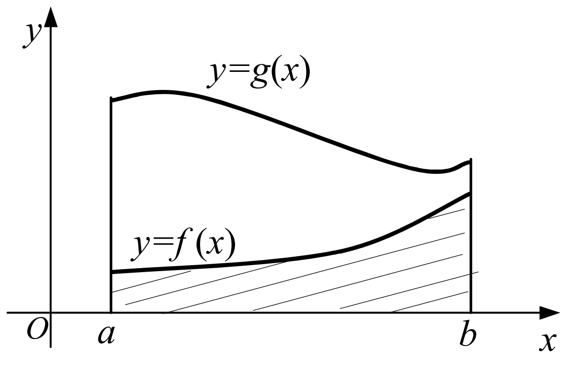


Рис. 7

При невід`ємних функціях $f(x)$ та $g(x)$ співвідношення (12) легко угледіти, порівнюючи площі відповідних криволінійних трапецій (рис. 7). У загальному випадку, враховуючи, що в формулі (3) всі $\Delta x_i > 0$, маємо

$$\sum_i [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i \geq 0;$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_i [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i \geq 0.$$

Таким чином, $\int\limits_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$, $\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, що й дає (12).

Зокрема, при $g(x) \geq 0$, $f(x) \equiv 0$ з (12) випливає: $\int\limits_a^b g(x)dx \geq 0$, тобто **при $a < b$ інтеграл від невід\`ємної функції є величиною невід\`ємною**.

Приклад 3. На відрізку $[0, 1]$ $x^2 \leq x$, тому без будь-яких обчислень приходимо до висновку, що

$$\int\limits_0^1 x^2 dx \leq \int\limits_0^1 x\, dx.$$

7. Якщо $a < b$ та m – найменше, M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{13}$$

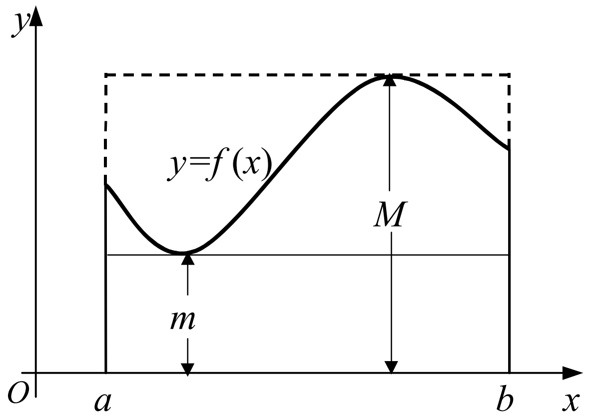


Рис. 8

При $f(x) \geq 0$ геометричний зміст співвідношень (13) полягає в наступному (рис. 8): площа криволінійної трапеції не менша ніж площа «вписаного» прямокутника з висотою m та не більша ніж площа «описаного» прямокутника з висотою M, що побудовані на тій самій основі $[a, b]$.

У загальному випадку

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Звідси в силу (12) випливає

$\int\limits_a^b m dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b M\, dx,$ $\quad mx\Big|_a^b \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq Mx\Big|_a^b$, що і приводить до нерівностей (13).

Приклад 4. На відрізку $[0, 1]$ функція $f(x) = e^{x^2}$ не спадає: $f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0$. Тому $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ або $1 \leq f(x) \leq e$. Інтеграл $I = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx$ в елементарних функціях «не береться», але його величину за допомогою (13) легко оцінити:

$$1 \cdot (1-0) \leq I \leq e(1-0), \text{ тобто } 1 \leq I \leq e.$$

8. Має місце **теорема про середнє значення**: якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,\ b]$, то всередині цього відрізку знайдеться хоча б одна точка $x=c$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad c\in(a,b). \qquad (14)$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a,\ b]$, то для неї на цьому проміжку існує первісна $F(x)$, тобто функція, для якої $F'(x)=f(x)$. Застосувавши формулу Ньютона – Лейбніца (8) та теорему Лагранжа (31.3), отримаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a), \quad c\in(a,b).$$

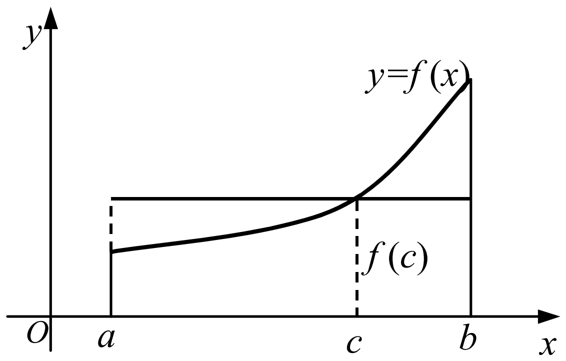


Рис. 9

При $f(x)\geq 0$ рівність (14) геометрично стверджує, що площа криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією самою основою $[a,\ b]$ і висотою $f(c)$, де c – деяка точка з проміжку $(a,\ b)$ (рис. 9). Величину $f(c)$, тобто

$$f_{cp}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \qquad (15)$$

називають **середнім значенням функції** $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$.

Приклад 5. Для функції $f(x)=\sin x$ її середнє значення на проміжку $[0,\ \pi]$ буде таким:

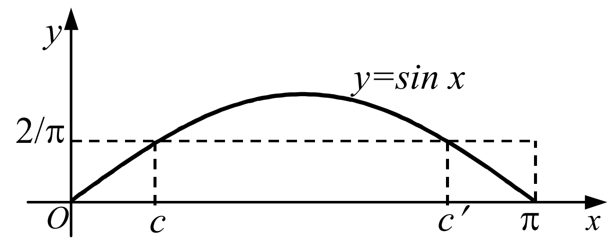


Рис. 10

$$f_{cp}=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\,dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{1}{\pi}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{2}{\pi}.$$

На відрізку $[0,\ \pi]$ існують дві точки c та c′, у яких функція $\sin x$ досягає свого середнього значення (рис. 10).

Зауваження. Разом з (14) справедлива також **узагальнена теорема про середнє значення**: якщо на відрізку $[a,\ b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні, причому $g(x)\neq 0$ при $x\in(a,\ b)$, то всередині цього відрізку знайдеться точка $x=c$ така, що

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx, \quad c\in(a,\,b). \tag{16}$$

Рівність (16) витікає з формули Ньютона – Лейбніца (8) та теореми Коші (31.1). Позначивши первісні для функцій $f(x)g(x)$ та $g(x)$ відповідно $\Phi(x)$ та $G(x)$, одержимо

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{\Phi'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)g(c)}{g(c)} = f(c),$$

що й приводить до (16).

6^0. ***Формула інтегрування частинами***. Якщо $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні (гладкі) на відрізку $[a,\ b]$ функції, то в силу рівності $(uv)'=u'v+uv'$ сума, що записана справа, є неперервною, отже, інтегрованою функцією, а добуток uv – її первісною. При цьому згідно з формулою Ньютона – Лейбніца (8) маємо

$$\int_a^b [u(x)v'(x)+v(x)u'(x)]dx = u(x)v(x)\Big|_a^b, \quad \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Оскільки $u'(x)dx = du$, $v'(x)dx = dv$, то звідси випливає формула інтегрування частинами, де межі a та b відносяться до змінної інтегрування x:

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{17}$$

Приклад 6. $$\int_0^{\pi/3} x\sin 3x\,dx = \left\{\begin{array}{c|c} u=x & du=dx \\ dv=\sin 3x\,dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right\} = -\frac{x}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi/3} +$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^{\pi/3}\cos 3x dx = -\frac{\pi}{9}\cos\pi + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{9}.$$

Приклад 7. $$\int_0^9 ln(x+1)\,dx = \left\{\begin{array}{c|c} u=ln(x+1) & du=\frac{1}{x+1}dx \\ dv=dx & v=x+1 \end{array}\right\} = (x+1)\,ln(x+1)\Big|_0^9 -$$

$$-\int_0^9 dx = 10\,ln10 - ln1 - x\,\Big|_0^9 = 10\,ln10-9 = 23{,}02-9 = 14{,}02.$$

7^0. ***Заміна змінної***. Нехай в інтегралі $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, проводиться заміна $x = \varphi(t)$.

Якщо 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 2) функції $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ та $f[\varphi(t)]$ неперервні при $t \in [\alpha, \beta]$, то справедлива рівність

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{18}$$

Справді, через те, що функція $f(x)$ неперервна, для неї існує первісна $F(x)$, причому $F'(x) = f(x)$ та $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Разом з тим згідно з правилом диференціювання складеної функції $\{F[\varphi(t)]\}_t' = F_\varphi'(\varphi)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Таким чином, функція $F\ [\varphi(t)]$ є первісною для функції $f\ [\varphi(t)]\varphi'(t)$, котра завдяки власній неперервності інтегрована на проміжку $[\alpha, \beta]$. За формулою Ньютона – Лейбніца (8) дістаємо

$$\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Таким чином, рівність (18) доведена.

У визначеному інтегралі при переході до нової змінної одночасно слід перерахувати межі інтегрування. Вертатися до старої змінної після відшукання первісної, на відміну від невизначеного інтеграла, тут не потрібно.

Приклад 8. Обчислити $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Розв`язування. Функція $f(x) = 1\Big/\left(1+\sqrt{2x+1}\right)$ неперервна на $[0, 4]$. Зробимо заміну, яка приводить підінтегральний вираз до раціонального виду: $t = \sqrt{2x+1}$, $t^2 = 2x+1$, $x = \left(t^2-1\right)\Big/2$. Межам інтегрування $x = 0$ та $x = 4$ відповідають значення $t = 1$ та $t = 3$. На проміжку $[1, 3]$ змінювання змінної t функції $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right)$, $\varphi'(t) = t$ та $f[\varphi(t)] = \frac{1}{1+t}$ неперервні, отже, можна зробити підстановку $x = \varphi(t)$. Застосувавши формулу (18), знайдемо

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left\{ \begin{matrix} t^2 = 2x+1, \;\; t = \sqrt{2x+1}, \\ 2tdt = 2dx, \;\; dx = tdt; \end{matrix} \left| \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \right. \right\} = \int_1^3 \frac{tdt}{1+t} = \int_1^3 \frac{(t+1)-1}{1+t} dt =$$

$$= \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left(t - ln|t+1|\right)\Big|_1^3 = (3 - ln4) - (1 - ln2) = 2 - ln2 .$$

Приклад 9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx = \left\{ \begin{matrix} x = \sqrt{2}\,sin\,t, \\ dx = \sqrt{2}\,cos\,t dt; \end{matrix} \left| \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/4 \end{array} \right. \right\} =$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2 - 2\,sin^2\,t} \cdot \sqrt{2}\,cos\,t\,dt = \int_0^{\pi/4} 2\,cos^2\,t\,dt = \int_0^{\pi/4} (1 + cos\,2t)\,dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} sin\,2t\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} sin \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{x\,sin\,x}{2 + sin^2\,x} dx$.

Розв`язування. В даному випадку первісна не виражається через елементарні функції, однак інтеграл можна знайти, застосувавши штучний прийом:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x\,sin\,x}{2 + sin^2\,x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\,sin\,x}{2 + sin^2\,x} dx .$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $x = \pi - t$. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тому з урахуванням властивостей інтегралів (див. 5^0) отримаємо

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x\,sin\,x}{2 + sin^2\,x} dx + \int_{\pi/2}^{0} \frac{(\pi - t)\,sin(\pi - t)}{2 + sin^2(\pi - t)} (-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{x\,sin\,x}{2 + sin^2\,x} dx +$$

$$+ \pi \int_0^{\pi/2} \frac{sin\,t}{2 + sin^2\,t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t\,sin\,t}{2 + sin^2\,t} dt = -\pi \int_0^{\pi/2} \frac{d(cos\,t)}{3 - cos^2\,t} = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{d(cos\,t)}{cos^2\,t - 3} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} ln \left| \frac{cos\,t - \sqrt{3}}{cos\,t + \sqrt{3}} \right| \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(ln \left| \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| - ln \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right| \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} ln \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right| .$$

Зауваження. Недотримання умов, що забезпечують рівність (18), може призвести до помилки. Дійсно, якщо на $[0, \pi]$ $f(x) > 0$, то $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx > 0$ також. Разом з тим при підстановці $t = tg\,x$ межам $x = 0$ та $x = \pi$ відповідають значення $t_1 = 0$ та $t_2 = 0$, отже, після заміни вийде інтеграл з однаковими межами, який згідно з формулою (5) повинен перетворитися на нуль. Похибка виникає через те, що значення функції $x=arctgt$ належать проміжку $(-\pi/2, \pi/2)$ і рівність $arctg\ t=\pi$ неможлива. Якщо ж вибрати інший розв`язок рівняння $t=tg\ x$, наприклад, $x = arctg\ t + \pi$, то ця функція не буде приймати значення $x = 0$.

♦ Перше уявлення, згідно з яким такі величини, як площа чи об`єм, відшукуються через додавання множини елементарних частин, що їх складають, пов`язане з мислителями Давньої Греції, зокрема, Демокритом та Евдоксом (V – IV ст. до н.е.). Поєднуючи оригінальність думки, високу техніку обчислень і строгість доказів, Архімед (III ст. до н.е.) довів цю ідею до можливої на той час досконалості. Стосовно до функцій $y = x$, $y = x^2$ він фактично склав інтегральну суму та знайшов її границю, не володіючи цими поняттями у сучасному їх розумінні. Знадобилося майже дві тисячі років, щоб перевершити його результати. Інтеграційні прийоми античної науки стали широко відомі серед дослідників після видання у 1558 р. праць Архімеда. Ідеї вченого сприйняли та зуміли розвинути математики XVII ст. І. Кеплер, доповнюючи Архімеда, обчислив об`єми 87 нових тіл обертання (1615), Б. Кавальєрі (іт. математик, 1598 – 1647) проінтегрував степінь $y = x^m$ для цілих $m$ від 1 до 9 (1635), П. Ферма поширив інтегрування степеневої функції на випадок дробових та від`ємних m (1642), до тих самих результатів прийшли у 1644 р. Е. Торрічеллі (іт. фізик і математик, 1608 – 1647) та в 1655 р. Дж. Валліс (англ. математик, 1616 – 1703). Б. Паскаль (фр. математик, механік, фізик, філософ, 1623 – 1662) знайшов інтеграли від тригонометричних функцій (1659). На абсолютно новий рівень вивели класичну геометрію стародавніх вчених роботи Ферма (1636) та Декарта (1637), присвячені методу координат. У своїх «Лекціях з оптики та геометрії» (1660 – 1670) І. Барроу (англ. математик, 1630 – 1677, вчитель Ньютона) встановив співвідношення (7). До основної формули інтегрального числення (8) залишався один невеликий крок, однак з огляду на громіздкість геометричних міркувань Барроу його не розгледів. За словами Лейбніца, «після таких успіхів науки бракувало тільки одного – нитки Аріадни в лабіринті задач, саме аналітичного числення за зразком алгебри». Потрібно було виробити основні поняття, які дозволили б виразити все багатство вмісту нового числення. Це й зробив Ньютон (1671), а потім незалежно від нього Лейбніц (1686). Відзначаючи спадкоємність своїх відкриттів, Ньютон говорив: «Якщо я бачив далі, ніж інші, то лише тому, що стояв на плечах гігантів».

♦ Означення інтеграла у формі (3) належить Б. Ріману (нім. математик, 1826 – 1866). Інтегральну суму в цій формулі називають сумою Рімана. Він же встановив необхідні та достатні умови інтегрованості функції. Сучасне позначення визначеного інтеграла впровадив Ж. Фур`є (фр. математик, 1768 – 1830).

♦ **Архімед** (гр. математик, механік, фізик, астроном, близько 287 – 212 рр. до н.е.) – геній давньогрецької наукової думки, син астронома Фідія. Народився та жив у м. Сіракузи (о. Сицилія), був радником царя Гієрона. Знаний не тільки своїми теоретичними дослідженнями, але й також як видатний інженер, що створив вінт для подачі води, різні вантажопідйомні машини, катапульти для використання каменів, крани для потоплення ворожих кораблів. Як військовий інженер керував обороною м. Сіракузи під час 2-ї Пунічної війни між Карфагеном і Римом. Під час штурму міста був убитий римським солдатом. Стали розхожими вислови Архімеда «Еврика!» («Я знайшов!») та «Дайте мені точку опори, і я зрушу Землю».

§39. Застосування визначеного інтеграла до розв`язування фізичних задач

Математика знає вельми тонкі винаходи, що можуть принести велику користь як для задоволення тих, хто бажає вчитися, так і для розвитку усіх ремесел, полегшуючи працю людини.
Р. Декарт, фр. вчений XVII ст.

1⁰. ***Загальна схема застосування визначеного інтеграла***. Нехай потрібно знайти деяку фізичну або геометричну величину Q, що пов`язана з проміжком $[a, b]$, причому відносно даного проміжку остання має властивість адитивності (додаваємість; лат. *additivus* – додаваємий). Це означає, що розкладання відрізку $[a, b]$ на часткові проміжки приводить до розкладання на відповідні частини величини $Q$ і навпаки: об`єднання часткових проміжків тягне за собою підсумовування частин шуканої кількості Q, що відповідають ним. Якщо $a \le x \le b$, то проміжку $[a, x]$ відповідає значення $Q = Q(x)$, на проміжку $[x, x+\Delta x]$ функція $Q(x)$ отримує приріст ΔQ. В рівномірному випадку цей приріст пропорційний до довжини проміжку, тобто $\Delta Q = q\Delta x$, де $q = const$ грає роль швидкості змінення величини Q. Так пов`язані між собою шлях S та час t при русі з постійною швидкістю V: $\Delta S = V\Delta t$, робота A та переміщення x, якщо діюча у напрямку переміщення сила $F = const$: $\Delta A = F\Delta x$, сила тиску F рідини та площа пластини S, якщо тиск рідини на пластину $p = const$: $\Delta F = p\Delta S$. У нерівномірному випадку величина q змінюється: $q = q(x)$, пряма пропорційність між приростом ΔQ та Δx вже не має місця. Однак для малого проміжку $[x, x+\Delta x]$, вважаючи змінення $q(x)$ незначним, наближено можна записати

$$\Delta Q \approx q(x)\Delta x. \qquad (1)$$

Співвідношення (1) рівносильне припущенню, що похибка буде невеликою, якщо на відрізку $[x, x+\Delta x]$ приріст величини Q уявляти рівномірним з коефіцієнтом пропорційності $q(x) = const$, де x – початкова точка проміжку. Справді, нехай $q(\xi)$ – неперервна функція та $\xi \in [x, x+\Delta x]$. На даному проміжку $\tilde{q} \le q(\xi) \le \bar{q}$, де $\tilde{q}$ – найменше, а $\bar{q}$ – найбільше значення $q(\xi)$ (рис. 1), змінення $q(\xi)$ не перевищує

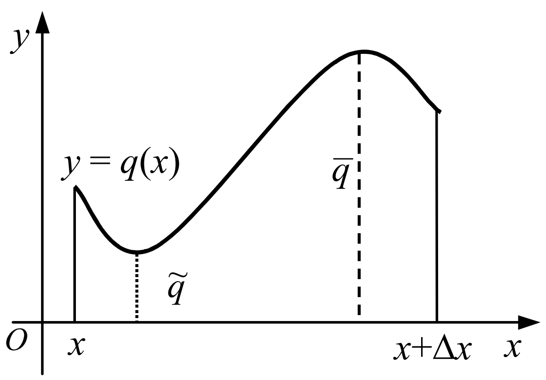


Рис. 1

величину $\alpha = \overline{q} - \widetilde{q}$, причому $0 \le q - \widetilde{q} \le \alpha$, $0 \le \overline{q} - q \le \alpha$, і як всякий приріст неперервної функції $\alpha \to 0$ разом з $\Delta x \to 0$. При цьому добуток $\alpha \Delta x$ є нескінченно малою величиною порядку вище першого: $\alpha \Delta x = o(\Delta x)$. Із збільшенням q зростає також приріст ΔQ, значить,

$$\widetilde{q}\Delta x \le \Delta Q \le \overline{q}\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad [q(x) - (q(x) - \widetilde{q})]\Delta x \le \Delta Q \le [q(x) + (\overline{q} - q(x))]\Delta x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; [q(x) - \alpha]\Delta x \le \Delta Q \le [q(x) + \alpha]\Delta x \;\; \Rightarrow \;\; |\Delta Q - q(x)\Delta x| \le \alpha \Delta x = o(\Delta x)$$

або

$$\Delta Q = q(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{2}$$

Отже, наближення в (1) – результат відкидання в (2) доданку вигляду $o(\Delta x)$.

Сумуючи приріст ΔQ по всіх елементарних проміжках відрізку $[a, b]$, знаходимо

$$Q = \sum_i [q(x_{i-1})\Delta x_i + o(\Delta x_i)].$$

Відкинувши малі величини $o(\Delta x_i)$, прийдемо до інтегральної суми

$$Q \approx \sum_i q(x_i)\Delta x_i \,. \tag{3}$$

У міру прагнення $\Delta x_i \to 0$ обидві наближені рівності (1) та (3) стають все більш точними. При переході до границі права частина (3) дає визначений інтеграл, і вже точно виходить

$$Q = \int_a^b q(x)\,dx. \tag{4}$$

Границя суми $\sum\limits_{i=1}^{n} o(\Delta x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$ дорівнює нулю, така сума нічого не додає до величини Q. Так, при однакових $\alpha_i = \alpha \to 0$ та $\Delta x_i = \Delta x = = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ маємо: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i = \alpha n \Delta x = \alpha(b-a) \to 0$. Це вірно і у загальному випадку.

Оскільки відкидання в (2) доданку $o(\Delta x)$ означає заміну приросту ΔQ диференціалом dQ, то замість наближеного співвідношення (1) можна було зразу написати

$$dQ = q(x)\,dx. \tag{5}$$

У такому вигляді це вже точна рівність. Проінтегрувавши її з врахуванням того, що $Q(a) = 0$, одержимо формулу (4). Який би підхід не застосовувався, чи складається інтегральна сума як в рівності (3), чи формується диференціал (5), важливо виділити лінійну відносно Δx головну частину приросту ΔQ, після чого шукана величина Q визначається за формулою (4).

2^0. *Робота змінної сили*. Змінна сила $F = F(x)$, що діє вздовж осі Ox, переміщує з положення $x = a$ в положення $x = b$ матеріальну точку (рис. 2). Якщо функція $F(x)$ неперервна, то на підставі наведеного у 1^0 міркування робота, котра виконується силою F на проміжку $[x, x + dx]$, з точністю до малих порядку вище першого буде такою $dA = F(x)\cdot dx$. Інтегруючи цю рівність по всьому відрізку $[a, b]$, отримаємо повну роботу: $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

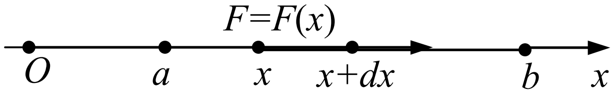


Рис. 2

Задача 1. Визначити роботу ізотермічного стискування газу від об`єму $V_1$ до об`єму V_2.

Розв`язування. Поршень у циліндричному сосуді стискає газ. Розташуємо вісь Ox паралельно до осі сосуду (рис. 3). На елементарному проміжку $[x, x + dx]$ виконується робота $dA = F(x)dx$, причому сила $F(x)$ чисельно дорівнює силі тиску газу при положенні поршня в позиції x, тобто $F(x) = pS$, де S – площа поршня, а p – тиск газу. Переміщення поршня на величину dx визиває змінення об`єму $dV = Sdx$. При цьому $dA = pSdx = pdV$. Згідно із законом Бойля – Маріотта тиск $p$ при ізотермічному стискуванні обернено пропорційний об`єму газу V, тобто $p = \frac{C}{V}$, де C – константа, що залежить від пружних властивостей газу. Маємо $dA = \frac{C}{V}dV$, отже,

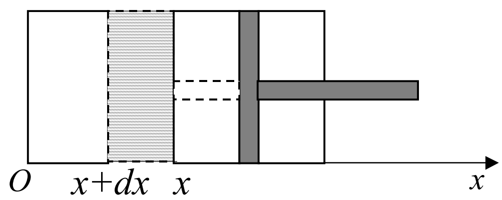


Рис. 3

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{CdV}{V} = C\,ln|V|\Big|_{V_1}^{V_2} = C(lnV_2 - lnV_1) = C\,ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Задача 2. Визначити роботу викачування рідини з котла у формі параболоїда обертання висоти H і з радіусом основи R.

**Розв`язування**. Виберемо систему координат так, як показано на рис. 4. На довільній висоті $y$ двома площинами, перпендикулярними до осі $Oy$, уявно виділимо в посудині тонкий шар рідини товщиною $dy$. З точністю до малих порядку вище першого його об`єм можна знайти як об`єм циліндра, основою якого слугує круг радіуса $x$. Тому з вказаною точністю об`єм шару $dV = \pi x^2 dy$. Вага шару $dP = \gamma\, dV$, де γ – питома вага рідини (якщо

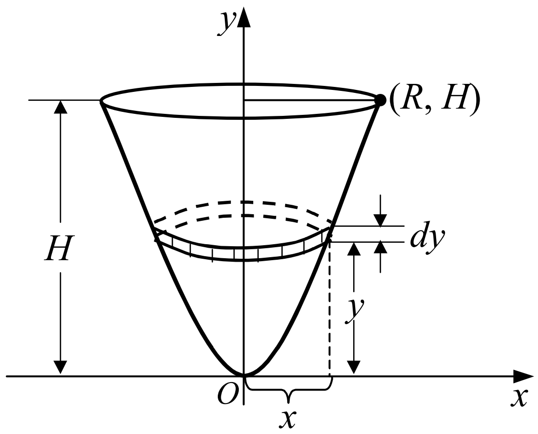


Рис. 4

ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, то $\gamma = \rho g$). Щоб відкачати цей шар, його потрібно підняти на висоту $H–y$. Робота з підйому елементарного шару $dA = (H - y)dP = \pi\gamma x^2(H - y)\,dy$. Тут беруть участь дві змінні величини x та y, координати довільної точки параболи $x^2 = 2py$ – перерізу параболоїда площиною xOy. Через те, що точка (R, H) лежить на параболі, $R^2 = 2pH$, $2p = R^2/H$, отже, парабола має рівняння $x^2 = R^2 y/H$. Ця рівність дозволяє перетворити величину dA до однієї змінної: $dA = \dfrac{\pi\gamma R^2}{H}y(H-y)\,dy$. Інтегруючи, знаходимо повну роботу:

$$A = \int_0^H \frac{\pi\gamma R^2}{H}y(H-y)dy = \frac{\pi\gamma R^2}{H}\left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \frac{\pi\gamma R^2 H^2}{6}.$$

Зазначимо, що так само визначається робота з виїмки грунту з котловану у формі параболоїда. У випадку змінення з глибиною властивостей грунту питома вага γ буде функцією $\gamma = \gamma(y)$. Тепер цю функцію не можна виносити за знак інтеграла, слід інтегрувати весь добуток $y(H-y)\gamma(y)$.

3^0. ***Сила тиску рідини***. Плоска фігура (пластинка), що обмежена осями координат та кривою $y = y(x)$, вертикально занурена в рідину так, що ось Oy збігається з рівнем рідини (рис. 5). Тиск p, тобто сила, з якою рідина діє на одиницю площі, змінюється з глибиною за законом $p = \gamma x$, де γ – питома вага рідини, а x – глибина занурення. Щоб знайти силу тиску F на пластинку, подумки виділимо в даній фігурі на довільній глибині x паралельно осі Oy вузьку смужку шириною dx. В межах такої смужки всі її частини знаходяться приблизно на одній і тій самій глибині і, отже, з точністю до малих порядку вище першого піддаються однаковому тиску. Тому можливим стає застосувати формулу, згідно з якою сила тиску рідини на смужку $dF = pdS = \gamma x dS$, де dS – площа смужки. Остання від площі прямокутника зі сторонами y та dx відрізняється на малу величину, що має порядок малості вище першого, так що диференціал площі $dS = ydx$. Отримуємо $dF = \gamma xydx$. Інтегруючи цю рівність по всіх значеннях x, знайдемо силу тиску F,

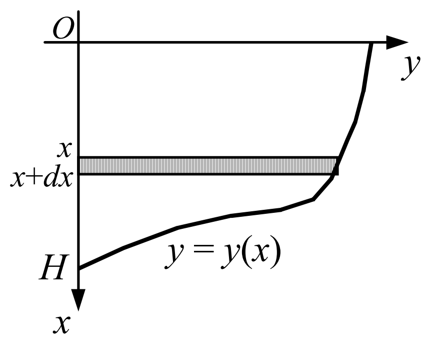


Рис. 5

що діє на пластинку в цілому:

$$F = \gamma \int_0^H xy\,dx\,. \qquad (6)$$

Тут $y = y(x)$ – задана функція, за допомогою якої підінтегральний вираз перетворюється на величину, що залежить тільки від однієї змінної x.

Задача 3. Пластинка, що обмежена осями координат та кривою $y = cos(x/2)$, $0 \le x \le \pi$, вертикально занурена у рідину так, що вісь Oy збігається з рівнем рідини (рис. 6). Знайти силу тиску рідини на пластинку.

Розв`язування. Використовуючи формулу (6), маємо

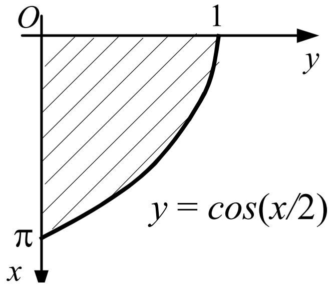


Рис. 6

$$F = \gamma \int_0^\pi x\,cos\frac{x}{2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = cos\frac{x}{2}\,dx & v = 2\,sin\frac{x}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \gamma\left[2x\,sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi sin\frac{x}{2}\,dx \right] = \gamma\left[2\pi\,sin\frac{\pi}{2} + 4cos\frac{x}{2}\Big|_0^\pi \right] =$$

$$= \gamma(2\pi - 4) \text{ од. сили.}$$

Задача 4. Пластинка у формі трикутника висотою H з основою a занурена вертикально у рідину так, що вершина трикутника розташована на її поверхні, а основа трикутника паралельна рівню рідини (рис. 7). Знайти силу тиску рідини на пластинку.

Розв`язування. Формула (6), що отримана вище для фігур, котрі обмежені осями координат, безпосередньо тут не може бути застосована. Виведемо формулу для даного випадку. На глибині x виділимо елементарну смужку. Її довжину l знайдемо з подібності трикутників: $l/a = x/H$, $l = ax/H$. Площа смужки $dS = l dx = \dfrac{ax}{H}dx$. Сила тиску на смужку $dF = pdS = \gamma x\dfrac{ax}{H}dx$, тобто $dF = \dfrac{\gamma a}{H}x^2 dx$. Таким чином, повна сила тиску на пластинку $F = \dfrac{\gamma a}{H}\displaystyle\int_0^H x^2 dx = \dfrac{\gamma a H^2}{3}$.

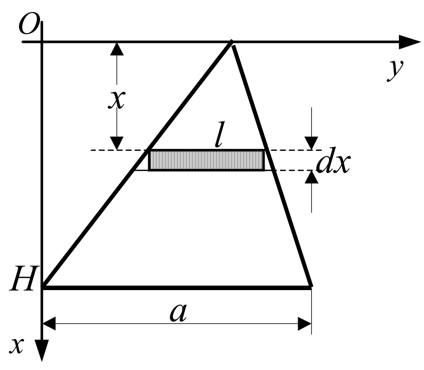


Рис. 7

§ 40. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Геометрія – це мистецтво мислення
на недбало виконаних кресленнях.
Н. Абель, норв. математик XIX ст.

1^0. ***Обчислення площ у декартових координатах***. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ неперервна функція $y(x) \geq 0$, то інтеграл $\int\limits_a^b y(x)\,dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, тобто фігури, що обмежена віссю Ox, кривою $y = y(x)$ та прямими $x = a, x = b$ (рис. 1).

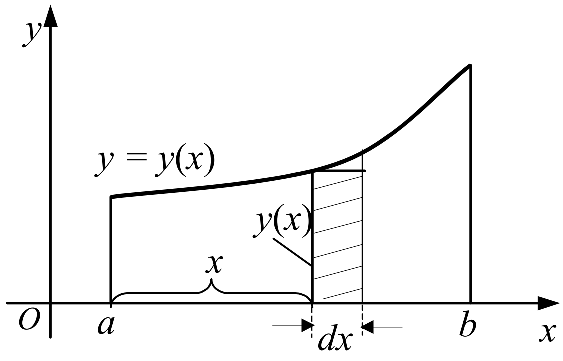


Рис. 1

$$S = \int\limits_a^b y(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Формула (1) випливає з геометричного змісту визначеного інтеграла (2^0 § 38). Її можна отримати також безпосередньо, застосовуючи методи § 39. Елементарна смужка, що зображена на рис. 1, з точністю до малих порядку вище першого має ту саму площу, що й прямокутник висотою $y(x)$ з основою dx, тобто $dS = y(x)dx$. Проінтегрувавши цю рівність, приходимо до формули (1). Якщо при $x \in [a,\ b]$ $y(x) \leq 0$, тобто крива $y= =y(x)$ розташована під віссю Ox (рис. 2), то величина інтеграла (1) – від`ємна. У цьому випадку площа заштрихованої фігури знаходиться так:

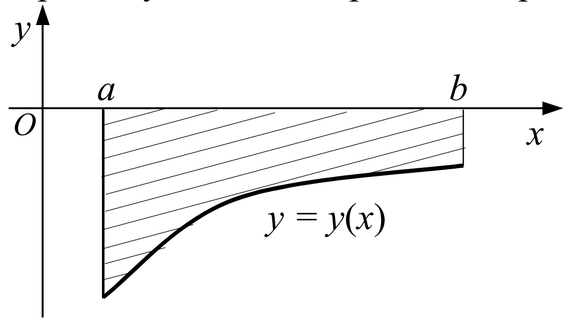


Рис. 2

$$S = \left|\int\limits_a^b y(x)\,dx\right| \quad \text{або} \quad S = -\int\limits_a^b y(x)\,dx\,. \qquad (2)$$

Дійсно, через те що $y \leq 0$, площа елементарної смужки $dS = -y(x)dx$, що й приводить до формули (2).

Крива $y = y(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ може перетинати вісь Ox (рис. 3). Нехай це відбувається тільки в одній точці $x = c$. Відрізок $[a,\ b]$ розпадається на проміжки $[a,\ c]$

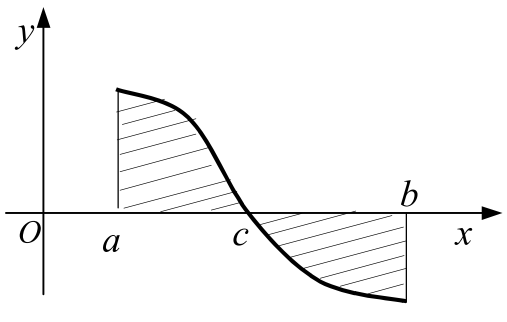


Рис. 3

та $[c, b]$, на яких функція $y(x)$ зберігає свій знак сталим. На кожному з таких проміжків можна застосувати формулу (1) або (2). В результаті визначиться площа усієї заштрихованої фігури, що прилягає до осі Ox.

Приклад 1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y = x^2 + 2x$, $y = 0$, $x = 2$.

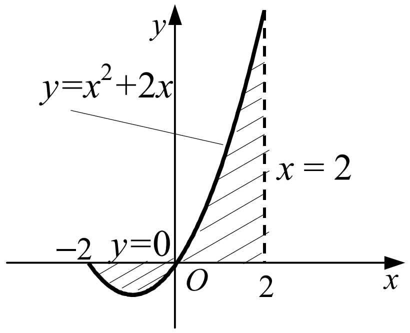


Рис. 4

Розв`язування. Крива $y = x^2 + 2x$ перетинає вісь Ox в точках $x = -2$ та $x = 0$ (рис. 4). На проміжку $[-2; 0]$ $y(x) \le 0$, на проміжку $[0, 2]$ $y(x) \ge 0$. Тому

$$S = S_1 + S_2, \text{ де } S_1 = -\int_{-2}^{0}\left(x^2 + 2x\right)dx = \frac{4}{3},$$

$$S_2 = \int_{0}^{2}\left(x^2 + 2x\right)dx = \frac{20}{3}.$$ Таким чином, $S=8$ кв.од.

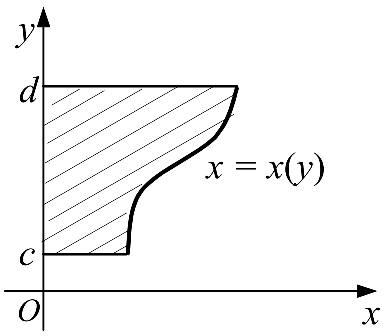


Рис. 5

Для криволінійної трапеції, що прилягає до осі Oy та розташована справа від неї, формула для площі аналогічна (1) – достатньо змінні x та y поміняти місцями:

$$S = \int_{c}^{d} x(y)\,dy. \tag{3}$$

Тут $x = x(y)$ – рівняння кривої, що обмежує трапецію справа (рис. 5).

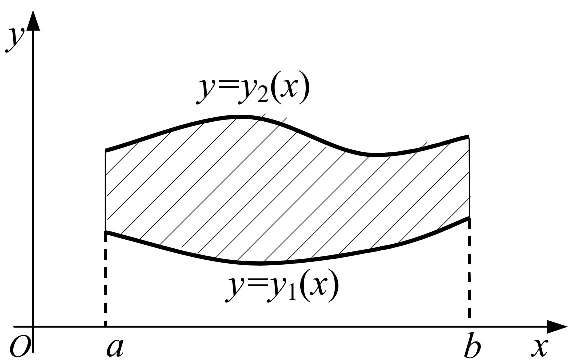


Рис. 6

Площу фігури, яка знизу обмежена кривою $y = y_1(x)$, зверху – кривою $y = y_2(x)$, з боків – прямими $x=a$, $x=b$ $(a < b)$, можна знайти як різницю площ двох криволінійних трапецій (рис. 6):

$$S = \int_{a}^{b}\left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx. \tag{4}$$

Формула (4) справедлива при будь-якому розташуванні фігури відносно осі Ox, якщо тільки на усьому відрізку $[a, b]$ $y_2(x) \ge y_1(x)$. Ділянки прямих $x = a$, $x = b$, що обмежують фігуру, в окремому випадку можуть перетворюватися у точки (рис. 7).

Приклад 2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

**Розв`язування**. Задані криві – параболи. Вони перетинаються у точках з абсцисами $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, які визначаються в результаті розв`язування системи рівнянь

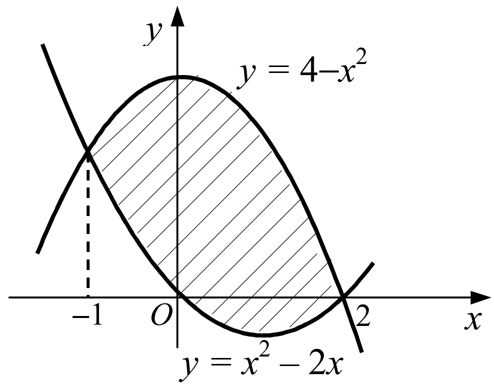


Рис. 7

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$$

На відрізку $[-1,\ 2]$ заштриховану фігуру (рис. 7) зверху обмежує перша задана крива, знизу – друга. Тому згідно з (4) площа фігури буде такою:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(4 - 2x^2 + 2x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(8 - \frac{16}{3} + 4\right) - \left(-4 + \frac{2}{3} + 1\right) = 9 \text{ кв. од.}$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, що обмежена еліпсом $x = a\,cos\,t,\ y = a\,sin\,t$.

Розв`язування. Еліпс симетричний відносно осей координат (рис. 8). Тому достатньо знайти площу S_1 тої частини фігури, котра розташована у першій чверті, а потім помножити цю площу на 4. Застосовуючи формулу (1), запишемо $S_1 = \int_0^a y\,dx$. Залежність y від x в явній формі тут не дана. Її неважко встановити, але простіше перейти до змінної t:

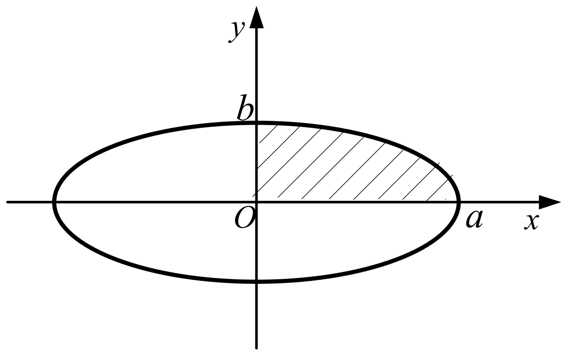


Рис. 8

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} x = a\,cos\,t,\ dx = -a\,sin\,t\,dt, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & \pi/2 \\ a & 0 \end{array} \\ y = b\,sin\,t & \end{array} \right\} = 4\int_{\pi/2}^{0} b\,sin\,t\left(-a\,sin\,t\right)dt = -4ab\int_{\pi/2}^{0} sin^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} \left(1 - cos\,2t\right)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}sin\,2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ кв. од.}$$

2^0. *Обчислення площ у полярних координатах*. Нехай криволінійний сектор обмежений двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, що виходять з полюса O, та кривою $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 9). Його площу S можна знайти так. Двома близькими полярними променями з кутами φ та $\varphi + d\varphi$ до осі OP виділимо в заданій фігурі елементарний сектор. Його площа з точністю до малих порядку вище першого дорівнює площі кругового сектора радіуса $\rho(\varphi)$ при тому самому

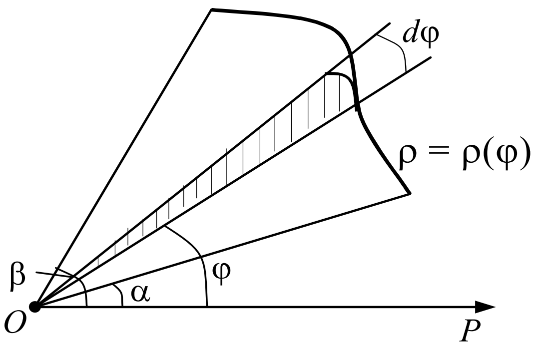


Рис. 9

центральному куті $d\varphi$. Таким чином, $dS = \dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$. Проінтегрувавши цю рівність, знаходимо площу всього криволінійного сектора

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (5)$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $\rho = a\,sin3\varphi$.

Розв`язування. Дана лінія – трипелюсткова роза. Вісь її першої пелюстки утворює з полярною віссю кут $\varphi = \pi/6$. Саме при такому φ полярний радіус ρ приймає найбільше значення $\rho = a$. Пелюстки однакові та симетричні відносно своєї осі. Тому площа усієї фігури у 6 разів більша за площу заштрихованої на рис. 10 половинки першої пелюстки. Останню можна знайти як площу криволінійного сектора, що обмежений променями $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi/6$. Згідно з (5) маємо

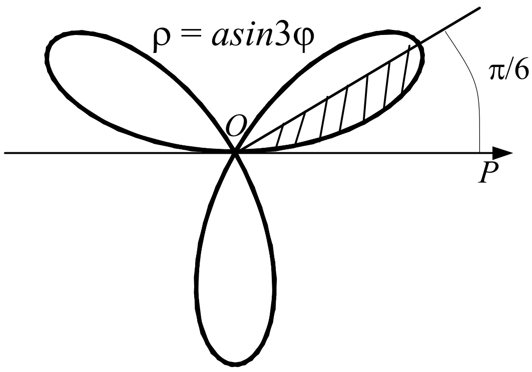


Рис. 10

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2\,sin^2\,3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\left(1 - cos\,6\varphi\right)d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\varphi - \frac{1}{6}sin\,6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ кв. од.}$$

3^0. ***Довжина дуги плоскої кривої***. Якщо дугу гладкої кривої довільно розбити на малі ділянки, а потім кожну з них замінити хордою, то отримаємо вписану в дугу ламану. Довжина такої ламаної наближено визначає довжину самої дуги. Це наближення тим краще, чим менші ланки ламаної. Границя, до якої наближається довжина ламаної при нескінченному подрібненні усіх її ланок, і буде довжиною дуги кривої.

Розглянемо гладку криву $y = y(x)$. Її ділянку, що відповідає проміжку $[a, b]$, позначимо $\breve{AB}$ (рис.11). Виділимо на відрізку $[a, b]$ елементарний проміжок $[x, x+dx]$. Відповідний елемент дуги $\breve{AB}$ має довжину Δl, яка з точністю до малих порядку вище першого дорівнює довжині хорди цієї елементарної ділянки: $\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Оскільки $\Delta x = dx$, а Δy від диференціала dy відрізняється на нескінченно малий доданок більш високого порядку малості,

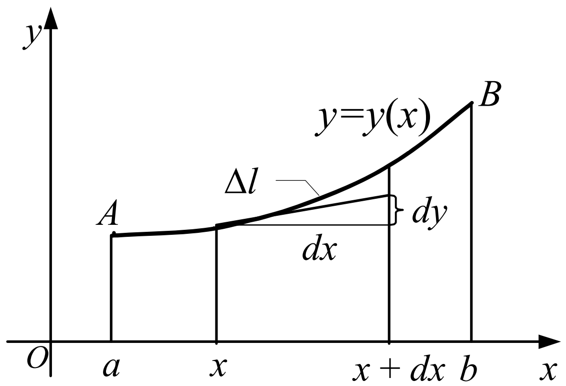


Рис. 11

то з тією самою точністю величина Δl дорівнює довжині відрізку дотичної, що проведена до кривої у точці з абсцисою x, тобто

$$\Delta l \approx dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,. \tag{6}$$

При $dx > 0$ справедлива рівність (див. також (33.2))

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,. \tag{7}$$

Інтегруючи по всіх значеннях $x \in [a, b]$, знаходимо повну довжину дуги AB:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx\,. \tag{8}$$

Для кривої, що задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, маємо $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$. При $dt > 0$ згідно з (6) дістанемо

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\,. \tag{9}$$

Інтегрування рівності (9) по проміжку $t_1 \le t \le t_2$, де t_1 та t_2 – значення параметра t, що відповідає крайнім точкам дуги $\breve{AB}$, приводить до формули

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt\,. \tag{10}$$

У випадку кривої, що задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярних координатах φ, ρ, маємо $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$ (див. (33.4)). Таким чином, при $\alpha \le \varphi \le \beta$ довжина дуги кривої

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi\,. \tag{11}$$

Приклад 5. Знайти довжину дуги $\breve{AB}$ кривої $y^2 = (x-2)^3$, якщо задані крайні точки дуги: A(2; 0), B(6; 8).

Розв`язування. Маємо півкубічну параболу з вершиною у точці A(2;0) (рис.12). Знаходимо: $y = (x-2)^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}(x-2)^{1/2}$. Обидві функції y та y' на відрізку $[2;\, 6]$ неперервні. Застосовуючи формулу (8), отримаємо:

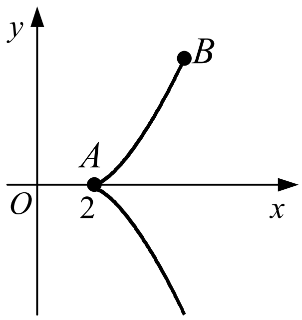


Рис. 12

$$l = \int_2^6 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-2)}\,dx = \left\{\begin{aligned} u &= 1+\frac{9}{4}(x-2) \\ du &= \frac{9}{4}dx \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{4}{9}\int_2^6 \left[1+\frac{9}{4}(x-2)\right]^{1/2}\left(\frac{9}{4}dx\right) = \left\{\int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}\right\} =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[1+\frac{9}{4}(x-2)\right]^{3/2}\Bigg|_2^6 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2}-1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) \text{ од. довж.}$$

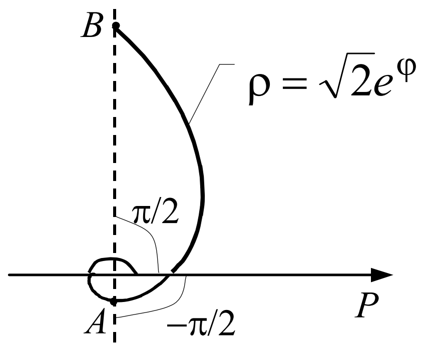


Рис. 13

Приклад 6. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$ (ρ та φ − полярні координати точки) на проміжку $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Розв`язування. Задана крива називається логарифмічною спіраллю (рис. 13). Її рівняння визначає залежність полярного радіуса ρ від другої полярної координати φ. Маємо $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$, $\rho'_{\varphi} = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$ та згідно з (11)

$$l = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2e^{2\varphi}+2e^{2\varphi}}\,d\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\varphi}\,d\varphi = 2e^{\varphi}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\left(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}\right) = 4sh(\pi/2) \text{ од. довж.}$$

4⁰. ***Об`єм тіла з відомою площею перерізу***. Деяке тіло розташовано між площинами $x = a$ та $x = b$. Відома площа $Q = Q(x)$ будь-якого перерізу тіла площиною, що перпендикулярна осі $Ox$ та перетинає цю вісь у точці $x \in [a, b]$. Знайдемо об`єм тіла. Двома площинами, перпендикулярними до осі Ox, подумки виділимо елементарний шар тіла, що відповідає проміжку $[x, x+dx]$. З точністю до малих порядку вище першого об`єм шару дорівнює об`єму циліндра з площею основи $Q(x)$ та висотою dx ($dx > 0$), тобто $dV = Q(x)dx$ (рис. 14). Проінтегрувавши цю рівність по проміжку $[a, b]$, дістанемо об`єм усього тіла:

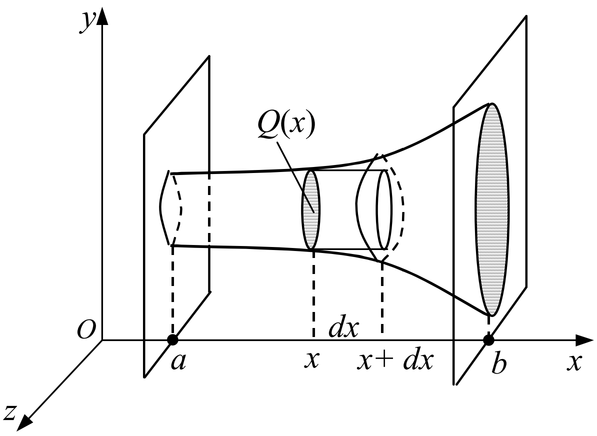


Рис. 14

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx. \tag{12}$$

Приклад 7. Знайти об`єм еліптичного параболоїда $x = \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2}$, що відрізаний площиною $x = c$.

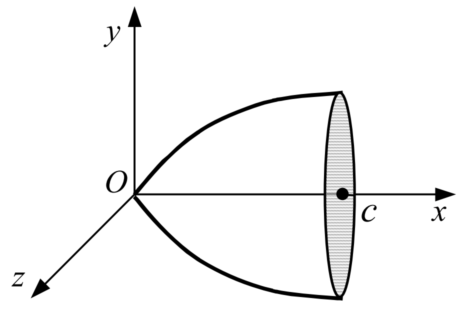


Рис. 15

Розв`язування. При будь-якому фіксованому $x \in [0,\ c]$ у перерізі параболоїда площиною, що перпендикулярна до осі Ox, маємо еліпс: $\dfrac{y^2}{a^2 x} + \dfrac{z^2}{b^2 x} = 1$ (рис.15). Його півосі $a_1 = a\sqrt{x}$, $b_1 = b\sqrt{x}$. Площа такої фігури (див. приклад 3) $Q(x) = \pi a_1 b_1 = \pi abx$. Згідно з (12) шуканий об`єм

$$V = \int_0^c \pi abx\,dx = \frac{\pi abc^2}{2} \text{ куб. од.}$$

5⁰. ***Об`єм тіла обертання***. Якщо тіло утворено обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=y(x)$ (рис. 16), то у поперечному перерізі тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox, вийде круг радіуса $y(x)$. Його площа $Q(x) = \pi y^2(x)$. Тому на підставі (12) об`єм тіла виразиться формулою

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{13}$$

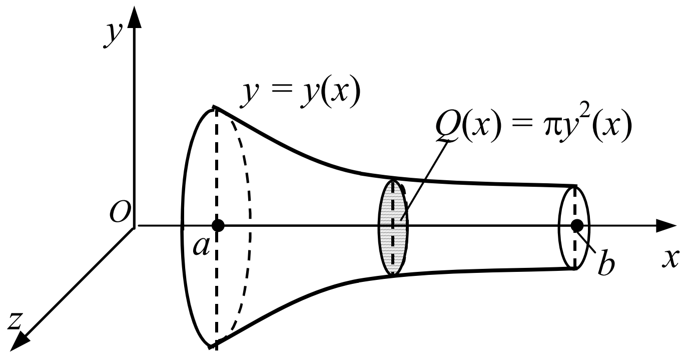


Рис. 16

Так само може бути отримана формула для об`єму тіла, що утворене обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка прилягає до цієї осі (рис. 17).

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy. \tag{14}$$

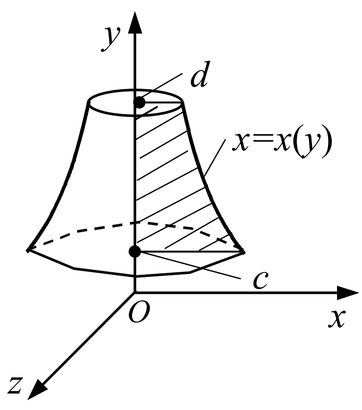


Рис. 17

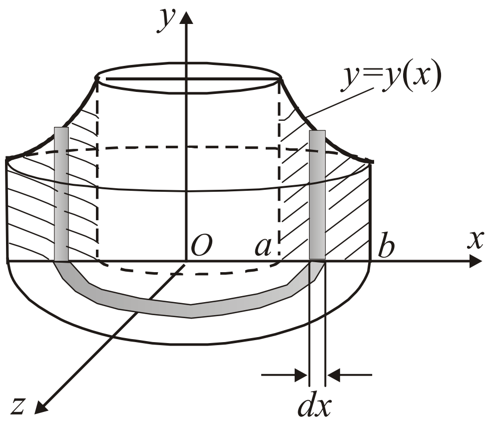


Рис. 18

Якщо криволінійна трапеція, обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=y(x)$, обертається навколо осі Oy (рис. 18), то об`єм тіла обертання зручно обчислювати за формулою

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,y(x)\,dx. \qquad (15)$$

Дійсно, елементарному проміжку $[x, x+dx]$, що міститься у $[a, b]$, відповідає вертикальна смужка, яка при обертанні утворює циліндричний шар висотою $y(x)$. В основі шару – кільце ширини dx, радіусом його внутрішнього кола є x. З точністю до малих порядку вище першого площа кільця дорівнює добутку його ширини на довжину внутрішнього кола, тобто $dS = 2\pi x dx$. Об`єм циліндричного шару $dV = ydS = 2\pi xy(x)dx$. Інтегрування цієї рівності й приводить до формули (15).

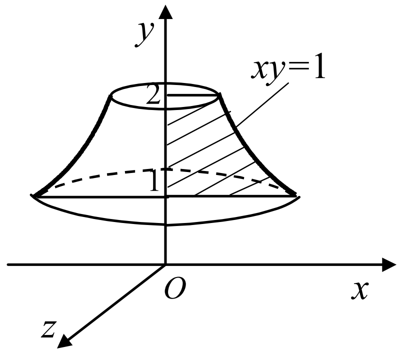


Рис. 19

Приклад 8. Фігура, що обмежена лініями $xy = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, обертається навколо осі Oy. Знайти об`єм тіла обертання.

Розв`язування. Криволінійна трапеція прилягає до осі Oy (рис. 19). Оскільки $x = 1/y$, то згідно з формулою (14) знаходимо

$$V_y = \pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{\pi}{y}\Bigg|_1^2 = -\pi\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{\pi}{2} \text{ куб. од.}$$

Приклад 9. Астроїда $x = acos^3t$, $y = asin^3t$ обертається навколо осі Ox. Знайти об`єм тіла обертання.

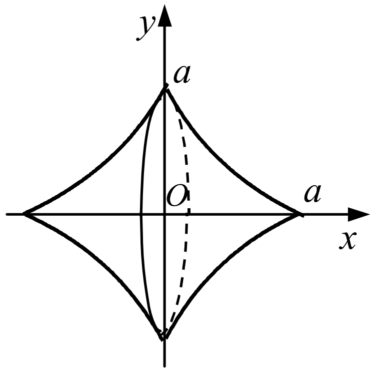


Рис. 20

**Розв`язування**. Задана крива симетрична відносно осей координат (рис. 20). Обертання прилежної до осі $Ox$ криволінійної трапеції з основою $[0, a]$ утворює половину тіла. В силу формули (13) об`єм всього тіла визначається таким інтегралом:

$$V_x = 2\pi\int_0^a y^2(x)dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x = a\cos^3 t, \quad dx = -3a\cos^2 t \sin t dt, \\ y = a\sin^3 t \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & \pi/2 \\ a & 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -2\pi \int_{\pi/2}^{0} a^2 \sin^6 t \; 3a \cos^2 t \sin t \, dt = -6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 t\right)^3 \cos^2 t \, d(\cos t) =$$

$$= -6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t\right) d(\cos t) = -6\pi a^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3}{5}\cos^5 t + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{105}\pi a^3 \text{ куб. од.}$$

Приклад 10. Фігура, що обмежена лініями $y = (x-2)^2$, $y = 0$, $x = 1$, обертається навколо осі Oy (рис. 21). Знайти об`єм тіла обертання.

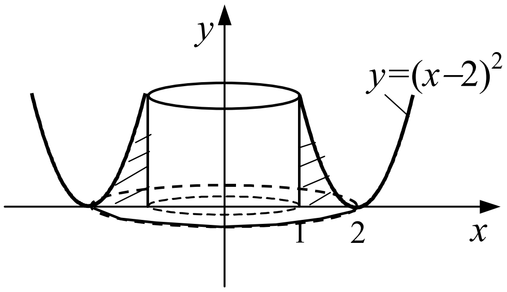


Рис. 21

Розв`язування. Маємо криволінійну трапецію, що прилягає до осі Ox. Застосуємо формулу (15)

$$V_y = 2\pi \int_1^2 x\, y(x)\, dx = 2\pi \int_1^2 x(x-2)^2 \, dx =$$

$$= 2\pi \int_1^2 x\left(x^2 - 4x + 4\right) dx = \frac{5}{6}\pi \text{ куб. од.}$$

6⁰. ***Площа поверхні обертання***. Нехай $y = y(x)$ – гладка крива. Її дуга $\breve{AB}$, що відповідає відрізку $[a, b]$, обертається навколо осі Ox. Знайдемо площу поверхні обертання. З цією метою у межах відрізку $[a, b]$ двома площинами, що перпендикулярні до осі Ox та перетинають її у точках x та $x + dx$, виділимо на поверхні елементарне кільце (рис. 22). З точністю до малих порядку вище першого елемент дуги можна замінити відрізком дотичної (див. 3^0) та шукати відповідний до нього елемент площі dP як площу бокової поверхні зрізаного конуса з твірною

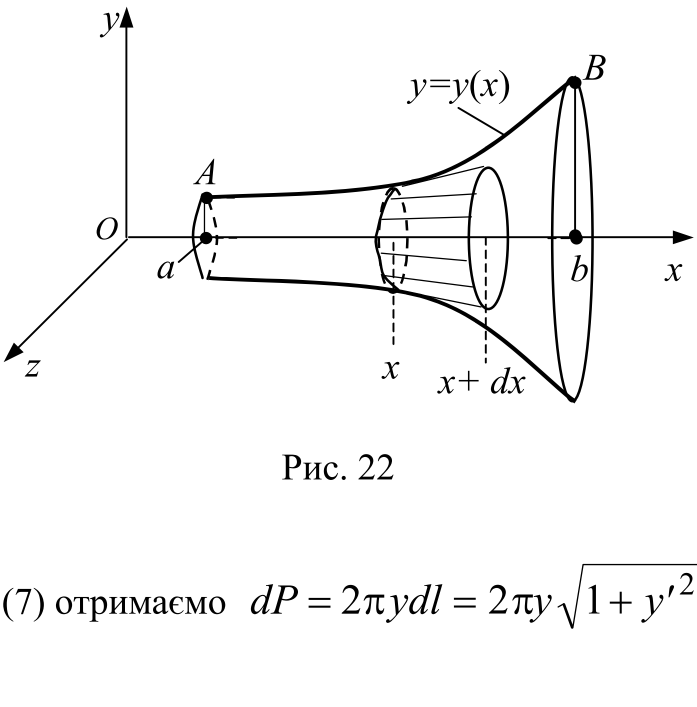


Рис. 22

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

та радіусами основ y та $y + dy$, тобто

$$dP = 2\pi \frac{y + (y + dy)}{2} dl .$$

Малу порядку вище першого $dydl$ відкинемо. З урахуванням (7) отримаємо $dP = 2\pi y dl = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$, отже,

$$P_x = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx. \tag{16}$$

Для кривої, що задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, згідно з (9) маємо $dP = 2\pi y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$ та

$$P_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \tag{17}$$

Значення t_1 та t_2 відповідають крайнім точкам дуги $\smile{AB}$.

Приклад 11. Коло $x^2 + y^2 = R^2$ обертається навколо осі Ox. Знайти площу поверхні сферичного пояса висотою h.

Розв`язування. Нехай сферичний пояс вирізається із сфери площинами $x = x_1$ та $x = x_2$, $-R \le x_1 < x_2 \le R$, $x_2 - x_1 = h$ (рис.23). Оскільки для верхньої половини кола

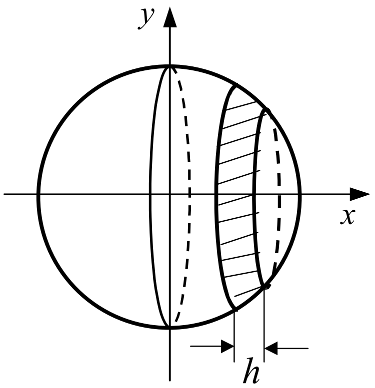


Рис. 23

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, $1 + y'^2 = 1 +$

$+\dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$, $y\sqrt{1+y'^2} = \dfrac{\sqrt{R^2 - x^2}\cdot R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R$.

Застосувавши формулу (16), знайдемо

$$P_x = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} R\,dx = 2\pi R(x_2 - x_1) = 2\pi Rh.$$

При $h = 2R$ звідси випливає формула площі сфери $P = 4\pi R^2$.

♦ Поняття визначеного інтеграла виникло із задач геометрії, що пов`язані з відшукуванням площ, об`ємів, довжини дуг. Перші результати отримані Архімедом. Два доведення формули для площі параболічного сегмента містяться в його творі «Квадратура параболи». Застосовуючи розроблені ним інтеграційні прийоми, Архімед знайшов довжину кола, площу круга та еліпса, об`єм та площу поверхні кулі, кульового сегмента, конуса, об`єми різних тіл обертання – сегментів параболоїда, гіперболоїда, еліпсоїда, визначив площу першого витка спіралі, яка тепер носить його ім`я.

♦ У 1615 р. вийшла в світ книга Кеплера «Нова стереометрія винних бочок, переважно австрійських і таких, що мають найвигіднішу форму». Автор не дотримується Архімедової точності у доведеннях, але додержується його уявлень. Він повторює та доповнює досягнення Вчителя, знаходить об`єми 92-х тіл обертання. Інтерес до бочок виник у Кеплера випадково – купуючи вино на весілля, він здивувався, як продавець за одним лише заміром рівня визначав об`єм вина у бочці. Для неординарного та діяльного розуму саме із здивування і починається відкриття нового.

§ 41. Наближене обчислення визначеного інтеграла

Я не отримую задоволення від формул, поки не відчую числових значень величин.
В. Томсон (Кельвін), англ. фізик та математик XIX ст.

Величина визначеного інтеграла знаходиться за формулою Ньютона − Лейбніца (38.8), якщо для підінтегральної функції $f(x)$ відома її первісна $F(x)$. Однак остання через елементарні функції виражається далеко не завжди. Не маючи первісної, застосовують наближені методи. Відправним пунктом слугують геометричні уявлення, згідно з якими величина інтеграла пов`язана з площею відповідної криволінійної трапеції. Існують різні наближені способи об
числення таких площ. Вони й приводять до тої чи іншої формули наближеного інтегрування.

1⁰. ***Формули прямокутників***. Розглянемо інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, де $a < b$ та $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$ функція. Для наочності будемо вважати, що $f(x) \ge 0$. Відрізок $[a, b]$ розіб`ємо на n рівних частин точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Крок ділення $h = (b - a)/n$. У точках ділення функція $f(x)$ приймає значення $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Утворимо дві суми $I_1 = y_1 h + y_2 h + \cdots + y_n h$ та $I_2 = y_0 h + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h$. Кожна з величин I_1 та I_2 є інтегральною сумою для інтеграла I на відрізку $[a, b]$, отже, $I \approx I_1$ та $I \approx I_2$. Отримуємо формули прямокутників

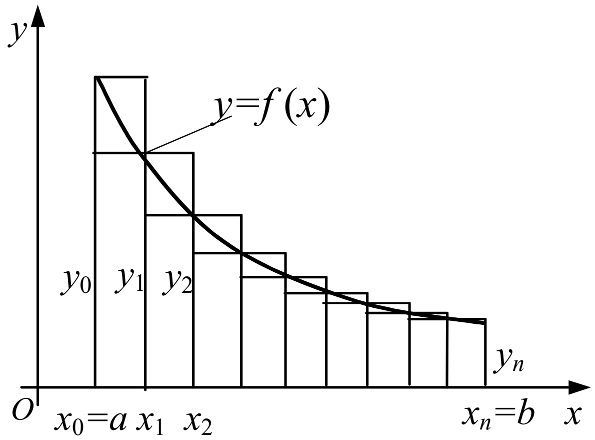


Рис. 1

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j = I_1$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j = I_2. \quad (1)$$

Якщо $f(x)$ – спадна функція (рис. 1), то сума I_1 об`єднує площі прямокутників, котрі повністю входять в дану криволінійну трапецію, а I_2 відповідає прямокутникам, що виступають за її межі. Таким чином, $I_1 \le I \le I_2$ (для зростаючої функції мають місце зворотні нерівності). Перша з формул (1) у цьому випадку дає значення інтеграла I с недостачею, а друга визначає величину I з надлишком. Це дозволяє судити про похибки наближення. Із зростанням n точність формул (1) збільшується.

2^0. *Формула трапецій*. Відрізок $[a, b]$, на якому задана неперервна функція $y = f(x) \geq 0$, ділимо на n рівних проміжків точками $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , $x_n = b$, крок ділення $h = (b-a)/n$. На кожному проміжку $[x_{j-1}, x_j]$ відповідний відрізок дуги кривої $y = f(x)$ замінимо хордою (рис. 2). Звичайна трапеція висотою h із сторонами y_{j-1} та y_j має площу $(y_{j-1} + y_j)h/2$.

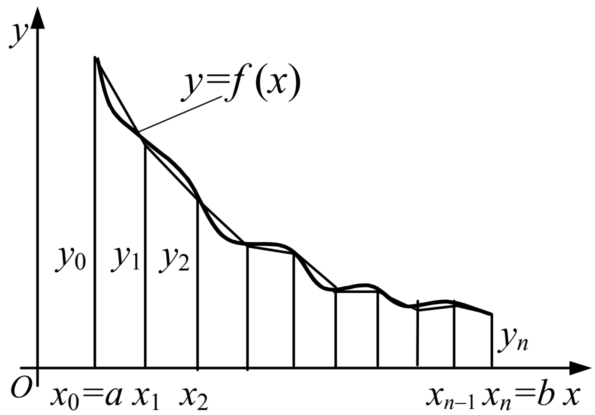


Рис. 2

Площу криволінійної трапеції, що розташована під кривою $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, знайдемо як суму площ елементарних трапецій. Одержимо наближену рівність

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\frac{y_0 + y_1}{2} + h\frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + h\frac{y_{n-1} + y_n}{2} = I_1.$$

Усі ординати y_j, що містяться тут, за виключенням самих крайніх, зустрічаються двічі, тому

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) = I_1. \qquad (2)$$

Похибка $\delta = I - I_1$, з якою число I_1 представляє значення інтеграла I, залежить від властивостей функції $f(x)$, а саме від величини її похідної $f''(x)$. Відома така оцінка для похибки δ [11, с. 351]:

$$|\delta| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \qquad (3)$$

Звідси видно, що при обмеженій на $[a, b]$ похідній $f''(x)$ із зростанням n максимальне значення $|\delta|$ має той самий порядок спадання, що й величина $1/n^2$, тобто $\delta = O(1/n^2)$.

3^0. *Формула Сімпсона*. Нехай на відрізку $[-h, h]$ задана парабола: $y = Ax^2 + Bx + C \geq 0$ (рис. 3). Позначимо $y(-h) = y_0$, $y(0) = y_1$, $y(h) = y_2$. Ці ординати зв`язані з коефіцієнтами рівняння параболи такими співвідношеннями:

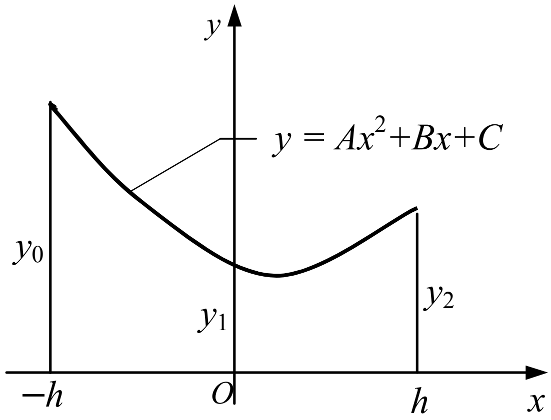


Рис. 3

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= y(-h) = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= y(0) = C \\ y_2 &= y(h) = Ah^2 + Bh + C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

З урахуванням останньої рівності площа криволінійної трапеції, що розташована під параболою на відрізку $[-h,\ h]$, запишеться:

$$S = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). \qquad (4)$$

Якщо задану параболу зсунути вздовж осі Ox на довільний проміжок $[x_0,\ x_2]$ довжиною $2h$ з серединою x_1, то ординати $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ не зміняться. Збереже своє значення і площа S. Тому формула (4), де інтегрування ведеться по відрізку $[x_0,\ x_2]$ із значеннями $x_0 = -h$, $x_2 = h$, справедлива при довільному розташуванні цього проміжку відносно початку координат.

Розглянемо тепер інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – довільна неперервна на $[a,\ b]$ функція. Точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{2m} = b$ розіб`ємо відрізок $[a,\ b]$ на парну кількість рівних проміжків із кроком $h = (b-a)/2m$, де $2m$ – кількість проміжків. Через три точки кривої $y = f(x)$ з абсцисами x_0, x_1, x_2 можна провести тільки одну параболу вигляду $y = Ax^2 + Bx + C$. Природно очікувати, що її графік прилягає до кривої $y = f(x)$ тісніше, ніж відрізок прямої, а значить, порівняно з попередніми методами буде досягатися і більш точне наближення інтеграла на проміжку $[x_0,\ x_2]$. Рівність (4), точна у випадку параболи, для довільної підінтегральної функції $f(x)$ виконується лише наближено:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Так само

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right),$$

....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right).$$

Додаючи ці співвідношення почленно, приходимо до формули Сімпсона:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1}\right) = I_1. \qquad (5)$$

Похибка $\delta = I - I_1$, яку дає формула (5), оцінюється таким чином [11, с. 352]:

$$|\delta| \le \frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} \max_{[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|. \qquad (6)$$

При обмеженій похідній $f^{(4)}(x)$ із зростанням кількості смужок $n = 2m$ похибка δ веде себе як нескінченно мала порядку $1/n^4$, тобто спадає значно швидше, ніж у методі трапецій, що й забезпечує при великих n більш високу точність формули (5) у порівнянні з (2).

Приклад. Інтеграл $I = \int_1^5 \frac{dx}{x} = ln5$. Звертаючись до таблиць логарифмів, визначаємо: $I = 1{,}6094$. Тепер обчислюємо інтеграл I наближено, розбиваючи відрізок $[1;\ 5]$ на 8 рівних проміжків із кроком $h = 0{,}5$. Результати обчислень, що отримані за формулами (1), (2) та (5), порівняємо з наведеним вище табличним значенням I.

Знайдемо абсциси точок ділення та відповідні до них ординати функції $y = 1/x$:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$y_j = 1/x_j$	1	0,6667	0,5	0,4	0,3333	0,2857	0,25	0,2222	0,2

За формулами прямокутників (1) маємо

$$I_1 = 0{,}5\sum_{j=1}^{8} y_j = 1{,}4290; \qquad I_2 = 0{,}5\sum_{j=0}^{7} y_j = 1{,}8290.$$

Похибка наближення за 1-ю формулою $\delta = I - I_1 = 0{,}18$, тобто вона складає 11% від шуканого значення I, за 2-ю формулою $\delta = I - I_2 = -0{,}22$ (дорівнює 13% величини I).

Застосувавши формулу трапецій (2), одержимо

$$I_1 = 0{,}5\left(\frac{1+0{,}2}{2} + \sum_{j=1}^{7} y_j\right) = 1{,}629\,; \;\; \delta = I - I_1 = -0{,}0196 \quad (1{,}2\,\% \text{ величини } I).$$

Формула Сімпсона (5), де $m = 4$, дає такий результат:

$$I_1 = \frac{0{,}5}{3}\big[1 + 0{,}2 + 2(0{,}5 + 0{,}3333 + 0{,}25) + 4(0{,}6667 + 0{,}4 + 0{,}2857 + 0{,}2222)\big] = 1{,}6108\,;$$

$\delta = I - I_1 = -0{,}0014$, що складає менше 0,1 % величини I.

Наближене інтегрування застосовують у тих випадках, коли дійсне значення інтеграла I невідомо. Тому, як правило, не можна знайти й точне значення похибки δ. Формули (3) та (6) дозволяють тільки оцінити цю величину.

Для функції $y(x) = 1/x$ маємо $y''(x) = 2/x^3$, $y^{(4)}(x) = 24/x^5$, $\max\limits_{1\le x\le 5}\left|y''(x)\right| \le 2$, $\max\limits_{1\le x\le 5}\left|y^{(4)}(x)\right| \le 24$. Таким чином, у розглянутому вище прикладі для похибки δ згідно з формулами (3) та (6) справедливі такі оцінки: в методі трапецій $|\delta| \le 1/6$, в методі Сімпсона $|\delta| \le 1/30$.

♦ Ньютон та Лейбніц розуміли, що точне обчислення інтегралів в багатьох випадках неможливе. Вони широко користувалися наближеними методами, серед яких основне місце відводили степеневим рядам.

♦ **Томас Сімпсон** (англ. математик, педагог, 1710 – 1761) – син ткача, самостійно вивчив математику та у віці 33 років почав викладати її у військовій академії. Написав трактат про флюксії (похідні), книгу з теорії ймовірностей, підручники з алгебри, геометрії, тригонометрії. Формула (5) міститься в його творі «Математичні міркування на фізичні та аналітичні теми» (1743). За своєю суттю вона була відома і до нього – Торричеллі (1644), Грегорі (1668), Ньютону (1676), Р. Коутсу (опубліковано у 1722; англ. математик, 1682 – 1716, учень Ньютона).

§ 42. Невласні інтеграли

Оперування з нескінченними може стати надійним тільки з огляду на скінченне.
Д. Гільберт, нім. математик XX ст.

Визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ виникає через перехід до границі в інтегральній сумі, що складена для обмеженої функції $f(x)$ на скінченному проміжку $[a,\, b]$ (2^0 § 38). Разом з тим практика висуває задачі, в яких треба розглядати нескінченні проміжки та необмежені функції. Для цих випадків означення (38.3) стає непридатним, поняття інтеграла потребує узагальнення. В результаті такого узагальнення з`явилися невласні інтеграли двох типів – з нескінченними межами та від необмежених функцій.

1^0. ***Інтеграли по нескінченному проміжку***. Нехай при $a \le x < \infty$ функція $f(x)$ визначена та неперервна. Для будь-якого значення $b > a$ існує інтеграл $I(b) = \int_a^b f(x)dx$. Якщо величина b змінюється, то буде змінюватися і інтеграл $I(b)$, який неперервно залежить від аргументу b. Границю функції $I(b)$ при $b \to \infty$ називають невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл, записаний в (1) зліва, називають збіжним, в противному разі, тобто коли границя не існує або нескінченна, кажуть, що невласний інтеграл розбігається.

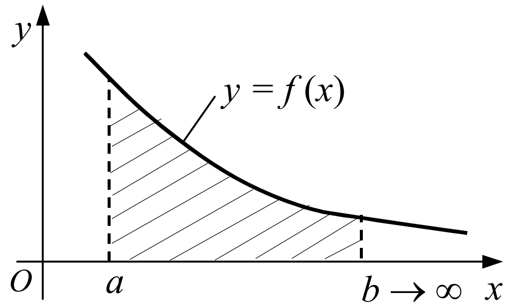


Рис. 1

При $f(x) \ge 0$ збіжний інтеграл (1) геометрично представляє собою площу необмеженої справа області, що розташована між кривою $y = f(x)$, віссю Ox та прямою $x = a$ (рис. 1).

Аналогічно визначають невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Інтеграл по всій числовій осі представляють так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

де c – довільна точка осі. Інтеграл, що стоїть зліва, збігається, якщо збігається кожний з інтегралів, записаних в правій частині рівності (3).

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, де α – стала величина.

Розв`язування. Для функції $y=1/x^{\alpha}$ первісна $F(x)=x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, якщо $\alpha\neq 1$, та $F(x)=ln\,x$ при $\alpha=1$. Тому діючи у відповідності до означення (1), знаходимо

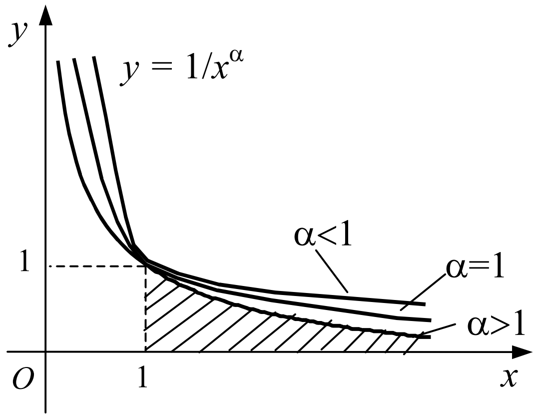


Рис. 2

$$I=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\left\{\begin{matrix}\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\ ln\,x\end{matrix}\right|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)\\ ln\,b-ln\,1\end{matrix}\right.=\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1;\\ \infty & \text{при } \alpha\leq 1.\end{matrix}\right.$$

Отже, інтеграл $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається, якщо $\alpha>1$, та розбігається при $\alpha\leq 1$.

Рис. 2 дає ілюстрацію до приклада 1. Криві виду $y=1/x^{\alpha}$ при $\alpha>1$ швидко наближаються до своєї асимптоти – осі Ox та, незважаючи на нескінченну протяжність, заштрихована фігура має скінченну площу. У випадку $0<\alpha\leq 1$ вісь Ox як і раніше є асимптотою, але функція y спадає повільніше. Це й приводить до того, що між кривою та віссю Ox «накопичується» нескінченно велика площа.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{ln\,x}{x^3}dx$.

Розв`язування. Застосуємо означення (1), формулу інтегрування частинами та правило Лопіталя для розкриття невизначеності:

$$I=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{ln\,x}{x^3}dx=\left\{\begin{array}{c|c} u=ln\,x & du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=x^{-3}dx & v=-\dfrac{1}{2}x^{-2}\end{array}\right\}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{ln\,x}{2x^2}\Big|_1^b+\frac{1}{2}\int\limits_1^b x^{-3}dx\right]=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{ln\,b}{2b^2}-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^b\right]=\frac{1}{4}-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{4b^2}-\lim_{b\to\infty}\frac{ln\,b}{2b^2}=\frac{1}{4}-\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{4b}=\frac{1}{4}.$$

Зауваження. Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ та існує скінченна або нескінченна границя $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$. Тоді згідно з (1)

$$\int\limits_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\left[F(b)-F(a)\right]=F(\infty)-F(a). \qquad (1')$$

Знак границі «lim» в останньому виразі не пишемо, але перехід до границі здійснюється і в цьому випадку. Подібним чином записується й формула (2):

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty), \qquad (2')$$

де $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Розв`язування. Поклавши у формулі (3) $c = 0$, маємо

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx \Big|_{-\infty}^{0} + arctgx \Big|_{0}^{\infty} = arctg0 - arctg(-\infty) +$$

$$+ arctgx(\infty) - arctg0 = -(-\pi/2) + \pi/2 = \pi .$$

Задача. Визначити другу космічну швидкість, тобто найменшу швидкість, яку необхідно надати тілу, щоб віддалити його від поверхні Землі у нескінченність.

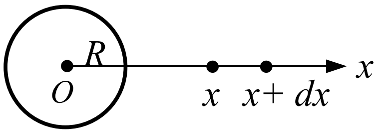


Рис. 3

Розв`язування. З поверхні Землі вертикально запускається ракета. Кінетична енергія $mV^2/2$, яку надає їй двигун, витрачається на подолання сили земного тяжіння, це й є робота віддалення тіла у нескінченність, тобто $A = mV^2/2$. На відстані x від центра Землі на тіло діє сила тяжіння $F = \gamma mM/x^2$, де m – маса тіла; M – маса Землі; γ – гравітаційна стала (рис. 3). Для віддалення апарата від Землі потрібно прикладати до нього таку саму за величиною, але протилежну за напрямком силу. Роботою на елементарному проміжку шляху $[x, x+dx]$ є $dA = F(x)dx = (\gamma mM/x^2)dx$. Повна робота $A = \int\limits_{R}^{\infty} \frac{\gamma\, mM}{x^2}dx = -\frac{\gamma\, mM}{x}\Big|_{R}^{\infty} = \frac{\gamma\, mM}{R}$. Маємо $\frac{\gamma\, mM}{R} = \frac{mV^2}{2}$, таким чином, $V = \sqrt{\frac{2\gamma\, M}{R}}$. На поверхні Землі сила тяжіння $F = \frac{\gamma\, mM}{R^2} = mg$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 – прискорення сили тяжіння. Звідси $\gamma M/R = Rg$, тому $V = \sqrt{2gR}$. Оскільки радіус Землі $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, то $V = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 11{,}2 \cdot 10^3$ м/с.

2^0. ***Інтеграли від необмежених функцій***. Нехай на скінченному проміжку $[a, b]$ функція $f(x)$ у точці $x = c$, $a \le c \le b$, має нескінченний розрив (рис.4). Означення інтеграла (38.3) для такої функції стає некоректним, тому що той чи інший доданок інтегральної суми може втратити зміст, наприклад,

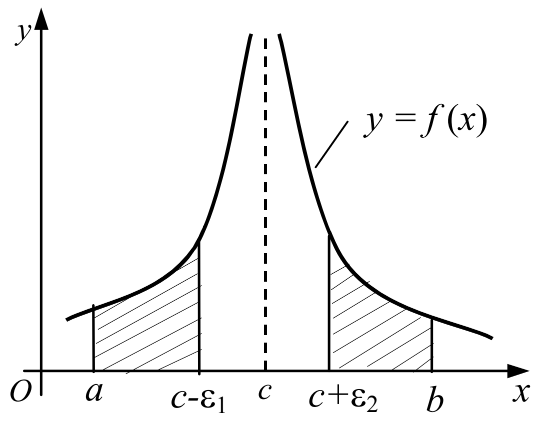


Рис. 4

через те, що знаменник дробу перетвориться на нуль. При цьому втрачає зміст й уся сума. Щоб поширити поняття інтеграла на даний випадок, ізолюємо особливу точку $x = c$ на малому проміжку $[c-\varepsilon_1, c+\varepsilon_2] \subset [a, b]$ та визначимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ по проміжку $[a,b]$ формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{4}$$

Невласний інтеграл, що стоїть зліва, збігається, якщо кожна границя з правої частини рівності (4) існує та скінченна. Інакше кажуть, що невласний інтеграл розбігається. При $f(x) \geq 0$ інтеграли, що записані в (4) справа, виражають заштриховані на рис. 4 площі відповідних криволінійних трапецій. Якщо границі в (4) скінченні, то вони визначають площі нескінченно протяжних фігур, що прилягають до вертикальної асимптоти $x = c$.

Особлива точка $x = c$, зокрема, може збігтися з одним із кінців відрізку $[a, b]$. Права частина (4) при цьому буде містити лише один доданок. Так, при $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{5}$$

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, де $\alpha = const$.

Розв`язування. Аналогічний інтеграл, але з проміжком інтегрування $[1, \infty)$ розглядався у прикладі 1. Підінтегральна функція $y=1/x^\alpha$ при $\alpha > 0$ має на відрізку $[0, 1]$ особливу точку $x = 0$. В цій точці функція y має нескінченний розрив. Таким чином, інтеграл I при $\alpha > 0$ – невласний. Знайдемо його за формулою (5):

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \begin{matrix} x^{1-\alpha}/(1-\alpha) \\ \ln x \end{matrix} \right|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}-\dfrac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\ ln1 - ln\,\varepsilon\end{cases} = \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha<1;\\ \infty & \text{при} \quad \alpha\ge 1.\end{cases}$$

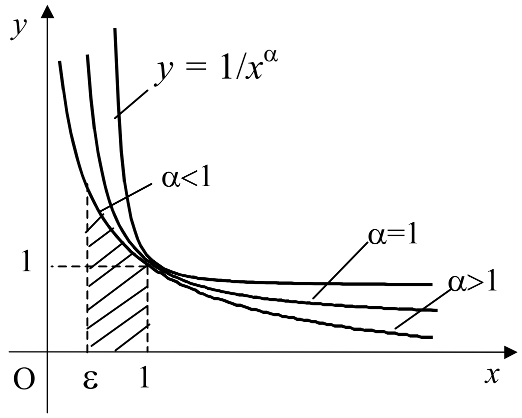


Рис. 5

Отже, інтеграл $I=\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha<1$ та розбігається при $\alpha \ge 1$. Як видно з рис. 5, це пов`язано із швидкістю наближення графіка функції $y=1/x^{\alpha}$ до своєї вертикальної асимптоти $x=0$. Нагадаємо, що збіжність інтеграла $I=\int\limits_1^{\infty} dx/x^{\alpha}$ мала місце при $\alpha>1$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\limits_0^1 ln(1-x)\,dx$.

Розв`язування. Інтеграл – невласний, оскільки при $x=1$ функція $ln(1-x)$ має нескінченний розрив. Згідно з формулою (4), інтегруючи частинами та застосовуючи правило Лопіталя, одержимо

$$I=\int\limits_0^1 ln(1-x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} ln(1-x)dx=\left\{\begin{array}{c|c} u=ln(1-x) & du=-dx/(1-x)\\ dv=dx & v=x-1\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(x-1)ln(1-x)\;\Big|_0^{1-\varepsilon}-\int\limits_0^{1-\varepsilon}dx\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{ln\,\varepsilon}{1/\varepsilon}-1+\varepsilon\right]=-1+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2}=-1.$$

Невласний характер інтеграла від необмеженої функції не завжди можна помітити, ця особливість виявляється лише у результаті аналізу підінтегральної функції. Якщо своєчасно не звернути увагу на розрив функції, легко допустити помилку. Так, застосувавши до інтегралу $I=\int\limits_{-1}^{1} dx/x^2$ формулу Ньютона − Лейбніца, одержимо невідповідність: $I=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2<0$ при додатній підінтегральній функції. Інтеграл I – невласний, у точці $x=0$ функція $y=1/x^2$ має нескінченний розрив. Діючи за правилом (4), знайдемо

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty,$$ тобто інтеграл I розбігається.

3^0. ***Ознаки збіжності невласних інтегралів***. В багатьох випадках сам факт збіжності або розбіжності інтеграла є більш важливим, ніж його точне значення. Про поведінку невласного інтеграла часто можна судити, не обчислюючи його. Для цієї цілі застосовують такі дві теореми.

Теорема 1. Нехай є два інтеграли $I=\int_a^{\infty}f(x)dx$ та $\bar{I}=\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$. Якщо при $x\ge a$ $\varphi(x)\ge f(x)\ge 0$, то $I\le\bar{I}$ та із збіжності $\bar{I}$ випливає збіжність I, навпаки, із розбіжності I випливає розбіжність $\bar{I}$. Це твердження легко зрозуміти, звернувшись до геометричного змісту інтеграла (рис. 6): якщо площа більшої фігури – скінченна величина, то й площа меншої фігури буде скінченною, навпаки – якщо площа меншої фігури нескінченна, то площа більшої фігури тим паче нескінченна.

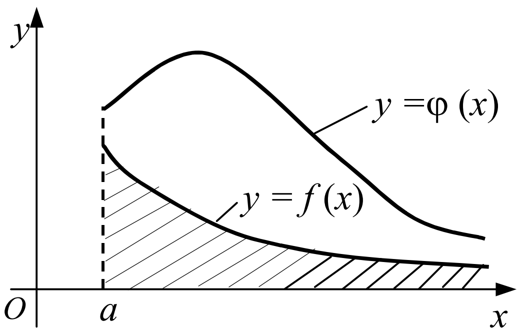


Рис. 6

Доведення. а) Нехай $\bar{I}\ne\infty$, тобто $\bar{I}$ – деяке число більше 0. Тоді згідно з властивостями інтегралів для будь-якого значення $b>a$ справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\varphi(x)dx\le\int_a^{\infty}\varphi(x)dx=\bar{I}.$$

При $b\to\infty$ інтеграл, що стоїть зліва, монотонно зростає та обмежений зверху числом $\bar{I}$. Таким чином, існує скінченний $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=I\le\bar{I}$. Це й означає, що інтеграл I збігається.

б) Нехай $I=\infty$, тобто інтеграл I розбігається. В силу нерівності

$\varphi(x) \geq f(x)$ при $b \to \infty$ маємо $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x)dx \to \infty \;\Rightarrow\; \bar{I} = \infty$, що й означає розбіжність $\bar{I}$.

Теорема 2. Нехай $I = \int\limits_a^\infty f(x)dx$, $I_* = \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$. Якщо інтеграл I_* збігається, то інтеграл I також збігається, причому $|I| \leq I_*$. Збіжність інтеграла I у такому випадку називають абсолютною.

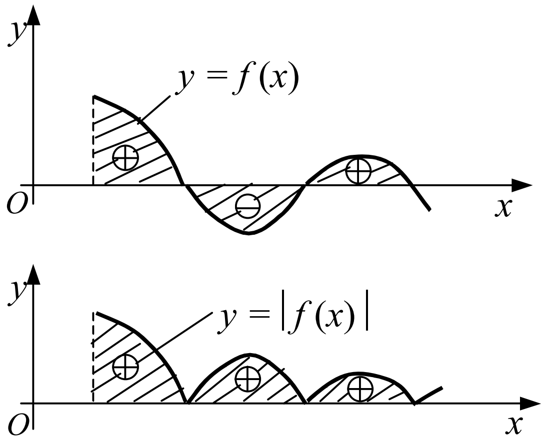


Рис. 7

Зміст теореми полягає в наступному. Припускається, що на проміжку $[a, \infty)$ функція $f(x)$ змінює свій знак. На ділянці, де $f(x) \geq 0$, інтеграл від $f(x)$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції. Ділянкам, на яких $f(x) \leq 0$, відповідають площі криволінійних трапецій, взяті зі знаком мінус. У випадку інтеграла I_* з підінтегральною функцією $|f(x)|$ всі площі, що відповідають тим самим ділянкам, беруться вже зі знаком плюс (рис. 7). При цьому $|I| \leq I_*$ і, якщо $I_* \neq \infty$, то величина I буде також скінченною.

Аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів від необмежених функцій.

Приклад 6. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x}}$.

Розв`язування. Маємо невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею. Обчислити його важко, тому що в даному випадку первісна не виражається через елементарні функції. Однак теорема 1 дозволяє легко зробити висновок про збіжність інтеграла та оцінити його.

Очевидно, при $x \geq 1$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$, причому $\bar{I} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} =$ $= -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$, тобто інтеграл $\bar{I}$ збігається. Отже, інтеграл I теж збігається, його значення $I \leq 1$.

Приклад 7. Оцінити інтеграл $I = \int\limits_1^{\infty} \sqrt{x^2+1}\, dx$.

Розв`язування. Первісну для підінтегральної функції тут неважко знайти. Але робити це недоцільно, простіше скористатися теоремою 1. Легко побачити, що $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = x$, $\bar{I} = \int\limits_1^{\infty} x\, dx = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_1^{\infty} = \infty$, $I \geq \bar{I} = \infty$, таким чином, $I = \infty$, тобто інтеграл I розбігається.

Приклад 8. Дослідити інтеграл $I = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}\, dx$.

Розв`язування. Інтеграл I – невласний. На проміжку інтегрування підінтегральна функція $f(x) = \cos x / x^2$ змінює знак. Безпосередньо до інтегралу I теорему 1 не можна застосувати. Розглянемо інтеграл $I_* = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{|\cos x|}{x^2}\, dx$. Оскільки $|\cos x| / x^2 \geq 0$, то тепер можна скористатися теоремою 1: $0 \leq |\cos x| / x^2 \leq 1/x^2$, $\bar{I} = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2}\, dx = 1$, значить, разом з $\bar{I}$ збігається інтеграл I_* та $I_* \leq \bar{I} = 1$. Згідно з теоремою 2 буде також збігатися інтеграл I, його збіжність абсолютна, причому $|I| \leq I_* \leq 1$.

4⁰. ***Гамма- та бета-функції Ейлера***. Класичний приклад невласного інтеграла – гамма-функція або ейлерів інтеграл 2-го роду

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{6}$$

Інтеграл є невласним через нескінченну верхню межу, а при $s < 1$ ще й тому, що підінтегральна функція у точці $x = 0$ має нескінченний розрив. При будь-якому значенні $s > 0$ інтеграл (6) збігається. Дійсно, $\Gamma(s) = I_0 + I_1$, де $I_0 = \int\limits_0^{1} x^{s-1} e^{-x} dx$, $I_1 = \int\limits_1^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$. На відрізку $[0, 1]$:

$$0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1}, \quad \bar{I}_0 = \int\limits_0^{1} x^{s-1}\, dx = \left. x^s / s \right|_0^1 = 1/s, \quad I_0 \leq \bar{I}_0 = 1/s,$$

отже, інтеграл I_0 збігається. На проміжку $[1, \infty]$ збіжність інтеграла I_1 забезпечується швидким спаданням підінтегральної функції за рахунок множника

e^{-x}. Так, при $0<s\le 1$ маємо $0<x^{s-1}e^{-x}\le e^{-x}$, $\bar{I}_1=\int\limits_1^{\infty} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_1^{\infty}=$ $=e^{-1}$, $I_1\le \bar{I}_1=1/e$, тобто інтеграл I_1 збігається. Із збіжності I_0 та I_1 випливає збіжність інтеграла $\Gamma(s)$ при $0<s\le 1$. Якщо ж $s>1$, то за формулою (38.17) інтеграл (6) зводиться до інтегралу того самого типу із значенням $s\in(0,\,1]$. Справді,

$$\Gamma(s+1)=\int\limits_0^{\infty} x^s e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{c|c} u=x^s & du=sx^{s-1}dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{array}\right\}=\underbrace{-\,x^s e^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{=0}+$$

$$+\,s\int\limits_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s).$$

Тут враховано, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^s/e^x\right)=0$ (невизначеність розкривається за правилом Лопіталя так само, як у прикладі 31.4).

Отже,

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s). \tag{7}$$

Якщо $0<s\le 1$, то $1<s+1\le 2$. Значить, із збіжності інтеграла $\Gamma(s)$ випливає його збіжність для випадку, коли аргумент гамма-функції належить проміжку $(1,\,2]$. Продовжуючи ці міркування, переконаємось у збіжності інтеграла $\Gamma(s)$ при будь-якому $s>0$.

Безпосередньо з означення (6) випливає: $\Gamma(1)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx=1$. При натуральних значеннях $s=n$ послідовне застосування формули (7) веде до рівностей:

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\,\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)=$$
$$=\cdots=n(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1).$$

У випадку натурального числа n використовують позначення (читається: n факторіал)

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n=n! \tag{8}$$

Маємо формулу

$$\Gamma(n+1)=n!,\qquad n\in N. \tag{9}$$

Оскільки $\Gamma(1)=1$, то рівність (9) дозволяє поширити позначення (8) на випадок $n=0$, а саме: $0!=1$.

Формулу (7) можна використовувати для означення гамма-функції при $-1 < s < 0$. Дійсно, якщо $-1 < s < 0$, то $s + 1 > 0$ та $\Gamma(s + 1)$ існує. Тоді на

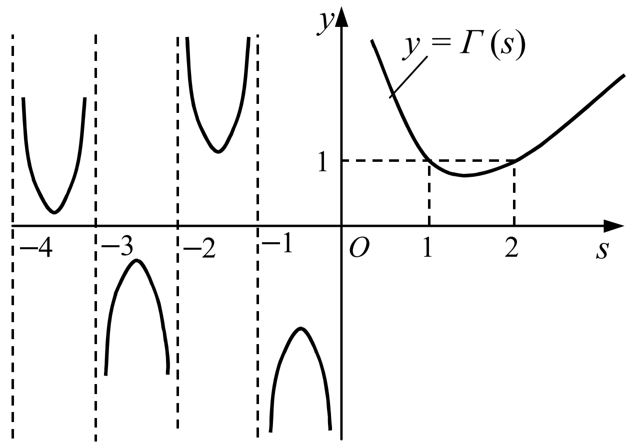


Рис. 8

підставі рівності (7) повинна існувати і величина $\Gamma(s) = \Gamma(s + 1)/s$. Таким чином, функція $\Gamma(s)$ стає визначеною вже при $s \in (-1, 0)$. Так само гамма-функцію можна визначити для проміжку $(-2, -1)$ і т.п. Графік функції $\Gamma(s)$ представлений на рис. 8. Для обчислення значень функції $\Gamma(s)$ при великих s застосовують формулу Стірлінга

$$\Gamma(s+1) = s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}(1+\varepsilon), \tag{10}$$

де $\varepsilon \to 0$ при $s \to \infty$ ($\varepsilon \approx 1/(12\,s)$).

Бета-функція або ейлерів інтеграл 1-го роду визначається формулою

$$B(s,r) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1}dx. \tag{11}$$

При $0 < s < 1,\ 0 < r < 1$ інтеграл (11) є невласним через нескінченні розриви підінтегральної функції на кінцях відрізку $[0,\ 1]$. Можна показати, що при $s > 0,\ r > 0$ інтеграл (11) збігається. Має місце рівність

$$B(s,r) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}.$$

♦ Сучасні означення невласних інтегралів, що подані у формулах (1) – (5), були наведені Коші (1823). Однак інтеграли від необмежених функцій та з нескінченними межами зустрічалися значно раніше. До цих типів належать, зокрема, гамма- та бета-функції, що впроваджені Ейлером вже на самому початку його наукової кар`єри (1729). Нескінченно протяжні криволінійні фігури скінченної площі або об`єму розглядали у середині XVII ст. Ферма та Торричеллі.

Розділ VI

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функціональна залежність між змінними величинами є математичною моделлю, яка застосовується для описання реальних явищ. Однак двох змінних, з яких одна грає роль аргументу, а друга виступає як функція, в багатьох випадках недостатньо. Наприклад, прямокутник із сторонами x та y має площу $S = xy$. Якщо довжина сторін змінюється, то буде змінюватися й величина S, причому вона однозначно визначається тільки при сумісному завданні обох змінних x та y. Електричний струм силою I на опорі R за час t виконує роботу $A = kI^2Rt$, де $k = const$. Якщо I та R – сталі, то A є функцією однієї змінної t: $A = f(t)$. Очевидно, що таке зображення стає неповним, коли величини I та R змінюються. Виникає необхідність розглядати функцію, що залежить від двох або навіть трьох аргументів: $A = f(I, t)$ при $R = const$, $A = f(R, t)$ при $I = const$, $A = f(I, R, t)$, якщо жодну з величин I, R, t не можна вважати сталою. В практичній діяльності зустрічаються складні задачі, в яких кількість незалежних змінних обчислюється сотнями.

До функцій багатьох змінних застосовують ті самі підходи, що й у випадку одного аргументу. Основні поняття, що вироблені для функції однієї змінної, після відповідного узагальнення придатні також для функцій із багатьма аргументами. Як і раніше використовується геометрична термінологія, хоча взаємодія більше трьох змінних веде до втрати геометричної наочності, що пов`язана з реальним тривимірним простором. Як правило, розглядається функція двох незалежних змінних. Отримані для неї результати поширюються на випадок більшої кількості аргументів.

§43. Функція двох та більше змінних

Геометричний метод не слід застосовувати
до всього. Але потрібно пам`ятати про нього;
це своєрідний компас для
розуму та вуздечка для уяви.
Д. Дідро, фр. філософ та публіцист XVIII ст.

1^0. ***Поняття функції***. Якщо кожній упорядкованій парі значень x, y, тобто кожній точці $M(x, y)$ з деякої множини D таких точок на площині xOy, поставлено у відповідність єдине число z, то цю відповідність називають функцією змінних x та y. Записують $z = f(x, y)$ або $z = f(M)$. Це означення узагальнюється на випадок, коли кількість незалежних змінних $n > 2$. Упорядкований набір чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають точкою у n-вимірному арифметичному просторі, самі числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – її координатами. Якщо кожному такому набору, тобто кожній точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з деякої множини D таких точок, поставлено у відповідність єдине число z, то тим самим задана функція n змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $z = f(M)$.

Множина D точок M, в яких визначена функція $z = f(M)$, називають областю визначення цієї функції.

Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ можна зобразити геометрично. Графіком функції z слугує поверхня (або частина поверхні), що має рівняння $z = f(x, y)$. Проекцією графіка функції на площину xOy є область її визначення $D = D(f)$.

Приклад 1. Функція $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ визначена при $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто в крузі D: $x^2 + y^2 \leq a^2$. Межа області D – коло $x^2 + y^2 = a^2$. Графік функції z – це розташована вище площини $z = 0$ півсфера, яка проектується на круг D (рис. 1).

Приклад 2. Для функції $z = ln(x^2 - y)$ областю визначення є множина точок площини xOy, координати яких задовольняють нерівність $x^2 - y > 0$ або $y < x^2$. Рівність $y = x^2$ описує параболу. Точки з ординатами $y < x^2$ розташовані нижче цієї кривої. Область визначення $D = D(f)$ у даному випадку обмежена лише зверху. На рис. 2 область D заштрихована, причому точки, що лежать на самій параболі, не входять в D.

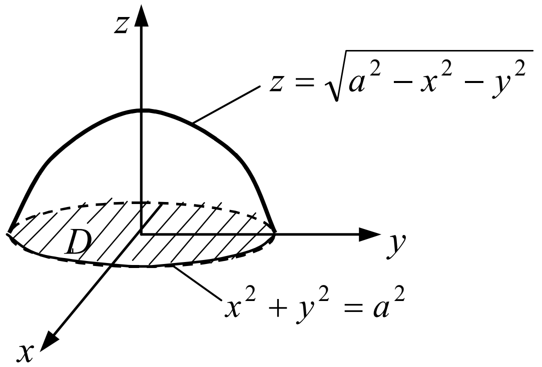


Рис. 1

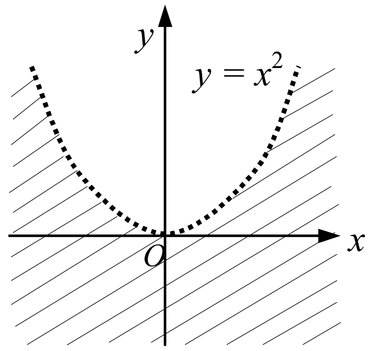


Рис. 2

Функція трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$ геометрично не зображується: кожний набір значень x, y, z, u фіксує точку у чотиривимірному просторі. Однак сама область визначення D функції u є множиною точок з тривимірного простору, таким чином, можливе геометричне зображення D.

2⁰. ***Область змінювання змінних***. Коли кількість змінних $n > 3$, геометрична наочність втрачається. Проте, опираючись на очевидні при $n = 2$ геометричні уявлення, можна виділити характерні особливості такого поняття, як область змінювання змінних, що справедливі при будь-якому n.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – деяка фіксована точка, а $M(x, y)$ – довільна точка площини xOy, $\rho(M; M_0)$ – відстань між точками M та M_0. Множина точок M, розташованих всередині круга радіуса r з центром M_0, називають ***r*-околом** точки M_0. Для усіх таких точок $\rho(M;M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$. У випадку трьох змінних r-окіл точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – це куля радіуса r з центром M_0: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$. В евклідовому просторі n змінних (3^0 § 8) r-околом точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називають абстрактну n-вимірну кулю, тобто множину точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати яких задовольняють нерівність $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)^2<r^2$. Термін «куля» можна також застосовувати, коли кількість незалежних змінних $n<3$; при $n=2$ – це звичайний круг, а при $n=1$ – інтервал з центром в точці M_0. M – **внутрішня** точка області D, якщо існує хоча б малий її окіл, усі точки якого також належать D. Точка M – **межова** для області D, якщо в будь-якому її околі є точки, що як належать, так і не належать D. Сукупність всіх межових точок області утворює її межу. Область D – **відкрита**, якщо усі її точки – внутрішні. **Замкненій** області належать усі внутрішні та усі її межові точки. Область D називають **обмеженою**, якщо існує скінченого радіуса куля, в якій цілком міститься D.

Область D – **зв\`язна**, якщо будь-які дві її точки з\`єднуються неперервною кривою, що повністю належить D. Область D зветься **однозв\`язною**, якщо вона має зв\`язну межу, інакше, якщо будь-яку замкнену криву, що лежить в D, неперервно деформуючи, можна стягнути до точки, не виходячи за межі D. Цього зробити не можна в **багатозв\`язній** області, коли межею є незв\`язна множина точок, наприклад, складається з декількох замкнених кривих, що не перетинаються.

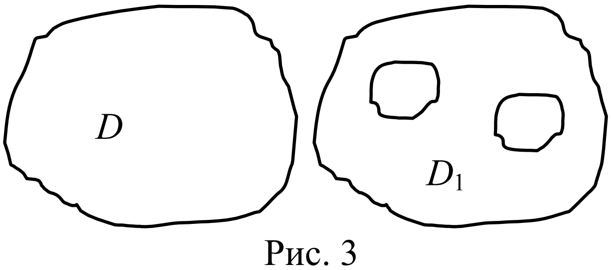


Рис. 3

На рис. 3 D – однозв\`язна область, а $D_1$ – багатозв\`язна.

Нехай $\vec{r}_1=\{x_1;y_1\}$ та $\vec{r}_2=\{x_2;y_2\}$ – радіуси-вектори точок $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$ з області D на площині xOy (рис. 4).Очевидно, що $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ та при $0\le t\le 1$ вектор $\vec{r}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\overrightarrow{OM_1}+t\,\overrightarrow{M_1M_2}$ є радіусом-вектором деякої точки $M(x,\ y)$ відрізку M_1M_2. Коли параметр t приймає значення від

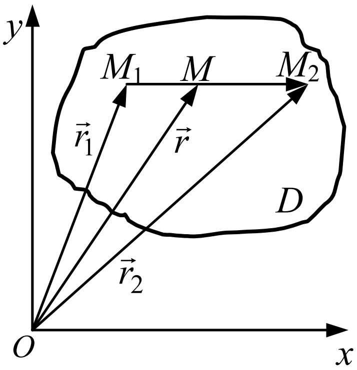


Рис. 4

0 до 1, точка M зміщується вздовж відрізку M_1M_2 з положення M_1 в положення M_2. Для її координат справедливі рівності $x = x_1 + t\cdot(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t\cdot(y_2 - y_1)$.

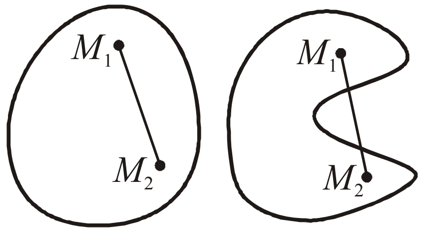


Рис. 5

Якщо для двох довільних точок M_1 та M_2 області D усі точки відрізку M_1M_2 також належать D, то область D називають **опуклою**. На рис. 5 зображені опукла (зліва) та неопукла (справа) області. До опуклих областей належать відрізок, пряма, півплощина, трикутник, піраміда, сфера, куб і т.і.

Поняття опуклості поширюється на множину точок в n-вимірному евклідовому просторі E^n. Множина D точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з E^n **опукла**, якщо при будь-якому $t \in [0, 1]$ для двох довільних точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з D точка $P\ (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ з координатами $z_j = x_j + t(y_j - x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, також належить D.

Раніше при вивченні функції $y = f(x)$ властивість опуклості використовувалася як одна з її характеристик. Для функції опуклої уверх на відрізку $[a, b]$ ордината будь-якої точки її графіка (дуги $\smile{AB}$) не менше ординати відповідної точки хорди $\overline{AB}$, тобто $y(x) \geq y(a) + t\cdot[y(b) - y(a)]$, де $0 \leq t \leq 1$, $x \in [a, b]$ (рис. 6). Аналогічно визначається опукла уверх функція n змінних

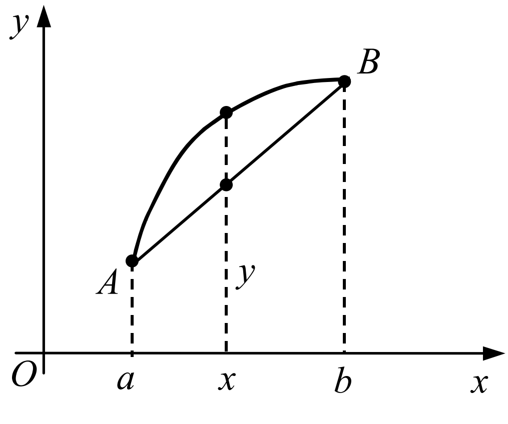


Рис. 6

$$f(P) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

задана на опуклій множині D. Для будь-яких двох точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з множини D значення такої функції у точці $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ при $z_j = x_j + t(y_j - x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [0, 1]$ задовольняє умову

$$f(P) \geq f(M) + t\,[f(N) - f(M)]. \qquad (1)$$

В разі зворотної нерівності функція $f(P)$ на множині D опукла униз. При зміненні в (1) знака $\geq$ на $>$ або на $<$ функцію $f(P)$ визначають як **строго опуклу** уверх або униз відповідно.

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ опукла (уверх або униз) на опуклій множині D тоді і тільки тоді, коли для будь-яких двох точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з D ту саму властивість опуклості має функція однієї змінної λ: $\psi(\lambda) = f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, \ldots, x_n + \lambda y_n)$ [8, с. 527]. Як відомо

(7^0 § 32), для цього достатньо, щоб знак другої похідної $\psi''(\lambda)$ був сталим. Наприклад, якщо $f(x_1,x_2,x_3)= x_1^2+x_2^2+x_3^4-2x_1+4$ і область D визначена нерівностями $x_1 > 0$, то $\psi(\lambda)=(x_1+\lambda y_1)^2 + (x_2+\lambda y_2)^2 + (x_3+\lambda y_3)^4 - 2(x_1 + \lambda y_1) + 4$, $\psi'(\lambda) = 2y_1(x_1+\lambda y_1) + 2y_2(x_2+\lambda y_2) + 4y_3(x_3+\lambda y_3)^3 - 2y_1$, $\psi''(\lambda)= 2y_1^2+2y_2^2+12y_3^2(x_3+\lambda y_3)^2 > 0$. Отже, функція f всюди в області D строго опукла униз.

3^0. ***Приріст функції***. Частинним приростом функції $z=f(x,y)$ за змінною x називають її приріст, що викликаний зміненням тільки цього аргументу:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,y)-f(x,y). \tag{2}$$

Так само

$$\Delta_y z = f(x,y+\Delta y)-f(x,y). \tag{3}$$

Для функції n змінних $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ частинний приріст за аргументом x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, визначається рівністю

$$\Delta_{x_j} z = f\left(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+\Delta x_j,x_{j+1},\ldots,x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right). \tag{4}$$

Повним називають приріст функції z, який вона отримує за рахунок зміни усіх її аргументів:

$$\Delta z = f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{5}$$

інакше

$$\Delta z = f(M)-f(M_0),$$

де $M(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n)$, $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – дві точки з області визначення функції.

Зокрема, для функції $z=f(x,y)$ повний приріст запишеться:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y). \tag{5$'$}$$

У загальному випадку повний приріст функції та сума її частинних приростів не збігаються. Наприклад, якщо $z=xy$, то згідно з (2), (3) та (5′)

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y\Delta x; \qquad \Delta_y z = x(y+\Delta y)-xy = x\Delta y;$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y \ne \Delta_x z + \Delta_y z.$$

4^0. ***Границя та неперервність функції***. Нехай функція $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ або $z=f(M)$ визначена в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, окрім, можливо, самої точки M_0. Число A називають границею функції $z=f(M)$ при наближенні точки M до точки M_0, якщо різниця $f\left(M\right)-A$ за абсолютною величиною стає скільки завгодно малою, як тільки точка M опиняється в достатній близькості від точки M_0, не збігаючись з нею. Це означає, що для усякого числа $\varepsilon>0$ можна підібрати відповідний r-окіл точки M_0 такий, що для усіх точок M з цього околу, окрім, може бути, самої точки M_0, виконується нерівність $\left|f\left(M\right)-A\right|<\varepsilon$. Записують

$$\lim_{M\to M_0} f\left(M\right)=A. \tag{6}$$

Із означення випливає, що границя (6), якщо вона має місце, не залежить від того, яким способом точка M прямує до точки M_0. Протилежне означало б, що при $M\to M_0$ границя функції $f\left(M\right)$ не існує.

Приклад 3. Функція $f\left(M\right)=f\left(x,y\right)=xy$ визначена на всій площині xOy. Нехай т. $M(x, y)$ прямує до т. $M_0(2;\ 1)$ за довільним законом, тобто $x\to 2$, $y\to 1$ або $x=2+\Delta x$, $y=1+\Delta y$, де Δx, $\Delta y\to 0$. При положенні т. M в r-околі т. M_0 $\left|\Delta x\right|<r$, $\left|\Delta y\right|<r$. Покажемо, що границею функції $f\ (M)$ є число $A = 2$. З цією метою розглянемо різницю $f\,(M)-2=(2+\Delta x)(1+\Delta y)-2=\Delta x+2\Delta y+\Delta x\Delta y$. Поставимо вимогу виконання нерівності $\left|f\left(M\right)-2\right|<\varepsilon$ при як завгодно малому числі $\varepsilon>0$. Якщо така нерівність буде справедливою для малого ε, то при великих значеннях ε вона тим паче виконається. Для визначеності покладемо, що $\varepsilon<1$. Маємо $\left|f\left(M\right)-2\right|=\left|\Delta x+2\Delta y+\Delta x\Delta y\right|\le\left|\Delta x\right|+2\left|\Delta y\right|+$ $+\left|\Delta x\right|\cdot\left|\Delta y\right|$. Радіус r-околу достатньо вибрати так: $r = \varepsilon/4$. Тоді $r<1$ та $\left|f\left(M\right)-2\right|\le$ $\le r+2r+r^2<r+2r+r=4r=\varepsilon$. Отже, нерівність $\left|f\left(M\right)-2\right|<\varepsilon$ буде справджуватися для будь-якого скільки завгодно малого числа ε, як тільки т. M окажеться в r-околі т. M_0 при $r=\varepsilon/4$. Але це і означає, що $\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right)=2$.

Приклад 4. Нехай $f\left(M\right)=f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо}\quad x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{якщо}\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ і точка $\overline{M}\left(x,y\right)\to M_0\left(0,0\right)$ вздовж променя $y=kx$, що виходить з точки M_0. Тоді $\lim\limits_{\overline{M}\to M_0} f\left(\overline{M}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$, тобто результат залежить від вибору променя, вздовж якого рухається точка $\overline{M}$. При $k=0$ $f\left(\overline{M}\right)\to 0$, при $k=1$ $f\left(\overline{M}\right)\to 1/2$, при $k=2$ $f\left(\overline{M}\right)\to 2/5$ і т.д. Це означає, що при $M\to M_0$ (без конкретизації способу наближення) функція $f\left(M\right)$ границі не має.

Зберігають силу основні теореми про границі, що наведені в 3^0 § 24.

Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$, то функцію $f(M)$ називають нескінченно малою в точці M_0 (або при $M \to M_0$). Коли ж існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, різниця $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою величиною. Дійсно, $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - A] = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) - A = A - A = 0$. При $f(M) \to A$ можливе подання $f(M) = A + \alpha(M)$, де $\alpha(M) \to 0$.

Для нескінченно малих функцій з декількома незалежними аргументами справедлива класифікація, що наведена в § 26 для функцій однієї змінної. Зокрема, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0$, то α у порівнянні з β є нескінченно малою більш високого порядку: $\alpha = o(\beta)$.

Функцію $z = f(M)$ називають неперервною у точці $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо вона визначена у точці M_0 та деякому її околі й всяким нескінченно малим приростам всіх її аргументів у цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{M \to M_0} \Delta z = \lim_{M \to M_0} \left[f(M) - f(M_0) \right] = 0. \tag{7}$$

Умову неперервності (7) можна записати інакше:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{8}$$

Звідси видно, що при обчисленні границі неперервної функції достатньо замінити її аргументи на їх граничні значення.

Поняття неперервності функції $z = f(M)$ у точці M_0 передбачає виконання таких умов:

1) функція $f(M)$ визначена у точці M_0 та її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) ця границя збігається із значенням функції у точці M_0, тобто виконується рівність (8).

Недотримання хоча б однієї з названих умов означає, що у точці M_0 функція $z = f(M)$ має розрив.

Приклад 5. Функція $z = xy$ неперервна в будь-якій т. $M(x_0, y_0)$ площини xOy, оскільки її повний приріст $\Delta z = y_0\Delta x + x_0\Delta y + \Delta x\Delta y$ (див. 3^0) задовольняє умову (7). Функція $f(x, y)$ з прикладу 4 у т. $M(0; 0)$ має розрив: у цій точці рівність (8) не виконується, тому що не існує $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$. Разом з тим по кожній із змінних x та y окремо функція $f(x, y)$ неперервна всюди.

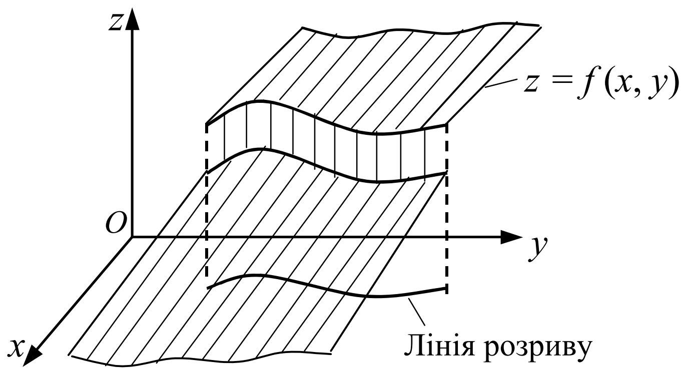


Рис. 7

Функцію $f(M)$ називають **неперервною в деякій області**, якщо вона неперервна у всіх точках цієї області.

У функції декількох змінних крім окремих точок розриву можуть існувати також поверхні або лінії розриву (рис. 7).

§ 44. Диференціювання функції

Легко з дому реальності зайти до лісу математики, але мало хто вміє вертатися назад.
Г. Штейнгауз, польск. математик XX ст.

1⁰. ***Частинні похідні***. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за аргументом x називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx, коли останній наближається до нуля, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Так само

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \tag{2}$$

Із означення (1) випливає, що $\partial z/\partial x$ – це похідна, яка знайдена від функції $z = f(x, y)$ за змінною x у припущенні, що другий аргумент y є сталою величиною. Аналогічний зміст, згідно з формулою (2), має похідна $\partial z/\partial y$.

Частинна похідна функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за аргументом x_j, де $j = 1, 2, \ldots, n$, з урахуванням (43.4) уводиться, як і у випадку двох аргументів:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_{x_j} z}{\Delta x_j}. \qquad (3)$$

Таким чином, при відшукуванні частинної похідної всі аргументи, окрім того, за яким здійснюється диференціювання, фіксуються, функція декількох змінних перетворюється на функцію одного аргументу, зберігають силу встановлені для такої функції правила диференціювання.

Приклад 1. Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = x^2 e^{-xy^3}$.

Розв`язування. При відшукуванні $\frac{\partial z}{\partial x}$ з множником y^3 в показнику степеня слід поводитися як із сталою величиною. Відповідно до правила диференціювання добутку дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) \cdot e^{-xy^3} + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy^3}\right) = 2x e^{-xy^3} + x^2 e^{-xy^3} \frac{\partial}{\partial x}\left(-xy^3\right) =$
$= e^{-xy^3}\left(2x - x^2 y^3\right)$. Визначаючи $\frac{\partial z}{\partial y}$, розглядаємо x як сталу величину:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy^3}\right) = x^2 e^{-xy^3} \frac{\partial}{\partial y}\left(-xy^3\right) = x^2 e^{-xy^3}\left(-3xy^2\right) = -3x^3 y^2 e^{-xy^3}.$$

Приклад 2. $u = y \sin\frac{x}{y} + x^2 z + z^3$; $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = y \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + 2xz + 0 =$

$= y \cdot \frac{1}{y} \cos\frac{x}{y} + 2xz = 2xz + \cos\frac{x}{y}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\frac{x}{y} + y \cos\frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 z + z^3\right) =$

$= \sin\frac{x}{y} + y\left(-\frac{x}{y^2}\right) \cos\frac{x}{y} = \sin\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \cos\frac{x}{y}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 3z^2$.

Зауваження. Позначення $\frac{\partial z}{\partial x}$ є нерозкладним на частини єдиним символом, але не дробом, як це було у випадку похідної для функції однієї змінної. Самостійного значення вирази ∂z та ∂x не мають.

2^0. *Геометричний зміст частинних похідних функції $z = f(x, y)$*. Розглянемо графік функції z – поверхню $z = f(x, y)$, лініями перерізу якої з площинами $y = const$ та $x = const$ слугують гладкі криві (рис. 1). Деякій точці $M(x_0, y_0)$ з області визначення функції $f(x, y)$ відповідає точка $P(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на поверхні. Якщо аргумент y зберігає своє значення y_0, а аргумент x отримує приріст Δx, то точка M зміщується у положення $M_1(x_0 + \Delta x, y_0)$. При цьому точка P переходить в іншу точку поверхні $P_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta_x z)$. Поверхня $z = f(x, y)$ перерізається площиною $y = y_0$ по кривій $z = f(x, y_0)$.

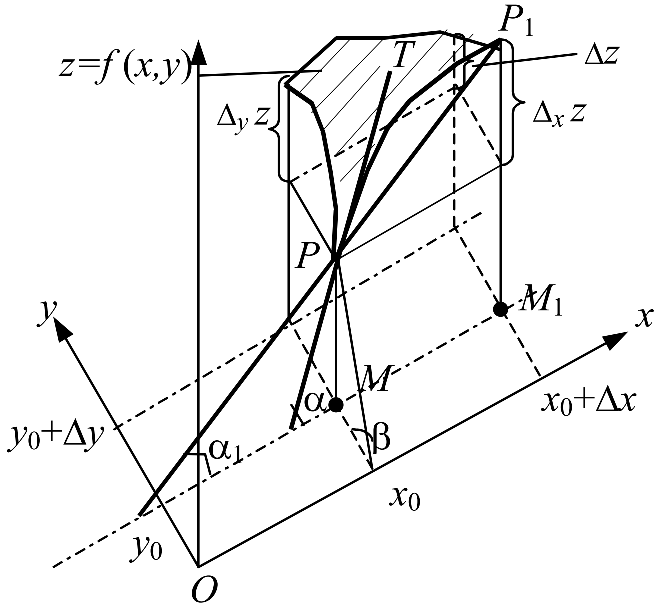


Рис. 1

Пряма PP_1 є її січною. Як видно з рис.1, відношення $\Delta_x z/\Delta x = tg\alpha_1$, де α_1 – кут між прямою MM_1, паралельною до осі Ox, та січною PP_1. При $\Delta x \to 0$ січна PP_1 переходить у дотичну PT, а кут α_1 приймає значення α. В силу означення (1) отримуємо рівність $\partial z/\partial x = tg\alpha$, тобто геометрично похідна $\partial z/\partial x$, що обчислена у точці $M(x_0,\ y_0)$, це тангенс кута між додатним напрямом осі Ox та дотичною до кривої, що утворена перерізом поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = const$. Аналогічний зміст має похідна $\partial z/\partial y$: $\partial z/\partial y = tg\beta$ (рис. 1).

3^0. *Похідні вищих порядків*. Частинні похідні функції багатьох змінних у загальному випадку самі є функціями тих самих змінних. Можливе їх повторне диференціювання. Від функції $z = f(x,\ y)$ можна утворити чотири частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Дві останні похідні відрізняються тільки черговістю диференціювання. При знаходженні $\partial^2 z/\partial y \partial x$ спочатку береться похідна від z за x, тобто визначається похідна $\partial z/\partial x$, а потім від неї знаходиться похідна за змінною y. При відшуканні $\partial^2 z/\partial x \partial y$ черговість диференціювання – обернена. Частинна похідна 2-го або більш високого порядку, яка береться за різними змінними, називається **мішаною** похідною.

Приклад 3. $z = x^3 y^2 + \dfrac{x}{y} + y^4$. Знайти частинні похідні 2-го порядку.

Розв`язування. Дістаємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - \dfrac{x}{y^2} + 4y^3$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 y^2 + \frac{1}{y}\right) = 6xy^2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y - \frac{x}{y^2} + 4y^3\right) = 2x^3 + \frac{2x}{y^3} + 12y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + \frac{1}{y}\right) = 6x^2y - \frac{1}{y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - \frac{x}{y^2} + 4y^3\right) = 6x^2y - \frac{1}{y^2}.$$

Мішані похідні тут збігаються. Це не випадковість, а наслідок властивості неперервності похідних. Для будь-якої внутрішньої точки області D має місце така теорема (доведення в [11, с. 261]): якщо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ неперервні у точці $M(x, y)$, то у цій точці виконується рівність

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічне твердження справедливе для мішаних похідних більш високих порядків, якщо вони відрізняються тільки черговістю диференціювання. Те саме справедливо відносно функцій більшої кількості змінних.

Отже, у припущенні неперервності частинних похідних при повторному диференціюванні його результат від черговості диференціювання не залежить.

Приклад 4. $z = sin\left(x^2 + 3y\right)$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Розв`язування. Маємо похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,cos\left(x^2 + 3y\right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\,cos\left(x^2 + 3y\right);$$

похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\,cos\left(x^2 + 3y\right) - 4x^2\,sin\left(x^2 + 3y\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9\,sin\left(x^2 + 3y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -6x\,sin\left(x^2 + 3y\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -6x\,sin\left(x^2 + 3y\right);$$

похідні 3-го порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -18x\,cos\left(x^2 + 3y\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = -18x\,cos\left(x^2 + 3y\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = -6\,sin\left(x^2 + 3y\right) - 12x^2\,cos\left(x^2 + 3y\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = -6\,sin\left(x^2 + 3y\right) - 12x^2\,cos\left(x^2 + 3y\right).$$

4⁰. ***Формула повного приросту функції***. Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка в деякій області D на площині xOy неперервна разом із своїми похідними $\partial z/\partial x = f'_x(x, y)$ та $\partial z/\partial y = f'_y(x, y)$. Зафіксуємо в області

D точку $M(x, y)$, а потім аргументам x та y надамо прирости Δx та Δy. Функція z при цьому отримає приріст

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Віднімаючи та додаючи величину $f(x, y + \Delta y)$, маємо

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Перша різниця справа є приростом функції однієї змінної x (другий аргумент $y + \Delta y$ залишається незмінним), а друга – приріст функції однієї змінної y (аргумент x присутній як сталий параметр). Застосуємо до цих різниць теорему Лагранжа (31.3). Отримаємо

$$\Delta z = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \bar{y})\Delta y, \tag{4}$$

причому значення $\bar{x}$ знаходиться між x та $x + \Delta x$, а значення $\bar{y}$ – між y та $y + \Delta y$. Якщо $\Delta x, \Delta y \to 0$, то $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$. Тому завдяки неперервності у точці M похідних $f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) \to f'_x(x, y)$, $f'_y(x, \bar{y}) \to f'_y(x, y)$. Згідно з означенням границі (43.6) можна записати

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha; \qquad f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y) + \beta, \tag{5}$$

де доданки α та β прямують до нуля разом з Δx, Δy, а значить – разом з величиною $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (при Δx, $\Delta y \to 0$ буде і $\rho \to 0$, навпаки, з того, що $\rho \to 0 \Rightarrow \Delta x, \Delta y \to 0$). Підстановка виразів (5) в (4) приводить до формули повного приросту

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \tag{6}$$

Суму $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ часто подають у вигляді добутку $\varepsilon\rho$, де $\varepsilon = (\alpha\Delta x + \beta\Delta y)/\rho$. Оскільки $|\Delta x|/\rho \le 1$, $|\Delta y|/\rho \le 1$, то $|\varepsilon| \le |\alpha| + |\beta|$. При $\rho \to 0$ величини Δx, $\Delta y \to 0$, разом з ними $\alpha, \beta \to 0$, значить, і $\varepsilon \to 0$. Рівність (6) приймає еквівалентну форму

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho. \tag{7}$$

Аналогічно встановлюється формула повного приросту для функції n незалежних змінних $z = f(M)$, де $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Delta z = f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(M)\Delta x_n + \varepsilon\rho. \tag{8}$$

Тут $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$ та $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

5^0. ***Властивість диференційовності функції***. У формулах (7) та (8) при $\rho \to 0$ величина $\varepsilon \to 0$ також, тому добуток $\varepsilon\rho = o(\rho)$. Функцію $z = f(M)$ називають **диференційовною у точці** M, якщо її повний приріст Δz у цій точці можна зобразити у формі (8), причому доданок $\varepsilon\rho = o(\rho)$.

Як показано вище стосовно до функції $z = f(x, y)$, для зображення (7), тобто для диференційовності z у точці M, достатньо, щоб у цій точці частинні похідні f'_x та f'_y були неперервні. Так само формулюються достатні умови диференційовності для функції n незалежних змінних.

6^0. ***Диференціювання складних функцій***. Для складної функції з одним аргументом: $y = y(u)$, де $u = u(x)$, похідна відшукується за правилом $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (5^0 § 29). Аналогічні правила, ускладнені великою кількістю аргументів, мають також місце для функцій багатьох змінних.

Нехай $z = f(u,v)$, причому $u = u(x)$, $v = v(x)$, тобто функція z є склдною функцією змінної x: $z = f[u(x), v(x)]$. Припустимо, що всі функції, що розглядаються, диференційовні. При фіксованому значенні x будуть фіксованими також величини u, v, а разом з ними й z. Якщо аргументу x надати приріст Δx, то функції u, v отримають відповідно прирости Δu, Δv. Змінення аргументів приведе до того, що функція двох змінних $z = f(u,v)$ отримає приріст Δz. Згідно з формулою (6)

$$\Delta z = f'_u(u,v)\Delta u + f'_v(u,v)\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v;$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'_u(u,v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + f'_v(u,v)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{9}$$

При $\Delta x \to 0$ прирости Δu, Δv стають зникаюче малими в силу властивості неперервності функцій u, v, яка випливає із зроблених вище припущень. Оскільки $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x)$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x)$, $\frac{\Delta z}{\Delta x} \to z'(x)$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, то перехід до границі в рівності (9) приводить до формули

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{10}$$

Перший доданок справа враховує залежність функції z від змінної x через аргумент u, а другий – через інший аргумент v.

Може виявитися, що аргументом u виступає сама змінна x, тобто $z = f(x,v)$, де $v = v(x)$. Формула (10) у цьому випадку прийме вигляд

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (11)$$

Співвідношення (11) називають **формулою повної похідної**. Як видно з (11), звичайна похідна dz/dx та частинна похідна $\partial z/\partial x$ можуть істотно відрізнятися. Тому відмінність в позначеннях похідних не просто формальність. Повна похідна dz/dx знайдена від z як від функції однієї змінної x, а похідна $\partial z/\partial x$ отримана у припущенні, що друга змінна v, хоча й залежить від x, тимчасово зафіксована.

Нехай тепер, як і вище, $z=f(u,v)$, тоді як аргументи u, v самі є функціями двох змінних: $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. При цьому z виявляється складною функцією аргументів x та y: $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ і можна ставити пи тання про відшукування її частинних похідних $\partial z/\partial x$ та $\partial z/\partial y$. Якщо відшукується $\partial z/\partial x$, то величина y повинна бути зафіксованою. Це приводить до вже розглянутого випадку, коли незалежною змінною виступає тільки x. Тому формула (10) зберігає силу, але звичайні похідні в ній необхідно замінити на частинні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (12)$$

Аналогічно виражається похідна $\partial z/\partial y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (13)$$

У випадку $z=f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, де $u_j=u_j(x_1,\ldots,x_k)$, $j=1, 2, \ldots, n$, формули (12), (13) узагальнюються таким чином:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i},\; i=1, 2, \ldots, k. \qquad (14)$$

Якщо проміжні змінні u_j залежать тільки від одного аргументу x, то частинні похідні від функцій u_j та $\partial z/\partial x_i$ в рівності (14) слід замінити звичайними похідними du_j/dx та dz/dx відповідно. Формула повної похідної (11) при $z=f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, де $y_j=y_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, n$, запишеться у вигляді

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}. \qquad (15)$$

Приклад 5. $z = u^2 v + ue^v$, $u = sin(x + 2y)$, $v = x/y$. Знайти $\partial z/\partial x$ та $\partial z/\partial y$.

Розв`язування. Застосуємо формули (12) та (13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(2uv + e^v\right)cos(x + 2y) + \left(u^2 + ue^v\right)\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \left(2uv + e^v\right)\cdot 2\,cos(x + 2y) + \left(u^2 + ue^v\right)\left(-x/y^2\right).$$

Приклад 6. $z = x^3 + xy^2$, $x = arctg2t$, $y = ln\,t$. Знайти dz/dt.

Розв`язування. Діємо за формулою (10), де відповідним чином змінені позначення змінних:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(3x^2 + y^2\right)\cdot\frac{2}{1 + 4t^2} + 2xy\cdot\frac{1}{t}.$$

Приклад 7. $z = x\,tgy$, де $y = cos^3(5x + 1)$. Знайти повну похідну dz/dx.

Розв`язування. Згідно з формулою (11) отримаємо

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = tgy + x\,sec^2 y\cdot 3cos^2(5x + 1)[-sin(5x + 1)]\cdot 5.$$

7^0. ***Диференціювання неявних функцій***. Розглянемо випадок, коли функціональна залежність $y = f(x)$ визначена неявно за допомогою деякої рівності $F(x, y) = 0$, тобто $F[x, f(x)] \equiv 0$ (6^0 § 29). При цьому похідна $dF/dx \equiv 0$ також. Очевидно, що $F(x, y)$, де $y = f(x)$, – складна функція аргументу x. Припустимо, $F(x, y)$ – диференційовна функція. Її похідна dF/dx відшукується за формулою (11), тому $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \equiv 0$. Таким чином, якщо у точці (x, y) похідна $\partial F/\partial y \neq 0$, то справедлива рівність

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}. \tag{16}$$

Так само, якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$ неявно визначає функцію $z = f(x, y)$, то рівність $F(x, y, z) = 0$ при підстановці $z = f(x, y)$ дає тотожність $F[x, y, f(x, y)] \equiv 0$. За формулою (14), із $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = z$, якщо її застосувати до функції $F(x, y, z)$, де $z = f(x, y)$, дістаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0.$$

Звідси при $\partial F/\partial z \neq 0$ випливає, що

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \tag{17}$$

Приклад 8. Функція y визначена рівнянням $x^2y^5 + e^{xy} - 1 = 0$. Знайти dy/dx.

Розв`язування. Маємо $F(x,y) = x^2y^5 + e^{xy} - 1$, $\partial F/\partial x = 2xy^5 + ye^{xy}$, $\partial F/\partial y = = 5x^2y^4 + xe^{xy}$. Згідно з формулою (16) у точках, де $\partial F/\partial y \neq 0$, похідна $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\dfrac{2xy^5 + ye^{xy}}{5x^2y^4 + xe^{xy}}$.

Приклад 9. Рівняння $xz^2 + cos(xy + z) = 0$ визначає функцію $z = f(x, y)$. Знайти її похідні $\partial z/\partial x$ та $\partial z/\partial y$.

Розв`язування. Тут $F(x,y,z) = xz^2 + cos(xy+z)$. Отримуємо:

$$\partial F/\partial x = z^2 - y\,sin(xy+z),\ \ \partial F/\partial y = -x\,sin(xy+z),\ \ \partial F/\partial z = 2xz - sin(xy+z).$$

За умови $\partial F/\partial z \neq 0$ на підставі (17) запишемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{z^2 - y\,sin(xy+z)}{sin(xy+z) - 2xz}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{x\,sin(xy+z)}{2xz - sin(xy+z)}.$$

Приклад 10. У т. $M(1;\ 1)$ скласти рівняння дотичної до кривої $x^3 + y^3 = 2xy$ (декартів листок).

Розв`язування. Легко перевірити, що т. $M(1;\ 1)$ належить до даної кривої (рис. 2).

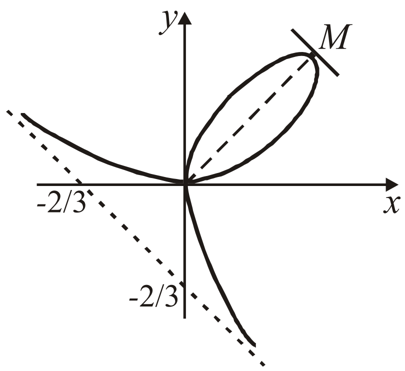


Рис. 2

Згідно з (28.3) рівняння дотичної:

$$Y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Покладемо $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ та за формулою (16) знайдемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}.$$

У т. $M(1;\ 1)$ похідна $f'(1) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_M = -\dfrac{3-2}{3-2} = -1$.

Таким чином, рівняння шуканої дотичної:

$$y - 1 = -(x - 1) \text{ або } x + y - 2 = 0.$$

8^0. ***Повний та частинні диференціали***. Нехай функція $z = f(M)$ диференційовна у точці M, тобто її повний приріст Δz можна подати у формі (8). Тоді, якщо похідні $f'_{x_j}(M)$ не перетворюються одночасно на нуль, сума $\sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(M)\Delta x_j$ утворює головну частину приросту Δz. Цю суму називають повним диференціалом функції z та позначають dz:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{18}$$

Застосувавши формулу (18) до функцій $z = x_1, z = x_2, \dots, z = x_n$, послідовно отримаємо

$$dx_1 = \Delta x_1, \qquad dx_2 = \Delta x_2, \dots, \qquad dx_n = \Delta x_n. \tag{19}$$

Так, якщо $z = x_1$, то $\partial f / \partial x_1 = 1$, $\partial f / \partial x_2 = 0$, … , $\partial f / \partial x_n = 0$ та з рівності (18) випливає $dx_1 = \Delta x_1$. З огляду на (19) повний диференціал функції $z = f(x_1, \dots, x_n)$ зазвичай записують у формі:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \tag{20}$$

Для його існування у даній точці достатньо, щоб в ній існували неперервні частинні похідні $\partial f / \partial x_j$.

Кожний доданок з правої частини (20) називають частинним диферентціалом функції z та позначають $d_{x_j} z$, тобто $d_{x_j} z = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$. Таким чином, повний диференціал функції z є сумою її частинних диференціалів:

$$dz = d_{x_1} z + d_{x_2} z + \dots + d_{x_n} z.$$

Тоді як згідно з (19) диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами, для функції z це у загальному випадку не має місця. ***Диференціал*** ***dz є головною, лінійною відносно величин Δx_j частиною повного приросту Δz***. Різниця $\Delta z - dz = \varepsilon\rho = o(\rho)$ по відношенню до доданків, що складають dz, є малою більш високого порядку. Тому при малих Δx_j справедлива наближена рівність $\Delta z \approx dz$.

Подібно до того, як у випадку функції $y = f(x)$ диференціал $dy = y' dx$ є приростом ординати дотичної до графіка функції (див. 2^0 § 30), так для функції двох змінних $z = f(x, y)$ її диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{21}$$

геометрично є приростом аплікати (тобто змінної z) дотичної площини, що проведена до поверхні $z = f(x, y)$ у точці з координатами x, y, z (рис. 3). Співвідношення $\Delta z \approx dz$ рівносильне припущенню, що в малій області зміни змінних криволінійну поверхню наближено можна замінити відповідною ділянкою дотичної площини.

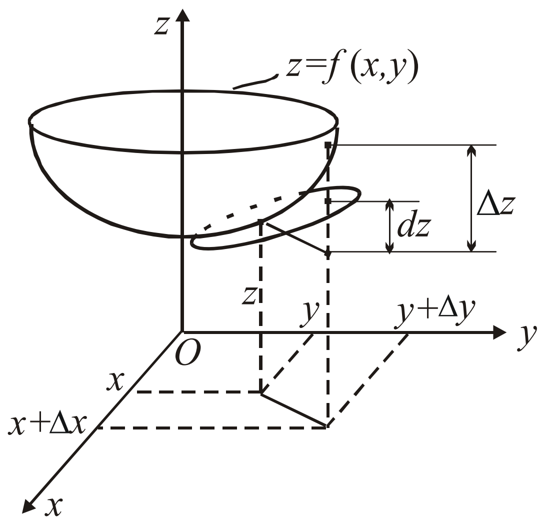


Рис. 3

Приклад 11. Квадратна в основі кімната має розміри: сторона основи $x = 5 \pm 0{,}01$м, висота $h = 4 \pm 0{,}02$ м. Знайти абсолютну та відносну похибку при обчисленні об`єму кімнати.

**Розв`язування**. Запишемо формулу об`єму прямокутного паралелепіпеда: $V = x^2 h$, $V = V(x, h) = V(M)$. Покладемо $x_0 = 5$, $h_0 = 4$, тоді т. $M(x_0, h_0)$ це $M(5; 4)$ і $V_0 = V(M) = x_0^2 h_0 = 100$ (м^3). Неточності вимірювання інтерпретуємо як прирости аргументів функції $V = V(x, h)$: $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta h = 0{,}02$. Максимальна абсолютна похибка при обчисленні об`єму V є повним приростом функції V:

$$\Delta V = (x_0 + \Delta x)^2 (h_0 + \Delta h) - x_0^2 h_0 = 2x_0 h_0 \Delta x + x_0^2 \Delta h + 2x_0 \Delta x \Delta h + h_0 \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta h .$$

Доданки $2x_0 h_0 \Delta x$ та $x_0^2 \Delta h$, лінійні відносно Δx та Δh, які мають порядок сотих часток, складають головну частину ΔV. Разом вони утворюють повний диференціал функції V. Решта доданків порядку стотисячних та мільйонних часток практично ніякої ролі не грають, їх можна відкинути, так що $\Delta V \approx dV$. Щоб знайти dV, розкривати дужки та виділяти лінійну відносно Δx та Δh частину ΔV зовсім не обов`язково, простіше скористатися формулою (21), де z – це V, а роль y грає h:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2xh dx + x^2 dh .$$

Враховуючи, що $dx = \Delta x$, $dh = \Delta h$, у т. $M(x_0, h_0)$ маємо

$$\Delta V \approx dV = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_M \Delta x + \left.\frac{\partial V}{\partial h}\right|_M \Delta h = 2x_0 h_0 \Delta x + x_0^2 \Delta h = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0{,}01 + 5^2 \cdot 0{,}02 = 0{,}9 \text{(м}^3\text{)}.$$

Отже, неточності у розмірах кімнати на 1 – 2 см призводять до помилки в її об`ємі майже на 1 м$^3$. Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки до всього об`єму V. Виразимо її в процентах:

$$\frac{\Delta V}{V} \cdot 100\% \approx \frac{dV}{V} \cdot 100\% = \frac{2x_0 h_0 \Delta x + x_0^2 \Delta h}{x_0^2 h_0} \cdot 100\% = \left(\frac{2\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta h}{h_0} \right) \cdot 100\% = 0{,}9\% .$$

Звідси, зокрема, видно, що відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.

Приклад 12. Обчислити наближено величину $A = \sqrt[3]{7{,}92} \cdot sin 1{,}5$.

Розв`язування. Розглянемо функцію $z = f(x, y) = \sqrt[3]{x} \cdot sin\, y$. Число $A = f(x, y)$, де $x = 7{,}92$; $y = 1{,}5$. Візьмемо близькі значення аргументів, що дозволяють точно обчислити значення z. Нехай $x_0 = 8$, $y_0 = \pi/2 = 1{,}571$, тоді у т. $M(x_0, y_0)$ $z_0 = f(M) =$

$= \sqrt[3]{8} \cdot sin\,\pi/2 = 2$. Покладемо $\Delta x = x - x_0 = 7{,}92 - 8 = -0{,}08$, $\Delta y = y - y_0 = 1{,}5 - 1{,}571 = -0{,}071$. Змінення аргументів приводить до змінення значення функції: $\Delta z = z - z_0$, інакше $z = z_0 + \Delta z$. Оскільки прирости аргументів малі, то помилка буде невеликою, якщо повний приріст функції Δz замінити на її диференціал dz, тому

$$A = f(x,y) = z_0 + \Delta z \approx z_0 + dz = f(M) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M \cdot \Delta y = f(M) +$$

$$+ \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} sin\, y_0 \cdot \Delta x + \sqrt[3]{x_0}\, cos\, y_0 \cdot \Delta y = 2 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (-0{,}08) + 2 \cdot 0 \cdot (-0{,}071) \approx 1{,}993.$$

Зауваження. Для складної функції $z = f(u,v)$, де $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$, її повний диференціал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ з урахуванням формул (12), (13) та (20) приймає вигляд

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Отриманий вираз збігається з вихідним за формою. Як і у випадку функції однієї змінної (4^0 § 30), для функції $z = f(u,v)$ має місце властивість інваріантності форми її першого диференціала: остання не залежить від того, які аргументи беруть участь в його формуванні – незалежні змінні x, y або їх функції $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Це твердження справедливе для функцій з будь-якою кількістю аргументів [11, с. 254].

Незалежно від кількості аргументів для функції багатьох змінних зберігають силу відомі правила диференціювання:

$$d(u+v) = du + dv, \qquad d(uv) = udv + vdu, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

9^0. ***Диференціали вищих порядків***. Якщо для функції $z = f(x,y)$, де x, y – незалежні змінні, існують неперервні частинні похідні $\partial z/\partial x$ та $\partial z/\partial y$, то існує також її диференціал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Останній сам є функцією змінних x, y, від нього в свою чергу можна утворювати диференціал $d(dz) = d^2 z$, який називають диференціалом 2-го порядку. Прирости

$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ від аргументів x, y не залежать, тобто вони виступають як сталі величини. Тому, діючи за правилом (21), знаходимо

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy.$$

Отже,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2. \tag{22}$$

Для існування диференціала $d^2 z$ достатньо неперервності других похідних від функції z, які беруть участь в його формуванні.

Подібним чином визначаються диференціали 3-го та більш високих порядків: $d^k z = d\left(d^{k-1}z\right)$.

Праву частину рівності (22) зручно записувати у символічній формі

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z. \tag{23}$$

Вираз у дужках справа розглядається як многочлен, який формально слід піднести до степеня, а потім під знак ∂^2 помістити z.

Аналогічно зображуються диференціали довільного порядку k:

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z. \tag{24}$$

У випадку функції n незалежних змінних $z = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ її диференціал порядку k визначається рівністю

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k z. \tag{24$'$}$$

10^0. ***Відшукування функції за її повним диференціалом***. Припустимо, що для функції $u = u(x, y)$, де x, y – незалежні змінні, в певній області D існує її повний диференціал $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$. Задамося питанням: в якому випадку вираз вигляду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ з відомими функціями P та Q, неперервними разом з їх частинними похідними 1-го порядку, є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$. Виявляється, для такого зображення необхідно та достатньо, щоб в області D функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ задовольняли тотожність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25}$$

Дійсно, нехай $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ при будь-яких значеннях dx, dy. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ і в силу рівності мішаних похідних звідси випливає (25). Переконаємося далі в достатності умови (25), а саме: покажемо, що опираючись на тотожність (25), можна побудувати функцію $u(x, y)$, що приводить до виразу

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du. \tag{26}$$

Покладемо $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Помножимо цю рівність на dx та проінтегруємо за x, вважаючи y сталою величиною, тобто проведемо операцію, обернену до $\partial/\partial x$. Дістанемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y), \tag{27}$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яка грає роль сталої інтегрування. При частинному диференціюванні за x усякий доданок, що залежить тільки від y, безслідно зникає. Тому відновити функцію $u(x, y)$ за похідною $\partial u/\partial x$ можна лише з точністю до сталого по відношенню до x доданку вигляду $\varphi(y)$. Співвідношення (27) забезпечує виконання рівності $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Висунемо тепер вимогу, щоб $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Цю рівність використаємо для відшукування функції $\varphi(y)$. На підставі (27) маємо

$$Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + \varphi'(y),$$

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx. \tag{28}$$

Функція $\varphi(y)$ визначається звідси тільки у тому випадку, якщо права частина (28) не залежить від x. За умови (25) це дійсно має місце, тому що

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

Похідна за x виявилась тотожнім нулем, отже, права частина (28) не містить x та є функцією тільки y. Це дозволяє інтегруванням рівності (28) за y знайти функцію $\varphi(y)$. Разом з тим за формулою (27) відшукається й функція $u(x,y)$, яка забезпечує зображення (26).

Приклад 13. Задано диференціальний вираз

$$\left(5x^4y^2+cos\,y\right)dx+\ +\left(2x^5y-x\,sin\,y+3y^2\right)dy.$$

Довести, що він є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$. Знайти функцію u.

Розв`язування. Маємо $P(x,y)=5x^4y^2+cos\,y$, $Q(x,y)=2x^5y-x\,sin\,y+3y^2$, $\partial P/\partial y=10x^4y-sin\,y$, $\partial Q/\partial x=10x^4y-sin\,y$, $\partial P/\partial y\equiv\partial Q/\partial x$, окрім того, функції P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ неперервні при будь-яких значеннях x та y. Таким чином, існує функція $u=u(x,y)$ така, що виконується рівність (26). Згідно з (26) запишемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=5x^4y^2+cos\,y \quad (\alpha); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2x^5y-x\,sin\,y+3y^2 \quad (\beta).$$

Проінтегруємо рівність (α) за x при фіксованому y:

$$u=\int\left(5x^4y^2+cos\,y\right)dx+\varphi(y)=x^5y^2+x\,cos\,y+\varphi(y).$$

Останній вираз продиференцюємо за y та порівняємо з (β):

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^5y-x\,sin\,y+\varphi'(y)=2x^5y-x\,sin\,y+3y^2 \Rightarrow \varphi'(y)=3y^2,\ \varphi(y)=\int 3y^2dy=$$

$=y^3+C$. Отже, $u=x^5y^2+x\,cos\,y+y^3+C$, де $C-$ довільна стала.

Зауваження. Нехай функції трьох незалежних змінних $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними 1-го порядку. Тоді для того, щоб вираз

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

був повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y,z)$, необхідно та достатньо виконання таких тотожностей:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{29}$$

Відшукати функцію u можна за тою самою схемою, що і у випадку двох незалежних змінних.

Приклад 14. Знайти функцію $u(x, y, z)$, якщо

$$du = y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + \ + \left(3xy^2 z^2 + 2\right) dz .$$

Розв`язування. Переконаємося в тому, що записаний вираз є повним диференціалом. Тут $P = y^2 z^3$, $Q = 2xyz^3$, $R = 3xy^2 z^2 + 2$, $\partial P/\partial y = 2yz^3$, $\partial Q/\partial x = 2yz^3$, $\partial Q/\partial z = 6xyz^2$, $\partial R/\partial y = 6xyz^2$, $\partial R/\partial x = 3y^2 z^2$, $\partial P/\partial z = 3y^2 z^2$. Умови (29) та вимога неперервності похідних дотримані, таким чином, $Pdx + Qdy + Rdz = = du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy + \dfrac{\partial u}{\partial z} dz$. Маємо рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = y^2 z^3 \ (\alpha); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q = 2xyz^3 \ (\beta); \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R = 3xy^2 z^2 + 2 \quad (\gamma).$$

Відновимо функцію $u(x, y, z)$ за її частинними похідними. Проінтегрувавши рівність (α) за x (при фіксованих y та z), отримаємо $u = \int y^2 z^3 dx + \varphi(y, z) = y^2 z^3 x + \varphi(y, z)$, де $\varphi(y, z)$ грає роль сталої інтегрування. Продиференцюємо за y знайдений для u вираз та порівняємо з (β): $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2yz^3 x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz^3 x \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0$, значить, φ не залежить від y, тобто $\varphi(y, z) = \psi(z)$; $u = xy^2 z^3 + \psi(z)$. Продиференцюємо отримане за z та порівняємо з (γ): $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2 + \psi'(z) = 3xy^2 z^2 + 2 \ \Rightarrow \ \psi'(z) = 2$, $\psi = 2z + C$. Остаточно маємо $u = xy^2 z^3 + 2z + C$.

♦ Основоположники математичного аналізу істотних відмінностей для випадків однієї та декількох незалежних змінних не робили. Поряд із звичайними частинні похідні зустрічаються вже у трудах Ньютона, Лейбніца, братів Бернуллі. Ейлер та Клеро практично одночасно прийшли до поняття повного диференціала функції двох та трьох змінних. Вони встановили умови (25) та (29), що забезпечують зведення лінійної диференціальної форми до повного диференціалу, обгрунтували рівність мішаних похідних, які різняться черговістю диференціювання. Точне доведення останнього факту дав у 1873 р. (через більш ніж 130 років!) К. Шварц (нім. математик, 1843 – 1921). У книзі «Диференціальне числення» (видана Петербурзькою академією наук, 1755) Ейлер систематизував правила знаходження частинних похідних, в тому числі і від складних функцій. Однак сучасна символіка, пов`язана з частинним диференціюванням, з`явилася набагато пізніше. Позначення $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ вперше (1786) застосував А. Лежандр (фр. математик, 1752 – 1833), символи f'_x, f'_y належать Лагранжу (1797), а $\partial^2 z/\partial x^2, \partial^2 z/\partial x \partial y$ увійшли до використання завдяки К. Якобі (1837).

§ 45. Скалярне поле

Всесвіт математики зростає з навколишнього світу так само, як мрії зростають з повсякденних подій.
Ш. Стайн, амер. математик, XX ст.

1^0. ***Поверхні та лінії рівня***. Якщо в кожній точці M простору (або його частини) визначена деяка скалярна величина u, котра у загальному випадку залежить від положення точки, то говорять, що задане скалярне поле $u = u(M)$ або $u = u(x, y, z)$, або $u = u(\vec{r})$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор точки $M(x, y, z)$. Поле називають плоским, якщо в його визначенні беруть участь тільки дві незалежні змінні, наприклад, $u = u(x, y)$. Прикладами скалярних полів слугують поле температур у нерівномірно нагрітому твердому тілі, поле тиску в рідині або газі, щільність розподілу електричних зарядів у наелектризованому тілі і т.і.

Будемо розглядати поля з неперервними функцією u та її частинними похідними 1-го порядку.

Множина точок, в яких скаляр u приймає стале значення, утворює **поверхню рівня**, тобто це поверхня, що визначена рівнянням

$$u(x, y, z) = C \quad (C = const). \tag{1}$$

Різним значенням C відповідають різні поверхні, тобто рівність (1) являє собою цілу сім`ю поверхонь рівня.

У випадку плоского поля рівняння $u(x, y) = C$ задають сім`ю **ліній рівня** поля. Картина поверхонь або ліній рівня дозволяє судити про структуру поля, про напрямки, в яких поле змінюється більш швидко або повільніше (рис. 1).

2^0. ***Похідна за напрямом***. У заданому полі $u = u(M)$ розглянемо дві близькі точки $M(x_0, y_0, z_0)$ та $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а також вектор $\vec{l}$, що збігається

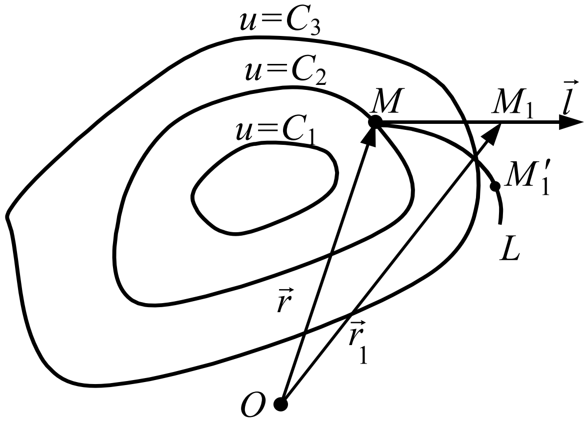


Рис. 1

за напрямом з вектором $\overrightarrow{MM_1}$. Нехай $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$, $\Delta z = z_1 - z_0$,

$$\rho = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} -$$

довжина вектора $\overrightarrow{MM_1}$. Оскільки Δx, Δy, Δz – координатні проекції вектора

$\overrightarrow{MM_1}$, то $\Delta x = \rho\, cos\,\alpha$, $\Delta y = \rho\, cos\,\beta$, $\Delta z = \rho\, cos\,\gamma$. Коли точка M_1 рухається вздовж променя з напрямом $\vec{l}$ змінення координат точки викликані зміненням однієї тільки величини ρ. Разом із нею змінює свої значення і функція u. Швидкість, з якою змінюється поле u у напрямку вектора $\vec{l}$, характеризують за допомогою похідної за напрямом. Її позначають символом $\partial u/\partial l$ і визначають так:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}. \tag{2}$$

Повний приріст диференційовної функції $u = u(x, y, z)$, згідно з формулою (44.8), має вигляд

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon\rho,$$

де $\varepsilon \to 0$ разом із величиною ρ.

Розділимо останню рівність почленно на ρ та перейдемо до границі при $\rho \to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho} + \varepsilon\right).$$

Оскільки $\Delta x/\rho = cos\,\alpha$, $\Delta y/\rho = cos\,\beta$, $\Delta z/\rho = cos\,\gamma$ та $\varepsilon \to 0$, то звідси згідно з (2) дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\,\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\,\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\,\gamma. \tag{3}$$

Отже, якщо функція $u(x, y, z)$ диференційовна (для цього достатньо, щоб існували неперервні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$), то буде справедливою й формула (3), завдяки якій відшукується похідна від функції u за довільним напрямом $\vec{l}$. Якщо вектор $\vec{l}$ має напрям координатної осі, похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ збігається з частинною похідною за відповідною змінною. Так, якщо вектор $\vec{l}$ направлений вздовж осі Ox, то $\alpha = 0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 90^0$, $cos\,\alpha = 1$, $cos\,\beta = 0$, $cos\,\gamma = 0$ та згідно з (3) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Зауваження. Нехай через точку M (рис. 1) проходить крива L так, що вектор $\vec{l}$ направлений вздовж дотичної до неї в цій точці, та M_1' – точка кривої L, близька до точки M. Позначимо довжину дуги $\overset{\smile}{MM_1'}$ через s. Скалярне поле u у точках кривої L є складною функцією s: $u(x, y, z)= u[x(s), y(s), z(s)]$. На підставі формули (44.14) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \tag{4}$$

Геометрично диференціал ds при відліку s від точки M до точки M_1' є довжиною відрізку дотичної до кривої L з його проекціями на вісі координат, що дорівнюють dx, dy, dz. Для плоскої кривої це було показано в 1^0 § 33, але справедливе також і у просторовому випадку. Тому

$$\frac{dx}{ds}=cos\left(\vec{l},x\right)=cos\,\alpha,\ \ \frac{dy}{ds}=cos\left(\vec{l},y\right)=cos\,\beta,\ \ \frac{dz}{ds}=cos\left(\vec{l},z\right)=cos\,\gamma,$$

що приводить до збігу правих частин формул (3) та (4). Таким чином, для будь-якої кривої L з дотичним вектором $\vec{l}$ у т. M справедлива рівність

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial s}. \tag{5}$$

Останнє означає, що в означенні похідної за напрямом $\vec{l}$ точку M_1 можна брати не на промені з напрямом $\vec{l}$, а на довільній кривій L, що проходить через точку M з дотичним вектором $\vec{l}$ у цій точці.

3^0. *Градієнт*. Так називають вектор, який визначається за формулою

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{6}$$

Нехай $\vec{l}^{\,0}$ – одиничний вектор у напрямку вектора $\vec{l}$. Тоді згідно з (7.10)

$$\vec{l}^{\,0}=\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\vec{i}\,cos\,\alpha+\vec{j}\,cos\,\beta+\vec{k}\,cos\,\gamma$$

та з огляду на (3) скалярний добуток

$$grad\,u\cdot\vec{l}^{\,0}=\frac{\partial u}{\partial x}cos\,\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}cos\,\beta+\frac{\partial u}{\partial z}cos\,\gamma=\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Таким чином, **похідна за напрямом дорівнює скалярному добутку вектора $\boldsymbol{grad\,u}$ на одиничний вектор $\vec{l}^{\,0}$, що задає напрямок**:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=grad\,u\cdot\vec{l}^{\,0}=np_{\vec{l}}\left(grad\,u\right). \tag{7}$$

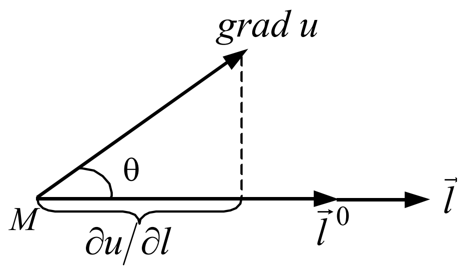


Рис. 2

Припускаючи, що в даній точці M $grad\,u \neq 0$, позначимо кут між векторами $grad\,u$ та $\vec{l}$ через θ (рис. 2). Тоді згідно з (7)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\,u||\vec{l}^{\,0}|\cos\theta = |grad\,u|\cos\theta .$$

Вектор $grad\,u$ від вибору $\vec{l}$ не залежить. Повертаючи вектор $\vec{l}$, можна змінювати кут θ, а разом з ним – й величину $\partial u/\partial l$. Очевидно, що значення $\partial u/\partial l$ у точці M стане найбільшим і дорівнюватиме $|grad\,u|$, якщо $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$, тобто коли вектори $\vec{l}$ та $grad\,u$ мають однаковий напрямок. Оскільки у цьому випадку $\partial u/\partial l = |grad\,u| > 0$, то поле у напрямку $\vec{l}$ зростає. Отже, в кожній точці поля **$grad\,u$ – вектор, що має напрямок найскорішого збільшення функції u. Його модуль дорівнює похідній від скалярного поля u у цьому напрямку.**

Вектор $grad\,u$ в будь-якій т. M поля направлений по нормалі до поверхні рівня (або лінії рівня), що проходить через т. M (рис. 3). Дійсно, нехай L – довільна крива, що лежить на поверхні $u(x, y, z) = const$, і $\vec{\tau}$ – дотичний вектор до кривої у т. M. Оскільки на поверхні рівня функція u зберігає стале значення, то згідно з (5) $\partial u/\partial\tau = 0$. З формули (7) при цьому випливає $grad\,u \cdot \vec{\tau}^{\,0} = \partial u/\partial\tau = 0$, значить, $grad\,u \perp \vec{\tau}^{\,0}$. Це справедливо для всіляких

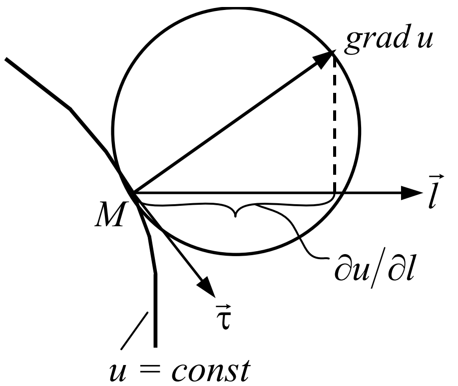


Рис. 3

дотичних векторів $\vec{\tau}$ у т. M. Вектор $grad\,u$ не залежить від вибору $\vec{\tau}$, тому всі вектори $\vec{\tau}$ лежать в одній площині, яку називають дотичною площиною до поверхні $u = const$ у т. M. Вектор $grad\,u$ слугує нормальним вектором такої площини або, що те саме, направлений по нормалі до поверхні $u = const$ у т. M. На рис.3 для наочності вектор $grad\,u$ зображений у вигляді діаметру сфери, яка в т. M дотикається до поверхні $u = const$. Згідно з (7) хорда, котра відсікається цією сферою від довільного променя з початком M і напрямом $\vec{l}$, має довжину, що дорівнює $\partial u/\partial l$.

Приклад 1. $u = 1/r$, де $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина радіуса-вектора точки $M(x, y, z)$. Знайти $grad\,u$.

Розв`язування. $grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$

$= -\frac{x}{r^3}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$; $grad\,u = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k} = -\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r^3}$,

тобто $grad\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Приклад 2. $u = x^3y + ye^{4z}$. У т. $M(-1;\,2;\,0)$ знайти напрямок та швидкість найскорішого зростання поля u, а також похідну поля за напрямом від точки M до точки $M_1(-1;\,6;\,-3)$.

Розв`язування. Зайдемо частинні похідні від u та обчислимо їх у т. M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + e^{4z};\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4ye^{4z};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 6;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 8.$$

Вектором, який визначає напрям найскорішого зростання поля у т. M, є $grad\,u\big|_M = 6\vec{i} + 8\vec{k}$. Його модуль $\left|grad\,u\right|\big|_M = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ є найбільшою швидкістю зростання поля у даній точці.

Утворимо тепер вектор $\vec{l} = \overrightarrow{MM_1} = (-1+1)\vec{i} + (6-2)\vec{j} + (-3-0)\vec{k} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, а потім одиничний вектор $\vec{l}^{\,0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{4\vec{j}-3\vec{k}}{5} = \frac{4}{5}\vec{j} - \frac{3}{5}\vec{k}$. Згідно з формулою (7) маємо

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = (grad\,u)_M\cdot\vec{l}^{\,0} = 6\cdot 0 + 0\cdot\frac{4}{5} + 8\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -4{,}8$. Це означає, що у напрямку вектора $\vec{l}$ поле u спадає зі швидкістю 4,8.

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 + y^2 = z$ у т. $M(1;\,1;\,2)$.

Розв`язування. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $x^2 + y^2 - z = 0$. Цю рівність можна розглядати як рівняння поверхні рівня $u = 0$ для функції $u(x,\,y,\,z) = x^2 + y^2 - z$. Вектор $\vec{N} = grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$ направлений у будь-якій точці поверхні рівня по нормалі до неї. У т. M вектор $\vec{N} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Дотична площина, що проходить через точку M, з нормальним вектором $\vec{N}$ має рівняння $2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$ або $2x + 2y - z - 2 = 0$. Перпендикуляр до цієї площини, що проходить через т. M, визначається рівняннями $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

§ 46. Екстремуми

Краще зовсім не думати про пошук будь-яких істин, ніж робити це без жодного метода. Під методом я розумію точні та прості правила, точне дотримання яких завжди перешкоджає прийняттю помилкового за істинне.
Р. Декарт, фр. вчений XVII ст.

1⁰. ***Означення екстремуму***. Неперервна функція $f(x, y)$ досягає у точці $M_0\,(x_0, y_0)$ максимуму, якщо для усіх точок $M(x, y)$ з деякого околу точки M_0 виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$. При зворотній нерівності функція z у точці M_0 має мінімум (рис. 1).

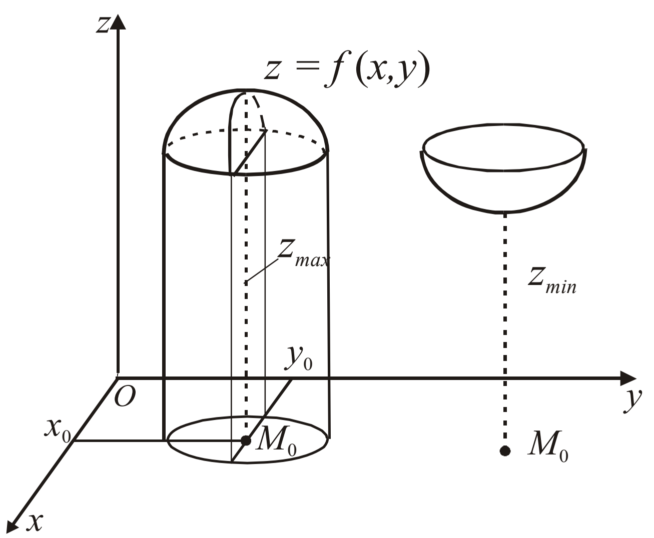


Рис. 1

Аналогічно впроваджується поняття локального екстремуму, тобто максимуму або мінімуму у випадку функції n незалежних змінних.

2⁰. ***Необхідні умови екстремуму***. Нехай диференційовна функція $z = f(x,y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має екстремум. Тоді, поклавши $y = y_0$, дістанемо функцію однієї змінної $f(x, y_0)$, котра досягає екстремуму при $x = x_0$. Як відомо (див. 3^0 § 32), у цьому випадку похідна df/dx у точці x_0 перетворюється на нуль: $df(x, y_0)/dx\big|_{x=x_0} = 0$. Оскільки при частинному диференціюванні за x решта змінних фіксуються, то останню рівність можна записати інакше: $\left.\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0$. Аналогічний висновок можна зробити по відношенню до похідної $\partial f/\partial y$. Отже, **необхідні умови екстремуму** для диференційовної функції $z = f(x, y)$ мають вигляд

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0. \tag{1}$$

Точку M_0, в якій виконуються умови (1), називають **стаціонарною**. Подібним чином встановлюються необхідні умови екстремуму для диференційовної функції n незалежних змінних $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Ці умови полягають у виконанні таких n рівностей:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0}=0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{M_0}=0,\ \ldots,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{M_0}=0. \qquad (1')$$

Окрім стаціонарних, точками екстремуму можуть бути й такі точки, де функція f недиференційовна. Наприклад, функція $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (геометрично це конус з вершиною на початку координат) у точці $O(0;\,0)$ має мінімум, але її частинні похідні у точці O не існують. Разом зі стаціонарними такі точки називають **критичними**. З їх пошуку і починається дослідження функції на екстремум.

3⁰. ***Достатні умови екстремуму***. Наявність критичної точки M_0 ще не означає, що в ній функція $z=f(M)$ має екстремум. За означенням (див. 1^0) максимум у т. M_0 досягається, якщо для усіх точок M з малого околу точки M_0 виконується нерівність $f(M)<f(M_0)$, інакше, якщо $\Delta z=f(M)-f(M_0)<0$. Так само у випадку мінімуму в околі т. M_0, де має місце мінімум, приріст функції $\Delta z>0$. Існування екстремуму пов`язане із збереженням сталого знаку величини Δz в околі точки екстремуму. Згідно з формулою (44.8) для стаціонарної точки в силу умов (1′) виконується рівність

$$\Delta z=dz+\varepsilon\rho=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0}\cdot\Delta x_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{M_0}\cdot\Delta x_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{M_0}\cdot\Delta x_n+\varepsilon\rho=\varepsilon\rho.$$

Знак Δz визначається знаком добутку $\varepsilon\rho$, який у порівнянні з величиною ρ (а значить також з Δx та Δy) має порядок малості вище першого, тобто $\varepsilon\rho=o(\rho)$. Аналіз виразу $\varepsilon\rho=\Delta z-dz$ із застосуванням теореми Лагранжа показує таке. Якщо у точці M_0 та в її околі всі частинні похідні другого порядку від функції $z=f(M)$ неперервні, то $\varepsilon\rho=d^2f(M_0)+\varepsilon_1$, де $\varepsilon_1=o(\rho^2)$, а $d^2f(M_0)$ є повним диференціалом другого порядку (44.24′), що обчислений у точці M_0:

$$d^2f(M_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2 f\Bigg|_{M_0}. \qquad (2)$$

У порівнянні з $d^2f(M_0)$ доданок ε_1 має більш високий порядок малості, тому при $d^2f(M_0)\neq 0$ знак величини $\varepsilon\rho$, а значить й знак Δz, визначається знаком диференціала (2).

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо

$$d^2 f(M_0) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} \cdot (\Delta x)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} \cdot \Delta x \Delta y + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} (\Delta y)^2 =$$

$$= A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2, \tag{3}$$

причому

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \; B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \; C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}. \tag{4}$$

Стосовно приростів Δx та Δy вираз (3) є квадратичною формою (§ 9). Матриця її коефіцієнтів має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Згідно з критерієм Сільвестра (4^0 § 9) форма (3) знакододатна, якщо кутові мінори матриці H додатні: $A > 0$, $\delta = det\, H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, форма (3) знаковід`ємна, якщо $A < 0$ і $\delta > 0$. Функція $z = f(M)$ у першому випадку досягає мінімуму, в другому – максимуму. Можна довести, що при $\delta < 0$ квадратична форма (3) свій знак не зберігає, і функція z у точці M_0 не має екстремуму. Якщо $\delta = 0$, то форма (3) знак не змінює, але може перетворитися на нуль. При цьому знак $d^2 f$ буде визначатися величиною ε_1, що потребує її спеціального вивчення.

Отже, **якщо 1) M_0 (x_0, y_0) – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$; 2) у точці M_0 всі частинні похідні 2-го порядку від функції z неперервні, то**

а) у випадку $\delta = AC - B^2 > 0$ функція $z = f(x, y)$ у точці M_0 має екстремум, максимум при $A < 0$, мінімум при $A > 0$;

б) при $\delta = AC - B^2 < 0$ екстремуму у точці M_0 немає;

в) у випадку $\delta = AC - B^2 = 0$ екстремум у точці M_0 може бути, а може й не бути, потрібно додаткове дослідження.

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ згідно з формулою (44.24′) другий диференціал

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\Delta z \right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\Delta z)^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\Delta y \Delta z \tag{5}$$

є квадратичною формою відносно приростів Δx, Δy, Δz. Матриця H коефіцієнтів такої квадратичної форми (матриця Гессе) та її кутові мінори δ_1, δ_2, δ_3 мають вигляд

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial x \partial z \\ \partial^2 f / \partial y \partial x & \partial^2 f / \partial y^2 & \partial^2 f / \partial y \partial z \\ \partial^2 f / \partial z \partial x & \partial^2 f / \partial z \partial y & \partial^2 f / \partial z^2 \end{pmatrix};$$

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}; \qquad \delta_3 = \det H .$$

Якщо у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, то квадратична форма знакододатна, функція u в цьому випадку досягає мінімуму; при $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$ квадратична форма знаковід`ємна і у точці M_0 функція u має максимум.

Аналогічно вирішується питання про достатні умови екстремуму для функції, що залежить від більшої кількості змінних.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $z = x^4 - 4x^3 + 4xy - y^2 + 1$.

Розв`язування. Маємо функцію двох змінних, що визначена на всій площині xOy. Відшукаємо стаціонарні точки функції z, для чого знайдемо перші похідні від z та зрівняємо їх з нулем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2 + 4y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y, \qquad \left.\begin{array}{c} 4x^3 - 12x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 2x,$$

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0,\ 4x(x^2 - 3x + 2) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_3 = 4.$$

Функція z має три стаціонарні точки $M_1(0; 0)$, $M_2(1; 2)$, $M_3(2; 4)$. Інших критичних точок у неї немає. Перевіримо виконання достатніх умов.

Стаціо-нарна точка	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 24x$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$	$\delta = AC - B^2$	Екст-ремум
$M_1(0;\,0)$	$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\vert_{M_1} = 0$	$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\vert_{M_1} = 4$	$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\vert_{M_1} = -2$	$\delta < 0$	Немає
$M_2(1;\,2)$	$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\vert_{M_2} = -12$	$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\vert_{M_2} = 4$	$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\vert_{M_2} = -2$	$\delta > 0$	$z_{max} = 2$
$M_3(2;\,4)$	$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\vert_{M_3} = 0$	$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\vert_{M_3} = 4$	$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\vert_{M_3} = -2$	$\delta < 0$	Немає

Екстремум є тільки у т. M_2. Оскільки тут $A < 0$, то це максимум.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $u = x^2 + y^2 + z^3 + 4z^2 - 4z(y + 3) + 21$.

**Розв`язування**. Функція $u = u(x, y, z)$ визначена при всіх значеннях $x, y, z$. Маємо $\partial u/\partial x = 2x$, $\partial u/\partial y = 2y - 4z$, $\partial u/\partial z = 3z^2 + 8z - 4(y+3)$. Розв`яжемо систему

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ 3z^2 + 8z - 4(y+3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x = 0,\ \ y = 2z,\ \ 3z^2 - 12 = 0,\ \ z = \pm 2.$$

Стаціонарні точки: $M_1(0;\,4;\,2)$ та $M_2(0;\,-4;\,-2)$. Складемо матрицю Гессе для довільної точки (x, y, z):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6z+8 \end{pmatrix}.$$

Запишемо кутові мінори матриці H:

$$\delta_1 = 2, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6z+8 \end{vmatrix} = 24z.$$

У т. M_1 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = 48 > 0$. Отже, в цій точці функція u досягає мінімуму: $u_{min} = u(0;\,4;\,2) = 5$. У т. M_2 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0$, тобто достатні умови екстремуму не виконуються. Разом з тим згідно з (5) диференціал $d^2u(M_2)=2(\Delta x)^2+2(\Delta y)^2-4(\Delta z)^2-$ $-8\Delta y\Delta z$. При $\Delta x=\Delta y=0,\ \Delta z\neq 0$ $d^2u(M_2)<0$, при $\Delta x\neq 0,\ \Delta y=\Delta z=0$ $d^2u(M_2)>0$. Невизначеність знака d^2u означає, що екстремуму у точці M_2 немає.

4^0. *Умовний екстремум*. Існують задачі, в яких потрібно знайти екстремум функції за умови, що її аргументи пов`язані між собою одним або декількома рівностями. Таких зв`язків повинно бути менше, ніж незалежних змінних, інакше задача пошуку екстремуму втрачає сенс.

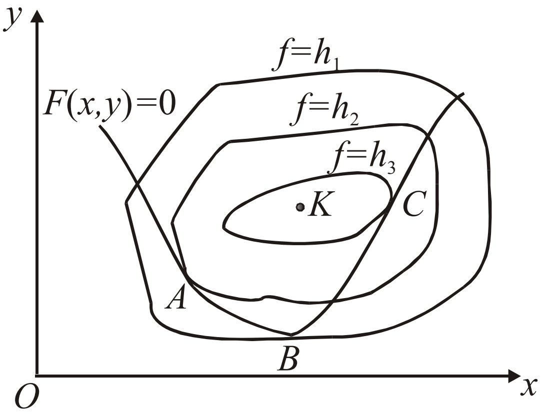


Рис. 2

Припустимо, розшукується екстремум функції $z=f(x,y)$ за умови

$$F(x,y)=0. \qquad (6)$$

Це означає, що порівнювати треба тільки ті значення функції, які відповідають точкам, що розташовані на кривій (6).

На рис. 2 зображені лінії рівня функції $f(x,y)$: $f=h_1,\ f=h_2,\ f=h_3$. При $h_1>h_2>h_3$ перехід від більшого рівня до меншого рівносильний наближенню до єдиного безумовного мінімуму, який досягається у т. K. Разом з тим умовних екстремумів вздовж лінії (6) буде три – максимум у т. B та два мінімуми у точках A та C. Для наочності: якщо K – найбільш глибока точка яру, то B – сама висока, тоді як A та C – самі низькі точки стежки на його схилах (лінія (6) – це проекція стежки на площину xOy).

Рівняння зв`язку (6) визначає в неявній формі залежність $y=y(x)$, за допомогою якої функція $z=f(x,y)$ перетворюється на функцію однієї змінної: $z=f[x,y(x)]$. Пошук умовного екстремуму при цьому зводиться до задачі на відшукання безумовного екстремуму для функції однієї змінної.

Проте, встановлення явної залежності y від x за рівнянням (6) можливе не завжди. Метод Лагранжа дозволяє розв`язати поставлену задачу без зменшення кількості змінних.

Згідно з формулою повної похідної (44.11) та правилом диференціювання неявної функції (44.16) маємо

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dx}=f'_x-f'_y\frac{F'_x}{F'_y}.$$

У випадку диференційовної функції z у точці екстремуму $dz/dx=0$. Отримуємо рівність $f'_x-f'_y\dfrac{F'_x}{F'_y}=0$ або $\dfrac{f'_x}{F'_x}=\dfrac{f'_y}{F'_y}=-\lambda$. Заради зручності відношення похідних тут позначено $-\lambda$. Отже, у точці умовного екстремуму повинні виконуватися рівності

$$f'_x + \lambda F'_x = 0; \quad f'_y + \lambda F'_y = 0, \tag{7}$$

де λ – деякий невідомий параметр (множник Лагранжа).

Якщо увести допоміжну функцію Лагранжа

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y), \tag{8}$$

то умови (7) приймуть вигляд

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

тобто формально дістаємо такі самі рівняння, що і при безумовному екстремумі (1).

Для визначення стаціонарної точки двох рівнянь (9) недостатньо, оскільки в них окрім координат x, y шуканої точки присутня ще одна невідома величина – параметр λ. Як додатне співвідношення можна використати рівняння зв`язку (6). Останнє зручно записати так:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0. \tag{10}$$

Рівності (9) та (10) утворюють систему трьох рівнянь, з якої знаходяться координати x, y стаціонарної точки та множник Лагранжа λ:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0. \tag{11}$$

Таким чином, для відшукування стаціонарної точки функції $z = f(x, y)$ за умови (6) згідно з правилом (1′) слід знайти стаціонарну точку (x_0, y_0, λ_0) допоміжної функції $\Lambda(x, y, \lambda)$, що має форму (8). Існування у точці $M_0(x_0, y_0)$ умовного екстремуму часто буває зрозумілим вже за змістом задачі. У загальному випадку після виключення λ_0 наявність екстремуму встановлюється через вивчення знаку повного диференціала (2)

$$d^2\Lambda(M_0) = \left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right|_{M_0} \cdot (dx)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} \cdot dxdy + \left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2}\right|_{M_0} \cdot (dy)^2,$$

який складається у припущенні, що величини x та y незалежні, але, якщо стане потрібним, – з подальшим вираженням dy через dx за допомогою умови (6). Визначеність знаку квадратичної форми $d^2\Lambda(M_0)$ означає, що у точці M_0

функція z має умовний екстремум, при $d^2\Lambda < 0$ – умовний максимум, при $d^2\Lambda > 0$ – умовний мінімум. Невизначеність знаку $d^2\Lambda$ говорить про те, що у точці M_0 умовного екстремуму немає.

Приклад 3. Знайти умовний екстремум функції $z = x^2 - y^2 + 4xy + 3x + y$, якщо $x + y = 1$.

**Розв`язування**. З рівняння зв`язку виразимо y через x та підставимо у функцію $z = f(x,y)$: $z = x^2 - (1-x)^2 + 4x(1-x) + 3x + 1 - x$. Отримали функцію однієї змінної $\varphi(x) = f(x,\ 1-x) = 8x - 4x^2$, знайдемо її екстремум: $\varphi'(x) = 8 - 8x$, $8 - 8x = 0$, $x = 1$, при $x < 1$ $\varphi'(x) > 0$, при $x > 1$ $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow$ функція $\varphi(x)$ досягає максимуму, $\varphi_{max} = \varphi(1) = 4$. При $x = 1$ друга змінна $y = 0$, отже, у точці $M_0(1;\ 0)$ функція z має умовний максимум: $z_{max} = f(M_0) = 4$.

Для порівняння ту саму задачу розв`яжемо методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа (8) $\Lambda(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + 4xy + 3x + y + \lambda(x + y - 1)$, знайдемо її похідні:

$$\partial\Lambda/\partial x = 2x + 4y + 3 + \lambda; \quad \partial\Lambda/\partial y = -2y + 4x + 1 + \lambda; \quad \partial\Lambda/\partial\lambda = x + y - 1.$$

Згідно з (11) отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y + \lambda + 3 = 0 \\ 4x - 2y + \lambda + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = 0,\ \lambda = -5.$$

Маємо стаціонарну точку $M_0(1;\ 0)$. У цій точці можливий умовний екстремум функції z. Виключимо λ та складемо повний диференціал другого порядку функції $\Lambda = x^2 - y^2 + 4xy + 3x + y - 5(x + y - 1) = x^2 - y^2 + 4xy - 2x - 4y + 5$, розглядаючи x та y як незалежні змінні:

$$d^2\Lambda = \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2}(dy)^2 = 2(dx)^2 + 8dxdy - 2(dy)^2.$$

Так само виглядає й $d^2\Lambda(M_0)$. З рівняння зв`язку знайдемо $dx + dy = 0$, $dy = -dx$. Таким чином, $d^2\Lambda = -8(dx)^2 < 0$, функція z у точці $M_0(1;\ 0)$ має умовний максимум, $z_{max} = f(M_0) = 4$.

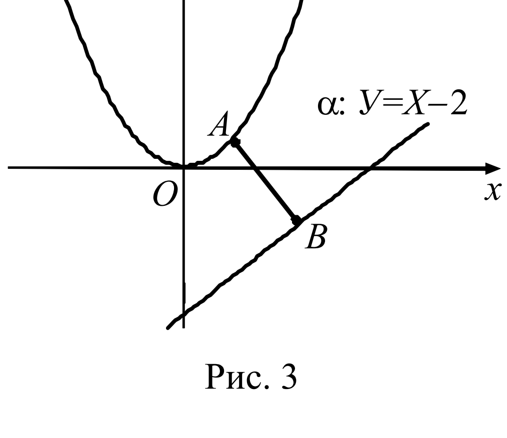


Рис. 3

Задача. Русла двох річок наближено є параболою $y = x^2$ та прямою $y = x - 2$. Потрібно з`єднати річки прямолінійним каналом найменшої довжини. Як його провести?

Розв`язування. Нехай $A(x,\ y)$ – точка параболи; X, Y – поточні координати точки на прямій α (рис. 3). Відстань т. A від прямої α визначимо за формулою (13.9): $d = \dfrac{|y - x + 2|}{\sqrt{2}}$. Відстань d є функцією координат x, y т. A, причому при $y > 0$ у припущенні $x \le 2$ знак модуля можна опустити, так що

$$d = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x + 2)$$

Знайдемо екстремум цієї функції за умови $y = x^2$. За змістом задачі ясно, що на параболі існує точка, найменш віддалена від прямої α, тобто функція $f(x, y)$ повинна мати умовний мінімум. За допомогою функції Лагранжа $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x + 2) + \lambda(y - x^2)$ приходимо до системи (11):

$$\left.\begin{aligned} &-1/\sqrt{2} - 2\lambda x = 0 \\ &1/\sqrt{2} + \lambda = 0 \\ &y - x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1/2,\ y = 1/4,\ \lambda = -1/\sqrt{2}.$$

Маємо стаціонарну точку $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Неважко показати, що у цій точці величина d дійсно досягає мінімуму: $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x + 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x^2)$, $d^2\Lambda = \sqrt{2}(dx)^2 > 0$. Отже, канал вигідніше за все провести по перпендикуляру AB, що опущений із т. $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ на пряму α.

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ умовний екстремум за наявності зв`язків

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m < n, \tag{12}$$

знаходиться тими самими методами, що і у випадку двох змінних. За допомогою рівностей (12) m аргументів функції u, наприклад, $x_1, x_2, \dots, x_m$, виключаються, після чого для здобутої функції з меншою кількістю аргументів $u = \varphi(x_{m+1}, \dots, x_n)$ розв`язується задача на безумовний екстремум. Більш загальний підхід полягає у використанні метода Лагранжа. Складається функція

$$\Lambda = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{13}$$

де кожному рівнянню зв`язку (12) відповідає свій параметр λ_j. Із системи $m+n$ рівнянь

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

встановлюються значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ та координати $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ стаціонарної точки M_0, в якій можливий екстремум функції u. Чи буде в точці M_0 насправді екстремум, іноді ясно за змістом задачі, а у загальному випадку потрібно вивчення знака диференціала $d^2\Lambda(M_0)$. При складанні останнього параметри λ_1, λ_2, ... , λ_m з виразу (13) виключають, а змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вважають незалежними, так що

$$d^2\Lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 \Lambda .$$

Умови (12) дозволяють зменшити до $n - m$ кількість незалежних диференціалів dx_i, що входять до $d^2\Lambda$. Якщо виконуються строгі нерівності $d^2\Lambda(M_0) > 0$ або $d^2\Lambda(M_0) < 0$, то в стаціонарній точці M_0 функція u має умовний мінімум або максимум відповідно. Невизначеність знака $d^2\Lambda(M_0)$ означає, що у точці M_0 умовний екстремум відсутній.

Приклад 4. Знайти умовний екстремум функції $u = x^2 + y^2 + z^2$, якщо $2x - y + 4 = 0$, $3x - z + 2 = 0$.

Розв`язування. Складемо функцію Лагранжа (13)

$$\Lambda = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(2x - y + 4) + \lambda_2(3x - z + 2).$$

Згідно з (14) запишемо систему рівностей

$$\begin{cases} \partial\Lambda/\partial x = 2x + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ \partial\Lambda/\partial y = 2y - \lambda_1 = 0, \\ \partial\Lambda/\partial z = 2z - \lambda_2 = 0, \\ \partial\Lambda/\partial\lambda_1 = 2x - y + 4 = 0, \\ \partial\Lambda/\partial\lambda_2 = 3x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Із 2-го, 3-го та 4-го рівнянь знайдемо: $y = \lambda_1/2$; $z = \lambda_2/2$; $x = y/2 - 2 = \lambda_1/4 - 2$. Підставивши ці значення у 1-е та 5-е рівняння, дістанемо

$$\left.\begin{aligned} 5\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 8 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2 .$$

Таким чином, $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$. Маємо стаціонарну точку $M_0(-1;\ 2;\ -1)$. Функція Лагранжа після виключення параметрів λ_1, λ_2 прийме вигляд

$$\Lambda = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 12 .$$

У припущенні незалежності змінних x, y, z диференціал

$$d^2\Lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 \Lambda = \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2}(dz)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial y\partial z}dydz .$$

Неважко переконатися, що в будь-якій точці $(x,\ y,\ z)$ $d^2\Lambda = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + {}$ $+ 2(dz)^2 > 0$. Отже, $d^2\Lambda(M_0) > 0$ також. Це означає, що функція u досягає у точці M_0 мінімуму: $u_{min} = u(-1; 2; -1) = 6$.

Задача має наочний геометричний зміст: рівняння зв`язку визначають просторову пряму, а функція u − це квадрат відстані точки M цієї прямої від початку координат O. Існування найкоротшої відстані OM_0, тобто мінімуму функції u очевидно і без аналізу величини $d^2\Lambda$.

Зауваження. При відшукуванні безумовного екстремуму функції $f(x,y)$ стаціонарна точка визначається із системи рівнянь $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 0$. Нерідко розв`язання таких рівнянь зазнає значних труднощів. Бажаючи їх уникнути, застосовують **метод найшвидшого спуску**.

Нехай розшукується мінімум функції $f(x,y)$. У довільній точці $M_0(x_0,y_0)$ знаходять $grad\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$. Вектор $\vec{s} = -\,grad\, f\big|_{M_0} = m\vec{i} + n\vec{j}$, де $m = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$, $n = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}$, направлений у бік найскорішого спадання функції f у точці M_0. На прямій $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ визначають умовний мінімум функції $f(x,y)$. Припустимо, що він досягається у т. $M_1(x_1,\ y_1)$. Відправляючись від т. M_1, аналогічно попередньому знаходять вектор $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1\}$, а потім M_2 – точку умовного мінімуму функції f на прямій $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$ і т.п. (рис. 4). Продовжуючи цей процес, в багатьох випадках вдається скільки завгодно близько підійти до точки K безумовного мінімуму функції $f(x,y)$.

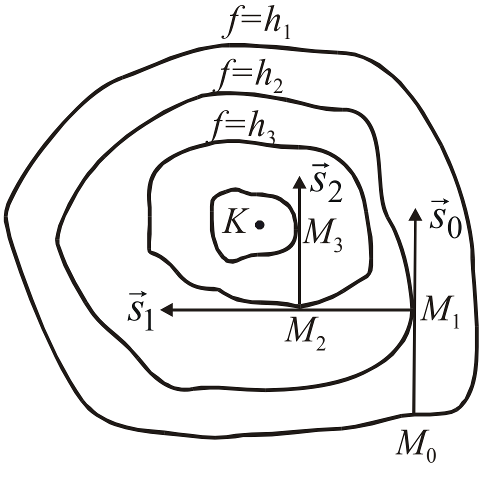


Рис. 4

Якщо знов звернутися до аналогії зі спуском у яр (див. початок 4^0), то рух до його найбільш глибокої точки у даному випадку відбувається по схилах яру зигзагами: спочатку по прямій $M_0\,M_1$ до самої низької на цій прямій точки M_1, потім по прямій M_1M_2 до самої низької точки M_2 і т.д.

5[0]. ***Найбільше та найменше значення функції***. Неперервна функція $z = f(x, y)$ в замкненій області D, що обмежена контуром L, має там найбільше та найменше значення (глобальні екстремуми). Останні досягаються або у точках локального екстремуму всередині області D, або у точках межі L. Якщо $f(x, y)$ – диференційовна функція, то для відшукання глобальних екстремумів потрібно знайти стаціонарні точки всередині області, обчислити в них значення f, а потім порівняти з найбільшими та найменшими значеннями, які функція приймає на межі L.

Приклад 5. Знайти глобальні екстремуми функції $z = x^2 - y^2 + 4xy + 3x + y$ в області D, що задана нерівностями $x + y \le 1$, $x \ge -1$, $y \ge -1$.

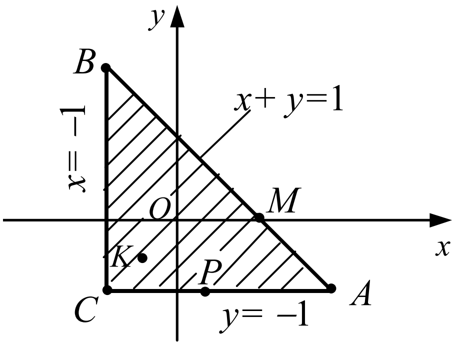


Рис. 5

Розв`язування. Область D є трикутником зі сторонами AB: $x + y = 1$, BC: $x = -1$, CA: $y = -1$ (рис. 5). Його вершини легко визначити: $A(2; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(-1; -1)$. Шукаємо стаціонарні точки функції z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 4x + 1,$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -1/2, \quad y = -1/2.$$

Маємо одну стаціонарну точку $K(-1/2; -1/2)$, що належить області D. Не з`ясовуючи, чи є у точці K екстремум і який саме, обчислимо значення функції z в цій точці: $z\big|_K = f(K) = f(-1/2; -1/2) = -1$.

Далі вивчимо поведінку функції на межі L області D. Ділянки AB, BC та CA межі задаються різними рівностями, тому кожну ланку ламаної $ABCA$ прийдеться розглядати окремо. Слід визначити на ділянці стаціонарні точки (це задача на умовний екстремум, коли в якості умови (6) виступає рівняння відповідної лінії), обчислити у знайдених точках значення функції z та порівняти їх із значеннями z у крайніх точках ділянки.

На відрізку AB: $x + y = 1$ стаціонарна точка для даної функції $z = f(x, 1 - x) = \varphi_1(x)$ встановлена у прикладі 3. Це – т. $M(1; 0)$, тут $z\big|_M = f(M) = f(1; 0) = 4$. На прямій BC: $x = -1$ функція $z = f(-1, y) = -y^2 - 3y - 2 = \varphi_2(y)$, $\varphi_2'(y) = -2y - 3$, $\varphi_2'(y) = 0 \Rightarrow y = -3/2$, тобто стаціонарною є т. $N(-1; -3/2)$. Вона не належить області D, розглядати її не потрібно. На прямій CA: $y = -1$ функція $z = f(x, -1) = x^2 - x - 2 = \varphi_3(x)$, $\varphi_3'(x) = 2x - 1$, $\varphi_3'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/2$, тобто $P(1/2; -1)$ – стаціонарна точка, $P \in D$. У цій точці $z\big|_P = f(P) = f(1/2; -1) = -9/4$. Обчислюємо значення z у точках A, B, C, тобто на кінцях досліджуваних ділянок:

$$z\big|_A = f(A) = f(2; -1) = 0, \; z\big|_B = f(B) = f(-1; 2) = -12, \; z\big|_C = f(C) = f(-1; -1) = 0.$$

Отже, глобальні екстремуми функції z у замкненій області D можуть досягатися в т. K всередині області або у точках M, P, A, B, C межі L. Порівнявши між собою значення

z у вказаних точках $f(K) = -1$, $f(M) = 4$, $f(P) = -9/4$, $f(A) = 0$, $f(B) = -12$, $f(C) = 0$, приходимо до висновку, що найбільше значення функція z має у точці $M(1;\ 0)$: $z_{наиб} = f(M) = 4$, найменше – у точці $B(-1;\ 2)$: $z_{наим} = f(B) = -12$.

Аналогічно ведеться пошук глобальних екстремумів для функцій з більшою кількістю незалежних аргументів.

Зазначимо, що диференційовна строго опукла униз або уверх функція будь-якої кількості змінних (2^0 §43) може мати не більш однієї критичної точки. Якщо така точка існує, то остання завжди є точкою локального та глобального мінімуму або максимуму відповідно. Наприклад, в області $D: x > 0$ функція $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2x + 4$ всюди строго опукла униз (2^0 §43), має єдину критичну точку $x = 1, y = 0,\ z = 0$. У цій точці досягається мінімум: $f_{min} = f(1; 0; 0) = 3$.

6^0. ***Метод найменших квадратів***. Нехай залежність y від x, що знайдена експериментально, подана набором точок (рис. 6)

$$(x_1; y_1),\ (x_2; y_2),\ \ldots,\ (x_n; y_n). \tag{15}$$

Будемо шукати аналітичну залежність y від x у вигляді деякої формули, наприклад, такої:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{або} \quad y - ax^2 - bx - c = 0. \tag{16}$$

Якщо кількість точок $n > 3$, то крива (16) з трьома вільними параметрами a, b, c зможе пройти через усі точки (15) тільки у виключному випадку (почергова підстановка координат кожної з точок у рівняння (16) приведе до системи з n рівностей з трьома невідомими a, b, c, котра при $n > 3$, як правило, несумісна). Однак сталі a, b, c можна підібрати таким чином, щоб загальне відхилення кривої (16) від системи точок (15) було в деякому сенсі малим.

Якщо точка $(x_i; y_i)$ з множини (15) на кривій (16) не лежить, то при підстановці координат точки у друге з рівнянь (16) його ліва частина не перетвориться на нуль. Замість цього отримаємо $y_i - ax_i^2 - bx_i - c = \varepsilon_i$, де $\varepsilon_i \neq 0$ (рис. 6). Величину ε_i називають нев`язкою. Число $\varepsilon_i$ визначає відхилення точки $(x_i; y_i)$ від кривої (16). Характеристикою відхилення може бути будь-який степінь величини $\varepsilon_i$, зокрема, $\varepsilon_i^2$ (у відмінність від числа $\varepsilon_i$, яке $> 0$, $< 0$ або $= 0$, величина $\varepsilon_i^2$ невід`ємна). Сумарну квадратичну нев`язку для всієї сукупності точок (15) характеризують величиною

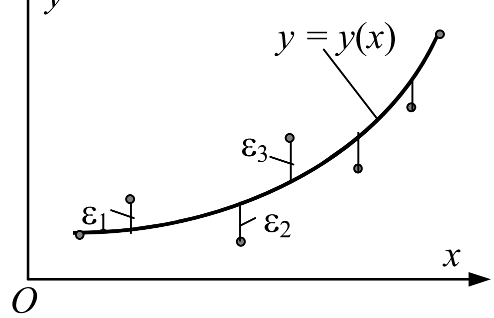


Рис. 6

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right)^2 . \qquad (17)$$

Із зміненням параметрів a, b, c змінюється й величина Ω − функція аргументів a, b, c: $\Omega = \Omega(a,b,c)$. Природно вважати, що крива (16) буде найбільш близька до всієї множини точок (15) в цілому, якщо функція Ω досягне мінімуму, існування якого є зрозумілим за змістом задачі. Необхідні умови екстремуму (1′) приводять до рівностей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) = 0. \end{cases}$$

Інакше

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i, \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i. \end{cases} \qquad (18)$$

Підсумовування тут відбувається по всіх значеннях $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вийшла система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими a, b, c. Як тільки її розв`язок буде знайдено, визначиться й крива (16).

Форма рівняння (16) прийнята довільно. Зазвичай зупиняються на найпростіших аналітичних залежностях y від x, які сумісні з конкретним розташуванням точок (15) на площині xOy.

Приклад 7. Маємо набір точок $(-2; 2{,}5)$, $(-1; 0{,}5)$, $(0; -1)$, $(1; 0{,}5)$, $(2; 2{,}5)$. За методом найменших квадратів знайти залежність y від x, покладаючи $y = ax^2 + bx + c$.

Розв`язування. Для складання системи (18) зробимо необхідні розрахунки та наведемо їх у таблиці.

x_i	−2	−1	0	1	2	$\sum x_i = 0$
y_i	2,5	0,5	−1	0,5	2,5	$\sum y_i = 5$
x_i^2	4	1	0	1	4	$\sum x_i^2 = 10$
x_i^3	−8	−1	0	1	8	$\sum x_i^3 = 0$
x_i^4	16	1	0	1	16	$\sum x_i^4 = 34$

Продовження таблиці						
$x_i y_i$	−5	−0,5	0	0,5	5	$\sum x_i y_i = 0$
$x_i^2 y_i$	10	0,5	0	0,5	10	$\sum x_i^2 y_i = 21$
$y(x_i)$	2,6	0,2	− 0,6	0,2	2,6	$y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$

Система (18) прийме вигляд

$$\left.\begin{aligned} 34a + 10c = 21 \\ 10b = 0 \\ 10a + 5c = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = 0{,}8; \quad b = 0; \quad c = -0{,}6.$$

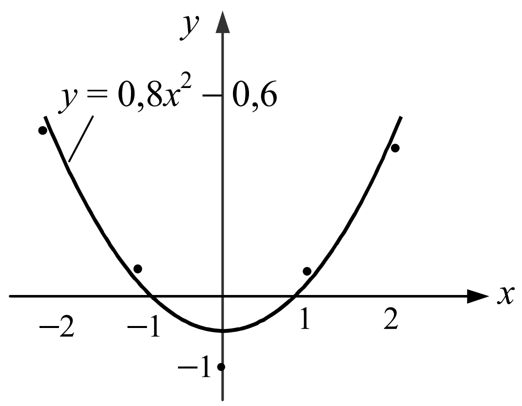


Рис. 7

Таким чином, $y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$. Підставимо у цю рівність абсциси заданих точок та обчислимо розрахункові значення ординат $y(x_i)$ (останній рядок таблиці). Відхилення $y_i - y(x_i)$ визначає величину нев`язки ε_i для кожної з точок, що надані умовою задачі. На рис. 7 побудовані знайдена за методом найменших квадратів парабола

$$y = 0{,}8x^2 - 0{,}6$$

та задана система точок.

♦ На необхідну умову екстремуму у формі (1) першим вказав Ейлер (1755). Але він помилявся, вважаючи, що для існування екстремуму функції $f(x, y)$ достатньо, щоб остання досягала екстремуму одного й того самого типу по кожній змінній окремо, наприклад, коли в стаціонарній точці похідні $\partial^2 f / \partial x^2$ та $\partial^2 f / \partial y^2$ одного знака. Лагранж довів, що це не так. Достатні умови екстремуму функції $f(x, y)$ подані їм у формі нерівності, котрою користуються і зараз: $\delta = AC - B^2 > 0$, де числа A, B, C визначені співвідношеннями (4). Хоча й не зовсім обгрунтовано, він зазначив, що екстремум відсутній при $\delta < 0$. Невизначені множники для дослідження функції на умовний екстремум впроваджені саме Лагранжем (1797).

♦ Метод найменших квадратів розробили незалежно К. Гаус та А. Лежандр (фр. математик, 1752 – 1833) у зв`язку з необхідністю обробляти результати астрономічних та геодезичних спостережень. Гаус звертається до цього методу в останні роки XVIII ст., потім неодноразово вертається до нього пізніше, дає три його різних виводи. Метод слугує для вченого підтвердженням того, що природне явище з успіхом можна досліджувати за допомогою математики. Висока вимогливість до себе стримувала Гауса – він не поспішав з виданням отриманих результатів, тому формально пріоритет у відкритті метода належить Лежандру (1806).

♦ Самовіддане служіння Лагранжа науці було вражаючим. Його сучасник В. Гете, наприклад, висловився із властивою для поетичної натури емоційністю: «Математик досконалий лише тому, що він є досконалою людиною, а також відчуває в собі прекрасне, а це властиво істині; тільки тоді його творчість стає ґрунтовною, проникливою, далекозорою, чистою, ясною, натхненною, дійсно витонченою. Все це потрібно, щоб уподібнитися Лагранжу».

♦ Гаус навчився рахувати у трирічному віці (за його власними словами, раніше, ніж говорити). Він досконало оволодів технікою обчислень. Почавши 5 квітня 1812 р. визначення збурення орбіти Паллади (мала планета Сонячної системи), вчений зробив пробні обчислення і отримав, що весь розрахунок (338400 операцій) зуміє закінчити до 12 липня. Після закінчення цього терміну, вже 13 липня у листі до астронома Ольберса Гаус повідомив, що намічену роботу виконав.

Розділ VII

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

З усіх математичних дисциплін теорія диференціальних рівнянь надважлива. Вона дає пояснення усіх тих елементарних явищ природи, які змінюються у часі.
С. Лі, норв. математик XIX ст.

Багато співвідношень фізики та інших природознавчих наук мають вигляд рівностей, в яких невідома функція представлена своїми похідними або диференціалами, хоча, можливо, присутня там й безпосередньо. Такі співвідношення отримали назву диференціальних рівнянь (ДР). Так, якщо точкова маса m переміщується вздовж осі Ox з прискоренням $a = d^2x/dt^2$, то згідно з 2-м законом Ньютона добуток $ma = F$ або $m\,d^2x/dt^2 = F$, де F – сила, що викликає рух; $x(t)$ – шлях, пройдений точкою за час t. У випадку, коли записана рівність використовується для визначення невідомої величини $x(t)$, воно по відношенню до цієї функції є диференціальним рівнянням.

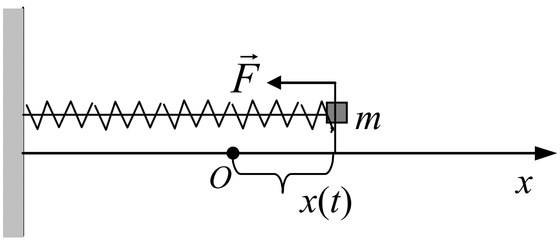


Рис. 1

Нехай, зокрема, вантаж масою m вільно насаджений на горизонтальний стрижень та прикріплений до пружини з фіксованим кінцем (рис. 1). В стані спокою вантаж знаходиться у положенні $x = 0$. Якщо пружину розтягнути на величину x_0, а потім відпустити, то під дією сили пружності пружини вантаж прямуватиме до положення рівноваги, за інерцією рух продовжується далі і пружина стискається. Розпрямившись, пружина змінить напрямок руху вантажу на протилежний, виникнуть його коливання навколо точки $x = 0$. Оскільки сила пружності пружини (відновлювана сила) пропорційна до абсолютної величини зміщення $x(t)$, а за знаком протилежна до нього, то $F = -\mu x$, де $\mu = const > 0$ – коефіцієнт, що називають жорсткістю пружини. Якщо тертя не враховувати, то повинна виконуватися рівність $m\,d^2x/dt^2 = -\mu x$. При наявності тертя, яке гальмує рух з силою, що пропорційна до його швидкості dx/dt, силу F слід доповнити доданком $F_{тр} = -\lambda\,dx/dt$ ($\lambda = const > 0$). Рівняння руху прийме вигляд

$$m\,d^2x/dt^2 + \lambda\,dx/dt + \mu x = 0 \quad \text{або} \quad d^2x/dt^2 + p\,dx/dt + qx = 0,$$

де $p = \lambda/m$, $q = \mu/m$. Окрім сил пружності та тертя, на переміщення $x(t)$

впливає також зовнішня сила, що прикладена до вантажу. Рівняння руху при цьому поповниться ще одним членом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t).$$

Рівняння такого типу визначають коливання різної природи – механічні, акустичні, електромагнітні та ін. Подібна спільність ДР – не виключення, а властивість, що випливає з абстрактного характеру самої математики. У фізиці, наприклад, відомий закон Ньютона про охолоджування тіла: $dT/dt = k(T - T_0)$, де T – температура тіла, а T_0 – навколишнього середовища, $k = const$, t – час. В хімії розчинність речовини в рідині характеризують рівнянням $dx/dt = k(x - x_0)$. Тут x – кількість рідини, що вже розчинена, а x_0 – кількість речовини, яка насичує розчин. Те саме рівняння застосовують у біології для визначення змінної чисельності того чи іншого виду живих істот, наприклад, мікроорганізмів.

Покажемо в наступній задачі, як в простішому конкретному випадку складається та розв`язується диференціальне рівняння, а також – що являє собою його розв`язок.

Задача. Після вертикального запуску ракета переходить до режиму горизонтального польоту. Швидкість викидання газу відносно ракети – V_1. Як залежить швидкість ракети V від її маси m, якщо опір середовища та скривленість траєкторії руху під дією тяжіння Землі можна не брати до уваги?

Розв`язування. За систему відліку приймемо поверхню Землі, вісь Ox сполучимо з напрямком руху (рис. 2). Ракета переміщується за рахунок реактивної сили газу, що викидається. До повного згорання палива маса ракети неперервно зменшується. Запишемо характеристики системи «ракета – газ» у довільний момент руху t та в близький до нього момент $t + \Delta t$. В момент t: маса системи – m, швидкість руху – V, кількість руху (імпульс) – mV. За проміжок часу $\Delta t > 0$ внаслідок викидання газу система розділяється на частини. У момент $t + \Delta t$ сама ракета разом з невикористаним паливом продовжує політ у попередньому напрямку зі швидкістю $V + \Delta V$,

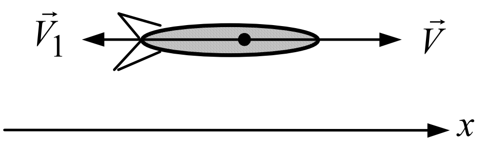


Рис. 2

її маса тепер – $m + \Delta m$, де $\Delta m < 0$, кількість руху $(m + \Delta m)(V + \Delta V)$. Викинутий за час Δt газ має масу $(-\Delta m)$, його швидкість відносно Землі $V - V_1$, кількість руху $(-\Delta m)(V - V_1)$. Згідно із законом збереження імпульсу запишемо:

$$mV = (m + \Delta m)(V + \Delta V) + (-\Delta m)(V - V_1).$$

Спростивши цю рівність, одержимо: $m\Delta V + V_1\Delta m + \Delta m\Delta V = 0$. За незалежну змінну візьмемо час t, тоді $m = m(t)$, $V = V(t)$. Обидві функції за змістом задачі неперервні. Їх можна також вважати диференційовними. Якщо Δt мало ($\Delta t \to 0$), то $\Delta m \sim dm$, $\Delta V \sim dV$, а величину $\Delta m\Delta V$ як малу більш високого порядку допустимо відкинути.

У результаті приходимо до диференціального рівняння $mdV + V_1 dm = 0$, в якому шукана величина V виступає як функція аргументу m. Перепишемо рівняння у формі $dV = -V_1\, dm/m$ та проінтегруємо рівність: $\int dV = -V_1 \int dm/m$. Отримуємо $V = -V_1 \ln m + C$, де C – стала інтегрування. Маємо так званий загальний розв`язок рівняння. Якщо у початковий момент $t = 0$ горизонтального польоту ракети її маса з паливом

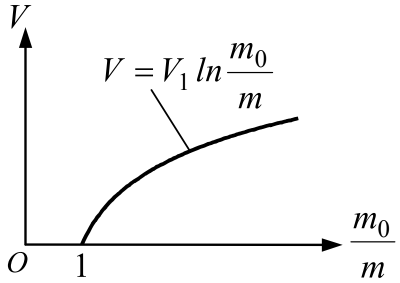


Рис. 3

$m = m_0$, а швидкість $V = 0$, то справедлива рівність $0 = -V_1 \ln m_0 + C$, тобто $C = V_1 \ln m_0$. Підставивши це значення C у загальний розв`язок, маємо частинний розв`язок задачі:

$$V = -V_1 \ln m + V_1 \ln m_0 \quad \text{або} \quad V = V_1 \ln \frac{m_0}{m} \quad \text{(рис. 3).}$$

Це – відома формула К. Ціолковського, яка дозволяє, зокрема, знайти найбільшу можливу швидкість руху ракети: $V_{наиб} = V_1 \ln \dfrac{m_0}{m_0 - m_1}$, де m_1 – повна маса палива.

Отже, у даному випадку для складання диференціального рівняння був використаний відповідний до процесу фізичний закон. В результаті розв`язання ДР встановлена функціональна залежність між величинами. Ця залежність містить сталу інтегрування. Остання визначена за рахунок додаткових даних, котрі випливають із змісту задачі.

Теорія диференціальних рівнянь – великий та розгалужений розділ математики, багато гілок цієї теорії виросли у самостійні наукові дисципліни зі своїм колом питань. Типові такі: 1) як розв`язувати диференціальне рівняння; 2) як довести, що розв`язок рівняння існує та єдиний; 3) як, не розв`язуючи ДР, встановити поведінку розв`язку при великих або малих значеннях аргументу (дослідження у цьому напрямку відносяться до так званої якісної теорії ДР); 4) з`ясування того, як позначається на розв`язку рівняння змінення тих чи інших параметрів, що містяться в ньому (цим займається теорія стійкості розв`язків ДР); 5) як розв`язати рівняння з частинними похідними (на відміну від теорії звичайних ДР, де шуканою величиною є функція однієї змінної, вивчення ДР з невідомою функцією декількох змінних – предмет спеціальної області знань під назвою «Рівняння математичної фізики» або «Теорія рівнянь з частинними похідними»).

§ 47. Основні поняття та означення

Наука прагне до граничної точності та ясності понять.
А. Ейнштейн, нім. фізик XX ст.

1^0. *Диференціальне рівняння та його розв`язки*. **Диференціальним** називають рівняння, яке містить диференціали або похідні від шуканої функції.

Формально ДР можна записати так: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – шукана функція; y', y'', … – похідні від y за аргументом x.

Порядок диференціального рівняння – це показник, який дорівнює порядку самої високої похідної (або диференціала) від шуканої функції, що присутня у рівнянні.

Наприклад, відносно функції $y = y(x)$ рівність $y'' + xy'^3 + 4y = \sin x$ є ДР 2-го порядку, а рівність $ydx + xdy = 0$ – рівнянням 1-го порядку.

Розв`язком диференціального рівняння на деякому проміжку називають будь-яку визначену на цьому проміжку функцію $y = y(x)$, яка при підстановці разом з її похідними в ДР перетворює рівняння на тотожність.

Так, розв`язками ДР $xy' = y$ на будь-якому проміжку осі Ox будуть: $y = x$, $y = 2x$, $y = -5x$ і взагалі $y = Cx$, де C – довільна стала, тому що підстановка $y = Cx$, $y' = C$ у рівняння приводить до тотожності $Cx \equiv Cx \ \forall x \in R$.

Очевидно, що функція $y = y(x)$ може бути розв`язком ДР порядку n тільки в тому випадку, якщо на проміжку, що розглядається, вона диференційовна не менш n разів.

Як видно з наведеного вище приклада, ДР 1-го порядку має нескінченну множину розв`язків. Це справедливо і для інших диференціальних рівнянь (виключення складають особливі випадки, наприклад для рівняння $y^2 + y'^2 = 0$ в області дійсних значень існує тільки один розв`язок $y = 0$).

Розв`язки ДР 1-го порядку однотипні, вони різняться вибором сталої $C$. Всю цю множину розв`язків записують в формі $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна стала, і називають **загальним розв`язком**.

Загальний розв`язок ДР 2-го порядку містить вже дві довільні сталі: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Говорять, що **загальний розв`язок диференціального рівняння** – це такий його розв`язок, котрий містить стільки довільних сталих, яким є порядок ДР, за умови, що кількість сталих не може бути зменшена за допомогою перепозначень. Так, для рівняння $xy' = y$ загальний розв`язок $y = Cx$. Формально можна записати $y = (C_1 + C_2)\,x$ або $y = C_1 C_2 x$, однак по суті тут тільки одна довільна стала, тому що обидва вирази $C_1 + C_2$ та $C_1 C_2$

допустимо позначити однією буквою C. Неважко перевірити, що ДР 2-го порядку $y'' - y' = 0$ має розв`язок $y = C_1 + C_2 e^x$. Тут дві довільні сталі $C_1$ та $C_2$, замінити їх однією сталою не можна, тому наведена функція $y$ є загальним розв`язком рівняння.

Загальний розв`язок ДР порядку $n$ записують в формі $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$. Визначити функцію $y$ в явному вигляді вдається не завжди. Частіше результатом розв`язування рівняння стає неявна залежність y від x: $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$. Такий розв`язок називають **загальним інтегралом ДР**.

Частинний розв`язок диференціального рівняння випливає із загального при певних значеннях всіх або хоча б деяких довільних сталих.

Для отримання частинного розв`язку задають додаткові умови, що випливають із змісту задачі та виражають зв`язок між змінними в окремо узятих точках. Щоб знайти всі довільні сталі C_1, C_2, … , C_n, потрібно стільки умов, яким є порядок ДР. Якщо ці умови визначають значення шуканої функції та усіх її похідних до $(n-1)$-го порядку включно в одній і тій самій точці, то їх називають **початковими**. Відшукування частинного розв`язку ДР при заданих початкових умовах складає **задачу Коші**: потрібно знайти такий розв`язок $y = y(x)$ рівняння $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$, котрий задовольняє умови $y(x_0) = h_0$, $y'(x_0) = h_1$, … , $y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$, де x_0 та h_0, h_1, … , h_{n-1} – відомі числа. Наприклад, розв`язком задачі Коші є функція $y(x)$, яка відповідає рівностям $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

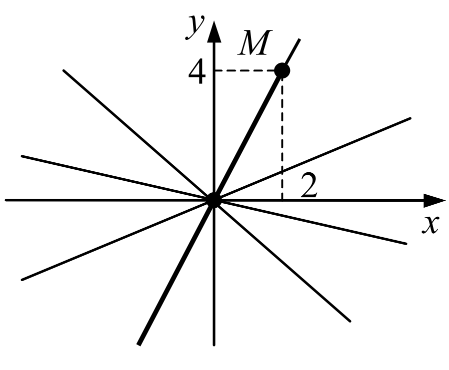


Рис. 1

Якщо додаткові умови визначають шукану функцію та (або) її похідні у різних точках, то ці умови називають **крайовими** (граничними), а саму проблему відшукання частинного розв`язку – крайовою задачею. Наприклад, за рівнянням $y'' + y = 0$ потрібно знайти його розв`язок, що задовольняє умови $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$. **Геометрично** загальний розв`язок ДР 1-го порядку являє собою **сім`ю інтегральних кривих**, а частинний розв`язок – одна з ліній цієї сім`ї, що проходить через точку, визначену початковою умовою. Так, рівняння $xy' = y$ має загальний розв`язок $y = Cx$ – сім`ю прямих із загальною точкою $O(0;\ 0)$. За умови $y(2) = 4$ маємо $4 = C\cdot 2$, $C = 2$, тобто частинним розв`язком буде $y = 2x$ – пряма з вказаної вище сім`ї, яка проходить через точку $M(2;\ 4)$ (рис. 1).

2⁰. ***Поле напрямків***. Припустимо, що диференціальне рівняння 1-го порядку $F(x, y, y') = 0$ можна розв`язати відносно похідної $y'$, тобто подати у вигляді $y' = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ визначена в деякій області $D$ на площині $xOy$. Серед множини розв`язків ДР або, що те ж саме, з сім`ї інтегральних кривих $y = y(x, C)$ виберемо ту криву $y = y(x, C_0)$, яка проходить через фіксовану т. $M(x_0, y_0)$ області D. У точці M за рівнянням знайдемо число $y'(M) = f(M) = f(x_0, y_0)$. Згідно з геометричним змістом похідної це число є кутовим коефіцієнтом дотичної до обраної інтегральної кривої. Таким чином, в усіх точках області D, не знаючи самих інтегральних кривих, можна визначити нахили дотичних до них. Тим самим рівняння $y' = f(x, y)$ задає в області D **поле напрямків**. Покладаючи $f(x, y) = k$, де k – фіксована стала, отримують лінії рівня, вздовж яких нахил дотичних до інтегральних кривих зберігає стале значення. Такі лінії називають **ізоклінами**. Наприклад, ДР $y' = -y/x$ має загальний розв`язок $y = C/x$ (переконаємось у цьому безпосередньою перевіркою: $y' = -C/x^2$, $-C/x^2 = -\frac{C/x}{x}$ або $-C/x^2 \equiv -C/x^2$). Інтегральними кривими є сім`я гіпербол $xy = C$. У даному випадку $f(x, y) = -y/x$. Фіксуючи значення цієї функції, отримуємо рівняння ізокліни: $-y/x = k$ або $y = -kx$. В точках перетину ізокліни з різними інтегральними кривими дотичні до останніх мають один й той же нахил (рис. 2). Визначити ізокліни та побудувати поле напрямків в багатьох випадках значно простіше, ніж знайти інтегральні криві. Поле напрямків дає уявлення про вигляд цих кривих.

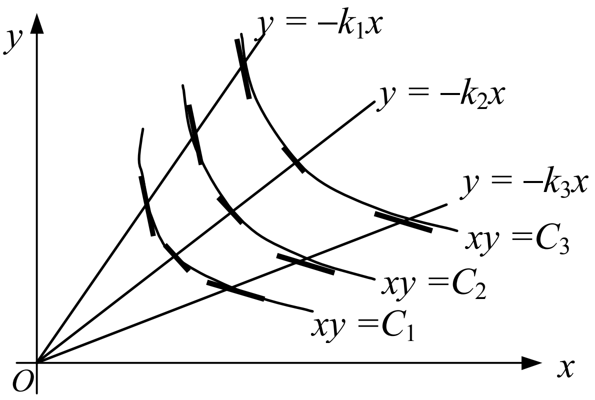


Рис. 2

3⁰. ***Існування та єдиність розв`язку диференціального рівняння***. Відшукуючи за допомогою ДР функціональну залежність між змінними, важливо знати, чи існує при заданих додаткових умовах розв`язок рівняння та чи буде він єдиним. Стосовно до ДР 1-го порядку відповідь на поставлені питання дає нижченаведена теорема Коші.

Теорема. Нехай задане рівняння $y' = f(x, y)$ та початкова умова $y(x_0) = y_0$. Нехай також D – деяка область на площині xOy, що містить точку (x_0, y_0). Якщо функція $f(x, y)$ та її похідна $\partial f/\partial y$ неперервні в D, то у цій області існує єдиний розв`язок $y = y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$.

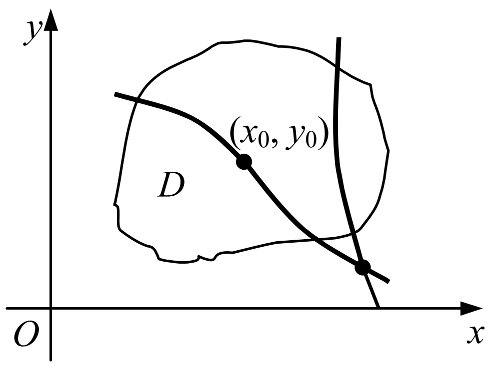


Рис. 3

Геометрично теорема стверджує, що через кожну точку $(x_0,\ y_0)$ області D обов`язково проходить і притому тільки одна інтегральна крива $y = y(x)$. За межами області $D$ такий висновок може виявитися вже несправедливим (рис. 3). Наприклад, рівняння $y' = 2y/x$ має загальний розв`язок $y = Cx^2$ (перевірка: $y' = 2Cx$, $2Cx = = 2Cx^2/x$, $2Cx \equiv 2Cx$). Однак початковій умові вигляду $y(0) = y_0 \neq 0$ ніякий частинний розв`язок не відповідає: з рівності $y_0 = C{\cdot}0^2$ визначити число C неможливо. Таку особливість рівняння можна було передбачити – функція $f(x, y) = 2y/x$ та її похідна $\partial f/\partial y = 2/x$ при $x = 0$ мають розрив. Разом з тим будь-якій початковій умові $y(x_0) = y_0$, де $x_0 \neq 0$, відповідає єдиний розв`язок ДР. У даному випадку геометрично загальний розв`язок $y = Cx^2$ – сім`я парабол (рис. 4). Через будь-яку точку (x_0, y_0) площини, що не належить осі Oy, проходить тільки одна інтегральна крива. Інакше для осі Oy: параболи з нею ніде не перетинаються, окрім точки O, через яку проходить нескінченна множина таких кривих.

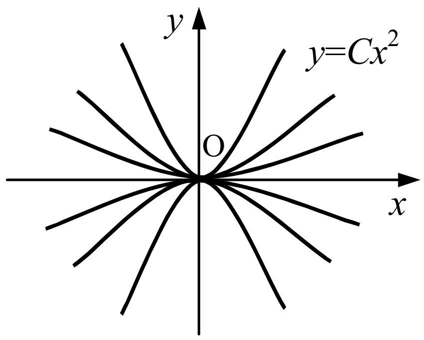


Рис. 4

Для ДР порядку n має місце аналогічна **теорема**: якщо у рівнянні $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ функція f та її частинні похідні 1-го порядку за змінними $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області D змінювання змінних $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, яка містить точку $(x_0, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})$, то в області D існує єдиний розв`язок $y = y(x)$ даного рівняння, що задовольняє умови $y(x_0) = h_0$, $y'(x_0) = h_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$.

4^0. ***Особливий розв`язок***. Особливим називають такий розв`язок ДР, який не випливає із загального розв`язку ні при яких частинних значеннях довільних сталих, що містяться в ньому.

Рівняння $y' = 3y^{2/3}$ має загальний розв`язок $y = (x - C)^3$ (дійсно, $y' = 3(x - C)^2$, $3(x - C)^2 = 3\left[(x - C)^3\right]^{2/3}$, $3(x - C)^2 \equiv 3(x - C)^2$). Разом з тим легко побачити, що $y = 0$ – також розв`язок ДР. Він не випливає із загального розв`язку ні при якому сталому значенні $C$, отже, є особливим розв`язком.

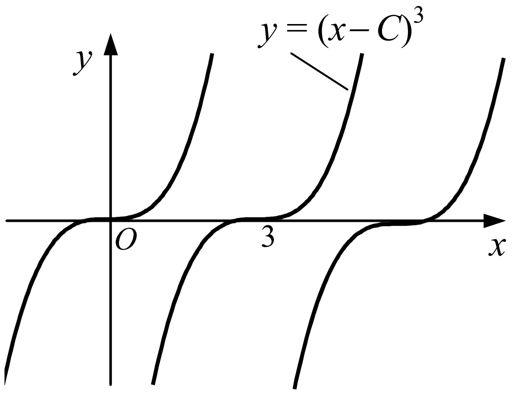


Рис. 5

Геометрично особливий розв`язок являє собою обвідну сім`ї інтегральних кривих, тобто таку криву, яка у кожній своїй точці дотикається до однієї з ліній сім`ї (рис. 5).

В будь-якій точці особливого розв`язку порушуються умови теореми про єдиність розв`язку. Через кожну таку точку проходить не менш двох інтегральних кривих. Так, у наведеному вище прикладі

$$f(x,y)=3y^{2/3} \text{ та } \partial f/\partial y = 2\big/\sqrt[3]{y}.$$

Остання функція при $y=0$ має розрив.

Якщо $\Phi(x,y,C)=0$ – загальний інтеграл ДР, то особливий розв`язок можна знайти, виключивши $C$ із системи $\begin{cases}\partial\Phi(x,y,C)/\partial C=0,\\ \Phi(x,y,C)=0,\end{cases}$ за умови, що функція $y=y(x)$, котра визначається цією системою, задовольняє рівняння і не випливає із загального розв`язку.

Наприклад, у випадку рівняння $y'=3y^{2/3}$ маємо $y=(x-C)^3$, $\Phi(x,y,C)=y-(x-C)^3$, $\partial\Phi/\partial C=3(x-C)^2$. Звертаючись до системи $\begin{cases}\partial\Phi/\partial C=3(x-C)^2=0,\\ \Phi(x,y,C)=y-(x-C)^3=0,\end{cases}$ дістанемо особливий розв`язок $y=0$.

♦ Одночасно з відшуканням первісної (предмет інтегрального числення) виникла і більш загальна задача – за рівнянням, що містить похідні або диференціали від невідомої функції, визначити саму функцію, тобто зародилася теорія диференціальних рівнянь. В «Методі флюксій» (праця 1671 р., надрукована у 1736 р.) Ньютон сформулював основну проблему цієї теорії: «За даним рівнянням, що містить флюксії (похідні), знайти співвідношення між флюентами (первісними)». Там же наведені деякі приклади розв`язування диференціальних рівнянь 1-го порядку.

♦ Термін «диференціальне рівняння» вперше застосував Лейбніц в одному з своїх листів (1676). Інтегруючи ДР, заради узагальненості розв`язку він увів сталу інтегрування, а результат інтерпретував як сім`ю інтегральних кривих, з яких виділяється лінія, що проходить через задану точку (1694).

І. Бернуллі використав вираз «порядок» ДР, дав геометричну трактовку рівняння 1-го порядку як поля напрямків, опираючись на це уявлення, отримав наближені зображення інтегральних кривих (1694).

Поняття загального та частинного інтегралів рівняння виразно формулює Ейлер (1743). Він же розглядає і особливі розв`язки ДР, які раніше знайшли Тейлор (1715) та Клеро (1735). Лагранж встановив спосіб відшукання особливого розв`язку (1774), дав геометричну інтерпретацію такого розв`язку як обвідної сім`ї інтегральних кривих, впровадив терміни «розв`язок» та «інтеграл» ДР.

Перше доведення теореми існування та єдиності розв`язку ДР у 20-х роках XIX століття отримав Коші. Ця теорема неодноразово уточнювалась, область її застосування розширювалась, а доведення удосконалювалось завдяки зусиллям С. Ковалевської (рос. матем., 1850 – 1891), Дж. Пєано (іт. матем., 1858 – 1932), Ш. Пікара (фр. матем., 1856 – 1941) та ін.

§ 48. Диференціальні рівняння 1-го порядку

Теорія сама по собі ні до чого. Вона корисна лише тому, що дає нам віру у зв`язок явищ.
І. Гете, нім. письменник XVIII – XIX ст.

1^{0}. ***Рівняння з відокремлюваними змінними***. Розглянемо диференціальне рівняння 1-го порядку $F(x, y, y') = 0$, що розв`язане відносно похідної y': $y' = f(x, y)$. Якщо можливе подання $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, тобто функція двох змінних $f(x, y)$ розпадається на множники, кожний з яких є функцією одного аргументу x або y, то змінні у рівнянні легко відокремлюються. Під цим розуміють зведення диференціального рівняння до такого вигляду, коли кожний його доданок із диференціалом dx або dy у 1-му степені має в якості коефіцієнта функцію того (і тільки того) аргументу, що і сам диференціал. Дійсно, якщо $y' = f_1(x) f_2(y)$, то після заміни $y' = dy/dx$ одержимо $dy = f_1(x) f_2(y) dx$, $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$. Тепер ліва частина містить тільки y, а права – тільки x. Згідно з означенням шуканий розв`язок $y = y(x)$ повинен перетворити рівняння на тотожність. Первісні для двох тотожно рівних величин також рівні або відрізняються сталим доданком. Тому можна записати

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

В результаті інтегрування визначається загальний інтеграл ДР.

Диференціальне рівняння 1-го порядку, записане у диференціалах

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0,$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його можна подати у формі

$$f_1(x) f_2(y) dx + \varphi_1(x) \varphi_2(y) dy = 0$$

або
$$f_1(x)f_2(y)dx = -\varphi_1(x)\varphi_2(y)dy.$$
Почленним діленням на добуток $f_2(y)\varphi_1(x)$ (припускається, що $f_2(y)\varphi_1(x)\neq 0$) рівняння зводиться до вигляду, де змінні розведені у різні сторони рівності, тобто відокремлені:
$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = -\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy.$$
Для знаходження загального інтеграла рівність потрібно проінтегрувати:
$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = -\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy.$$
Ділення рівняння на функцію $f_2(y)$ може привести до втрати розв`язку, який випливає з рівності $f_2(y)=0$. Чи буде отримане значення $y$ розв`язком ДР, чи випливає він із загального розв`язку або належить до особливого випадку, – перевіряється безпосередньо.

Відшукання невизначених інтегралів навіть коли вони не виражаються через елементарні функції, – більш проста задача, ніж розв`язування ДР. Не усяке рівняння зводиться до знаходження інтегралів. Якщо це можливо, то говорять, що ДР інтегрується у квадратурах. Саме до такого типу належить диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1. Знайти функцію $y = y(x)$, що задовольняє рівняння
$$(2x/\cos y)dx + e^{x^2+\sin y}dy = 0 \quad \text{та} \quad \text{умову } y(0) = 0.$$

Розв`язування. Оскільки $e^{x^2+\sin y} = e^{x^2}\cdot e^{\sin y}$, $\dfrac{2x}{\cos y} = 2x\cdot\dfrac{1}{\cos y}$, то маємо ДР з відокремлюваними змінними. Елементарними перетвореннями (ділимо рівняння на e^{x^2} та множимо на $\cos y$) зводимо ДР до вигляду $e^{\sin y}\cos y\,dy = -2x\,e^{-x^2}dx$. Через те, що змінні відокремлені, рівність можна проінтегрувати:
$$\int e^{\sin y}d(\sin y) = \int e^{-x^2}d\left(-x^2\right) + C,\quad e^{\sin y} = e^{-x^2} + C.$$
Отримали загальний інтеграл ДР. Враховуючи початкову умову $y(0)=0$, визначаємо сталу C: 1=1+C, C=0. Частинний інтеграл рівняння приймає форму $e^{\sin y} = e^{-x^2}$. Звідси $\sin y = -x^2$, $y = \arcsin\left(-x^2\right)$ або $y = -\arcsin x^2$. Шуканий розв`язок ДР знайдено.

Приклад 2. Знайти частинний інтеграл рівняння $\left(x - x\sqrt{y}\right)y' + x\,y + y = 0$, якщо $y(1) = 1$.

Розв`язування. Замість y' запишемо y/x та зведемо рівняння до вигляду $x\left(1-\sqrt{y}\right)dy = -y(x+1)dx$. Діленням рівності на добуток xy отримаємо

$\frac{1-\sqrt{y}}{y}dy = -\frac{x+1}{x}dx$. Змінні відокремлені – можливе інтегрування:

$$\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = -\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + C_1, \quad ln\,y - 2\sqrt{y} = -x - ln\,x + C_1.$$

Поки стала C_1 не знайдена, її допустимо подавати у будь-якій формі, яка є зручною для подальших перетворень, наприклад $C_1 = ln\,C$, $C_1 = C^2/2$, де C – довільна стала, і т.п. Зупинимося на зображенні $C_1 = -lnC$, що дозволяє записати загальний інтеграл компактніше: $ln(Cxy) = 2\sqrt{y} - x$. Внесемо сюди початкові значення $x = 1$, $y = 1$ та знайдемо C: $ln\,C = 2-1 = 1$, $C = e$. Отже, частинним інтегралом рівняння є $ln(exy) = 2\sqrt{y} - x$ або $ln(xy) = 2\sqrt{y} - x - 1$. Отримати частинний розв`язок у явному вигляді тут не вдається. Легко бачити, що $y = 0$ також є розв`язком ДР. Він не випливає із загального розв`язку ні при якому значенні $C$, а тому є особливим розв`язком.

Задача 1. В кімнаті, де температура $a = 20^0$ C, тіло охолонуло за 20 хвилин від $T_0 = 100^0$ до $T_1 = 60^0$. Знайти закон охолодження. Через скільки хвилин тіло охолоне до $T_2 = 30^0$?

Розв`язування. Температура тіла T є функцією часу t: $T = T(t)$. Експериментально встановлено, що швидкість процесу охолодження пропорційна різниці температур тіла та середовища, тобто $\frac{dT}{dt} = k(T-a)$, де $k = const$. Відокремивши змінні та проінтегрувавши, одержимо $\frac{dT}{T-a} = kdt$, $\int\frac{dT}{T-a} = k\int dt + C_1$, $ln(T-a) = kt + ln\,C$, $ln\frac{T-a}{C} = kt$, $\frac{T-a}{C} = e^{kt}$, $T = Ce^{kt} + a$. Закон охолодження у загальному вигляді знайдений. Тепер використаємо наведені в умові задачі дані для визначення сталих C та k. Оскільки при $t = 0$ $T = T_0$, то $T_0 = C + a$, $C = T_0 - a$, таким чином, $T = (T_0 - a)e^{kt} + a$ або $T = 80e^{kt} + 20$. При $t = 20$ $T = T_1 = 60$, тому $60 = 80e^{20k} + 20$, $e^{20k} = 1/2$, $20k = ln(1/2) = -ln2$, $k = -\frac{1}{20}ln\,2$, $T = 80e^{-\frac{t}{20}ln\,2} + 20$. Враховуючи, що $e^{ln\,m} = m$, маємо $e^{-\frac{t}{20}ln\,2} = e^{ln\,2^{-t/20}} = 2^{-t/20}$. Отже, температура тіла змінюється за законом: $T = 80\cdot 2^{-t/20} + 20$. Якщо $T = T_2 = 30$, то $30 = 80\cdot 2^{-t/20} + 20$, $2^{-t/20} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, $t/20 = 3$, $t = 60$ хвилин – для охолодження тіла до температури 30^0 потрібна година.

2^0. ***Однорідні рівняння***. Функцію $f(x,y)$ називають однорідною n-го виміру (степеня) відносно її аргументів x та y, якщо виконується рівність $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. Наприклад, $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^4/x$ є однорідною функцією 3-го виміру, тому що

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)^2 ty + (ty)^4 / tx = t^3\left(x^3 + x^2 y + y^4 / x\right) = t^3 f(x,y).$$

У випадку, коли показник однорідності $n = 0$, тобто $f(tx,ty) = f(x,y)$, говорять, що $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру. Для такої функції, поклавши $t = 1/x$, можна записати

$$f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Диференціальне рівняння 1-го порядку, що розв`язане відносно похідної y', тобто $y' = f(x,y)$, називають однорідним ДР, якщо його права частина $f(x,y)$ відносно змінних x та y є однорідною функцією нульового виміру або, що те саме, якщо воно зводиться до вигляду $y' = \varphi(y/x)$.

Записане у диференціалах ДР 1-го порядку

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

буде однорідним, якщо обидві функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні за аргументами x та y з одним й тим же показником однорідності.

Правильна ознака того, що ДР – однорідне, полягає в наступному: формальна заміна x на tx та y на ty після спрощень приводить до повного зникнення параметра t, в результаті чого рівняння відновлює свій колишній вигляд.

Однорідне ДР заміною $y = zx$, де $z = z(x)$ – невідома функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, рівняння $y' = \varphi(y/x)$ внаслідок підстановки $y = zx$, $y' = z'x + z$ приймає форму $z'x + z = \varphi(z)$. Далі отримуємо $z'x = \varphi(z) - z$, $x\,dz/dx = \varphi(z) - z$, $dz/[\varphi(z) - z] = dx/x$, тобто змінні відокремлені і можливе інтегрування: $\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + ln\,C$. Звідси визначається загальний інтеграл $\Phi(x,z,C) = 0$ для перетвореного ДР, а потім виключенням z ($z = y/x$) відшукується загальний інтеграл вихідного рівняння: $\Phi(x, y/x, C) = 0$.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл ДУ $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$.

Розв`язування. Заміна x на tx, y на ty не змінює вигляду рівняння: $y' = \dfrac{t^2 y^2}{t^2 xy - t^2 x^2}$, $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$, тому дане ДР – однорідне. Проведемо підстановку $y = zx$.

Отримаємо $y' = z'x + z$, рівняння прийме форму $z'x + z = \dfrac{z^2 x^2}{x^2 z - x^2}$, $\dfrac{dz}{dx}x = \dfrac{z^2}{z-1} - z$,

$\frac{dz}{dx}x = \frac{z}{z-1}$, $\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x}$. Проінтегруємо останню рівність: $\int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dx}{x} + ln\,C$,

$z - lnz = lnx + lnC$ або $z = ln(Czx)$. Повернемося до старої змінної y: $\frac{y}{x} = ln\,Cy$. Загальний інтеграл ДР знайдений: $y = xln(Cy)$.

Приклад 4. Знайти частинний інтеграл ДР $(x-y)dy - ydx = 0$, якщо $y(0) = 1$.

Розв`язування. При заміні x на tx, y на ty маємо

$(tx - ty)dy - tydx = 0$, $t(x-y)dy - tydx = 0$, $(x-y)dy - ydx = 0$ – рівність прийняла свій первісний вигляд, таким чином, рівняння однорідне. Покладемо $y = zx$, тоді $dy = zdx + xdz$, $(x - zx)(zdx + xdz) - zxdx = 0$, $(1-z)zdx + (1-z)xdz - zdx = 0$, $z^2dx = (1-z)xdz$, $\frac{1-z}{z^2}dz = \frac{dx}{x}$. Проінтегрувавши, знайдемо $\int\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dx}{x} + ln\,C$, $-\frac{1}{z} - ln\,z = ln\,x + ln\,C$, $ln(Cxz) = -\frac{1}{z}$. Виключимо змінну z: $ln(Cy) = -\frac{x}{y}$, $yln(Cy) + x = 0$. Оскільки при $x = 0$ $y = 1$, то $lnC = 0$, $C = 1$. В результаті маємо частинний інтеграл рівняння: $x + ylny = 0$.

Задача 2. Деяка лінія $y = y(x)$, що розташована у півплощині $x > 0$, проходить через точку $K(1;\ 0)$. Будь-яка дотична до цієї кривої відсікає від осі ординат відрізок, квадрат довжини якого дорівнює добутку координат точки дотику. Знайти рівняння лінії.

Розв`язування. Нехай дотична до шуканої кривої $y = y(x)$ проведена в т. $M(x,\ y)$. Дотична перетинає вісь Oy у точці A, а з віссю Ox утворює кут α, причому $tg\alpha = y'(x)$ (рис. 1). За умовою задачі $OA^2 = xy$. Очевидно, що $OA = AB - OB = xtg\alpha - y = xy' - y$.

Маємо рівність $(xy' - y)^2 = xy$ або $xy' - y = \pm\sqrt{xy}$. Це – однорідне ДР 1-го порядку. Застосуємо підстановку $y = zx$. Одержимо:

$$x(z'x + z) - zx = \pm\sqrt{x^2z}, \quad x^2z' = \pm x\sqrt{z},$$

$$x\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{z}, \quad \frac{dz}{\pm\sqrt{z}} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dz}{\pm\sqrt{z}} = \int\frac{dx}{x} + ln\,C,$$

$$\pm 2\sqrt{z} = ln\,x + ln\,C, \quad 4z = (ln\,Cx)^2, \quad 4\frac{y}{x} = (ln\,Cx)^2,$$

$y = \frac{x}{4}(ln\,Cx)^2$. Підставимо до цієї рівності координати точки K та знайдемо C: $0 = \frac{1}{4}(ln\,C)^2 \Rightarrow C = 1$.

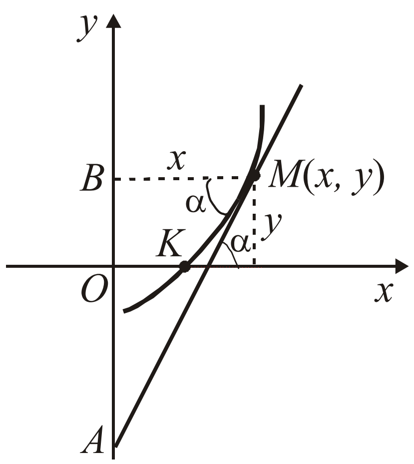


Рис. 1

Таким чином, шукана крива має рівняння $y = \frac{x}{4}ln^2\,x$.

Зауваження. Рівняння вигляду $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, де $f(u)$ – довільна неперервна функція, є однорідним ДР, якщо $c = c_1 = 0$. Це випливає з того, що $y' = f\left(\dfrac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = f\left(\dfrac{a+b\,y/x}{a_1+b_1\,y/x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. У противному разі, коли c та c_1 не дорівнюють одночасно нулю, рівняння до класу однорідних ДР не входить. При заміні $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, де h та k – сталі, маємо $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$, $\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} = \dfrac{ax_1+by_1+(ah+bk+c)}{a_1x_1+b_1y_1+(a_1h+b_1k+c_1)}$. Припустимо, що числа h та k можна підібрати так, щоб виконувалися рівності $\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0, \end{cases}$ тоді ДР у нових змінних прийме вигляд $\dfrac{dy_1}{dx_1} = f\left(\dfrac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}\right)$, а значить – стане однорідним рівнянням. Таким чином, якщо наведена вище система алгебраїчних рівнянь має розв`язок, то розглядуване ДР зводиться до типу однорідних рівнянь.

3^0. ***Лінійні рівняння***. Диференціальне рівняння 1-го порядку називають лінійним, якщо шукана функція $y = y(x)$ та її похідна y' входять до рівняння лінійно, тобто у 1-му степені, не перемножуючись між собою (саме так, як входять змінні у загальне рівняння прямої на площині). Це – рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{1}$$

де $p(x)$ та $f(x)$ – довільні неперервні функції.

Наведемо два способи розв`язування ДР (1).

• **Метод варіації довільної сталої**.

Якщо в (1) $f(x) \neq 0$, то рівність (1) називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням. При $f(x) \equiv 0$ (1) є лінійним однорідним ДР:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2}$$

Його легко розв`язати як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + ln\,C,$$

$$ln\,y - ln\,C = -\int p(x)dx, \; ln\frac{y}{C} = -\int p(x)dx, \; \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx}, \text{ тобто}$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{3}$$

При будь-якому $C = const$ функція (3) задовольняє рівняння (2), але не задовольняє (1), якщо у цьому рівнянні $f(x) \neq 0$. Однак, замінивши у формулі (3) сталу C на функцію $C(x)$, можна добитися того, щоб вираз

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

став розв`язком ДР (1) при будь-якій неперервній функції $f(x)$ в його правій частині. Дійсно, підставимо (4) в (1). Тоді

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x),\ dC = f(x)e^{\int p(x)dx}dx,\ C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

де $C_1 = const$. Внесемо знайдену функцію $C(x)$ в формулу (4) та отримаємо загальний розв`язок рівняння (1):

$$y = \left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right]e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 5. $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$, $y(x) - ?$

**Розв`язування**. Маємо лінійне ДР вигляду (1), тут $p(x) = 1$. Замінивши праву частину рівняння на $0$, одержимо лінійне однорідне ДР: $y' + y = 0$. Знайдемо його розв`язок: $\frac{dy}{dx} = -y$, $\frac{dy}{y} = -dx$, $\int\frac{dy}{y} = -\int dx + lnC$, $lny - lnC = -x$, $ln\frac{y}{C} = -x$, $\frac{y}{C} = e^{-x}$, $y = Ce^{-x}$. Замінимо тепер C на $C(x)$ та підставимо функцію $y = C(x)e^{-x}$ в неоднорідне ДР: $C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^x$, $\frac{dC}{dx}e^{-x} = e^x$, $dC = e^{2x}dx$, $\int dC = \int e^{2x}dx + C_1$, $C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, $C_1 = const$. Таким чином, $y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^{-x}$ або $y = \frac{1}{2}e^x + C_1e^{-x}$. Загальний розв`язок вихідного ДР знайдений. Внесемо у загальний розв`язок значення $x = 0$, $y = 1$, що визначені початковою умовою: $1 = \frac{1}{2} + C_1$, $C_1 = 1/2$. Отже, $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = chx$.

• **Метод підстановки**.

Будемо шукати розв`язок $y = y(x)$ рівняння (1) у вигляді добутку

$$y(x) = u(x)\,v(x). \tag{5}$$

Обидві функції $u(x)$ та $v(x)$ припускаються диференційовними. Вони поки невідомі, але одну з них, наприклад $v(x)$, можна вибрати як завгодно, окрім $v(x) \equiv 0$. Так, якщо $y = sin\,x$, то у рівності (5) можна покласти $v = x$ або

$v=e^x$ або $v=lnx$ і т.д., тоді відповідно $u=\dfrac{sin\,x}{x}$, $u=\dfrac{sin\,x}{e^x}$, $u=\dfrac{sin\,x}{ln\,x}$ і т.п.

Підставимо (5) в (1). Одержимо $u'v+uv'+puv=f(x)$ або

$$u'v+u[v'+pv]=f(x). \tag{6}$$

Користуючись свободою вибору, підберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у квадратних дужках перетворився на нуль, тобто вимагатимемо виконання рівності

$$\frac{dv}{dx}+pv=0. \tag{7}$$

При цьому $dv=-p(x)v(x)dx$, $dv/v=-p(x)dx$, $\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx+C_1$, $ln\,v=-\int p(x)dx+C_1$, $C_1=const$. Рівняння (7) має нескінченну множину розв`язків. Для наших цілей достатньо вибрати один з них, зафіксувавши значення C_1. Покладемо $C_1=0$. Тоді $ln\,v=-\int p(x)dx$, тобто

$$v=e^{-\int p(x)dx}. \tag{8}$$

Через (7) рівняння (6) прийме вигляд

$$u'v=f(x). \tag{9}$$

Оскільки множник $v(x)$ вже відомий, то за рівністю (9) відшукується й функція $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}v=f(x),\ du=\frac{f(x)}{v(x)}dx,\ \int du=\int\frac{f(x)}{v(x)}dx+C,\ \ C=const, \text{ тобто}$$

$$u=\int\frac{f(x)}{v(x)}dx+C. \tag{10}$$

Загальний розв`язок ДР (1) знаходиться тепер за формулою (5), де співмножники $u(x)$, $v(x)$ визначені рівностями (8) та (10).

Отже, лінійне рівняння підстановкою (5) зводиться до двох ДР з відокремлюваними змінними (7) та (9). Їх розв`язки (8) та (10) дозволяють згідно з (5) утворити загальний розв`язок ДР (1).

Приклад 6. $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=1$, $y(x)-?$

Розв`язування. Застосуємо підстановку $y=uv$. Отримаємо $u'v+uv'+2xuv=xe^{-x^2}$, $u'v+u[v'+2xv]=xe^{-x^2}$. Поклавши $v'+2xv=0$, маємо два

ДР з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dx}+2xv=0 \quad (\alpha); \qquad \frac{du}{dx}v=xe^{-x^2} \quad (\beta).$$

Розв`язуючи рівняння (α), знайдемо $\frac{dv}{v}=-2xdx$, $\int\frac{dv}{v}=-\int 2xdx$ (сталу інтегрування тут не пишемо), $lnv=-x^2$, $v=e^{-x^2}$. Із рівняння (β) визначимо функцію u:

$$\frac{du}{dx}e^{-x^2}=xe^{-x^2},\ du=xdx,\ \int du=\int xdx+C,\ u=\frac{x^2}{2}+C.$$

Загальний розв`язок вихідного ДР: $y=uv=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)e^{-x^2}$. Згідно з початковою умовою при $x=0$ $y=1$, отже, $1=C$. Таким чином, розв`язком задачі Коші є функція $y=\left(\frac{x^2}{2}+1\right)e^{-x^2}$.

Задача 3. Визначити закон змінення сили струму I в контурі із опором R, індуктивністю L та джерелом струму, що подає змінну в часі напругу $E=E_0\ sin\,\omega t$, якщо R, L, E_0, ω – сталі величини.

Розв`язування. Згідно з фізичними законам в контурі зі струмом I відбувається падіння напруги. На активному опорі воно складає величину $U_1=IR$, на індуктивності – $U_2=L\,dI/dt$. Сумарне падіння напруги дорівнює напрузі джерела: $U_1+U_2=E_0\ sin\omega t$ або $dI/dt+\alpha I=\beta sin\omega t$, де позначено $\alpha=R/L$; $\beta=E_0/L$. Отримали лінійне ДР 1-го порядку. Розв`яжемо його за методом варіації довільної сталої. Замінивши праву частину нулем, маємо лінійне однорідне ДР: $dI/dt+\alpha I=0$. Звідси $dI=-\alpha Idt$, $\frac{dI}{I}=-\alpha dt$, $\int\frac{dI}{I}=-\alpha\int dt+lnC$, $lnI-lnC=-\alpha t$,

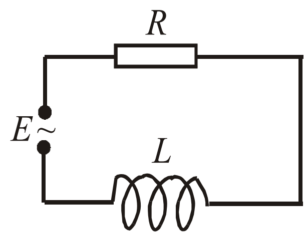


Рис. 2

$ln\frac{I}{C}=-\alpha t$, $\frac{I}{C}=e^{-\alpha t}$, $I=Ce^{-\alpha t}$. Поклавши $C=C(t)$, підставимо функцію $I=C(t)e^{-\alpha t}$ в неоднорідне ДР: $C'e^{-\alpha t}-\alpha Ce^{-\alpha t}+\alpha Ce^{-\alpha t}=\beta sin\,\omega t$. Визначимо функцію $C(t)$: $dC=\beta e^{\alpha t}sin\,\omega t\,dt$, $C=\beta\int e^{\alpha t}sin\,\omega t\,dt$. Двічі інтегруючи частинами (подібно до прикладу 35.14), знаходимо:

$$C=\frac{\beta}{\alpha^2+\omega^2}e^{\alpha t}(\alpha\,sin\,\omega t-\omega\,cos\,\omega t)+C_1,\ \text{де}\ C_1=const.$$

Загальний розв`язок вихідного ДР має вигляд

$$I=\left[\frac{\beta}{\alpha^2+\omega^2}e^{\alpha t}(\alpha sin\omega t-\omega cos\omega t)+C_1\right]e^{-\alpha t}=\frac{\beta}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha\,sin\,\omega t-\omega\,cos\,\omega t)+C_1e^{-\alpha t}.$$

Із зростанням t останній доданок швидко затухає, отже, після включення струму в контурі з часом встановлюються коливання, що відбуваються з частотою джерела струму.

Зауваження. Рівняння вигляду (його називають рівнянням Бернуллі)

$$y' + p(x)y = y^{\alpha} f(x) \tag{11}$$

при $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ є лінійним (в останньому випадку – лінійним однорідним, а також ДР з відокремлюваними змінними). При інших значеннях α рівняння (11) зводиться до лінійного ДР відносно нової змінної $z = y^{1-\alpha}$ $\left(z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',\ \ y' + p(x)y = y^{\alpha} f(x) \ \Rightarrow\ y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x) \ \Rightarrow \right.$ $\left.\Rightarrow\ z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x) \right)$. Разом з тим, не переходячи до лінійного диференціального рівняння, рівняння (11) можна розв`язувати за допомогою тієї самої підстановки $y = uv$, що і вище.

Приклад 7. $y' - y/x = y^2 e^x$, $y(1) = 1$, $y(x) - ?$

Розв`язування. Дане рівняння належить до типу (11), тут $\alpha = 2$. Покладемо $y = uv$. Маємо $u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = e^x u^2 v^2$, $u'v + u\left[v' - \frac{1}{x}v\right] = e^x u^2 v^2$. За рівнянням $v' - \frac{1}{x}v = 0$ визначаємо функцію v: $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}$, $\ln v = \ln x$, $v = x$. Далі отримуємо: $u'x = e^x u^2 x^2$, $\frac{du}{dx}x = e^x u^2 x^2$, $\frac{du}{u^2} = xe^x dx$, $\int\frac{du}{u^2} = \int xe^x dx + C$, $-\frac{1}{u} = xe^x - e^x + C$, $u = \frac{1}{e^x - xe^x - C}$, $y = uv = \frac{x}{e^x(1-x) - C}$ – загальний розв`язок ДР знайдений. В силу початкової умови $y(1) = 1$ маємо $1 = \frac{1}{-C}$, $C = -1$. Таким чином,

$$y = \frac{x}{e^x(1-x)+1}.$$

4⁰. ***Рівняння в повних диференціалах***. Диференціальне рівняння 1-го порядку

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{12}$$

належить до типу, що вказаний в заголовку, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$. Для цього необхідно й достатньо, щоб в розглядуваній області на площині xOy функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$ були неперервні та виконувалась тотожність $\partial P/\partial y \equiv \partial Q/\partial x$ (44.25).

Якщо перелічені умови дотримані, то рівняння (12) може бути записане у формі $du(x, y) = 0$. Рівність $u(x, y) = C$, що випливає звідси, де C – довільна стала, є загальним інтегралом рівняння (12). Дійсно, функція $y = y(x, C)$, визначена з рівняння $u(x,\ y) = C$, при підстановці в нього ж дає тотожність $u[x,\ y(x,\ C)] \equiv C$. Диференціюємо цю тотожність за x. Згідно з формулою повної похідної (44.11) одержуємо $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy(x,C)}{dx}\equiv 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy(x,C)\equiv 0$ та, оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$ (див. 10^0 § 44), то $P(x,y(x,C))dx+\ +Q(x,y(x,C))dy\equiv 0$, тобто рівняння (12) перетворилося на тотожність. Таким чином, функція $y = y(x,\ C)$ – розв`язок ДР (12). В силу того, що цей висновок справедливий для будь-якого значення сталої $C$, знайдений розв`язок є загальним.

Таким чином, щоб розв`язати ДР в повних диференціалах, достатньо визначити функцію $u = u(x,\ y)$, для якої $du = Pdx + Qdy$, а потім покласти $u(x, y) = C$. Процедура відшукання функції u викладена у 10^0 §44.

Приклад 8. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(2xy^3+y\right)dx+\left(3x^2y^2+x+2\right)dy=0.$$

Розв`язування. Маємо $P=2xy^3+y$, $Q=3x^2y^2+x+2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2+1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2+1$. Ці функції як многочлени при будь-яких значеннях x та y неперервні, виконується тотожність $\partial P/\partial y \equiv \partial Q/\partial x$. Отже, задане ДР є рівнянням в повних диференціалах. Існує функція $u(x,y)$ така, що $\partial u/\partial x=P$, $\partial u/\partial y=Q$ або

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3+y \quad (\alpha); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+x+2 \quad (\beta).$$

Проінтегрувавши рівність (α) за x при фіксованому y, отримаємо

$$u=\int\left(2xy^3+y\right)dx+\psi(y); \qquad u=x^2y^3+xy+\psi(y).$$

Продиференціюємо останню рівність за y та порівняємо з (β):

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+x+\frac{d\psi}{dy}=\ 3x^2y^2+x+2.$$

Звідси $\dfrac{d\psi}{dy}=2$, $d\psi=2dy$, $\psi=2\int dy+C=2y+C$. Значить, $u=x^2y^3+xy+2y+C$.

Сюди вже входить довільна стала C, тому для утворення загального інтеграла ДР достатньо записати $x^2y^3 + xy + 2y + C = 0$.

5^0. ***Рівняння, що не розв`язані відносно похідної***. Припустимо, що з ДР $F(x,y,y')=0$ похідна $y'$ явно не виражається взагалі або зображується у формі, що незручна для подальшого розв`язування, тоді як функція y знаходиться з рівняння достатньо просто: $y=f(x,y')$. Покладаючи $y'=p$

($dy/dx = p,\, dy = pdx$), маємо рівність $y = f(x,p)$. Враховуючи, що $p = p(x)$, диференціюємо його за x: $y' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$ (див. (44.11)), тобто $p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$, $\left(p - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)dx - \dfrac{\partial f}{\partial p}dp = 0$. Отримали ДР вигляду $M(x,p)\,dx +$ $+\, N(x,p)\,dp = 0$, де $M = p - \partial f/\partial x,\ N = -\,\partial f/\partial p$. Якщо за цим рівнянням відшукується його розв`язок у формі $x = \varphi\,(p, C)$, то обидві рівності $x = \varphi\,(p, C)$ та $y = f(x,p)$ можна розглядати як параметричні рівняння, які визначають шукану залежність $y = y(x)$. Змінна $p$ виступає тут як параметр. Тим самим методом розв`язується вихідне ДР, якщо $x = f(y, y')$.

Приклад 9. Знайти загальний інтеграл рівняння $y'(y - ln\, y') = 1$.

Розв`язування. Виразимо з рівняння y: $y = \dfrac{1}{y'} + ln\, y'$. Поклавши $y' = p$, запишемо $y = \dfrac{1}{p} + ln\, p$. Продиференціюємо рівність за x з урахуванням того, що $y = y(x)$, $p = p(x)$:

$\dfrac{dy}{dx} = \left(-\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}\right)\dfrac{dp}{dx}$. Маємо $p = \dfrac{p-1}{p^2}\dfrac{dp}{dx}$, $\dfrac{p-1}{p^3}dp = dx$, $\displaystyle\int\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}\right)dp = \int dx + C$,

$-\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2p^2} = x + C$. Отримаємо $x = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2p^2} - C$, $y = \dfrac{1}{p} + ln\, p$. Обидві рівності спільно в параметричній формі визначають загальний інтеграл ДР.

**6^0. *Наближене розв`язування ДР за методом Ейлера*.** У тих випадках, коли точне розв`язування ДР нездійснене або виявляється дуже складним, користуються наближеними методами. Найпростіший з них – метод Ейлера: шукана інтегральна крива наближено замінюється ламаною, вершини якої чисельно визначаються за допомогою ДР.

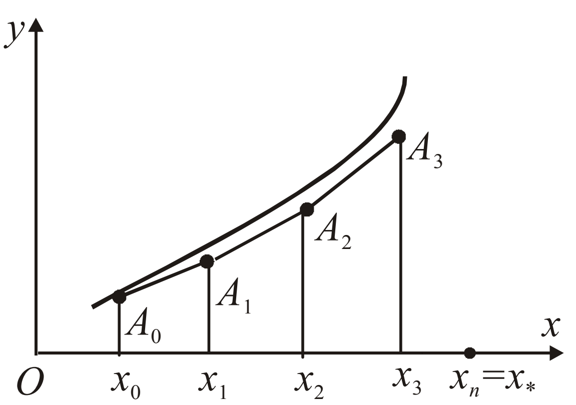


Рис. 3

Нехай на відрізку $[x_0,\, x_*]$ потрібно знайти розв`язок рівняння $y' = f(x,y)$ за умови $y(x_0) = y_0$. Розіб`ємо відрізок $[x_0, x_*]$ на n рівних частин точками $x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_n = x_*$. Крок ділення $h = \dfrac{x_* - x_0}{n}$ (рис. 3).

У точці $A_0(x_0,\ y_0)$, через яку проходить шукана інтегральна крива $y = y(x)$, складемо рівняння дотичної до цієї кривої: $Y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Оскільки $y'(x_0) = f(x_0, y_0) = f(A_0)$, то $Y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Можна очікувати, що при малому h т. $A_1(x_1, y_1)$, що лежить на дотичній A_0A_1, буде близькою до відповідної точки інтегральної кривої. Щоб знайти ординату y_1, достатньо у рівняння дотичної підставити значення $x = x_1$: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ або $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$. Точка A_1 вже не належить до кривої $y = y(x)$, але через неї проходить власна інтегральна крива, близька до шуканої. Так само, як на попередньому кроці, відправляючись від точки A_1, складемо рівняння дотичної A_1A_2 до цієї інтегральної кривої та відшукаємо ординату точки A_2: $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$. Цей процес продовжимо далі. В результаті визначаться точки A_3, A_4, … , A_n. Координати точок A_j виражаються формулами

$$x_j = x_0 + jh,\quad y_j = y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h,\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Ламана $A_0A_1 \ldots A_n$ слугує наближенням до шуканої кривої $y = y(x)$. Точність наближення можна підвищити, зменшуючи крок ділення h.

Приклад 10. Методом Ейлера на відрізку $[1;\ 1{,}5]$ чисельно визначити функцію $y = y(x)$, що задовольняє рівняння $y' = \dfrac{2y}{x}$ та умову $y(1) = 1$. Наближений розв`язок порівняти з точним $\bar{y} = x^2$.

Розв`язування. Покладемо $n = 5$, тоді крок ділення $h = (1{,}5 - 1)/5 = 0{,}1$. Складемо розрахункову таблицю: у 1-му рядку – номера точок ділення, у 2-му та 3-му – координати точок A_j, що обчислені за формулами (13), у наступному рядку – значення функції $f(x, y) = \dfrac{2y}{x}$, які визначені для точок A_j, у 5-му рядку – точні значення ординат $\bar{y}_j = x_j^2$, останній рядок дає уявлення про похибку метода.

j	0	1	2	3	4	5
x_j	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_j	1	1,2	1,42	1,66	1,92	2,19
$f(x_j, y_j) = \dfrac{2y_j}{x_j}$	2	2,18	2,37	2,55	2,74	–
$\bar{y}_j = x_j^2$	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25
$\delta_j = y_j - \bar{y}_j$	0	–0,01	–0,02	–0,03	–0,04	–0,06

♦ Класифікацією диференціальних рівнянь 1-го порядку, зведенням їх до квадратур, тобто до інтегралів, займалися з початку 90-х років XVII ст. Лейбніц та його сподвижники – Якоб та Іоганн Бернуллі. Останній з осені 1691 р. близько року провів у Франції, де спілкувався з видатними математиками цієї країни. Його вплив виявився вирішальним для залучення французьких вчених до нового напряму в науці – аналізу нескінченно малих. Перед від`їздом І. Бернуллі залишив своєму найбільш старанному учню рукописи лекцій. Частина з них – «Математичні лекції про метод інтегралів та інші питання, що написані для маркіза Лопіталя» – були надруковані через п`ятдесят років (1742), решту виявили лише у XX ст. (видано у 1922 р.). В «Лекціях» вперше з`являється термін «відокремлення» (*separatio*) змінних. Разом з тим висловлюється сумнів щодо універсальності цього метода. Пошук рівнянь, що допускають відокремлення змінних, привів до однорідних та лінійних диференціальних рівнянь, для яких поставлена мета досягалася спеціальними підстановками: $y = zx$ (однорідні ДР); $y = uv$ (лінійні ДР). Обидва прийоми успішно використовували І. Бернуллі та Лейбніц. Рівняння Бернуллі (11), запропоноване для розгляду Я. Бернуллі, було розв`язане ним самим, а також братом Іоганном та Лейбніцем, зокрема, через зведення рівняння до лінійного. Побудова розв`язку лінійного ДР методом варіації довільної сталої було одержано Лагранжем у 1775 р. Рівняння в повних диференціалах розглядали усі великі математики, починаючи з Ньютона. Рівняння, що не розв`язані відносно похідної, вивчали Клеро, Лагранж та ін. Загальна теорія диференціальних рівнянь з приведенням до системи багатьох прийомів їх розв`язання закладена Ейлером у тритомній праці «Інтегральне числення» (1768 – 1770). Значна доля результатів, що містяться там, належить самому автору.

§49. Рівняння, що допускають зниження порядку

В науці все важливо.
Г. Гейне, нім. поет XIX ст.

Серед диференціальних рівнянь, що мають порядок вище першого, зустрічаються такі, котрі тим чи іншим прийомом зводяться до рівнянь меншого порядку. Розглянемо деякі типи ДР, що допускають спрощення подібного роду.

1⁰. ***Рівняння вигляду*** $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$. Тут $y^{(n)} = d^n y / dx^n$ – похідна порядку n від шуканої функції $y = y(x)$. У даному випадку порядок ДР крок за кроком знижується безпосереднім інтегруванням. Після n кроків відшукується загальний розв`язок рівняння.

Дійсно, оскільки $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$, то вихідна рівність зображується у формі $dy^{(n-1)} / dx = f(x)$. Звідси після відокремлення змінних визначається похідна $y^{(n-1)}$:

$$dy^{(n-1)} = f(x)dx \Rightarrow \int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

На другому кроці маємо

$$dy^{(n-2)}/dx = \int f(x)dx + C_1,\ dy^{(n-2)} = \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 dx,\ \int dy^{(n-2)} =$$

$$= \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1\int dx + C_2 \ \Rightarrow\ y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2.$$

Цей процес продовжують до тих пір, поки не буде знайдений y.

Приклад 1. Знайти функцію $y = y(x)$, якщо $y''' = sin\,2x$, $y(0) = 9/8$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 3/2$.

Розв`язування. Дане ДР – 3-го порядку. Запишемо його у формі $\dfrac{dy''}{dx} = sin\,2x$ або $dy'' = sin\,2xdx$. Останню рівність проінтегруємо:

$$\int dy'' = \int sin\,2xdx + C_1,\ y'' = -\frac{1}{2}cos\,2x + C_1.$$

Дістали ДР 2-го порядку. Залучаючи початкову умову $y''(0) = 3/2$, знаходимо сталу C_1: $\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}cos\,0 + C_1$, $C_1 = 2$. Далі аналогічно:

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}cos\,2x + C_1,\ dy' = -\frac{1}{2}cos\,2xdx + C_1 dx,\ \int dy' = -\frac{1}{2}\int cos\,2xdx + C_1\int dx + C_2,$$

$y' = -\dfrac{1}{4}sin\,2x + C_1 x + C_2$. Порядок ДР знижений ще на одиницю. Згідно з другою початковою умовою при $x = 0$ $y' = 4$. Внесемо ці значення у вираз для y':

$$4 = -\frac{1}{4}sin\,0 + C_1\cdot 0 + C_2,\ C_2 = 4.$$

На останньому кроці маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}sin\,2x + C_1 x + C_2; \quad dy = -\frac{1}{4}sin\,2xdx + C_1 xdx + C_2 dx;$$

$$\int dy = -\frac{1}{4}\int sin\,2xdx + C_1\int xdx + C_2\int dx + C_3;\quad y = \frac{1}{8}cos\,2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\ -$$

загальний розв`язок ДР отримано. Враховуючи першу початкову умову, знайдемо сталу $C_3$: $\dfrac{9}{8} = \dfrac{1}{8}cos\,0 + \dfrac{C_1}{2}\cdot 0 + C_2\cdot 0 + C_3$, $C_3 = 1$. Отже, окрім загального розв`язку рівняння, визначився також його частинний розв`язок, який задовольняє задані початкові умови: $y = \dfrac{1}{8}cos\,2x + x^2 + 4x + 1$.

Зауваження. Знижуючи порядок ДР, іноді замість невизначеного застосовують визначений інтеграл. При такому підході не доводиться спеціально відшукувати сталі інтегрування – вони безпосередньо виражаються через початкові умови задачі. Так, якщо $y^{(n)} = f(x)$, то $dy^{(n-1)} = f(x)dx$. Замінюємо для зручності змінну x на t та інтегруємо рівність по проміжку $[x_0, x]$ (за x_0 зазвичай беруть точку, в котрій задані початкові умови):

$$\int_{x_0}^{x} dy^{(n-1)}(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt,\ y^{(n-1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt,\ y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y^{(n-1)}(x_0).$$

Наступне зниження порядку ДР виконується за тією самою схемою:

$$dy^{(n-2)}(t) = \left(\int_{x_0}^{t} f(t_1)dt_1\right)dt + y^{(n-1)}(x_0)dt;$$

$$\int_{x_0}^{x} dy^{(n-2)}(t) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} f(t_1)dt_1\right)dt + y^{(n-1)}(x_0)\int_{x_0}^{x} dt;$$

$$y^{(n-2)}(t)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} f(t_1)dt_1\right)dt + y^{(n-1)}(x_0)\cdot t\Big|_{x_0}^{x};$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} f(t_1)dt_1\right)dt + y^{(n-1)}(x_0)(x - x_0) + y^{(n-2)}(x_0).$$

Аналогічно знаходимо

$$y^{(n-3)}(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t}\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)dt_2\right)dt_1\right)dt + y^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} +$$

$$+ y^{(n-2)}(x_0)(x - x_0) + y^{(n-3)}(x_0) \text{ і т.д.}$$

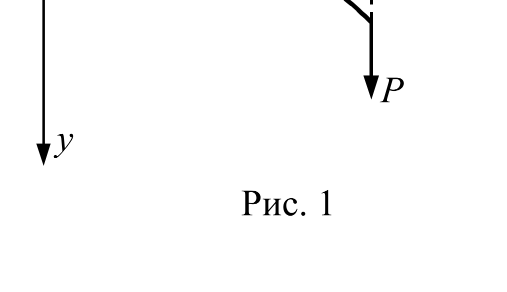


Рис. 1

Задача. Балка довжиною l наглухо закріплена на одному кінці. На другому її кінці вертикально діє зосереджене навантаження P. Знайти вигин балки в будь-якій її точці, припускаючи, що вагою самої балки можна знехтувати.

Розв`язування. В будь-якому перерізі x балки, що перпендикулярний до осі Ox (рис.1), діє згинаючий момент $M(x) = (l - x)P$. З курсу опору матеріалів відомо, що $M(x) = EI/R$, де

E – модуль пружності, I – момент інерції, R – радіус кривизни балки. Позначимо прогин балки на відстані x від її лівого кінця через y. Очевидно, $y = y(x)$. Кривизну балки $K = 1/R$ виразимо за формулою (33.7) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$. При невеликому вигині похідна y' набагато менше числа 1, ще менше – її квадрат y'^2 (дотична до кривої $y = y(x)$ утворює з віссю Ox малий кут, а при $x = 0$ дотична збігається з віссю, тобто $y' = 0$), тому $1/R \approx y''$. Маємо рівняння $EIy'' = (l-x)P$. Це – ДР 2-го порядку, що належить до типу, який розглядався вище. Знайдемо розв`язок рівняння, враховуючи умови $y(0) = 0, y'(0) = 0$, що випливають із змісту задачі .

$$\frac{dy'(x)}{dx} = \frac{P}{EI}(l-x), \quad dy'(x) = \frac{P}{EI}(l-x)dx, \quad \int_0^x dy'(t) = \frac{P}{EI}\int_0^x (l-t)dt,$$

$$y'(x) = -\frac{P}{2EI}\left[(l-x)^2 - l^2\right] + y'(0), \quad y'(x) = \frac{P}{2EI}\left(2lx - x^2\right), \quad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{P}{2EI}\left(2lt - t^2\right),$$

$$dy(t) = \frac{P}{2EI}\left(2lt - t^2\right)dt, \quad \int_0^x dy(t) = \frac{P}{2EI}\int_0^x \left(2lt - t^2\right)dt, \quad y(t)\Big|_0^x = \frac{P}{2EI}\left(lt^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x,$$

$$y(x) = \frac{P}{2EI}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad \text{або} \quad y(x) = \frac{P}{6EI}\left(3lx^2 - x^3\right) \quad \forall x \in [0, l].$$

2^0. *Рівняння, що не містять в явному вигляді шуканої функції y*: $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$. Функція $y = y(x)$ безпосередньо в ДР не входить, вона подана в ньому тільки своїми похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Позначимо $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$, $y''' = p''(x)$,…, $y^{(n)} = p^{(n-1)}(x)$. Рівняння прийме вигляд $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0$. Відносно функції $p(x)$ – це ДР порядку $n-1$. Якщо з такого рівняння знайти функцію $p=p(x)$, то потім, щоб визначити y, достатньо розв`язати ДР 1-го порядку з відокремлюваними змінними $dy/dx = p(x)$.

Приклад 2. $x(y''+1) + y' = 0$, $y(1) = 3/4$, $y'(1) = 1/2$; $y(x)$ – ?

Розв`язування. Дане ДР – 2-го порядку. Шукана функція $y = y(x)$ явно до рівняння не входить. Зробимо підстановку $y' = p(x)$. Оскільки $y'' = p'(x)$, то замість вихідного рівняння отримаємо рівняння $x(p'+1) + p = 0$ або $xp' + p + x = 0$. Це – однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку: формальна заміна x на tx , p на tp не змінює його вигляду. Згідно з 2^0 § 48 розв`язок рівняння відшукується шляхом заміни $p = zx$. Маємо

$$x(z'x + z) + zx + x = 0, \quad x^2 dz = -x(2z+1)dx, \quad \frac{dz}{2z+1} = -\frac{dx}{x},$$

$\int \frac{dz}{2z+1} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} ln\, C_1$, $\quad \frac{1}{2} ln(2z+1) = -ln\, x + \frac{1}{2} ln\, C_1$, $\quad ln(2z+1) = ln\, C_1 - 2\, ln\, x$, $ln(2z+1) = ln \frac{C_1}{x^2}$, $\quad 2z+1 = \frac{C_1}{x^2}$, $z = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x^2} - 1\right)$. За допомогою рівності $z = p/x$ виключимо допоміжну змінну z: $\frac{p}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x^2} - 1\right)$, $p = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$. Оскільки $p = y'$, запишемо $y' = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$ та внесемо сюди значення, що визначені другою початковою умовою: $x = 1$, $y' = 1/2$. Маємо $\frac{1}{2} = \frac{C_1}{2} - \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; C_1 = 2$. За рівнянням $y' = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$ (ДР з відокремлюваними змінними) знайдемо функцію y: $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$, $\quad dy = \frac{C_1 dx}{2x} - \frac{x}{2} dx$, $\int dy = \frac{C_1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int x dx + C_2$, $y = \frac{C_1}{2} ln\, x - \frac{1}{4} x^2 + C_2$. Дістали загальний розв`язок ДР. В силу першої початкової умови повинна виконуватися рівність $\frac{3}{4} = \frac{C_1}{2} ln 1 - \frac{1}{4} + C_2$. Таким чином, $C_2 = 1$. Значення $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ підставимо у загальний розв`язок. Отже, шукана функція $y = ln\, x - x^2/4 + 1$.

3^0. *Рівняння, що не містять в явному вигляді незалежної змінної x*: $\boldsymbol{F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$. Порядок рівняння в даному випадку можна знизити за допомогою підстановки $y' = p(y)$. Справді, обмежившись розглядом ДР 2-го порядку $F(y, y', y'') = 0$, маємо $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$, тобто $y'' = p\frac{dp}{dy}$, отже, замість вихідного рівняння одержимо $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$. Відносно функції $p(y)$ – це ДР 1-го порядку, змінна y виступає тут як аргумент. Визначивши функцію $p = p(y)$, потім потрібно повернутися до рівняння $dy/dx = p(y)$ для того, щоб знайти шукану функцію $y = y(x)$.

Приклад 3. $yy'' - 1 = y'^2$, $y(0) = 1$, $\; y'(0) = 0$, $y(x)$ – ?

**Розв`язування**. Маємо ДР 2-го порядку, де в явному вигляді змінна $x$ не міститься. Застосуємо підстановку $y' = p(y)$. Оскільки $y'' = pdp/dy$, то дістанемо ДР 1-го порядку $yp\frac{dp}{dy} - 1 = p^2$ або $yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$. Це – рівняння з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв`язок: $\frac{pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$, $\int \frac{pdp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2} ln\, C_1$, $\frac{1}{2} ln\left(p^2+1\right) = ln|\, y\,| +$

$+\frac{1}{2}ln\,C_1$, $ln\left(p^2+1\right)=ln\,C_1y^2$, $p^2+1=C_1y^2$, $p=\pm\sqrt{C_1y^2-1}$, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y^2-1}$.

Згідно з початковими умовами $0=\pm\sqrt{C_1-1}\Rightarrow C_1=1$. Відокремимо в останньому рівнянні змінні та виконаємо друге інтегрування: $\frac{dy}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm dx$, $\int\frac{dy}{\sqrt{C_1y^2-1}}=$ $=\pm\int dx+C_2$, $\frac{1}{\sqrt{C_1}}ln\left|\sqrt{C_1}y+\sqrt{C_1y^2-1}\right|=C_2\pm x$. Загальний інтеграл ДР знайдений. Оскільки $y(0)=1$, а $C_1=1$, то $C_2=ln\left|1+\sqrt{1-1}\right|=0$. Визначився частинний інтеграл: $ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x$. Неважко дістати і явну залежність y від x:

$y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$, $\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}-y$, $y^2-1=e^{\pm 2x}-2ye^{\pm x}+y^2$, $2ye^{\pm x}=e^{\pm 2x}+1$, $y=\frac{1}{2}\left(e^{\pm x}+e^{\mp x}\right)$ або $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=chx$. Задача Коші розв`язана. Очевидно, що функції $y\equiv\pm 1$ не задовольняють вихідне ДР. Тому ділення рівняння на величину $\sqrt{y^2-1}$ до утрати розв`язку не призводить.

4^0. *Рівняння $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ з однорідною відносно аргументів $y, y', \dots, y^{(n)}$ функцією F*. Обмеження, що накладається на функцію F, означає, що вона має властивість:

$$F\left(x, ty, ty',...,t\,y^{(n)}\right)=t^mF\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right).$$

Через те, що права частина ДР є нулем, множник t^m скоротиться, отже, формальна заміна y на ty, y' на ty', … , $y^{(n)}$ на $ty^{(n)}$ не змінить вигляду вихідного ДР. Порядок рівняння у цьому випадку знижується за допомогою підстановки $y'=zy$, де $z=z(x)$ – нова невідома функція. Зокрема, для диференціального рівняння 2-го порядку $F\left(x,y,y',y''\right)=0$ в результаті замін $y'=zy$, $y''=z'y+zy'=z'y+z^2y$ одержимо $F(x,\ y,\ zy,\ y(z'+z^2))=0$. Внаслідок однорідності F величина y виноситься за межі F і у припущенні, що $y\neq 0$, скорочується. Маємо $F(x,\ 1,\ z,\ z'+z^2)=0$. Відносно функції z це – ДР 1-го порядку. Визначивши з нього $z=z(x)$, за рівнянням $y'=zy$ потрібно потім знайти функцію $y=y(x)$.

Приклад 4. $x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$, $y(x)$ – ?

Розв`язування. Тут $F=x^2yy''-\left(y-xy'\right)^2$ – однорідна функція аргументів y, y', y'': при заміні y на ty, y' на ty', y'' на ty'' виконується рівність $F\left(x,\ ty,\ ty',\ ty''\right)=$ $=t^2F\left(x,y,y',y''\right)$. Застосуємо підстановку $y'=zy$. Тоді $y''=\left(z'+z^2\right)y$, та рівняння перетвориться до вигляду $x^2y^2\left(z'+z^2\right)=(y-xzy)^2$, $x^2\left(z'+z^2\right)=(1-xz)^2$, $x^2z'=1-2xz$, $x^2z'+2xz=1$. Отримали лінійне ДР 1-го порядку з умовою $z(1)=2$. Розв`яжемо рівняння за допомогою заміни $z = uv$: $x^2u'v+x^2uv'+2xuv=1$, $x^2u'v+xu[xv'+2v]=1$, $xv'+2v=0$, $x\dfrac{dv}{dx}=-2v$, $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{2dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x}$, $ln\, v=ln\, x^{-2}$, $v=\dfrac{1}{x^2}$. Знайдемо функцію u: $x^2u'\dfrac{1}{x^2}=1$, $u'=1$, $du=dx$, $\displaystyle\int du=\int dx+C_1$, $u= x + C_1$. Отже, $z=u\,v= =(x+C_1)\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C_1}{x^2}$. З урахуванням початкових умов визначимо сталу C_1: $z(1)=y'(1)/y(1)=2$, $2 = 1 + C_1$, $C_1 = 1$. Далі маємо $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C_1}{x^2}$, $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}+\dfrac{C_1dx}{x^2}$, $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C_1\int\frac{dx}{x^2}+ln\, C_2$, $ln\, y=ln\, x-\dfrac{C_1}{x}+ln\, C_2$, $ln\dfrac{y}{C_2x}=-\dfrac{C_1}{x}$, $\dfrac{y}{C_2x}=e^{-C_1/x}$, тобто $y=C_2xe^{-C_1/x}$ – загальний розв`язок ДР. За даними початковими умовами при $C_1 = 1$ знаходимо: $1=C_2e^{-1}$, $C_2 = e$. Таким чином, розв`язком задачі Коші є функція $y=xe^{1-1/x}$. В процесі зниження порядку ДР проводилося ділення рівняння на величину y^2. Втрати розв`язків при цьому не відбувається, тому що в силу першої початкової умови $y\neq 0$.

♦ XVIII століття – період тріумфальної ходи нового числення. Перед дослідниками відкрився необмежений обрій. Стало зрозуміло, що різноманітні явища природи формулюються та можуть бути вивчені за допомогою диференціальних рівнянь. Характерний вислів Д. Араго (фр. вчений, 1786 – 1853): «П`ять геометрів, Клеро, Ейлер, Даламбер, Лагранж та Лаплас, поділили між собою той світ, існування якого відкрив Ньютон. Вони дослідили його по всіх напрямках, проникли в галузі, які вважалися недоступними, вказали безліч явищ в цих галузях, які ще не були відкриті спостереженнями, і, нарешті, – в цьому їх вічна слава, – вони охопили за допомогою одного принципу, одного-єдиного закону самі тонкі й таємничі явища у русі небесних тіл. Таким чином, геометрія насмілилася розпоряджатися майбутнім, і хід наступних століть тільки підтвердить в усіх подробицях висновки науки». Перерахуємо лише деякі прикладні проблеми, якими займалися названі вище математики. Клеро – теорія фігури Землі, рух Луни і комет, рівновага рідини, що обертається; Ейлер – механіка твердого тіла, гідродинаміка, балістика, навігація, картографія, теорія музики; Даламбер – механіка, гідродинаміка, рух твердого тіла у рідині, небесна механіка, математична фізика; Лагранж – механіка, теорія вібрації Луни, рух супутників Юпітера, гідродинаміка; Лаплас – небесна механіка, математична фізика, теорія приплив та відпливів. Вагому частину в цих дослідженнях склали задачі, що пов`язані з розв`язуванням диференціальних рівнянь порядку вище першого.

§ 50. Лінійні диференціальні рівняння 2-го та більш високих порядків

У лісі фактів або в океані думок однаково можна заблукати без теорій та доктрин.
Д. Менделєєв, рос. хімік XIX ст.

1⁰. ***Лінійний диференціальний оператор 2-го порядку***. Диференціальне рівняння 2-го порядку називають лінійним, якщо шукана функція $y = y(x)$ та її похідні y', y'' входять до рівняння лінійно, тобто в 1-му степені, не перемножуючись між собою. Це – рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

У загальному випадку в (1) коефіцієнти p, q та права частина f – визначені функції аргументу x. Зокрема, на їх місці можуть бути і сталі числа.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) спрощується:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

Рівність (2) називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР), а (1), де $f(x) \neq 0$, – лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР).

Заради спрощення запису використовують позначення

$$L[y] = y'' + py' + qy. \tag{3}$$

Стосовно зображення (3) говорять, що задано лінійний диференціальний оператор 2-го порядку. Оператор $L[y]$ визначений тими операціями, які проводяться над функцією y – диференціюванням, множенням на коефіцієнти, додаванням. Рівняння (1) та (2) з використанням (3) записуються так:

$$L[y] = f(x) \quad (1'), \qquad\qquad L[y] = 0. \qquad (2')$$

Якщо в деякому проміжку змінення x функції p, q, f неперервні, а x_0 – точка з цього проміжку, то розв`язок задачі Коші для ДР (1)

$$L[y] = f(x), \quad y(x_0) = h_0, \quad y'(x_0) = h_1 \tag{4}$$

при будь-яких фіксованих значеннях h_0, h_1 існує та єдиний. Це випливає із загальної теореми, що наведена в 3⁰ § 47. Згідно з (1) $y'' = f(x) - p(x)y' - q(x)y = \varphi(x, y, y')$. Функція $\varphi(x, y, y')$ та її похідні $\partial\varphi/\partial y = -q$, $\partial\varphi/\partial y' = -p$ неперервні в силу неперервності елементів p, q, f, y та y' (як розв`язок ДР (1) функція y повинна бути двічі диференційовна, що можливо тільки в тому випадку, якщо y та y' неперервні). Умови теореми дотримано. Значить, справедливо й сформульоване вище твердження.

Оператор $L[y]$ має такі очевидні властивості:

1) якщо $C = const$, то $L[Cy] = CL[y]$ – властивість однорідності;

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ – властивість адитивності.

Справді, відповідно до формули (3) дістаємо

1) $L[Cy] = (Cy)'' + p(Cy)' + q(Cy) = Cy'' + Cpy' + Cqy = CL[y]$;

2) $L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) =$

$$= (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = L[y_1] + L[y_2].$$

Окрім диференціальних (2-го або іншого порядку) існують і інші лінійні оператори (наприклад, інтегральні типу $L[y] = \int\limits_0^\infty e^{-px} y(x)dx$). Для усіх таких операторів властивості 1) та 2) є спільними.

Із властивостей оператора L випливають дві важливі особливості ЛОДР (2):

а) якщо функція $y_1 = y_1(x)$ – розв`язок рівняння (2), тобто $L[y_1] \equiv 0$, то функція $y = Cy_1$, де $C$ – довільна стала, також буде його розв`язком; б) якщо $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ – розв`язки рівняння (2), тобто $L[y_1] \equiv 0$, $L[y_2] \equiv 0$, то сума $y = y_1 + y_2$ теж є його розв`язком.

Дійсно: а) $L[y] = L[Cy_1] = CL[y_1] \equiv 0$;

б) $L[y] = L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0$.

Для ЛНДР (1) характерна властивість, яка зветься **принципом суперпозиції** (інакше: накладань) **розв`язків**. Вона полягає в наступному. Якщо правій частині рівняння (1) $f(x) = f_1(x)$ та $f(x) = f_2(x)$ окремо відповідають його розв`язки $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x)$ та $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x)$, тобто $L[\bar{y}_1] \equiv f_1(x)$, $L[\bar{y}_2] \equiv f_2(x)$, то правій частині вигляду $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ відповідає розв`язок ДР (1) $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$. В цьому неважко переконатися:

$$L[\bar{y}] = L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] \equiv f_1(x) + f_2(x) \equiv f(x).$$

2^0. ***Структура загального розв`язку* ЛОДР (2) *та* ЛНДР (1)**. Припустимо, що відомі два ненульових частинних розв`язки ДР (2): $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$. Властивість бути розв`язком рівняння (2) не втрачається, якщо функції y_1 та y_2 помножити на довільні сталі та додати (див. 1^0). Тому при будь-яких сталих C_1 та C_2 лінійна комбінація

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{5}$$

теж буде розв`язком ЛОДР (2).

За означенням (1^0 § 47) загальний розв`язок ДР 2-го порядку повинен містити дві довільні сталі, причому так, щоб їх не можна було звести до меншої кількості сталих через нові позначення. Вираз (5) відповідає цій вимозі тільки тоді, коли функції y_1 та y_2 лінійно незалежні, тобто одну з них не можна виразити через іншу, помноживши на яке-небудь стале число (дві функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні, якщо їх відношення $y_2 / y_1 \neq k = const$). У противному разі $y_2 = ky_1$, $Y = C_1 y_1 + C_2 k y_1 = (C_1 + C_2 k) y_1$: вираз у дужках є сталим числом, його можна позначити однією буквою, отже, $Y = Cy_1$. Властивість бути розв`язком ДР (2) при цьому за $Y$ зберігається, але виступати як загальний розв`язок ДР 2-го порядку $Y = Cy_1$ не може.

Отже, щоб побудувати загальний розв`язок $Y$ ЛОДР (2), достатньо знайти два будь-які його частинні розв`язки y_1 та y_2, лінійно незалежні між собою, і підставити їх у формулу (5). Сукупність розв`язків $y_1$ та $y_2$, що відповідають вимозі лінійної незалежності, називають **фундаментальною системою розв`язків** ЛОДР (2).

Якщо $\bar{y} = \bar{y}(x)$ – частинний розв`язок ДР (1), тобто $L[\bar{y}] \equiv f(x)$, а $Y$ – загальний розв`язок ДР (2), отже, $L[Y] \equiv 0$, то функція

$$y = Y + \bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \bar{y}(x) \tag{6}$$

буде загальним розв`язком ЛНДР (1).

Дійсно, по-перше, (6) – це розв`язок ДР (1):

$$L[y] = L[Y + \bar{y}] = L[Y] + L[\bar{y}] \equiv 0 + f(x) \equiv f(x),$$

по-друге, він загальний, оскільки містить дві довільні сталі та їх кількість не може бути зменшена в силу лінійної незалежності функцій y_1 та y_2.

Формула (6) визначає структуру загального розв`язку ЛНДР (1). Для його побудови потрібно знайти, а потім додати загальний розв`язок Y ЛОДР (2) та частинний розв`язок $\bar{y}$ ЛНДР (1).

У задачі Коші (4) потрібно підкорити загальний розв`язок (6) умовам $y(x_0) = h_0, y'(x_0) = h_1$, де h_0 та h_1 – задані числа. Це приводить до рівностей

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \bar{y}(x_0) = h_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = h_1. \end{cases} \tag{7}$$

Питання про однозначну розв`язність алгебраїчної системи (7) відносно невідомих $C_1$ та $C_2$ пов`язане із властивостями спеціального визначника, який називають визначником Вронського (або вронськіаном):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Відома така теорема: визначник (8) не перетворюється на нуль ні при якому значенні x, якщо y_1 та y_2 – лінійно незалежні частинні розв`язки ДР (2), тобто утворюють фундаментальну систему розв`язків.

Справді, $L[y_1] \equiv 0$, $L[y_2] \equiv 0$, $y_1 L[y_2] - y_2 L[y_1] \equiv 0$ та згідно з (3) $y_2'' y_1 - y_2 y_1'' + p(y_2' y_1 - y_1' y_2) \equiv 0$. Оскільки $W = y_2' y_1 - y_1' y_2$, $W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$, то записана вище тотожність приймає вигляд $W' + pW \equiv 0$. Розв`язуючи це ДР з відокремлюваними змінними, знаходимо: $\dfrac{dW}{dx} \equiv -pW$, $\dfrac{dW}{W} \equiv -p\,dx$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dW(t)}{W(t)} \equiv -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$, $\displaystyle lnW(t)\Big|_{x_0}^{x} \equiv -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$, $\displaystyle lnW(x) - lnW(x_0) \equiv -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$, $\displaystyle ln\frac{W(x)}{W(x_0)} \equiv -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$,

$$W(x) \equiv W(x_0) \cdot exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt \right).$$

Якщо $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0$ ні при якому значенні x.

Отже, визначник (8) або не перетворюється на нуль ні в одній точці, або дорівнює нулю в усіх точках розглядуваного проміжку. Останнє – тільки при лінійній залежності y_1 та y_2: $W(x) \equiv 0 \;\Rightarrow\; y_2' y_1 - y_1' y_2 \equiv 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv 0 \;\Rightarrow\; (y_2/y_1)' \equiv 0 \;\Rightarrow\; y_2/y_1 = const$.

Визначник Δ системи (7) є значенням функції $W(y_1, y_2)$, що обчислене у точці x_0. В силу лінійної незалежності величин y_1 та y_2 при будь-якому x_0 $\Delta \neq 0$. Отже, при будь-яких значеннях x_0, h_0, h_1 із системи (7) єдиним чином визначаються числа C_1, C_2. Це означає, що за загальним розв`язком (6) завжди можна знайти частинний розв`язок, що відповідає заданим початковим умовам, тобто розв`язати задачу Коші.

3⁰. ***Побудова загального розв`язку Y ЛОДР (2) із сталими коефіцієнтами***. Розглянемо ЛОДР (2), в якому коефіцієнти p та q – сталі дійсні числа

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{або} \quad L[y] = 0. \tag{9}$$

Розв`язок $y = y(x)$ повинен перетворити ліву частину (9) на тотожний нуль. Це можливо, якщо доданки, що входять в неї – однотипні функції. Незмінність вигляду функції при диференціюванні – характерна особливість експоненти. Тому розв`язок ДР (9) природно шукати у формі $y = e^{kx}$, де $k = const$. Підставляємо $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ в (9). Одержимо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для виконання потрібної нам тотожності необхідно, щоб

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{10}$$

Рівність (10) називають **характеристичним рівнянням** для ДР (9). Корені рівняння (10) можуть бути числами 1) дійсними та різними; 2) дійсними та рівними; 3) комплексними. Кожний з цих випадків вивчимо окремо.

1) Корені характеристичного рівняння дійсні та різні: $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ – лінійно незалежні частинні розв`язки ДР (9): $y_2 / y_1 = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$. З цих функцій за формулою (5) можна утворити загальний розв`язок ДР (9):

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{11}$$

Приклад 1. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $Y(x) - ?$

Розв`язування. Маємо ЛОДР типу (9). Згідно з (10) запишемо відповідне характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3.$$

На підставі (11) одержимо загальний розв`язок ДР: $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Приклад 2. $y'' + 2y' = 0$, $Y(x) - ?$

**Розв`язування**. Характеристичне рівняння тут $k^2 + 2k = 0$. Його корені $k_1 = 0$, $k_2 = -2$ – числа дійсні та різні. Тому загальним розв`язком ДР є

$$Y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} \quad \text{або} \quad Y = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2) Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні: $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k}$.

Маємо один частинний розв`язок рівняння (9) $y_1 = e^{kx}$. Для побудови загального розв`язку ДР (9) його недостатньо. Покажемо, що за другий частинний розв`язок y_2, лінійно незалежний з y_1, у даному випадку можна взяти $y_2 = xe^{kx}$. Дійсно, $y_2 = xe^{kx}$, $y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}$, $y_2'' = \; = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx}$. При цьому $L[y_2] = e^{kx}\left(k^2 x + 2k\right) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} =$

$$= xe^{kx}\underbrace{\left(k^2 + pk + q\right)}_{=0} + e^{kx}\underbrace{(2k + p)}_{=0} \equiv 0.$$

Вираз у перших дужках перетворився на нуль на підставі рівності (10), а у других дужках нуль вийшов в силу теореми Вієта: сума коренів $k_1 + k_2 = -p$ і, оскільки $k_1 = k_2 = k$, то $2k = -p$. Тим самим доведено, що $y = xe^{kx}$ – розв`язок ДР (9). Розв`язки $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$ – лінійно незалежні. Тому згідно з (5) загальний розв`язок ДР (9)

$$Y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{12}$$

Приклад 3. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $Y(x) - ?$

**Розв`язування**. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 9 = 0$. Його корені збігаються: $k_1 = k_2 = -3$. Застосувавши формулу (12), запишемо загальний розв`язок ДР:

$$Y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

3) Корені характеристичного рівняння комплексні: $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$. Рівняння (10) має корені $k_1 = \alpha + \beta i$ та $k_2 = \alpha - \beta i$, де i – уявна одиниця ($i^2 = -1$), а α та β – дійсні числа. Властивості коренів рівняння (10) справедливі і в цьому випадку: $k_1 + k_2 = -p$, $k_1 \cdot k_2 = q$. Таким чином, $2\alpha = -p$, $\alpha^2 + \beta^2 = q \;\Rightarrow\; 2\alpha + p = 0,\; q - \beta^2 = \alpha^2$.

Тепер покажемо, що функція $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$ є розв`язком ДР (9). Маємо

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \cos\beta x - \beta \sin\beta x),\; y_1'' = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta \sin\beta x\right],$$

$$L[y_1] = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q)\cos\beta x - \beta(2\alpha + p)\sin\beta x\right].$$

Із врахуванням наведених вище співвідношень одержуємо

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q = 2\alpha^2 + \alpha p = \alpha(2\alpha + p),$$

$$L[y_1] = e^{\alpha x}(2\alpha + p)[\alpha \cos\beta x - \beta \sin\beta x] \equiv 0.$$

Так само можна переконатися в тому, що розв`язком ДР (9) буде функція $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$. Функції $y_1$ та $y_2$ лінійно незалежні: $y_2 / y_1 = tg\beta x \neq const$, тому в силу (5) загальний розв`язок ДР (9) подається формулою

$$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \tag{13}$$

Приклад 4. $y'' - 4y' + 29y = 0$, $Y(x) - ?$

**Розв`язування**. Запишемо характеристичне рівняння та визначимо його корені: $k^2 - 4k + 29 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-25} = 2 \pm 5\sqrt{-1} = 2 \pm 5i$. Маємо випадок комплексних коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $\alpha = 2$, $\beta = 5$. Загальний розв`язок ДР знайдемо за формулою (13): $Y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Приклад 5. $y'' + 9y = 0$, $Y(x) - ?$

**Розв`язування**. Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. Дійсна частина кореня відсутня, тобто $\alpha = 0$, коефіцієнт при уявній одиниці (без врахування знака) $\beta = 3$. Згідно з (13) загальний розв`язок ДР

$$Y = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \quad \text{або} \quad Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

4⁰. ***Відшукування частинного розв`язку $\bar{y}$ ЛНДР (1) із сталими коефіцієнтами для деяких виглядів його правої частини $f(x)$***. Розглянемо рівняння (1)

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{14}$$

в якому p та q – сталі числа, а $f(x)$ – функція спеціального вигляду (експонента, многочлен, синус, косинус, лінійна комбінація цих функцій, їх добуток).

Згідно з формулою (6) загальний розв`язок рівняння (14) зображується сумою $y = Y + \bar{y}$, де $Y$ – загальний розв`язок ДР (9), а $\bar{y}$ – частинний розв`язок ДР (14). Як правило, вибір форми $\bar{y}$ оснований на тому, що обидві функції $\bar{y}$ та $f(x)$ повинні бути подібними. В чому полягає ця подібність, – уточнюється нижче. Однак, існують і виключення: якщо серед доданків, що входять в Y та $\bar{y}$, хоча б два виявляються лінійно залежними, то $\bar{y}$ слід змінити, вносячи в його первісний вираз множником той чи інший степінь x. Процедура підбора $\bar{y}$ далі конкретизується.

$$\mathbf{1}.\ \boldsymbol{f(x) = A_1 e^{ax}}, \quad A_1 \text{ та } a - \text{сталі}. \tag{15}$$

Частинний розв`язок $\bar{y}$ відшукується у формі

$$\bar{y} = Ae^{ax}. \tag{16}$$

Тут a – те саме число, що і в (15), а число A потрібно підібрати так, щоб $\bar{y}$ перетворювало (14) на тотожність. Підставляємо (16) та (15) в (14), враховуючи, що $\bar{y}' = Aae^{ax}$, $\bar{y}'' = Aa^2e^{ax}$. Отримуємо $Ae^{ax}(a^2 + pa + q) = A_1e^{ax}$, таким чином,

$$A = A_1 / (a^2 + pa + q). \tag{17}$$

Якщо знаменник цього дробу не дорівнює нулю, то коефіцієнт A знаходиться за формулою (17). Тим самим, згідно з (16), визначається й частинний розв`язок $\bar{y}$.

Приклад 6. $y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}$, $y(x) - ?$

**Розв`язування**. Знайдемо корені характеристичного рівняння $k^2 - 6k + 13 = 0$: $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$. Корені комплексного вигляду $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Загальний розв`язок однорідного ДР, що відповідає заданому, визначений формулою (13):

$Y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$. Частинний розв`язок $\bar{y}$ шукаємо у формі (16) $\bar{y} = Ae^{2x}$. Ця функція із доданками, що утворюють Y, лінійно незалежна. Внесемо $\bar{y}$ до ДР:

$$4Ae^{2x} - 12Ae^{2x} + 13Ae^{2x} = 5Ae^{2x}, \ \ 5A = 5, \ \ A = 1.$$

Таким чином, $\bar{y} = e^{2x}$. (Фактично повторене виведення формули (17), до якої можна було звернутися і безпосередньо: $A = \dfrac{5}{4 - 6 \cdot 2 + 13} = 1$). Загальний розв`язок ДР:

$$y = Y + \bar{y} = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{2x}.$$

Виключення. Якщо число a збігається з одним із коренів рівняння (10): $a = k_1, \ a \neq k_2$, то $a^2 + pa + q = 0$ та з огляду на (17) отримати розв`язок $\bar{y}$ у формі (16) не можна. Покажемо, що у цьому випадку можливе подання

$$\bar{y} = Axe^{ax}. \tag{18}$$

Дійсно, $\bar{y}' = Ae^{ax} + Aaxe^{ax}$, $\bar{y}'' = 2Aae^{ax} + Aa^2xe^{ax}$ і підстановка (18) та (15) в (14) приводить до рівності

$$Ae^{ax}\left[\underbrace{\left(a^2 + pa + q\right)}_{=0}x + \left(2a + p\right)\right] = A_1e^{ax}.$$

Звідси при $2a + p \neq 0$ визначиться коефіцієнт A:

$$A = A_1/\left(2a + p\right), \tag{19}$$

що свідчить про існування частинного розв`язку $\bar{y}$ у формі (18).

Приклад 7. $y'' - 7y' + 12y = 2e^{3x}$, $y(x) - ?$

Розв`язування. Діючи за загальною схемою, знаходимо $k^2 - 7k + 12 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$. Права частина ДР тут $f\left(x\right) = 2e^{3x}$, коефіцієнт в показнику степеня експоненти $a = 3$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння: $a = k_1 = 3$, тому для $\bar{y}$ слід вибрати формулу (18), тобто покласти $\bar{y} = Axe^{3x}$ (формула (16) у даному випадку привела б до того, що $\bar{y} = Ae^{3x}$ та доданок C_1e^{3x} із Y виявилися б лінійно залежними. Множник x таку залежність усуває). Згідно з (19) та (18) маємо $A = \dfrac{2}{2 \cdot 3 - 7} = -2$, $\bar{y} = -2xe^{3x}$. Загальний розв`язок ДР:

$$y = Y + \bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - 2xe^{3x}.$$

При подвійному збігу, коли $a = k_1 = k_2$, обидва знаменника у дробах (17) та (19) одночасно дорівнюють нулю, перший на підставі (10), другий – в силу теореми Вієта: $k_1 + k_2 = -p \ \Rightarrow \ 2a + p = 0$. Обидві форми (16) та

(18) для $\bar{y}$ тепер непридатні. У цьому випадку частинний розв`язок $\bar{y}$ можна знайти у формі

$$\bar{y} = Ax^2 e^{ax}. \tag{20}$$

Дійсно, підставивши $\bar{y} = Ax^2 e^{ax}$, $\bar{y}' = A\left(2x + ax^2\right)e^{ax}$, $\bar{y}'' = A\left(2 + 4ax + a^2x^2\right)e^{ax}$ та (15) в ДР (14), одержимо

$$Ae^{ax}\left[x^2\underbrace{\left(a^2 + pa + q\right)}_{=0} + 2x\underbrace{\left(p + 2a\right)}_{=0} + 2\right] = A_1 e^{ax},\ 2A = A_1, \text{ отже,}$$

$$A = A_1/2. \tag{21}$$

Коефіцієнт A знайдений, а значить – визначений і розв`язок $\bar{y}$ у формі (20).

Приклад 8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(x) - ?$

**Розв`язування**. Маємо $k^2 - 4k + 4 = 0$, $k_1 = k_2 = 2$, $Y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Оскільки тут $a = k_1 = k_2$, то $\bar{y} = Ax^2e^{2x}$. Згідно з (21) $A = 1/2$. Отже, $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, а загальний розв`язок ДР $y = Y + \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

$$\mathbf{2}.\ \boldsymbol{f(x) = P_n(x)},\quad P_n(x) = A_1x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + M_1, \tag{22}$$

коефіцієнти $A_1, B_1, \ldots, M_1$ – задані числа.

Частинний розв`язок $\bar{y}$ ДР (14) належить до класу многочленів того самого степеня, що і $P_n(x)$, тобто

$$\bar{y} = Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + M. \tag{23}$$

Многочлен $Q_n(x)$ визначиться, як тільки будуть знайдені його коефіцієнти A, B, … M. Для їх відшукання застосовують метод невизначених коефіцієнтів. Підставляють $\bar{y} = Q_n(x)$ у рівняння (14), де $f(x)$ має вигляд (22), та вимагають виконання тотожності

$$Q_n'' + pQ_n' + qQ_n \equiv P_n.$$

Обидві частини рівності є многочленами степеня n. Два многочлени тотожно рівні, якщо їх коефіцієнти при однакових степенях x збігаються. Зрівнявши ці коефіцієнти, приходять до системи, що складається з $n+1$ алгебраїчних рівнянь з невідомими A, B, … M, а потім знаходять її розв`язок.

Приклад 9. $y'' - 2y' - 3y = 6x$, $y(x) - ?$

Розв`язування. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$ дійсні й різні:

$k_1 = -1,\ k_2 = 3$. Згідно з (11) $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Права частина ДР за типом належить до многочленів степеня $n = 1$ ($f(x) = 6x$, тобто $f(x) = A_1 x + B_1$, де $A_1 = 6$, $B_1 = 0$). Частинний розв`язок ДР шукаємо у формі (23) $\bar{y} = Ax + B$ (з того, що $B_1 = 0$, не випливає, що $B = 0$ також). Підставимо $\bar{y} = Ax + B$, $\bar{y}' = A$, $\bar{y}'' = 0$ у рівняння. Отримаємо $0 - 2A - 3(Ax + B) = 6x$. Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва й справа:

$$\begin{array}{l|l} \text{при } x & -3A = 6 \\ \text{при } x^0 & -2A - 3B = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow\ A = -2,\ B = 4/3.$$

Таким чином, $\bar{y} = -2x + 4/3$, а загальний розв`язок ДР:

$$y = Y + \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2x + 4/3.$$

Виключення. Якщо один з коренів характеристичного рівняння є нулем: $k_1 = 0$ (це має місце тільки тоді, коли у рівнянні (14) $q = 0$), то внесення (22) та (23) в (14) приводить до рівності $Q_n'' + pQ_n' = P_n$. Перетворитися на тотожність вона не може, тому що в її правій частині міститься многочлен степеня n, а ліва частина є многочленом степеня $n-1$. Щоб цей дефект усунути, потрібно степінь многочлена (23) збільшити на одиницю. Вільний член тут ролі не грає оскільки $q = 0$ (y входить до ДР тільки через власні похідні). Тому достатньо покласти

$$\bar{y} = xQ_n(x), \tag{24}$$

а далі діяти за тою самою схемою, що й вище.

При $k_1 = k_2 = 0$, тобто якщо $q = 0$, $p = 0$, так само можна показати, що $\bar{y}$ слід брати у формі $\bar{y} = x^2 Q_n(x)$.

Приклад 10. $y'' - 3y' = 18x + 9$, $y(x) - ?$

**Розв`язування**. Характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$. Його корені $k_1 = 0$, $k_2 = 3$. На підставі (11) маємо $Y = C_1 + C_2 e^{3x}$. Права частина ДР є многочленом степеня $n = 1$, але в силу того, що $k_1 = 0$, частинний розв`язок $\bar{y}$ тут потрібно шукати у формі (24): $\bar{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ (якщо вибрати форму (23), тобто $\bar{y} = Ax + B$, то доданок B із $\bar{y}$ та доданок C_1 із Y будуть лінійно залежними). Знаходимо $\bar{y}' = 2Ax + B$, $\bar{y}'' = 2A$. Вносимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в ДР: $2A - 3(2Ax + B) = 18x + 9$. Зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} \text{при } x & -6A = 18 \\ \text{при } x^0 & 2A - 3B = 9 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow\ A = -3,\ B = -5; \quad \bar{y} = -3x^2 - 5x.$$

Загальний розв`язок ДР: $y = Y + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{3x} - 3x^2 - 5x$.

3. $\boldsymbol{f(x) = A_1 cosbx + B_1 sinbx}$, A_1, B_1, b – сталі числа. (25)

Частинний розв`язок $\bar{y}$ у цьому випадку має форму

$$\bar{y} = A\cos bx + B\sin bx, \tag{26}$$

де параметр b той самий, що і в (25), а числа A та B підбираються так, щоб підстановка (26) в (14) приводила до тотожності. Після внесення (26) в (14) обидві частини рівності будуть містити тільки дві функції – $\cos bx$ та $\sin bx$. Зрівнявши коефіцієнти зліва та справа при кожній з цих функцій окремо, можна утворити алгебраїчну систему з невідомими A та B. Її розв`язання дозволить визначити $\bar{y}$ у формі (26).

Приклад 11. $y'' + 3y' = 18\sin 3x$, $y(x)$ – ?

Розв`язування. Характеристичне рівняння $k^2 + 3k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. За формулою (11) запишемо $Y = C_1 + C_2 e^{-3x}$. Права частина ДР $f(x) = 18\sin 3x$ належить до типу (25): $A_1 = 0$, $B_1 = 18$, $b = 3$. Згідно з (26) $\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$. Маємо $\bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$, $\bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$. Підставимо в ДР $\bar{y}'$, $\bar{y}''$:
$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 3(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) = 18\sin 3x$.
Зрівняємо коефіцієнти:

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{при } \cos 3x & -9A + 9B = 0 \\ \text{при } \sin 3x & -9A - 9B = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = -1;\ \bar{y} = -\cos 3x - \sin 3x.$$

Загальний розв`язок ДР: $y = Y + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-3x} - \cos 3x - \sin 3x$.

Виключення. Якщо корені характеристичного рівняння суто уявні, тобто $k = \pm\beta i$ та $b = \beta$, то $\bar{y}$ слід шукати у вигляді

$$\bar{y} = x(A\cos bx + B\sin bx). \tag{27}$$

Приклад 12. $y'' + 4y = \cos 2x$, $y(x)$ – ?

Розв`язування. Одержуємо: $k^2 + 4 = 0$, $k^2 = -4$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Згідно з формулою (13), де $\alpha = 0$, $\beta = 2$, запишемо $Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Вибір $\bar{y}$ у формі (26) приводить до лінійної залежності доданків із Y та $\bar{y}$. Тому має місце виключення, для $\bar{y}$ повинна бути обрана форма (27), тобто $\bar{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.
Знайдемо $\bar{y}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$,

$$\bar{y}'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x).$$

Внесемо у ДР $\bar{y}$ та $\bar{y}''$: $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) +$
$+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x$ або $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x$.

Звідси випливає: $A = 0$, $B = 1/4$; $\bar{y} = \frac{1}{4}x\sin 2x$.

Загальний розв`язок ДР: $y = Y + \bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{4}\cdot\sin 2x$.

Зауваження 1. Якщо $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня

n $P_n(x)=A_1x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+M_1$, то частинний розв`язок $\bar{y}$ ДР (14) відшукується у формі

$$\bar{y}=\begin{cases} e^{ax}Q_n(x) & \text{при } a\neq k_1,\, a\neq k_2, \\ e^{ax}xQ_n(x) & \text{при } a=k_1,\, a\neq k_2, \\ e^{ax}x^2Q_n(x) & \text{при } a=k_1=k_2, \end{cases} \tag{28}$$

де k_1 та k_2 – корені рівняння (10).

Приклад 13. $y''-y=4xe^x$, $y(x)-?$

Розв`язування. Маємо $k^2-1=0$, $k_{1,2}=\pm1$, $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Оскільки тут $f(x)=4xe^x$, тобто добуток многочлена 1-го степеня та експоненти, а коефіцієнт у показнику степеня експоненти збігається з одним із коренів характеристичного рівняння $a=k==1$, то згідно з (28) $\bar{y}=(Ax+B)xe^x=\left(Ax^2+Bx\right)e^x$ (без множника x з`явився б доданок Be^x, лінійно залежний із доданком C_2e^x із Y). Одержимо

$$\bar{y}'=(2Ax+B)\,e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x,\quad \bar{y}''=2Ae^x+2(2Ax+B)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x.$$

Внесемо $\bar{y}$ та $\bar{y}''$ у ДР: $e^x\left(2A+4Ax+2B+Ax^2+Bx\right)-\left(Ax^2+Bx\right)e^x=4xe^x$, тобто $2A+2B+4Ax=4x$. Зрівняємо коефіцієнти:

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{при } x & 4A=4 \\ \text{при } x^0 & 2A+2B=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\ A=1,\ B=-1;\quad \bar{y}=\left(x^2-x\right)e^x.$$

Загальний розв`язок ДР: $y=Y+\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+\left(x^2-x\right)\cdot e^x$.

Зауваження 2. Якщо права частина ДР (14) являє собою суму $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, причому $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – функції наведеного вище типу, то в силу принципу суперпозиції (див. 1^0) частинний розв`язок ДР $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$, де $\bar{y}_1$ та $\bar{y}_2$ – частинні розв`язки рівняння, що відповідають $f_1(x)$ та $f_2(x)$ окремо. Невідомі сталі, що входять до $\bar{y}_1$ та $\bar{y}_2$, визначаються за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 14. $y''+y'-2y=4+3e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=6$, $y(x)-?$

Розв`язування. Маємо задачу Коші. Запишемо характеристичне рівняння $k^2+k-2=0$. Його корені $k_1=-2$, $k_2=1$, таким чином, $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$. Правою частиною ДР є сума: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)=4$, $f_2(x)=3e^x$. Функція $f_1(x)$ – многочлен нульового степеня, в силу (23) $f_1(x)$ відповідає частинний розв`язок вигляду $\bar{y}_1=A$. Функції $f_2(x)=3e^x$ згідно з (18) відповідає частинний розв`язок типу $\bar{y}_2=Bxe^x$ (оскільки коефіцієнт у показнику степеня експоненти $a=1$ та $a=k_2=1$, то формула (16) тут непридатна). Отже, $\bar{y}$ слід шукати у вигляді суми $\bar{y}=A+Bxe^x$. Одержимо $\bar{y}' = Be^x(1+x)$, $\bar{y}'' = Be^x(2+x)$. Внесемо у ДР $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$:

$$Be^x(2+x) + Be^x(1+x) - 2\left(A + Bxe^x\right) = 4 + 3e^x \quad \text{або} \quad 3Be^x - 2A = 4 + 3e^x.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{при } e^x & 3B = 3 \\ \text{при } x^0 & -2A = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -2,\ B = 1; \quad \bar{y} = -2 + xe^x.$$

Загальний розв`язок ДР: $y = Y + \bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2 + x \cdot e^x$.

Відповідно до початкових умов визначимо сталі C_1 та C_2. Диференціюючи загальний розв`язок, отримаємо $y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x + e^x + x \cdot e^x$. У вирази для y та y' внесемо значення $x = 0$, $y = 0$, $y' = 6$. Маємо систему вигляду (7)

$$\left.\begin{array}{r} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ -2C_1 + C_2 + 1 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = -1,\ C_2 = 3.$$

За загальним розв`язком ДР при $C_1 = -1$, $C_2 = 3$ запишемо частинний розв`язок, що відповідає заданим початковим умовам, тобто знаходимо розв`язок задачі Коші:

$$y = -e^{-2x} + 3e^x - 2 + x \cdot e^x.$$

5^0. *Метод варіації довільних сталих*.

Цей метод вже використовувався для побудови розв`язку лінійного ДР 1-го порядку (див. $3^0$ § 48). Він придатний також для лінійних ДР більш високого порядку. У застосуванні до рівнянь 2-го порядку суть метода полягає в наступному. Припустимо, що відомий загальний розв`язок (5) ЛОДР (2), тобто

$$Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

де y_1 та y_2 – частинні розв`язки цього рівняння. Вважаючи тут C_1 та C_2 функціями x: $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, можна добитися, щоб вираз

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{29}$$

став загальним розв`язком ЛНДР (1) при будь-якій його неперервній правій частині $f(x)$. Для цього функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ достатньо підкорити двом умовам

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{30}$$

Дійсно, згідно з (29) $y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$, $y'' = \left(C_1'y_1 + C_2'y_2\right)' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$. Підставимо y у формі (29), y' та y'' – у рівняння (1): $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Дістанемо

$$\underbrace{\left(C_1'y_1 + C_2'y_2\right)'}_{=0} + \underbrace{\left(C_1'y_1' + C_2'y_2'\right)}_{=f(x)} + C_1\underbrace{\left[y_1'' + py_1' + qy_1\right]}_{=0} + C_2\underbrace{\left[y_2'' + py_2' + qy_2\right]}_{=0} +$$

$$+\,p\underbrace{\left(C_1'y_1+C_2'y_2\right)}_{=0}=f(x).$$

Вирази у круглих дужках мають наведені під ними значення в силу умов (30), а вирази у квадратних дужках перетворюються на нуль з тієї причини, що y_1 та y_2 – розв`язки ЛОДР (2). Маємо тотожність $f(x)\equiv f(x)$. Тим самим доведено, що (29) є розв`язком ЛНДР (1).

Відносно величин C_1' та C_2' рівності (30) є алгебраїчною системою, яку неважко розв`язати (наприклад, за формулами Крамера). Самі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ визначаються потім в результаті інтегрування з точністю до довільних сталих $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$. Присутність цих сталих приводить до того, що при підстановці $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (29) отриманий розв`язок виявляється загальним.

Приклад 15. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$, $\quad y(x)-?$

**Розв`язування**. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$. В силу формули (13) $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Функція $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ не належить до тих, для яких відома форма частинного розв`язку $\overline{y}$. Тому звернемося до методу варіації довільних сталих. Загальний розв`язок ДР будемо шукати у вигляді $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, де $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$, тобто $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. Запишемо систему (30)

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \\ C_1'(-\sin x)+C_2'\cos x=\dfrac{1}{\cos x}, \end{cases} \quad \text{звідки знайдемо}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ 1/\cos x & \cos x\end{vmatrix}=-tgx,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & 1/\cos x\end{vmatrix}=1,$$

$$C_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-tgx,\ \ C_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1.$$

Маємо два ДР з відокремлюваними змінними $\dfrac{dC_1}{dx}=-tgx$, $\dfrac{dC_2}{dx}=1$. Визначимо функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$: $dC_1=-tgx\,dx$, $\int dC_1=-\int tgx\,dx$, $C_1(x)=ln|\cos x|+\overline{C}_1$, $dC_2=dx$, $\int dC_2=\int dx$, $C_2(x)=x+\overline{C}_2$. Згідно з (29) запишемо загальний розв`язок ДР:

$$y=\left(ln|\cos x|+\overline{C}_1\right)\cos x+\left(x+\overline{C}_2\right)\sin x. \quad \text{Інакше:}$$

$y=\overline{C}_1\cos x+\overline{C}_2\sin x+\cos x\,ln|\cos x|+x\sin x=Y+\overline{y}$, де $\overline{y}=\cos x\,ln|\cos x|+x\sin x$.

Таким чином, визначився також частинний розв`язок $\overline{y}$, форма якого наперед не була відома.

6^0. *Лінійні диференціальні рівняння порядку n*. Лінійне диференціальне рівняння довільного порядку n має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{31}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та f – у загальному випадку довільні функції аргументу x.

Подібно до ДР 2-го порядку загальний розв`язок рівняння (31) є сумою

$$y = Y + \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + \bar{y}. \tag{32}$$

Тут $\bar{y}$ – частинний розв`язок ЛНДР (31), $Y$ – загальний розв`язок ЛОДР, який відповідає рівнянню (31):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{33}$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ – лінійно незалежні частинні розв`язки рівняння (33). Систему функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називають лінійно незалежною, якщо жодну з них не можна представити лінійною комбінацією інших або, що те ж саме, якщо тотожність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0$ можлива лише за умови, що всі коефіцієнти $\alpha_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо коефіцієнти рівняння (31) є сталими числами, то система частинних розв`язків $\{y_j\}$ ЛОДР (33) відшукується за допомогою характеристичного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{34}$$

Рівняння (34) має n коренів, серед яких можуть бути як дійсні, так і комплексні числа. Кожному дійсному кореню k кратності r відповідає r частинних розв`язків рівняння (33) вигляду $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{kx}$. Кожній парі комплексно спряжених коренів $k = \alpha \pm \beta i$ кратності $s$ відповідають $2s$ частинних розв`язків типу

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots .\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots .\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Частинний розв`язок $\bar{y}$ підбирають за виглядом правої частини $f(x)$ рівняння (31) так, як це робилося у 4^0, або знаходять за методом варіації довільних сталих [3, розд. XIII, § 25].

При заданих початкових умовах $y(x_0) = h_0, y'(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$ із загального розв`язку (32) виділяється частинний розв`язок. Для цього із алгебраїчної системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\cdots+C_ny_n(x_0)=h_0-\bar{y}(x_0), \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\cdots+C_ny_n'(x_0)=h_1-\bar{y}'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=h_{n-1}-\bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{35}$$

знаходять сталі C_1, C_2, … , C_n.

Має місце теорема, згідно з якою визначник Вронського

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ні при якому значенні x не перетворюється на нуль, якщо тільки функції $y_1, y_2,\ldots, y_n$ – лінійно незалежні частинні розв`язки ДР (33), тобто утворюють фундаментальну систему його розв`язків. При цьому алгебраїчна система (35) завжди має єдиний розв`язок і, таким чином, за загальним розв`язком (32) визначається частинний розв`язок, що відповідає заданим початковим умовам, тобто існує розв`язок задачі Коші.

Приклад 16. $y'''-3y''+2y'=6x^2+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=11$, $y''(0)=7$, $y(x)$ – ?

**Розв`язування**. Щоб розв`язати цю задачу Коші, діємо за тою самою схемою, що застосовувалась для ЛНДР 2-го порядку. Складаємо характеристичне рівняння $k^3-3k^2+2k=0$. Знаходимо його корені: $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=2$. Записуємо загальний розв`язок однорідного ДР, що відповідає даному: $Y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}$. Права частина ДР $f(x)=6x^2+1$ – многочлен 2-го степеня. Однак один з коренів характеристичного рівняння $k_1=0$, тому частинний розв`язок $\bar{y}$ шукаємо у формі многочлена 2-го степеня, помноженого на x: $\bar{y}=x(Ax^2+Bx+D)=Ax^3+Bx^2+Dx$. Отримуємо $\bar{y}'=3Ax^2+$ $+2Bx+D$, $\bar{y}''=6Ax+2B$, $\bar{y}'''=6A$. Вносимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{y}'''$ у ДР та застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$6A-3(6Ax+2B)+2(3Ax^2+2Bx+D)=6x^2+1,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{при } x^2 & 6A=6 \\ \text{при } x & -18A+4B=0 \\ \text{при } x^0 & 6A-6B+2D=1 \end{array}\right\}\Rightarrow A=1,\ B=9/2,\ D=11\ ;\quad \bar{y}=x^3+\frac{9x^2}{2}+11x.$$

Загальний розв`язок ДР: $y=Y+\bar{y}=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}+x^3+\dfrac{9x^2}{2}+11x$.

Для відшукування сталих C_1, C_2, C_3 спочатку знайдемо

$$y' = C_2e^x + 2C_3e^{2x} + 3x^2 + 9x + 11, \quad y'' = C_2e^x + 4C_3e^{2x} + 6x + 9.$$

У вирази для y, $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$ підставимо початкові значення $x = 0$, $y = 1$, $\bar{y}' = 11$, $\bar{y}'' = 7$. Маємо систему вигляду (35):

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_2 + 2C_3 + 11 = 11 \\ C_2 + 4C_3 + 9 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = 0,\ C_2 = 2,\ C_3 = -1.$$

Отже, розв`язком задачі Коші є функція $y = 2e^x - e^{2x} + x^3 + \dfrac{9x^2}{2} + 11x$.

7^0. ***Механічні коливання***. Повернемося до задачі про коливання вантажу, що розглядалася на початку цього розділу. Рівняння руху вантажу відносно зміщення $x(t)$ є лінійним ДР 2-го порядку із сталими коефіцієнтами

$$x'' + px' + qx = f(t), \qquad p > 0, \quad q > 0. \tag{36}$$

Якщо немає зовнішнього впливу, тобто при $f(t) \equiv 0$, рівнянням (36) визначаються вільні коливання, а при $f(t) \neq 0$ – вимушені коливання механічної системи (осцилятора).

• **Вільні коливання**. У рівнянні (36) $f(t) \equiv 0$. Відповідне до нього характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ має корені

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{та} \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Можливі такі випадки:

1) $p^2/4 > q$. Оскільки $\sqrt{p^2/4 - q} < p/2$, то корені k_1 та k_2 – від`ємні дійсні числа, $k_1 \neq k_2$. Загальний розв`язок ДР має вигляд

$$X(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \quad k_1 < 0, \quad k_2 < 0.$$

При $t \to \infty$ обидва доданки спадають до нуля, таким чином, $X(t) \to 0$ також. Наприклад, якщо $p = 3$, $q = 2$, $X(0) = 1$, $X'(0) = 0$, то $k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $X(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$, $X'(t) = -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t}$, $C_1 + C_2 = 1$, $-2C_1 - C_2 = 0$, $C_1 = -1$, $C_2 = 2$, тобто $X(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$, $X'(t) = -2e^{-t}\left(1 - e^{-t}\right) < 0$. Отже, $X(t) \to 0$ монотонно. Коливання не відбуваються – жорсткість пружини виявляється недостатньою для подолання сили тертя. За обмежений час вантаж не досягає навіть положення рівноваги;

2) $p^2/4 = q$. Корені характеристичного рівняння рівні: $k_1 = k_2 = -p/2 < 0$. Загальний розв`язок ДР: $X(t) = (C_1 + C_2t)e^{-pt/2}$. При $t \to \infty$

тут також $X(t) \to 0$, хоча й повільніше, ніж у попередньому випадку;

3) $p^2/4 < q$. Тоді $k_{1,2} = -\alpha \pm \beta i$, де $\alpha = p/2 > 0$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4} > 0$. Загальний розв`язок ДР: $X(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$. Якщо покласти $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$, $C_1/A = \cos\varphi$, $C_2/A = \sin\varphi$, тобто $tg\varphi = C_2/C_1$ (позначення коректні, тому що $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = C_1^2/A^2 + C_2^2/A^2 = 1$), то $X(t) = Ae^{-\alpha t}\left(\frac{C_1}{A}\cos\beta t + \frac{C_2}{A}\sin\beta t\right) = Ae^{-\alpha t}(\cos\varphi\cos\beta t + \sin\varphi\sin\beta t)$ або $X(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)$. Сталі β та φ від t не залежать, із зростанням t косинус по черзі приймає додатні та від`ємні значення – відбуваються коливання вантажу з частотою β (її називають власною частотою системи). Період коливань $T = 2\pi/\beta$. Величина $Ae^{-\alpha t}$ – амплітуда коливань; φ – початкова фаза. При $t \to \infty$ амплітуда спадає до нуля за експоненціальним законом, коливання затухають (рис. 1). Якщо тертя відсутнє ($p = 0$), то $\alpha = 0$ та коливання стають незатухаючими з амплітудою $A = const$.

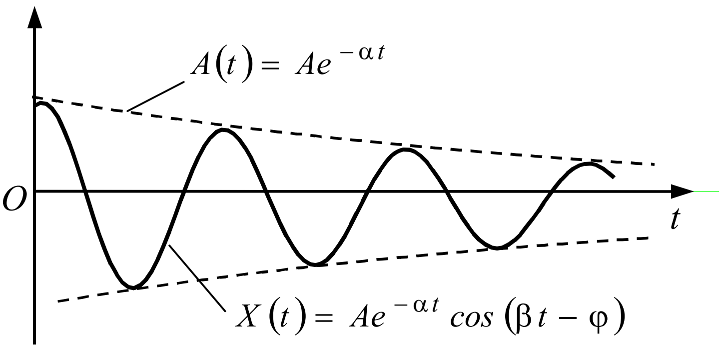


Рис. 1

• **Вимушені коливання**. У рівнянні (36) $f(t) \neq 0$. Для практики особливо важливим є випадок, коли змушувальна сила $f(t)$ є періодичною функцією. Нехай, зокрема, $f(t) = a\cos bt$ та $p^2/4 < q$. Тоді загальний розв`язок ДР $x = X + \bar{x}$, де $X = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)$, а частинний розв`язок рівняння (36) має вигляд $\bar{x} = M\cos bt + N\sin bt$. При наявності тертя ($p \neq 0$, $\alpha = p/2 > 0$) через співмножник $e^{-\alpha t}$ складова X із зростанням t затухає. Через деякий час після початку процесу визначальною стає величина $\bar{x}$, яку подібно до X можна подати у формі $\bar{x} = A_1\cos(bt - \varphi_1)$, де $A_1 = \sqrt{M^2 + N^2}$, $tg\varphi_1 = N/M$. Таким чином, коливання відбуваються вже з частотою змушувальної сили.

За відсутності тертя ($p = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{q}$) при $f(t) = a\cos bt$ рівняння (36) запишеться так: $x'' + \beta^2 x = a\cos bt$. Його загальний розв`язок $x = X + \bar{x}$, де $X = A\cos(\beta t - \varphi)$ та при $b \neq \beta$ $\bar{x} = M\cos bt + N\sin bt$. Підставляючи $\bar{x}$ у ДР, знаходимо $M = a/\left(\beta^2 - b^2\right)$, $N = 0$, тобто $x = A\,cos\left(\beta t - \varphi\right) + M\,cos\,bt$.

Якщо частота змушувальної сили b близька до власної частоти β, то амплітуда M стає великою величиною, разом з нею приймає великі значення і зміщення x. Це – добре відоме в механіці явище – резонанс. У випадку точної рівності $b = \beta$ складова

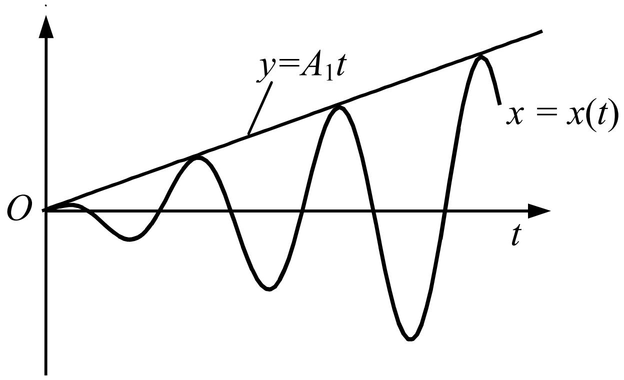


Рис. 2

$$\bar{x} = t\left(M\,cos\,bt + N\,sin\,bt\right) = \\ = A_1 t\,cos\left(bt - \varphi_1\right).$$

Роль амплітуди тепер грає величина $A_1 t$. Із зростанням t вона необмежено зростає (рис. 2), що веде на практиці до руйнування механічної конструкції.

♦ З точки зору застосувань лінійні диференціальні рівняння 2-го та більш високих порядків – найважливіший тип рівнянь. Вони лежать в основі динаміки – розділу механіки, що вивчає рух матеріальної точки, та різноманітних механічних систем. Алгоритм розв`язування лінійних однорідних ДР із сталими коефіцієнтами розробив Ейлер (1743). Даламбер встановив, що загальний розв`язок лінійного неоднорідного ДР можна утворити додаванням деякого його частинного розв`язку із загальним розв`язком відповідного однорідного ДР (1766). Загальний випадок метода варіацій довільних сталих розвивав Лагранж (1775). Питання про однозначну розв`язність лінійних рівнянь будь-якого порядку було досліджено Вронським за допомогою спеціального визначника, який носить його ім`я (1812).

♦ **Юзеф Вронський-Гене** (польськ. математик та філософ, 1776 – 1853) закінчив у Варшаві кадетський корпус, приймав участь у боях проти прусських військ, потрапив у полон. Згодом вступив до російської армії та служив в штабі Суворова. В чині підполковника вийшов у відставку, вивчав філософію в Германії. З 1800 р. мешкав у Франції, займався науковими пошуками. Роботу починав з ранку і тільки після декількох годин занять переходив до скромного сніданку, говорячи: «Свій день я вже заробив». Залишив по собі велику кількість праць з математики, філософії, фізиці, технічних наук. Багато з його робіт й донині не видані через нетрадиційну та важку для розуміння манеру викладення.

§ 51. Системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

Математика – чудове знаряддя дослідження. Вона дає можливість до тонкощів вивчити явище і навіть передбачити його.
О.М. Ляпунов, рос. математик XIX – XX ст.

1^0. *Нормальна система*. Усяке диференціальне рівняння порядку n з однією змінною функцією шляхом перепозначення зводиться до системи, що складається з n ДР 1-го порядку з n невідомими функціями. Так, рівняння 3-го порядку $y''' = f(x, y, y', y'')$ в результаті замін $y' = u$, $y'' = v$ зводиться до системи

$$y' = u, \quad u' = v, \quad v' = f(x, y, u, v),$$

де x – аргумент; y, u, v – невідомі функції.

Систему ДР 1-го порядку, розв`язаних відносно похідних від шуканих функцій, називають **нормальною**. Коротко її можна записати так:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Розв`язати систему (1) – це значить знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, підстановка яких в (1) перетворює всі n рівностей цієї системи на тотожності.

Загальний розв`язок системи (1) має вигляд $y_j = y_j(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Задача Коші для системи (1) полягає у відшуканні набору функцій $y_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, що задовольняють рівняння (1) та початкові умови

$$y_j(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де $x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$ – задані числа. Сталі C_1, C_2, … , C_n знаходяться у результаті розв`язування алгебраїчної системи (2).

Якщо в області D змінювання змінних $x, y_1, \ldots, y_n$ функції $f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку за змінними $y_1, \ldots, y_n$ і точка $(x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D$, то в області D існує єдиний розв`язок $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, який задовольняє умови (2).

Нехай, зокрема, система типу (1) містить два рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), & (3) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y). & (4) \end{cases}$$

Тут змінна t – аргумент; $x(t)$ та $y(t)$ – шукані функції.

Продиференціюємо рівняння (3) за t та за допомогою (4) виключимо dy/dt. Одержимо ДР вигляду $\dfrac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt}\right)$. Залучаючи рівність (3), виключимо звідси y. Прийдемо до рівняння 2-го порядку з однією невідомою функцією $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right).$$

З цього рівняння визначається $x(t)$, після чого з рівняння (3) відшукується й друга невідома функція $y(t)$.

Приклад 1. $\begin{cases} dx/dt = y - x + e^{2t}, \\ dy/dt = y - 2x. \end{cases}$ $x(t),\ \ y(t) - ?$

Розв`язування. Продиференціюємо перше рівняння за t та за допомогою другої рівності виключимо dy/dt: $x'' = y' - x' + 2e^{2t}$, $x'' = (y-2x) - x' + 2e^{2t}$. З першого рівняння виразимо y та підставимо у отримане ДР: $y = x' + x - e^{2t}$, $x'' = x' + x - e^{2t} - 2x - x' + 2e^{2t}$. Маємо $x'' + x = e^{2t}$. Це – ДР 2-го порядку з однією невідомою функцією $x(t)$. Знайдемо його розв`язок: $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$, $X = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $\bar{x} = Ae^{2t}$, $\bar{x}' = 2Ae^{2t}$, $\bar{x}'' = 4Ae^{2t}$, $4Ae^{2t} + Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow$ A = 1/5, $\bar{x} = \frac{1}{5}e^{2t}$, $x = X + \bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t}$, де C_1 та C_2 – довільні сталі. З першого рівняння системи одержимо $y = x' + x - e^{2t} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{2}{5}e^{2t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t} - e^{2t} = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}$. Отже, загальний розв`язок системи знайдений:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t},$$

$$y(t) = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}.$$

2⁰. ***Лінійна система***. Так називають систему вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n. \end{cases} \tag{5}$$

Невідомі функції $x_j(t)$ та їх похідні dx_j/dt входять до рівняння системи лінійно, тобто у 1-му степені, не перемножуючись між собою. Коефіцієнти $a_{kj} = a_{kj}(t)$ та вільні члени $f_j(t)$ – задані функції, $k, j = \ = 1, 2, ..., n$. Застосовують векторно-матричну форму запису. Уводять вектори $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\vec{f} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $d\vec{x}/dt = \{x_1', x_2', ..., x_n'\}$, котрі зображують матрицями-стовпцями $X, F, dX/dt$. В позначеннях

$$A = (a_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

система (5) записується однією матричною рівністю

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \tag{6}$$

Якщо $F = \theta$, тобто F – нуль-матриця, то систему (6) називають однорідною, а при $F \neq \theta$ – неоднорідною.

Загальний розв`язок лінійної неоднорідної системи (6) має таку структуру

$$X = X_* + \overline{X}, \tag{7}$$

де X_* – загальний розв`язок однорідної системи, що відповідає системі (6), тобто

$$\frac{dX_*}{dt} = AX_*, \tag{8}$$

а $\overline{X}$ – частинний розв`язок неоднорідної системи (6).

$$X_* = \begin{pmatrix} x_{*1} \\ x_{*2} \\ \vdots \\ x_{*n} \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}, \quad x_j = x_{*j} + \overline{x}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Припустимо, для системи (8), що складається з n рівнянь, відомі n її лінійно незалежних частинних розв`язків $X_j(t)$ $j = 1, 2, \ldots, n$ (кожна з величин X_j є матрицею-стовпцем, яка являє собою векторну функцію з n координатами $\vec{x}_j = \{x_{1j}(t), x_{2j}(t), \ldots, x_{nj}(t)\}$). Лінійна незалежність матриць X_j означає, що матрична тотожність $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \equiv \theta$ можлива тільки в тому випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ – нулі. Тоді загальний розв`язок однорідної системи (8) можна утворити за формулою

$$X_* = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j(t), \tag{9}$$

де C_j – довільні сталі.

Питання про лінійну незалежність матриць X_j вирішується шляхом вивчення визначника Вронського. Так називають визначник квадратної матриці $W(t)$, стовпцями якого слугують матриці X_j:

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, \ldots, n; \quad W(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Для лінійної незалежності розв`язків $X_j(t)$ необхідно та достатньо, щоб $det\, W(t) \neq 0$ ні при якому значенні t з проміжку (a, b), в якому коефіцієнти $a_{kj}(t)$ системи (5) неперервні. (Умова $det\, W(t) \neq 0$ виконується $\forall t \in (a, b)$, коли вона має місце хоча б в одній точці цього проміжку).

Якщо ввести n-вимірний вектор $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, в якому довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ грають роль координат, та зобразити його стовпцевою матрицею C, то рівність (9) в матричній формі прийме вигляд

$$X_* = WC.$$

Частинний розв`язок $\overline{X}$ системи (6) підбирається за виглядом $F$. При відомому загальному розв`язку X_* однорідної системи (8) побудова загального розв`язку X неоднорідної системи (6) можлива також за методом варіації довільних сталих.

Приклад 2. $\begin{cases} dx/dt = 2x - y, \\ dy/dt = y - 2x + 18t. \end{cases}$

Знайти функції $x(t)$ та $y(t)$, що задовольняють умови $x(0) = 0,\ y(0) = 1$.

Розв`язування. Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 18\,t \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix}, X_* = \begin{pmatrix} x_*(t) \\ y_*(t) \end{pmatrix}, \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді вихідна неоднорідна система запишеться однією матричною рівністю $\frac{dX}{dt} = AX + F$.

Знайдемо лінійно незалежні частинні розв`язки однорідної системи $\frac{dX}{dt} = AX$ або $\begin{cases} dx/dt = 2x - y, \\ dy/dt = y - 2x. \end{cases}$ Виключивши y, одержимо $x'' = 2x' - y' \Rightarrow x'' = 2x' - (y - 2x) \Rightarrow$ $\Rightarrow x'' = 2x' + 2x - 2x + x' \Rightarrow x'' - 3x' = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, яким відповідають елементи частинного розв`язку $x_1 = e^{0t} = 1$ та $x_2 = e^{3t}$. З 1-го рівняння системи виразимо $y$: $y = 2x - x'$. Підставимо сюди почергово $x_1 = 1$ та $x_2 = e^{3t}$. Маємо $y_1 = 2$, $y_2 = -e^{3t}$. Визначилися два частинних розв`язки однорідної системи: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$. Матриця $W = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix}$, її визначник $det\,W = \begin{vmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{vmatrix} = -3e^{3t} \neq 0$ ні при якому значенні t. Таким чином, розв`язки $X_1$ та $X_2$ лінійно незалежні. Запишемо загальний розв`язок однорідної системи:
$X_* = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2e^{3t} \\ 2C_1 - C_2e^{3t} \end{pmatrix}$, тобто $\begin{cases} x_* = C_1 + C_2e^{3t}, \\ y_* = 2C_1 - C_2e^{3t}. \end{cases}$

Частинний розв`язок $\overline{X}$ шукаємо за методом варіації довільних сталих. Покладемо $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$ та поставимо вимогу, щоб функції $\overline{x} = C_1(t) + C_2(t)e^{3t}$, $\overline{y} = 2C_1(t) - C_2(t)e^{3t}$ задовольняли задану систему рівнянь. Маємо $\overline{x}' = C_1' + C_2'e^{3t} + 3C_2e^{3t}$, $\overline{y}' = 2C_1' - C_2'e^{3t} - 3C_2e^{3t}$. Внесемо $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}'$, $\overline{y}'$ до вихідної системи ДР:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' + C_2'e^{3t} + 3C_2e^{3t} = 2C_1 + 2C_2e^{3t} - 2C_1 + C_2e^{3t} \\ &2C_1' - C_2'e^{3t} - 3C_2e^{3t} = 2C_1 - C_2e^{3t} - 2C_1 - 2C_2e^{3t} + 18t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'e^{3t} = 0, \\ 2C_1' - C_2'e^{3t} = 18t. \end{cases}$$

Отримаємо $C_1' = 6t$, $C_2' = -6te^{-3t}$, $C_1 = \int 6t\,dt = 3t^2$, $C_2 = -6\int te^{-3t}dt =$ $= -6\left[-\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right] = 2te^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$. Сталі інтегрування тут опущені, тому що достатньо знайти найпростіший частинний розв`язок неоднорідної системи. Маємо

$$\begin{aligned} &\bar{x} = 3t^2 + 2t + 2/3, \\ &\bar{y} = 6t^2 - 2t - 2/3 \end{aligned} \quad \text{або} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t + 2/3 \\ 6t^2 - 2t - 2/3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (7) запишемо загальний розв`язок системи:

$$X = X_* + \bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2e^{3t} \\ 2C_1 - C_2e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t + 2/3 \\ 6t^2 - 2t - 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2/3 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ 2(C_1 + 2/3) - 2 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t \end{pmatrix}.$$

Після включення числа 2/3 в C_1 маємо

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ 2C_1 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t, \\ y(t) = 2C_1 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2. \end{cases}.$$

Задані початкові умови приводять до рівностей

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0 \\ &2C_1 - C_2 - 2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Отримали розв`язок задачі Коші: $x(t) = 1 - e^{3t} + 3t^2 + 2t$, $y(t) = e^{3t} + 6t^2 - 2t$.

3⁰. ***Лінійна система зі сталими коефіцієнтами***. Методом виключення невідомих лінійну систему (5) можна звести до одного лінійного ДР порядку n з однією невідомою функцією. Якщо коефіцієнти системи a_{kj} – сталі числа, то такими будуть і коефіцієнти наново утвореного ДР.

Нехай, зокрема, система (5) складається з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t), \end{cases}$$

де a_1, b_1, a_2, b_2 – сталі. Диференціюємо перше рівняння за t і за допомогою другої рівності виключаємо dy/dt: $x'' = a_1x' + b_1y' + f_1'$, $x'' = a_1x' + b_1(a_2x + b_2y + f_2) + f_1'$, $x'' = a_1x' + b_1a_2x + b_1b_2y + b_1f_2 + f_1'$.

За допомогою першого рівняння системи виключаємо y:

$$x'' = a_1x' + a_2b_1x + b_2(x' - a_1x - f_1) + b_1f_2 + f_1';$$

$$x'' + \left(-a_1 - b_2\right)x' + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)x = b_1 f_2 - b_2 f_1 + f_1'.$$

Дістали лінійне ДР 2-го порядку $x'' + px' + qx = \varphi(t)$ із сталими коефіцієнтами $p = -a_1 - b_2$, $q = a_1 b_2 - a_2 b_1$ і правою частиною $\varphi(t) = b_1 f_2 - b_2 f_1 + f_1'$. Метод його розв`язування вивчений у § 50. Ілюстрацією до викладеної тут процедури слугує розглянутий у 1^0 приклад 1.

У випадку сталих дійсних чисел a_{kj} побудова загального розв`язку однорідної системи (5), тобто такої, що $f_1 = f_2 = \dots = f_n \equiv 0$, можлива також за методом Ейлера.

Обмежимося випадком системи, що містить два рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{11}$$

Будемо шукати розв`язок системи (11) у формі

$$x = \lambda e^{kt}; \quad y = \mu e^{kt}, \tag{12}$$

де λ, μ, k – деякі невідомі поки що числа.

Підставимо (12) в (11). Після скорочення на e^{kt} одержимо рівності

$$\begin{cases} \lambda k = a_{11}\lambda + a_{12}\mu, \\ \mu k = a_{21}\lambda + a_{22}\mu \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (a_{11} - k)\lambda + a_{12}\mu = 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - k)\mu = 0. \end{cases} \tag{13}$$

По відношенню до величин λ, μ рівності (13) утворюють однорідну алгебраїчну систему. Якщо її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (13) має єдиний розв`язок $\lambda = 0, \mu = 0$. Тоді згідно з (12) $x = 0$, $y = 0$, тобто визначиться лише тривіальний (що не має практичного значення) розв`язок системи ДР (11). Ненульові значення λ та μ можна отримати, якщо число k підібрати так, щоб $\Delta = 0$. З цією метою будемо вимагати виконання рівності

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Розкриваючи визначник, дістанемо квадратне рівняння з невідомим k. Таке рівняння називають характеристичним. Припустимо, що воно має два різних кореня k_1 та k_2 ($k_1 \neq k_2$). Підставимо почергово ці значення в алгебраїчну систему (13) та знайдемо дві ненульові пари чисел λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2, котрі відповідають кореням k_1 та k_2 (значення λ_1, λ_2 або μ_1, μ_2 можна вибирати, власно кажучи, довільно, але відмінними від нуля). В результаті визначаться два лінійно незалежних частинних розв`язки системи (11): $x_1 = \lambda_1 e^{k_1 t}$, $y_1 = \mu_1 e^{k_1 t}$ та $x_2 = \lambda_2 e^{k_2 t}$, $y_2 = \mu_2 e^{k_2 t}$. Їх можна записати і в матричній формі:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{k_1 t} \\ \mu_1 e^{k_1 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} e^{k_1 t}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{k_2 t} \\ \mu_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Загальний розв`язок однорідної системи (11) знаходимо за формулою (9):

$$X_* = C_1 X_1 + C_2 X_2,$$

$$\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} e^{k_2 t} = \begin{pmatrix} C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t} \\ C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix},$$

тобто

$$x_* = C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t}; \quad y_* = C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t}. \qquad (15)$$

Якщо корені рівняння (14) комплексні ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$), то можна діяти за тією самою схемою, що і вище. Щоб уникнути появи комплексних коефіцієнтів, простіш, однак, зробити так: за елементи x_1 та x_2 прийняти $x_1 = e^{\alpha t} cos \beta t$, $x_2 = e^{\alpha t} sin \beta t$, а відповідні до них функції y_1 та y_2 знайти з першого рівняння системи (11): $y_1 = \frac{1}{a_{12}}\left(x_1' - a_{11} x_1\right)$; $y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(x_2' - a_{11} x_2\right)$.

Матриці $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ є лінійно незалежними частинними розв`язками системи (11). Загальний розв`язок X_* відшукується за правилом (9): $X_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 = \begin{pmatrix} C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{pmatrix}$, тобто

$$x_*(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2, \qquad y_*(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2. \qquad (16)$$

Якщо корені рівняння (14) збігаються ($k_1 = k_2 = k$), то можна прийняти $x_1 = e^{kt}$, $x_2 = t e^{kt}$. Функції y_1 та y_2, як і в попередньому випадку, визначаються з 1-го ДР системи. Подальша процедура побудови загального розв`язку не відрізняється від вже розглянутої.

Приклад 3. Проінтегрувати систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

Розв`язування. Запишемо характеристичне рівняння (14) та знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 8 \\ 3 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-k)(3-k) - 24 = 0, \quad k^2 - 8k - 9 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 9.$$

Із системи (13) $\begin{cases} (5-k)\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda + (3-k)\mu = 0 \end{cases}$ отримаємо:

при $k = k_1 = -1$ $\begin{cases} 6\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda + 4\mu = 0$, нехай $\lambda = 4$, тоді $\mu = -3$;

при $k = k_2 = 9$ $\begin{cases} -4\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda - 6\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2\mu$, нехай $\lambda = 2$, тоді $\mu = 1$.

Маємо два частинних розв`язки:

$$x_1 = 4e^{-t}, \; y_1 = -3e^{-t} \quad \text{та} \quad x_2 = 2e^{9t}, \; y_2 = e^{9t}.$$

Згідно з (15) запишемо загальний розв`язок ДР:

$$x_* = 4C_1e^{-t} + 2C_2e^{9t}, \qquad y_* = -3C_1e^{-t} + C_2e^{9t}.$$

Приклад 4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ Знайти $x(t)$ та $y(t)$.

Розв`язування. Відшукаємо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -3 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-k)^2 + 9 = 0, \quad k^2 - 2k + 10 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Маємо елементи частинного розв`язку $x_1 = e^t \cos 3t$, $x_2 = e^t \sin 3t$. Відповідні до них вирази для y_1, y_2 знайдемо, підставляючи почергово x_1 та x_2 в 1-е рівняння системи:

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_1') = \frac{1}{3}\left(e^t \cos 3t + 3e^t \sin 3t - e^t \cos 3t\right) = e^t \sin 3t;$$

$$y_2 = \frac{1}{3}(x_2 - x_2') = \frac{1}{3}\left(e^t \sin 3t - e^t \sin 3t - 3e^t \cos 3t\right) = -e^t \cos 3t.$$

Таким чином, перше та друге частинні розв`язки:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t \\ e^t \sin 3t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \sin 3t \\ -e^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв`язок системи ДР:

$$x_* = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t); \quad y_* = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$$

♦ Системи лінійних диференціальних рівнянь привернули до себе увагу математиків XVIII ст. у зв`язку із задачами механіки. Навантажена нитка, струна, пластинка, мембрана – моделі різних елементів механічних конструкцій. Такі елементи, виведені з положення рівноваги, коливаються, і від того, як це відбувається, залежить міцність конструкції. Наведений процес формулюється мовою диференціальних рівнянь. Способи їх розв`язання були запропоновані Ейлером, Даламбером, Лагранжем та ін. Для систем лінійних ДР із сталими коефіцієнтами найбільш загальний метод розробив Ейлер в статті «Про поширення пульсацій через пружне середовище» (1750). Такий самий підхід, розвинений потім Лагранжем, без істотних змін застосовується дотепер.

§ 52. Поняття стійкості розв`язку

Яким би точним не був математичний розв`язок, він не може бути точнішим від тих наближених припущень, на яких базується.
О.М. Крилов, рос. математик та механік XX ст.

1⁰. ***Вихідні уявлення***. Диференціальні рівняння – основний інструмент дослідження різних процесів, тобто явищ, що відбуваються у часі. До цієї області належать механічні рухи тіл – від найменших частинок та деталей механізму до галактик, хімічні реакції, електромагнітні взаємодії, геотектонічні та атмосферні змінення і т.п. Для описання реального процесу використовується те чи інше диференціальне рівняння (система ДР), в якому роль незалежної змінної грає час t. Окрім невідомої функції та її похідних, в ДР входять деякі параметри, що зазвичай визначаються з експерименту. Останні, як і усякі експериментальні дані, містять похибки вимірювання, що відбивається на розв`язку ДР. До параметрів можна віднести також початкові умови задачі. Виникають важливі (особливо для застосувань) питання: як відкликається розв`язок рівняння на змінення цих умов, чи будуть малі початкові збурення, тобто відхилення у початкових умовах, так само мало впливати на самий розв`язок? У противному разі для аналізу явища на великому проміжку часу диференціальне рівняння стане практично непридатним.

Наприклад, рівняння $dy/dt = 2t(y-1)$ має загальний розв`язок $y(t) = 1 + Ce^{t^2}$. Початковій умові $y^*(0) = 1$ відповідає частинний розв`язок $y^*(t) = 1$, а при збуренні $\delta > 0$ умові $y(0) = 1 + \delta$ відповідає розв`язок $y(t) = 1 + \delta e^{t^2}$, тобто розходження початкових умов на величину $y(0) - y^*(0) = \delta$ призводить до розходження розв`язків $y(t) - y^*(t) = \delta e^{t^2}$.

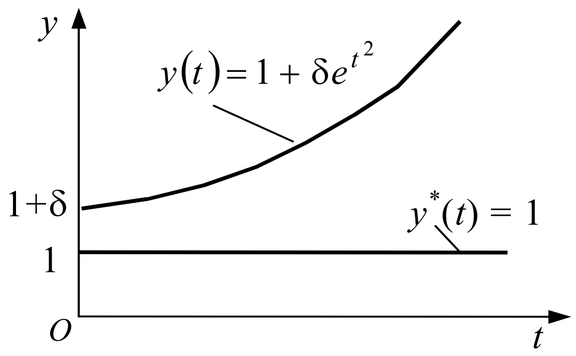


Рис. 1

Яким би малим не було δ, змінення розв`язку, що відповідає йому, прямує до нескінченності при $t \to \infty$ (рис. 1). У такому випадку кажуть, що розв`язок ДР нестійкий у часі.

Нехай є система диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, ..., y_n), \qquad (1)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

з початковими умовами

$$y_j(t_0) = h_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

і в деякій області змінення змінних $t, y_1, y_2, ..., y_n$ існує єдиний розв`язок задачі Коші (1), (2):

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}. \qquad (3)$$

Як вихідний візьмемо розв`язок вигляду (3)

$$y^*(t) = \{y_1^*(t), y_2^*(t), \ldots, y_n^*(t)\}, \qquad (4)$$

який відповідає початковим умовам $y_j^*(t_0) = h_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Усякий інший набір чисел h_j будемо розглядати як результат збурення значень h_j^*, йому відповідає відмінний від (4) збурений розв`язок (3).

Розв`язок $y^*(t)$ **стійкий за Ляпуновим**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при додержанні умов

$$\left|h_j - h_j^*\right| < \delta, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5)$$

будь-який збурений розв`язок $y(t)$ в будь-який момент $t > t_0$ буде задовольняти нерівності

$$\left|y_j(t) - y_j^*(t)\right| < \varepsilon, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

Простіше кажучи, розв`язок $y^*(t)$ стійкий, коли малі змінення початкових значень $h_j^*$ в малому степені впливають на функції $y_j^*(t)$ в усі наступні моменти часу, тобто достатньо близькі у початковий момент розв`язки будуть скільки завгодно близькими і у подальшому.

При $n = 1$ геометричний зміст наведеного означення полягає в тому, що всі криві $y = y(t)$, що починаються у δ-околі точки h^*, ніколи не вийдуть за межі ε-смуги (шириною 2ε), що прилягає до кривої l_1: $y = y^*(t)$ (рис. 2). Якщо $n = 2$, то замість плоскої кривої l_1 одержимо просторову l_2:

$$y_1 = y_1^*(t), \quad y_2 = y_2^*(t),$$

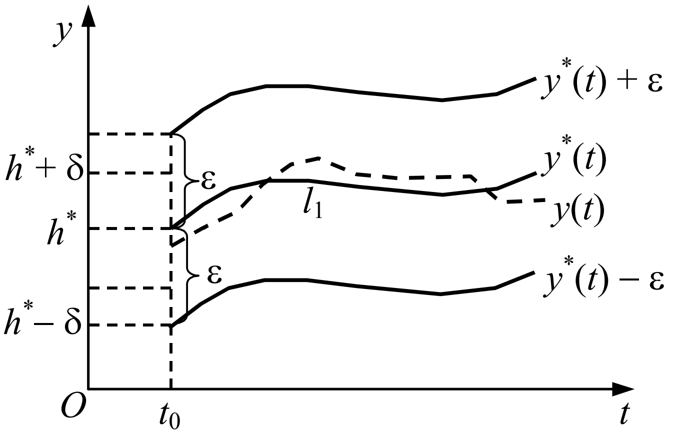


Рис. 2

а ε-смуга перетвориться на «ε-трубку» квадратного перерізу з віссю l_2. При $n > 2$ геометрична наочність втрачається, але зміст зберігається: у просторі $(n+1)$-го виміру розв`язки $y(t)$ при $t > t_0$ залишаться у межах «ε-трубки» стійкого розв`язку $y^*(t)$.

Неможливість за рахунок (5) забезпечити дотримання хоча б одної з нерівностей (6) свідчить про **нестійкість** розв`язку $y^*(t)$.

Поняття **асимптотичної стійкості** полягає в тому, що розв`язок $y^*(t)$ стійкий та, окрім того, виконуються рівності

$$\lim_{t\to\infty}\left|y_j(t) - y_j^*(t)\right| = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

тобто близькі розв`язки $y(t)$ та $y^*(t)$ з часом зближуються необмежено.

Розв`язок $y^*(t)$ **асимптотично стійкий у цілому**, якщо умови (7) мають місце для будь-якого $t_0$ та будь-яких (не обов`язково близьких до h_j^*) значень h_j.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв`язок системи $\begin{cases} dy_1/dt = -y_1(t), \\ dy_2/dt = \alpha y_2(t), \end{cases}$ якщо $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $\alpha = const$.

**Розв`язування**. Задані ДР з відокремлюваними змінними задовольняють функції $y_1(t) = C_1 e^{-t}$, $y_2(t) = C_2 e^{\alpha t}$. Нульовим початковим умовам $h_1^* = 0$, $h_2^* = 0$ відповідають значення $C_1 = C_2 = 0$. Таким чином, розв`язком задачі Коші буде: $y_1^*(t) \equiv 0$, $y_2^*(t) \equiv 0$ або $y^*(t) = \{0, 0\}$. При $y_1(0) = h_1 \neq 0$, $y_2(0) = h_2 \neq 0$ маємо збурений розв`язок $y_1(t) = h_1 e^{-t}$, $y_2(t) = h_2 e^{\alpha t}$ або $y(t) = \{h_1 e^{-t}, h_2 e^{\alpha t}\}$.

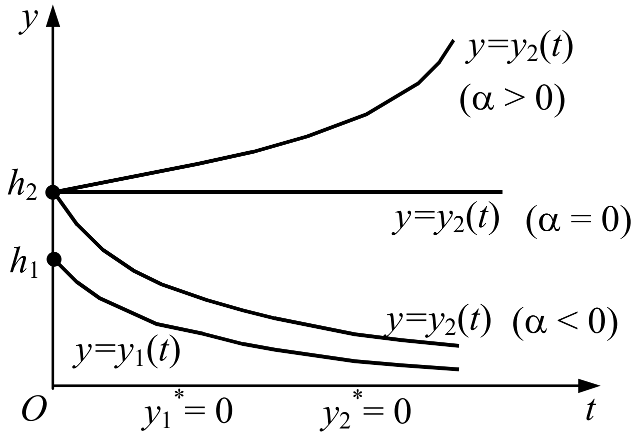


Рис. 3

Запишемо нерівності (6):

$$\left|y_1(t) - y_1^*(t)\right| = |h_1| e^{-t} < \varepsilon,$$

$$\left|y_2(t) - y_2^*(t)\right| = |h_2| e^{\alpha t} < \varepsilon.$$

Очевидно, що для $\alpha < 0$ обидві нерівності при усякому $\varepsilon > 0$ у будь-який момент $t > 0$ будуть виконуватися, якщо в (5) вибрати $\delta = \varepsilon$ (або $\delta < \varepsilon$), тобто вимагати: $|h_1 - 0| = |h_1| < \varepsilon$, $|h_2 - 0| = |h_2| < \varepsilon$. Значить, нульовий розв`язок $y^*(t) = \{0, 0\}$ стійкий за Ляпуновим. Оскільки при $t \to \infty$ $h_1 e^{-t} \to 0$, $h_2 e^{\alpha t} \to 0$, то розв`язок $y^*(t)$ асимптотично стійкий, причому в цілому (інше t_0 та інакші, навіть більші значення $|h_1|$, $|h_2|$, при $t \to \infty$ ситуацію не змінюють). Якщо $\alpha > 0$, ніякої стійкості немає: як завгодно мале значення $|h_2|$ не забезпечує нерівність $|h_2| e^{\alpha t} < \varepsilon$. При $\alpha = 0$ для стійкості розв`язку $y^*(t)$ буде потрібним виконання нерівностей $|h_1| e^{-t} < \varepsilon$, $|h_2| < \varepsilon$. Обидві нерівності виконуються, якщо в (5) $\delta = \varepsilon$, тобто коли $|h_1| < \varepsilon$, $|h_2| < \varepsilon$. При $t \to \infty$ різниця $y_1(t) - y_1^*(t) = h_1 e^{-t} \to 0$, а $y_2(t) - y_2^*(t) = h_2 \not\to 0$. Значить, при $\alpha = 0$ нульовий розв`язок $y^*(t) = \{0, 0\}$ стійкий, але асимптотична стійкість відсутня (рис. 3).

Зауваження. Будь-який розв`язок (3) при фіксованому значенні t є набором чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$, який зручно інтерпретувати як точку у просторі n вимірів. Сукупність рівностей $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ визначає в цьому просторі деяку криву – **траєкторію руху**, задану параметричними рівняннями $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Виключивши параметр t, можна отримати рівняння цієї лінії, що містить тільки змінні $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Якщо всі функції $y_j(t)$ при усякому $t \geq t_0$ зберігають сталі значення, тобто $y_j = h_j$, то траєкторія руху вироджується у точку $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Останню називають **точкою спокою** системи (1), та замість стійкості розв`язку говорять про стійкість точки спокою.

У прикладі 1 нульовий розв`язок $y^*(t) = \{0, 0\}$ був точкою спокою $O(0;0)$ в декартовій системі $y_1Oy_2$, а розв`язок $y_1(t) = h_1 e^{-t}$, $y_2(t) = h_2 e^{\alpha t}$ із h_1, $h_2 \neq 0$ визначав траєкторію збуреного руху в околі точки спокою. Рівності $y_1 = h_1 e^{-t}$, $y_2 = h_2 e^{\alpha t}$ – параметричні рівняння траєкторії.

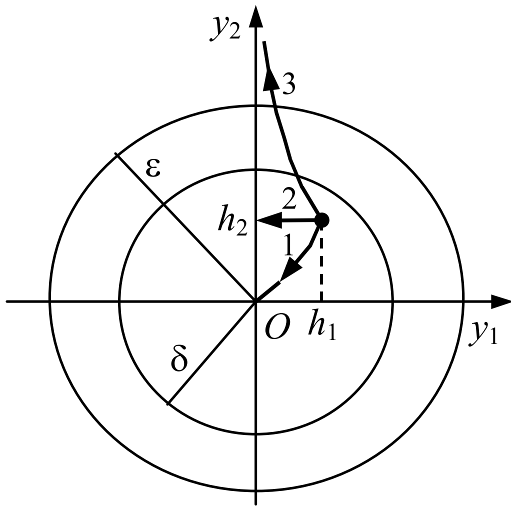


Рис. 4

При $h_1,\ h_2 > 0$ їм відповідає одне рівняння $y_2 = ay_1^{-\alpha}$, де $a = h_1^{\alpha} h_2$

$(y_1 = h_1 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad t = -ln(y_1/h_1), \quad y_2 =$
$= h_2 e^{\alpha t} = h_2 e^{-\alpha\, ln(y_1/h_1)} = h_2 e^{ln(y_1/h_1)^{-\alpha}} =$
$= h_2 (y_1/h_1)^{-\alpha} = h_1^{\alpha} h_2 y_1^{-\alpha})$.

Неважко переконатися, що із зростанням t $y_1 \to 0$, а $y_2 \to 0$ при $\alpha < 0$, $y_2 = h_2$ при $\alpha = 0$, $y_2 \to \infty$ при $\alpha > 0$. Відповідні до цих випадків траєкторії зображені на рис. 4 (1 – при $\alpha < 0$; 2 – при $\alpha = 0$; 3 – при $\alpha > 0$). Крива 1 веде до точки спокою O (точка спокою асимптотично стійка). При русі по прямій 2, зменшуючи h_2, можна попасти в скільки завгодно малий окіл точки O, але злиття з точкою O не відбудеться (точка спокою стійка, але не асимптотично), нарешті, крива 3 як завгодно далеко уводить від точки O (точка спокою нестійка).

Нехай система (1) має нульову точку спокою, тобто $y_j^*(t) \equiv h_j^* = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді співвідношення (5), (6) можна замінити двома нерівностями

$$\sum_{j=1}^{n} h_j^2 < \delta^2 \quad (a); \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j^2 < \varepsilon^2 \quad \forall t > t_0 \quad (б). \tag{8}$$

З (8) негайно випливають формули (5), (6), а з (5), (6) після перепозначень – нерівності (8). Геометрично (8*а*) означає, що точка $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ знаходиться всередині n-вимірної кулі радіуса δ (δ-куля) з центром $O(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, а (8*б*) стверджує, що при $t > t_0$ точки траєкторії збуреного руху містяться всередині n-вимірної кулі радіуса ε (ε-куля) з центром O. Точка спокою O стійка, якщо будь-яка траєкторія, що починається при $t = t_0$ всередині δ-кулі з центром на початку координат, у всі подальші моменти часу не досягне навіть межі ε-кулі з тим самим центром. Асимптотична стійкість означає, що траєкторії з початковими точками всередині δ-кулі не тільки не вийдуть за межі ε-кулі, але з часом необмежено наблизяться до його центру. При $n = 2$ n-вимірна δ- або ε-куля – це круг відповідного радіуса (рис. 4).

2^0. ***Лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами***. Зупинимося на системі лінійних диференціальних рівнянь із сталими дійсними коефіцієнтами a_{jr}:

$$dy_j/dt = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} y_r(t) + f_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

В матричних позначеннях система (9) та початкові умови (2) приймуть вигляд (див. 2^0 § 51)

$$dY/dt = AY(t) + F(t), \quad Y(t_0) = H, \tag{10}$$

де $Y = Y(t)$ та H – матриці-стовпці з елементами $y_j(t)$ та $h_j = y_j(t_0)$ відповідно.

Нехай досліджується на стійкість розв`язок задачі Коші (10) $Y^*(t)$, що відповідає матриці початкових значень $H^* = \left(h_j^*\right)_{n,1}$, тобто

$$dY^*/dt = AY^* + F, \quad Y^*(t_0) = H^*. \tag{11}$$

З (10) та (11) за допомогою віднімання одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(Y - Y^*\right) = A\left(Y - Y^*\right), \quad Y(t_0) - Y^*(t_0) = H - H^*.$$

Покладемо тут $Y(t) - Y^*(t) = X(t)$, тоді $X = \left(x_j\right)_{n,1}$, $x_j = y_j - y_j^*$, $x_j(t_0) = h_j - h_j^*$ та

$$dX/dt = AX, \quad X(t_0) = H - H^*. \tag{12}$$

Однорідна система з (12) має очевидний (тривіальний) відповідний нульовим початковим умовам розв`язок $X^* = \theta$, де θ – нульова матриця-стовпець.

Запишемо нерівності (5), (6) в нових позначеннях:

$$\left|h_j - h_j^*\right| = \left|x_j(t_0)\right| = \left|x_j(t_0) - 0\right| < \delta, \quad \left|y_j(t) - y_j^*(t)\right| = \left|x_j\right| = \left|x_j - 0\right| < \varepsilon.$$

Звідси видно, що дослідження на стійкість розв`язку $Y^*$ системи (11) рівносильне дослідженню на стійкість тривіального розв`язку $X^* = \theta$ або, що те саме, нульової точки спокою системи $dX/dt = AX$. Загальний розв`язок останньої знаходимо за методом Ейлера (3^0 § 51): функції $x_j(t) = \lambda_j e^{kt}$ з невідомими коефіцієнтами λ_j та параметром k підставляємо до системи ДР (12), отримуємо відносно величин λ_j однорідну алгебраїчну систему та, вимагаючи існування ненульових значень λ_j, приходимо до характеристичного рівняння (приклади 51.3 та 51.4):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Ліва частина (13) відносно параметра k є многочленом степеня n:

$$P_n(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad (14)$$

тому замість (13) пишуть

$$P_n(k) = 0 \quad \text{або} \quad a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \qquad (15)$$

Частинні розв`язки $x_j(t)$ системи (12) залежать від вигляду коренів рівняння (15): *а*) $x_j(t) = A_j e^{\alpha t}$, якщо $k = \alpha$ – простий дійсний корінь; *б*) $x_j(t) = e^{\alpha t}\left(A_j \cos\beta t + B_j \sin\beta t\right)$, якщо $k = \alpha \pm \beta i$ – проста пара комплексно спряжених коренів; *в*) ті самі функції, що і вище, помножені на деякий многочлен від t, якщо корені – кратні. Із зростанням t при $\alpha < 0$ $e^{\alpha t} \to 0$, при $\alpha > 0$ $e^{\alpha t} \to \infty$. Якщо ж $\alpha = 0$, то у випадку простого кореня $x_j(t) = A_j$ або $x_j(t) = A_j \cos\beta t + B_j \sin\beta t$, а у випадку кратного кореня ці вирази входять до складу $x_j(t)$ разом з деяким многочленом від t в якості множника. Тому при $\alpha = 0$ із зростанням t функції $x_j(t)$ можуть необмежено зростати, якщо корінь k – кратний, або залишатися обмеженими та як завгодно близькими до початку координат за рахунок підходящого вибору сталих A_j, B_j, якщо корінь k – простий. На цих міркуваннях засновані перелічені нижче твердження відносно стійкості нульової точки спокою системи (12).

1. Якщо усі корені характеристичного рівняння (15) мають від`ємну дійсну частину, то точка спокою асимптотично стійка.

2. Якщо хоча б один корінь рівняння (15) з додатною дійсною частиною, то точка спокою – нестійка.

3. Якщо характеристичне рівняння (15) має прості корені з нульовою дійсною частиною, тобто вигляду $k = 0$ або $k = \pm\beta i$, а решта коренів, якщо вони є, з від`ємною дійсною частиною, то точка спокою стійка, але асимптотична стійкість відсутня.

Наявність кратних коренів з нульовою дійсною частиною, як правило, веде до нестійкості точки спокою, але можливі виключення, що потребує спеціального вивчення.

3^0. *Ознаки асимптотичної стійкості*. В багатьох прикладних задачах особливий інтерес набуває асимптотична стійкість точки спокою. Для цього, як вказано вище, всі корені рівняння (15) повинні мати від\`ємну дійсну частину. Однак розв\`язання алгебраїчного рівняння (15) високого степеня у загальному випадку утруднено. Тому використовують ознаки, які дозволяють, не розв\`язуючи рівняння (15), судити про вигляд його коренів. Одна з ознак (необхідна) випливає з властивості многочленів (14) з дійсними коефіцієнтами $a_0$, $a_1,\ldots,a_n$: якщо всі корені многочлена $P_n(k)$ мають від\`ємну дійсну частину, то всі коефіцієнти цього многочлена з тим самим знаком, що і старший з них a_0.

Справді, $P_n(k) = a_0(k-k_1)(k-k_2)\cdots(k-k_n)$, де k_j, $j = 1, 2,\ldots, n$, – корені многочлена. У цьому розкладанні кожній парі комплексно спряжених коренів $k = \alpha \pm \beta i$ при $\alpha < 0$ відповідає многочлен 2-го степеня з додатними коефіцієнтами:

$$(k-\alpha-\beta i)(k-\alpha+\beta i) = (k-\alpha)^2 + \beta^2 =$$
$$= k^2 - 2\alpha k + \alpha^2 + \beta^2 = k^2 + pk + q, \quad p,q > 0.$$

Будь-якому дійсному кореню $k = \alpha < 0$ відповідає многочлен 1-го степеня $k - \alpha = k + \gamma$ з $\gamma = -\alpha > 0$. Тому у розкладанні

$$P_n(k) = a_0(k+\gamma_1)\cdots(k+\gamma_m)\left(k^2 + p_1 k + q_1\right)\cdots\left(k^2 + p_r k + q_r\right)$$

вирази у дужках – многочлени з додатними коефіцієнтами. Після їх перемноження отримаємо многочлен степеня n з додатними коефіцієнтами. Остаточний знак коефіцієнтів визначиться тепер знаком a_0. В силу рівності $P_n(k) = 0$ не обмежуючи загальність можна вважати, що $a_0 > 0$.

Отже, **необхідна умова** від\`ємності дійсної частини усіх коренів характеристичного рівняння (15) полягає в тому, що його коефіцієнти повинні бути строго додатними. Однак дотримання цієї умови ще не забезпечує вказаної властивості.

Задачу однозначно вирішує, зокрема, **критерій Льєнара – Шипара**, в якому використовується **матриця Гурвіца**:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Останню складають так: на головній діагоналі розташовують коефіцієнти многочлена (14), починаючи з a_1 і до a_n, в кожному рядку справа від них – коефіцієнти з послідовно спадними, а зліва – із зростаючими індексами; коефіцієнти, яких бракує (з індексами більш за n та менше 0), замінюються на нулі. Головні діагональні мінори матриці Γ:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad \text{і т.д.}$$

В цих позначеннях критерій Льєнара – Шипара формулюється таким чином.

Дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння (15) від`ємні в тому і тільки в тому випадку, коли

1) додатні всі коефіцієнти рівняння (15):

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ldots, \quad a_n > 0;$$

2) додатні наведені нижче діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_{n-1} > 0, \ \Delta_{n-3} > 0, \ldots$$

Виконання наведених умов говорить про існування асимптотичної стійкості нульового розв`язку однорідної системи (12), а невиконання – про те, що такої стійкості у нульового розв`язку немає.

Приклад 2. Дослідити на стійкість нульовий розв`язок системи ДР

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2(t), \\ dx_2/dt = x_3(t), \\ dx_3/dt = x_4(t), \\ dx_4/dt = -6x_1(t) - 17x_2(t) - 17x_3(t) - 7x_4(t). \end{cases}$$

Розв`язування. Порівнявши задану систему з загальною формою (9), випишемо ненульові коефіцієнти: $a_{12} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{34} = 1$, $a_{41} = -6$, $a_{42} = -17$, $a_{43} = -17$, $a_{44} = -7$. Складемо характеристичне рівняння (13), а потім перетворимо його до вигляду (15):

$$\begin{vmatrix} 0-k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0-k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-k & 1 \\ -6 & -17 & -17 & -7-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^4 + 7k^3 + 17k^2 + 17k + 6 = 0.$$

Згідно з (15) маємо $a_0 = 1 > 0$, $a_1 = 7 > 0$, $a_2 = 17 > 0$, $a_3 = 17 > 0$, $a_4 = 6 > 0$ – умова 1) критерію Льєнара – Шипара виконана. Запишемо матрицю Гурвіца та її діагональні мінори Δ_3 та Δ_1.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 17 & 17 & 7 \\ 0 & 6 & 17 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = 7.$$

Дістаємо: $\Delta_3 = -6\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 17 & 7 \end{vmatrix} + 17\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 17 & 17 \end{vmatrix} = 17^2 \cdot 6 - 6 \cdot 49 = 6 \cdot \left(17^2 - 7^2\right) > 0$; $\Delta_1 > 0$.

Умову 2) критерію також дотримано. Значить, нульовий розв`язок системи ДР асимптотично стійкий.

Подібним чином вирішується питання про асимптотичну стійкість нульового розв`язку одного лінійного диференціального рівняння порядку n.

Приклад 3. Дослідити на асимптотичну стійкість нульовий розв`язок рівняння

$$y^V + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Розв`язування. Запишемо характеристичне рівняння, відповідну до нього матрицю Гурвіца та діагональні мінори Δ_4 та Δ_2.

$$k^5 + 2k^4 + 3k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо критерій Льєнара – Шипара: 1) усі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні: $a_0 = 1 > 0$, $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = 3 > 0$, $a_3 = 2 > 0$, $a_4 = 1 > 0$, $a_5 = 1 > 0$;

2) мінор $\Delta_2 = 4 > 0$, а мінор $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 11 < 0$.

Остання нерівність суперечить вимогам критерію, таким чином, нульовий розв`язок ДР властивості асимптотичної стійкості не має.

Зауваження. Паралельно з критерієм Льєнара – Шипара на практиці широко використовується й інша умова, яку називають **критерієм Гурвіца** (або Рауса – Гурвіца): всі корені характеристичного рівняння (15) мають від`ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли всі головні діагональні мінори матриці (16) додатні, тобто $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

♦ Теорія стійкості розв`язків ДР як самостійна галузь знань сформувалася наприкінці XIX століття. Основоположний внесок в неї зробили Пуанкаре та Ляпунов.

♦ **Анрі Пуанкаре** (фр. математик, фізик, астроном, філософ, 1854 – 1912) закінчив в Парижі Політехнічну (1875), а потім Гірничу (1879) школу. Його дослідження належать до теорії чисел, алгебри, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, небесної механіки, основ математики. Має більш ніж тисячу наукових робіт. Побудував якісну теорію диференціальних рівнянь, в якій впровадив класифікацію особливих точок інтегральних кривих, вивчив характер поведінки цих кривих на площині. Примітний такий епізод. Після року навчання у Політехнічній школі виявилось, що для переведення на 2-й курс потрібної кількості балів Пуанкаре не отримав, його повинні були відрахувати. На щастя для науки, цього не сталося. Вчена рада вирішила мудро: оскільки недостача балів виникла виключно через креслення, здібного студента взагалі звільнили від вивчення настільки «недосяжного» для нього предмету.

♦ **Олександр Михайлович Ляпунов** (рос. математик та механік, 1857 – 1918) закінчив Петербурзький університет, учень П.Л. Чебишава, в 1885 – 1902 рр. викладав у Харківському університеті. Був головою Харківського математичного товариства. Постійно працював над науковими проблемами до 4 – 5 години ранку, іноді приходив на лекції, не зімкнувши очей. Із розваг дозволяв собі лише один-два рази на рік з`явитися в театрі або на концерті свого брата, композитора С.М. Ляпунова. Його працьовитість викликала захоплення усіх, хто стикався з ним. В науці він бачив сенс свого життя, науковій творчості віддавав себе без залишку. Створив сучасну теорію стійкості рівноваги та руху механічних систем. Отримав істотні результати в теорії лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь, в теорії рівноваги рідини, що обертається, в теорії ймовірностей, в математичній фізиці.

В день смерті дружини, знаходячись в стані депресії, спробував обірвати своє життя пострілом з пістолета, через три дні його не стало.

Розділ VIII

ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Нескінченне існує там, де беручи деяку кількість, завжди можна взяти що-небудь після неї.
Аристотель, гр. філософ IV ст. до н. е.

Поняття визначеного інтеграла пов`язане з нескінченним розбиттям відрізку інтегрування на малі проміжки. У цьому процесі кількість елементів, що складають інтегральну суму, необмежено зростає. Вирази з нескінченною кількістю доданків з`являються в математиці неодноразово. Припущення про те, що правила алгебри, які мають місце для скінченних сум, поширюються також на випадок нескінченної кількості доданків, у загальному випадку є невірним. Ці правила справедливі тільки за певних умов, що встановлює теорія рядів. Специфічні особливості нескінченних рядів не применшує їх величезну теоретичну та практичну цінність. Взаємозв`язок скінченного та нескінченного, який є наріжним каменем математичного аналізу, реалізується в теорії рядів чудовим чином і дає результати нескороминущого значення.

§ 53. Числовий ряд та його сума

І ось я кажу, що вся трудність ховається у назві «сума».
Л. Ейлер, математик XVIII ст.

1^0. ***Нескінченна геометрична прогресія***. Позначимо через S_n суму n членів геометричної прогресії:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}. \tag{1}$$

Очевидно, $qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$. Віднімаючи почленно останню рівність із (1), одержуємо $S_n(1-q) = a - aq^n$. Таким чином, при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}. \tag{2}$$

Вивчимо поведінку суми S_n при $n \to \infty$. На підставі (2), де від n залежить тільки величина q^n, а решта елементів формули – сталі, записуємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n.$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ та $S_n \to S = \dfrac{a}{1-q}$. Таким чином, приходимо до відомої формули для суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}, \ |q| < 1. \tag{3}$$

При $|q| > 1$ степінь q^n, а разом з ним і S_n ведуть себе як нескінченно великі величини, скінченної границі вони не мають.

Якщо $q = 1$, то згідно з (1) $S_n = na \to \infty$. При $q = -1$ величина S_n в залежності від парності n приймає два значення:

$$S_n = a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a = \begin{cases} 0, & \text{коли } n \text{ парне}, \\ a, & \text{коли } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Величина S_n коливається й до границі не прямує.

Отже, нескінченна геометрична прогресія має скінченну суму тільки тоді, коли вона спадна, тобто при $|q| < 1$.

Операція додавання проводиться в лівій частині (3) необмежену кількість разів. Таке нескінченне підсумовування – характерна особливість виразів, які в математиці називають рядами.

2^0. *Основні означення*.

1. Нехай маємо нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Загальний член послідовності u_n як функція номера n визначає закон утворення цих чисел. Елементи послідовності, з`єднані знаком «+», породжують новий математичний символ, що іменують **числовим рядом**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

Ліва частина цієї рівності – скорочений запис ряду, а права є рядом в розгорнутому вигляді. Доданки $u_1, u_2, \ldots$ – члени ряду, u_n – загальний член ряду.

2. Суму n перших членів ряду (4) називають його n-ю **частковою сумою**

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{5}$$

тобто $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ і т.д.

3. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \tag{6}$$

то число S називають **сумою ряду**. Сам ряд (4) у цьому випадку іменують **збіжним**. У відсутності скінченної границі (6) говорять, що ряд (4) **розбігається**. У такого ряду немає скінченної суми (при $S_n \to +\infty$ або $S_n \to -\infty$ іноді використовують вираз «сума ряду нескінченна»).

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ має часткову суму

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд збігається, його сума $S=1$.

Приклад 2. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=ln\,2+ln\frac{3}{2}+ln\frac{4}{3}+\cdots$

Часткова сума (5) у даному випадку зводиться до вигляду

$$S_n=ln\,2+(ln\,3-ln\,2)+(ln\,4-ln\,3)+\cdots+ln\,n-ln(n-1)+ln(n+1)-ln\,n=ln(n+1).$$

При $n\to\infty$ $S_n=ln(n+1)\to\infty$. Це означає, що ряд розбігається.

Зауваження. Безпосередньо додати нескінченну кількість членів, як записано в (4), практично неможливо. До того ж така операція не визначена теоретично, оскільки не зрозуміло, чи можливо в процесі підсумовування довільно групувати члени ряду, міняти їх місцями, виносити спільний множник за дужки. Всі ці правила доведені лише для скінченних сум, на нескінченні ряди вони автоматично не поширюються. Вираз (4) стає змістовним лише тоді, коли означення суми ряду веде до її однозначного відшукання (нехай навіть тільки теоретично). Саме таким є означення (6). Уявлення ж про суму ряду як про число, яке виникає в результаті нескінченного підсумовування додавання в (4), може призвести до помилки. Це видно на такому прикладі: $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ Різними способами групуючи члени ряду, для його суми S одержуємо

$$S=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0;$$

$$S=1-(1-1)-(1-1)+\cdots=1-0-0-\cdots=1;$$

$$S=1-(1-1+1-1+\cdots),\quad S=1-S,\quad 2S=1,\quad S=1/2.$$

Абсурд виникає через неправомірне поширення на ряди дій, що законні тільки для скінченних сум. Багатозначність усувається, якщо виходити з означень (5), (6): $S_1=1$, $S_2=1-1=0$, $S_3=1-1+1=1$, …, тобто часткова сума S_n приймає два значення 1 та 0, вона коливається, її границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Висновок: ряд розбігається і суми не має.

3⁰. ***Деякі властивості рядів***. Діючи у відповідності до означень (5) та (6), встановлюємо такі властивості.

1. Якщо в ряді (4) відкинути (додати) скінченну кількість членів, то це не вплине на збіжність ряду.

Справді, нехай відкинуті m членів, що мають суму C_m. Усі відкинуті члени містяться в частковій сумі S_n із достатньо великим номером n, тому

$S_n = C_m + \sigma_{n-m}$, де σ_{n-m} – сума членів, що залишилися в S_n після відкидання. Оскільки доданок C_m не залежить від n, то при $n \to \infty$ $\lim S_n = C_m + \lim \sigma_{n-m}$. Обидві границі у цій рівності разом існують та скінченні, або разом нескінченні, або разом не існують. Тому неповний ряд щодо збіжності веде себе так само, як вихідний ряд.

2. Якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, що має суму S (це записують так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$), то при $A = const$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Au_n = Au_1 + Au_2 + \cdots$ також збігається, його сумою є AS.

Дійсно, часткова сума 2-го ряду $\sigma_n = Au_1 + Au_2 + \cdots + Au_n = A(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = AS_n$, де S_n – часткова сума вихідного ряду, для якої існує скінченна границя $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. При цьому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} AS_n = A \lim\limits_{n\to\infty} S_n = AS$ є скінченним числом, що і доводить наведене вище твердження.

Таким чином, почленне множення збіжного ряду на довільне стале число A не порушує збіжності ряду. Змінюється (в A разів) тільки його сума.

3. Якщо збігаються ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$, то також будуть збігатися ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$. Їх суми відповідно дорівнюють $S + \sigma$ та $S - \sigma$.

Ця властивість – наслідок очевидного зв`язку між частковими сумами наведених рядів:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \qquad \sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n;$$
$$C_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = S_n \pm \sigma_n;$$
$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma.$$

Наведена вище властивість означає, що збіжні ряди можна почленно додавати і віднімати. При цьому такі самі дії проводяться над їх сумами.

4^0. ***Необхідна умова збіжності***. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (7)$$

До рівності (7) приводить таке міркування. Для збіжного ряду згідно з означенням (6) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Оскільки $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, то $u_n = S_n - S_{n-1}$ та при $n \to \infty$ $\lim u_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

В силу обов`язкового характеру умови (7) справедливе твердження: якщо при $n \to \infty$ $u_n \not\to 0$, то ряд розбігається (тому що з його збіжності неминуче випливало б $u_n \to 0$).

Приклад 3. $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{7}{10} + \cdots + \frac{2n-1}{3n-2} + \cdots$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3} \neq 0$. Таким чином, ряд розбігається.

Рівність (7) необхідна для збіжності ряду, але достатньою умовою збіжності вона не є. Невиконання умови (7) впевнено свідчить про те, що ряд розбігається, однак його виконання не означає збіжності ряду – потрібне додаткове дослідження.

Приклад 4. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, тобто умова (7) виконана. Ряд між тим розбігається:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty,$$

отже, $S_n \to \infty$.

Так само веде себе ряд із прикладу 2: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, але $S_n = \ln(1+n) \to \infty$, тобто ряд розбігається.

♦ Математики XVII – XVIII століть широко застосовували ряди в задачах, пов`язаних з обчисленням площ та інтегруванням. Для формування сучасної теорії знадобилися зусилля найвидатніших математиків на протязі більш ніж двох століть. Не відразу склалося уявлення про необхідність відокремлювання збіжних рядів від розбіжних. Браття Бернуллі (Якоб та Іоганн) першими помітили та показали на прикладах, що виконання умови (7) ($u_n \to 0$) не забезпечує збіжність ряду. Їх сучасникам цей факт здавався вражаючим. Про непридатність для обчислень незбіжних рядів попереджував дослідників у 1715 р. П. Вариньон (фр. математик, 1654 – 1722).

♦ Італійський професор та монах з м. Піза Г. Гранді у 1703 р. з приводу ряду 1–1+1–1+ … припускав таке спекулятивне міркування: в залежності від групування членів ряду його сума $S = 1/2$ або $S = 0$, значить, $0 = 1/2$. Нуль – це нічого, а $1/2$ – щось. Рівність, що виникає, підтверджує тезис про те, що Бог створив світ з нічого.

§ 54. Достатні ознаки збіжності

Розбіжні ряди цілком є винаходом диявола, і це ганьба, що на них зважуються базувати якісь доведення. Застосовуючи їх, можна вивести все, що завгодно, і саме через них виникло стільки невдач та парадоксів.
Н. Абель, норв. математик XIX ст.

Ряди із скінченними сумами, тобто збіжні ряди, знаходять чисельні застосування на практиці. За своїми властивостями вони близькі до многочленів. Їх слід відокремлювати від розбіжних рядів, які не мають таких якостей. Зробити це за допомогою означення (53.6) вдається лише у виключних випадках, наприклад, для геометричної прогресії, коли часткова сума ряду S_n зводиться до нескладної функції змінної n. Існує велика кількість ознак, що дозволяють судити про поведінку ряду, не звертаючись до формули (53.6). Необхідна умова збіжності (53.7) – одна з таких ознак, хоча її дія вибіркова (див. приклади 53.3 та 53.4). Зупинимося тепер на групі ознак, які називають достатніми.

1⁰. ***Ознака порівняння***. Нехай маємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \tag{2}$$

причому для усіх номерів n виконуються нерівності

$$u_n \le v_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тоді із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а із розбіжності ряду (1) – розбіжність ряду (2).

Міркуємо так. Числа u_n та v_n додатні, тому із зростанням n часткові суми $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ та $\sigma_n = v_1 + \cdots + v_n$ можуть тільки зростати.

а) Якщо ряд (2) збігається, то величина σ_n має скінченну границю σ та $\sigma_n < \sigma$. В силу (3) $S_n \le \sigma_n < \sigma$. Оскільки сума S_n монотонно зростає та обмежена зверху сталим числом σ, то існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \le \sigma$

(властивість 3 із 2^0 § 24). Це і означає, що ряд (1) збігається;

б) Якщо ж ряд (1) розбігається (для ряду із додатними членами розбіжність рівносильна тому, що $S_n \to \infty$), то $\sigma_n \ge S_n \to \infty$. Таким чином, $\sigma_n \to \infty$ також, і ряд (2) розбігається.

Виконання нерівності (3), починаючи з номера $n \ne 1$, по суті нічого не змінює. До випадку (3) можна прийти завжди, якщо в рядах (1), (2) відкинути скінченну кількість членів та увести нову нумерацію. Як відомо, таке відкидання на поведінці ряду не позначається (властивість 1 з 3^0 § 53). При дотриманні умови (3) ряд (1) називають мінорантним, а ряд (2) – мажорантним (фр. *mineur*, іт. *minore* – менший, фр. *majeur*, іт. *maggiore* – більший). У цих термінах ознаку порівняння формулюють таким чином. **Із збіжності мажорантного ряду випливає збіжність мінорантного, а розбіжність мінорантного ряду тягне за собою розбіжність мажорантного**.

Приклад 1. Маємо два ряди: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+1}$ (α) та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ (β). Ряд (β) збігається, оскільки його члени утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію ($q = 1/3 < 1$). Очевидно, $\dfrac{1}{3^n+1} < \dfrac{1}{3^n}$. Із збіжності мажорантного ряду (β) випливає, що мінорантний ряд (α) теж збігається.

Трудність зазвичай полягає в тому, що ряд для порівняння, як правило, не задається. Його потрібно підібрати, а це потребує деяких навиків та винахідливості.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n\sqrt{n}}$ (α). Оскільки при $n \to \infty$ $u_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{n}} \to 0$, то необхідна умова збіжності виконана. З цього випливає тільки те, що протипоказання для збіжності ряду (α) немає. Візьмемо зручний для порівняння з (α) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (β). Маємо $u_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{2^n\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, тобто $u_n < v_n$. Ряд (β) по відношенню до (α) є мажорантним. Він розбігається (див. приклад 53.4), тому не визначає поведінку ряду (α). Це означає, що ряд (β) вибраний для порівняння невдало. Розглянемо інший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/2^n$ (γ). Члени цього ряду утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію ($q = 1/2 < 1$), ряд (γ) збігається. Внаслідок нерівності $\dfrac{1}{2^n\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2^n}$ ряд (γ) мажорує ряд (α). Із збіжності ряду (γ) випливає, що мінорантний ряд (α) теж збігається.

Зауваження. За допомогою ознаки порівняння рядів доводять твердження, яке називають другою ознакою порівняння: якщо для знакододатних рядів (1), (2) існує скінченна, відмінна від нуля, границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,\quad l\neq 0,\quad l\neq\infty, \tag{4}$$

то обидва ряди (1) та (2) збігаються або розбігаються одночасно [6, с. 663].

Приклад 3. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\pi/\sqrt{n}\right)$ (α) та $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ (β) такі, що $\lim_{n\to\infty}\dfrac{sin\left(\pi/\sqrt{n}\right)}{1/\sqrt{n}}=\pi$ (використана формула $\lim_{x\to 0}\dfrac{sin\,x}{x}=1$). Оскільки ряд (β) розбігається (приклад 53.4), то звідси випливає, що ряд (α) теж розбігається.

2⁰. ***Ознака Даламбера***. Нехай маємо ряд із додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) та існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тоді а) при $l<1$ ряд (1) збігається; б) при $l>1$ ряд (1) розбігається.

Доведення. а) Якщо $l<1$, то можна вибрати число q таке, що $l<q<1$. Величина $u_{n+1}/u_n\to l$, таким чином, починаючи з деякого номера N, всі значення дробу u_{n+1}/u_n опиняться у достатньо малому околі числа l, так що стане $u_{n+1}/u_n<q$. Звідси випливає ланцюжок нерівностей: при $n=N$ $u_{N+1}<qu_N$, при

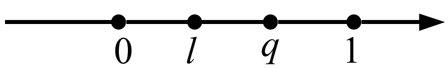


Рис. 1

$n=N+1$ $u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N$, при $n=N+2$ $u_{N+3}<qu_{N+2}<q^3u_N$ і т.д. Порівняємо тепер два ряди:

$$u_1+u_2+\cdots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots \tag{1'}$$

$$u_N+qu_N+q^2u_N+q^3u_N+\cdots \tag{2'}$$

Ряд (2′) збігається, оскільки його члени утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію ($0<q<1$). Відкинемо в (1′) перші $N-1$ членів. Як відомо (властивість 1 з 3⁰ § 53), це не впливає на збіжність ряду. Для такого «зрізаного» ряду згідно з отриманими вище нерівностями ряд (2′) є мажорантним. В силу збіжності (2′) ряд (1′) теж збігається;

б) Якщо $l>1$ та $u_{n+1}/u_n\to l$, то починаючи з деякого номера N при $n=N$, $n=N+1$, $n=N+2$ і т.д., буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n>1$, тобто $u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \cdots$ Члени ряду зростають, $u_n \not\to 0$, порушується необхідна умова збіжності, таким чином, ряд (1) розбігається.

Доведення втрачає силу при $l = 1$. У цьому випадку визначити поведінку ряду за допомогою ознаки Даламбера не можна.

Пример 4. Задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$, де стале число $H > 0$. Символ $n!$ визначений в 4^0 § 42: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ при натуральному $n \geq 1$, $0! = 1$. Дослідити ряд на збіжність.

Розв`язування. Застосуємо ознаку Даламбера. Маємо $u_n = \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$u_{n+1} = \frac{H^{n+2}}{(n+2)!},\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H^{n+2}(n+1)!}{H^{n+1}(n+2)!} = H \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)(n+2)} =$$

$$= H \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)} = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

Приклад 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Тут $u_n = n^n / n!$, $u_{n+1} = (n+1)^{n+1} / (n+1)!$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$ Ряд розбігається.

Зауваження. Подібно до ознаки Даламбера формулюється і доводиться радикальна ознака Коші: якщо для ряду із додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то даний ряд при $l < 1$ збігається, а при $l > 1$ розбігається.

Приклад 6. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{ln\, n}\right)^n$ збігається, оскільки $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1/ln\, n)^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln\, n} = 0 < 1.$$

3^0. ***Інтегральна ознака***. Нехай задано знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), члени якого монотонно спадають до нуля:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots, \quad u_n \to 0.$$

Нехай також існує неперервна монотонно спадна функція $u(x)$ така, що її значення при $x = n$ збігаються з u_n, тобто $u(n) = u_n$. Тоді, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} u(x)dx$, то збігається й ряд (1). Якщо ж цей інтеграл розбігається, то і ряд (1) теж розбігається.

Доведення. Числа $u_1, u_2, \cdots$ будемо розглядати як ординати точок з абсцисами 1, 2, … Очевидно, що крива $y = u(x)$ проходить через точки $(1, u_1)$, $(2, u_2)$,…, (n, u_n), … Кожний із заштрихованих на рис. 2 прямокутників має площу, що чисельно дорівнює відповідному члену ряду (1). Площа ступінчастої фігури з основою $[1, n]$, що складена з цих прямокутників, запишеться як

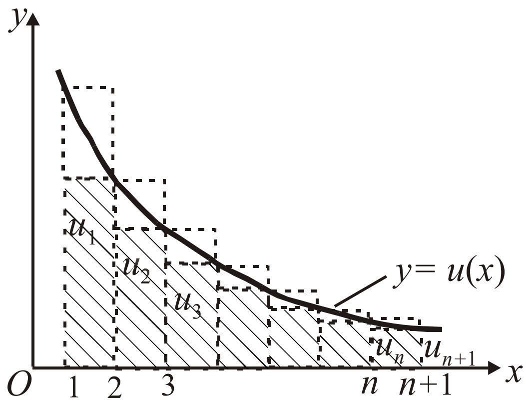


Рис. 2

$$u_2 + u_3 +\ldots + u_n = S_n - u_1,$$

де S_n – n-а часткова сума ряду (1). Оскільки ступінчаста фігура повністю входить (вписана) до криволінійної трапеції, розташованої на тій самій основі під кривою $y = u(x)$, то її площа менше площі трапеції. Виходячи з геометричного змісту інтеграла, маємо нерівності

$$S_n - u_1 < \int_1^{n} u(x)dx < \int_1^{\infty} u(x)dx.$$

Припустимо, останній інтеграл збігається, тобто $\int_1^{\infty} u(x)dx = A \neq \infty$, $A=const$.

Тоді $S_n < A + u_1$. При $n \to \infty$ величина S_n монотонно зростає і обмежена зверху сталим числом, таким чином, існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

А це і означає, що ряд (1) збігається. Якщо ж $\int_1^{\infty} u(x)dx = \infty$, тобто інтеграл розбігається, то порівнявши на відрізку $[1, n+1]$ площу описаної ступінчастої фігури з площею криволінійної трапеції, одержимо

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_n > \int_1^{n+1} u(x)dx \to \infty.$$

Звідси виходить, що $S_n \to \infty$ також, таким чином, ряд (1) розбігається.

Приклад 7. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, де α – деяке стале число. Функція $u(x)$ відшукується просто: достатньо в загальному члені ряду замінити n на x, тобто $u(x)=1/x^{\alpha}$. Знаходимо інтеграл (див. приклад 42.1)

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ \ln x\end{cases}\Bigg|_{1}^{\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{якщо } \alpha>1, \\ \infty, & \text{якщо } \alpha\le 1.\end{cases}$$

Таким чином, ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha>1$ та розбігається, якщо $\alpha\le 1$.

Приклад 8. Застосувавши до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ інтегральну ознаку, дістанемо $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_{1}^{\infty}=\infty$. Отже, ряд розбігається.

Розглянуті вище достатні ознаки можна використовувати тільки для рядів з додатними членами. Знакозмінні ряди потребують спеціального вивчення.

4⁰. ***Ознака Лейбніца***. Якщо в знакопочережному ряді

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots, \tag{5}$$

де при будь-якому n $u_n>0$, члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадають до нуля, тобто

$$u_1>u_2>u_3>u_4>\cdots>u_n>u_{n+1}>\cdots, \quad u_n\to 0, \tag{6}$$

то ряд (5) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Доведення. Утворимо часткову суму S_n, що складається з парної кількості членів ($n=2m$, $m=1, 2,\ldots$), і запишемо її двома способами:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}); \tag{7}$$

$$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-u_{2m}. \tag{8}$$

Згідно з (6) вирази, що містяться у дужках, додатні. Тому в силу (7) $S_{2m}>0$, а в силу (8) $S_{2m}<u_1$, тобто $0<S_{2m}<u_1$. Як видно з (7), із збільшенням m величина S_{2m} монотонно зростає. Оскільки $S_{2m}<u_1=const$, то існує скінченна границя $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S\le u_1$. Ця границя задовольняє нерівності $0<S\le u_1$. Для часткової суми S_n, що містить непарну кількість членів ряду (5), маємо

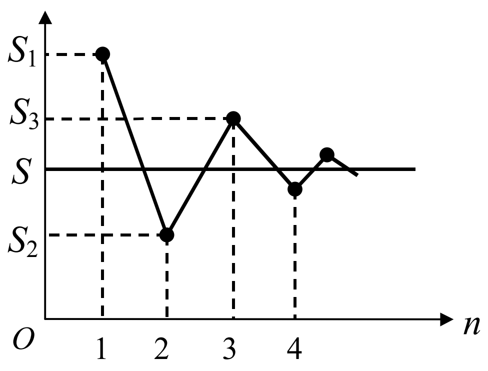


Рис. 3

$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. При $m \to \infty$ $u_{2m+1} \to 0$, тому $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Отже, незалежно від парності n $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ та $0 < S \le u_1$. Саме це і стверджує сформульована вище теорема Лейбніца. Аналогічно доводиться, що при виконанні умови (6) ряд $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$ збігається, його сума S задовольняє нерівності $-u_1 \le S < 0$, тобто $|S| \le u_1$. Часткові суми S_n збіжного ряду (5) ведуть себе так, як показано на рис.3. Вони коливаються навколо суми ряду S із зникаючою амплітудою.

Зауваження. При обриві збіжного ряду (5)

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \underbrace{(-1)^n u_{n+1} + \cdots}_{(5')}$$

фактично відкидається знакопочережний ряд (5′). Сума ряду (5′) за модулем не більше числа u_{n+1}. Знак цієї суми збігається зі знаком (n +1)-го члена ряду (5). Тому похибка $S - S_n$, що виникає при заміні суми S ряду (5) на його часткову суму S_n, має знак першого відкинутого члена, а за абсолютною величиною не перевищує його модуль.

Приклад 9. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots$ задовольняє всі умови теореми Лейбніца: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots$, $u_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Таким чином, ряд збігається, його сума S належить проміжку $0 < S \le 1$. Обірвавши ряд на номері $n = 3$, одержимо $S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ із похибкою $|S - S_3| \le \frac{1}{4}$.

5⁰. ***Абсолютна та умовна збіжність***. Нехай задано знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{9}$$

члени якого змінюють знак за довільним законом. Розглянутий вище знакопочережний ряд (5) – це окремий випадок ряду (9).

Припустимо, що збігається знакододатний ряд, складений з модулів чисел u_n:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \tag{10}$$

Тоді ряд (9) теж збігається, його збіжність при цьому називають **абсолютною**.

Може виявитися також, що ряд (10) розбігається, а ряд (9) збігається. У цьому випадку кажуть, що ряд (9) **збігається умовно**.

Той факт, що збіжність ряду (10) забезпечує збіжність ряду (9), підтверджується таким міркуванням. Нехай S_n та σ_n – часткові суми рядів (9) та (10) відповідно; V_n – сума додатних, а W_n – сума модулів від`ємних членів із S_n. Тоді $S_n = V_n - W_n$, $\sigma_n = V_n + W_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} V_n + \lim\limits_{n\to\infty} W_n$. Оскільки ряд (10) збігається, то змінні V_n та W_n повинні мати скінченні границі: $V_n \to V$, $W_n \to W$. При цьому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} V_n - \lim\limits_{n\to\infty} W_n = V - W$ також скінченне число, що і означає збіжність ряду (9).

Приклад 10. Задані два знакопочережних ряди: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (α) та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (β). Обидва ряди збігаються за ознакою Лейбніца ($\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \cdots$, $u_n = \frac{1}{n^2} \to 0$; $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$, $v_n = \frac{1}{n} \to 0$). Ряди, складені з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (γ) та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (δ), ведуть себе по різному: ряд (γ) збігається, ряд (δ) розбігається (див. приклад 7). Тому збіжність ряду (α) абсолютна, а ряду (β) – умовна.

Виділяти абсолютно збіжні ряди тому важливо, що з такими рядами можна поводитися як з многочленами, а саме: довільно групувати члени ряду, множити один ряд на інший. Для умовно збіжних рядів подібні дії незаконні. Наприклад, для ряду $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$(див. приклад 9) його сума $S > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. З іншого боку, переставляючи члени ряду так, щоб за кожним додатним йшли два від`ємні члени, маємо

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots,$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}S,$$

тобто $S = \frac{1}{2}S \quad \Rightarrow \quad S = 0$, що невірно, оскільки $S > \frac{1}{2}$.

6^0. ***Узагальнена ознака Даламбера***. Якщо для знакозмінного ряду (9) існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, то при $l < 1$ ряд (9) збігається абсолютно, а при $l > 1$ – розбігається.

Дійсно, якщо $l < 1$, то ряд (10) збігається в силу ознаки Даламбера для знакододатних рядів (див. 2^0). При цьому ряд (9) є абсолютно збіжним. Якщо ж $l > 1$, то $|u_n| \not\to 0$ і $u_n \not\to 0$ також. Внаслідок недотримання необхідної умови збіжності (53.7) звідси випливає розбіжність ряду (9).

♦ У XVIII столітті чіткого розуміння збіжності ряду у математиків ще не було. Уявлення про суму ряду як про границю послідовності його часткових сум стало загальновизнаним тільки у XIX столітті після робіт Больцано, Коші та Абеля. Строге викладення критеріїв збіжності дав Коші у своїх лекціях, які читав студентам Політехнічної школи у Парижі. За цими лекціями в 1821 році Коші видає «Курс аналізу», де оперує скінченними сумами та границями їх послідовностей, формулює у вигляді теореми та доводить ознаку Даламбера, встановлює радикальну ознаку збіжності, обгрунтовує інтегральну ознаку, знайдену раніше К. Маклореном (1742).

§ 55. Поняття про функціональний ряд

Жодна проблема не хвилювала так глибоко душу людини як проблема нескінченного, з іншого боку, жодне поняття не потребує такою мірою неодмінного з`ясування, як поняття нескінченного.
Д. Гільберт, нім. математик XIX – XX ст.

1^0. ***Область збіжності***. Функціональним називають ряд вигляду

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

Його членами є деякі функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, … Припустимо, що всі вони визначені у точці x_0. Тоді при $x = x_0$ ці функції перетворюються на числа $u_1(x_0)$, $u_2(x_0)$, … , і ряд (1) стає числовим. Різним значенням x відповідають різні числові ряди. Щодо збіжності такі ряди можуть вести себе по-різному. Важливо визначити ті значення x, при яких ряд (1) має скінченну суму, тобто збігається. Всю множина таких значень x називають **областю збіжності ряду** (1).

Часткова сума ряду (1) S_n, а також його сума S, якщо вона існує, є функціями x: $S_n = S_n(x)$, $S = S(x)$. Різниця $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ − це залишок ряду. Для кожного значення x з області збіжності ряду при $n \to \infty$ $R_n(x) \to 0$.

2^0. ***Степеневий ряд*** – окремий випадок ряду (1), а його членами слугують різні степені змінної x:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

Коефіцієнти a_0, a_1, …, a_n, … утворюють деяку числову послідовність. Нумерацію в ній зручно починати від 0, при цьому номер збігається з відповідним степенем x. Для ряду (2) справедливо таке твердження.

Теорема Абеля. Якщо ряд (2) збігається в точці x_0, тобто при значенні $x = x_0$, то він також абсолютно збігається при будь-якому x, для якого $|x| < |x_0|$. Якщо ряд (2) розбігається в точці x_*, то він також розбігається при всякому x, для якого $|x| > |x_*|$.

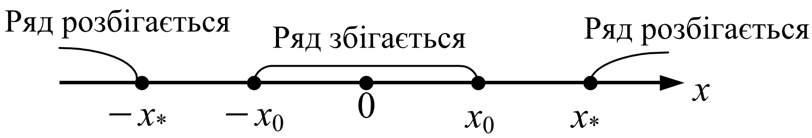


Рис. 1

Таким чином, із збіжності ряду (2) у точці x_0 випливає його збіжність у проміжку $(-x_0,\ x_0)$, розбіжність ряду у точці x_* тягне за собою його розбіжність у проміжках $(-\infty, -x_*)$ та (x_*, ∞) (рис.1).

Доведення опирається на ознаку порівняння рядів. Нехай збігається ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. Тоді при $n \to \infty$ $a_n x_0^n \to 0$ і для будь-якого числа $K > 0$, починаючи з деякого номера $n = N$, буде виконуватися нерівність $\left|a_n x_0^n\right| < K$.

Якщо фіксоване значення x таке, що $|x| < |x_0|$, то $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n < Kq^n$, де $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$. Це приводить до того, що збіжний як геометрична прогресія ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} K\, q^n$ виявляється мажорантним по відношенню до ряду $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$. Таким чином, останній ряд збігається. Звідси випливає, що ряд (2) збігається абсолютно. З іншого боку, якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_*^n$ розбігається, то при $|x| > |x_*|$ повинен розбігатися і ряд (2). Інакше (міркуючи, як і вище) ми прийшли б до того, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_*^n$ збігається, а це суперечить вихідному припущенню.

Із теореми випливає, що областю збіжності ряду (2) є деякий проміжок, симетричний відносно початку координат. Довжину цього проміжку позначимо через $2R$. Число R називають **радіусом збіжності** ряду (2). При $|x| < R$ ряд (2) збігається, а при $|x| > R$ – розбігається.

Формулу для обчислення R можна отримати так. Застосуємо до ряду (2) узагальнену ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l\,.$$

Ряд (2) абсолютно збігається, якщо $l < 1$, тобто при $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Це відбудеться, якщо $|x| < 1\Big/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ або $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Розбіжність ряду (2) має місце при $l > 1$, тобто при оберненій нерівності: $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Отже, остання границя і є радіусом збіжності ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Як відомо, при $l = 1$ для вирішення питання про збіжність ряду ознака Даламбера непридатна. Значенню $l = 1$ відповідає рівність $|x| = R$. Тому для з`ясовування того, як веде себе ряд у точках $x = \pm R$, потрібно зробити додаткове дослідження.

Приклад 1. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ маємо $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Це означає, що ряд збігається у проміжку $(-1;\,1)$ та розбігається за його межами. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу.

При $x = 1$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей числовий ряд (його називають гармонічним) розбігається в силу інтегральної ознаки: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = ln\,x \Big|_1^{\infty} = \infty$. Таким чином, точка $x = 1$ до області збіжності не входить.

При $x = -1$ одержуємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. За ознакою Лейбніца цей ряд збігається (приклад 54.9). Отже, точка $x = -1$ належить до області збіжності. Таким чином, областю збіжності ряду є проміжок $[-1;\, 1)$.

Приклад 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Тут $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Областю збіжності буде уся числова вісь $(-\infty;\, \infty)$.

Зауваження. Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad (4)$$

Рис. 2

заміною $x - a = X$ зводиться до вигляду (2): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Радіус збіжності ряду (4), як і у випадку ряду (2), відшукується за формулою (3). Інтервал збіжності ряду (4) зміщений вздовж осі Ox, його центр розташований у точці a (рис. 2):

$$-R < X < R, \qquad -R < x - a < R, \qquad a - R < x < a + R.$$

Приклад 3. Маємо ряд вигляду (4): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}$. Коефіцієнти ряду $a_n = \frac{1}{2^n n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}$, точка $a = -1$. Згідно з (3) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 2$. Таким чином, ряд збігається при $|x+1| < 2$, а розбігається – якщо $|x+1| > 2$. Знаходимо інтервал збіжності: $|x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2$, $-3 < x < 1$. При $x = 1$ одержуємо збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (приклад 54.7). При $x = -3$ маємо ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно. Отже, область збіжності ряду повністю визначена: $-3 \le x \le 1$.

3^0. ***Рівномірна збіжність***. Нехай D – область збіжності ряду (1). Як зазначувалось в 1^0, для будь-якого фіксованого значення $x \in D$ при $n \to \infty$ залишок ряду $R_n(x) \to 0$, тобто для довільно взятого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, після якого для усіх $n > N$ буде виконуватися нерівність

$$|R_n(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Якщо існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ нерівність (5) виконується **одночасно** для усіх $x \in D$, то говорять, що ряд (1) в області D збігається **рівномірно**.

Приклад 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ в області $D = [0, 1)$ збігається як геометрична прогресія.

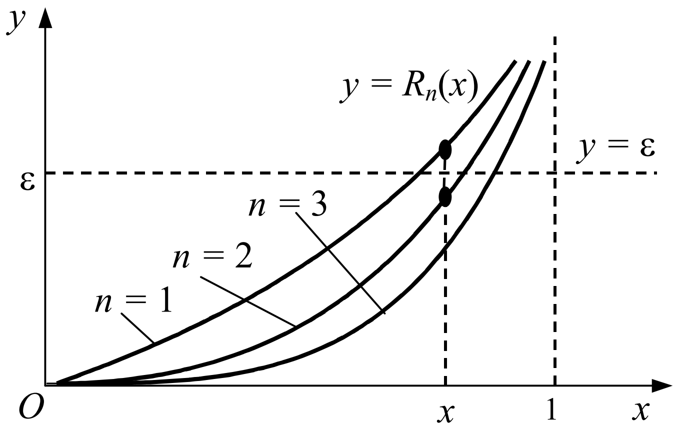


Рис. 3

Його часткова сума $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} \to$ $\to S(x) = \frac{1}{1-x}$ (формули (53.2) та (53.3). Залишок ряду

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x^n}{1-x} \to 0$$

при $n \to \infty$. Разом з тим при близьких до 1 значеннях x величина $R_n(x)$ стає необмежено великою. Через це не вдається підібрати номер N, при якому нерівність (5) виконувалася б одразу для усіх $x \in D$. Геометрично це означає (рис. 3), що збільшуючи номер n, не можна добитися, щоб крива $y = R_n(x)$ була нижче прямої $y = \varepsilon$ на всьому проміжку $[0, 1)$, хоча це можливо для кожного окремо взятого x. Таким чином, в області $D = [0, 1)$ даний ряд збігається нерівномірно.

Приклад 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ за ознакою Лейбніца збігається при будь-якому значенні $x \in D = (-\infty, \infty)$. Залишок ряду оцінюється за першим членом залишку, тобто $|R_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$.

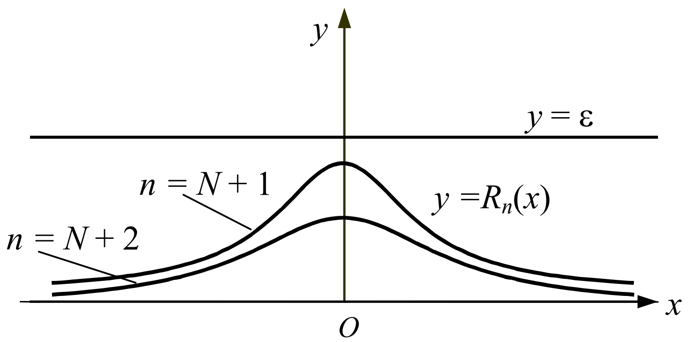


Рис. 4

Незалежно від x ця оцінка за рахунок n може бути зроблена скільки завгодно малою. Крива $y = R_n(x)$ при $n > N = N(\varepsilon)$ розташовується нижче прямої $y = \varepsilon$ $\forall x \in D$ (рис. 4). Таким чином, в області $D = (-\infty, \infty)$ ряд збігається рівномірно.

Має місце **ознака Веєрштрасса**: якщо для усіх $x \in D$ ряд (1) мажорується збіжним знакododатним числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, тобто $|u_n(x)| \le v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то цей ряд в області D збігається рівномірно.

Дійсно, залишок мажорантного ряду в силу його збіжності при достатньо великому $n > N$ стає скільки завгодно малою величиною: $\sum_{n=N+1}^{\infty} v_n < \varepsilon$.
При цьому одночасно для усіх $x \in D$ залишок ряду (1) задовольняє нерівності $|R_n(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} v_n < \varepsilon$, що й означає рівномірну збіжність (1).

Приклад 6. Маємо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n^2}$. Очевидно, що $\frac{|sin\, nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall\ x \in D = (-\infty, \infty)$. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (приклад 54.7), відносно заданого ряду він є мажорантним. Тому збіжність функціонального ряду в області D рівномірна.

Рівномірно збіжні ряди мають цінні властивості. Особливо часто використовують такі з них.

1. Якщо на деякому відрізку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно та усі функції $u_n(x)$ неперервні, то сума ряду $S(x)$ на даному відрізку також неперервна.

2. Рівномірно збіжний ряд (1) можна почленно інтегрувати, після чого утворюється також рівномірно збіжний ряд, сума якого дорівнює інтегралу від суми вихідного ряду.

3. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ а) має суму $S = S(x)$; б) усі функції $u_n(x)$ неперервно диференційовні; в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно, то сума останнього ряду $\sigma(x) = dS/dx$. У цьому випадку говорять, що ряд (1) допускає почленне диференціювання.

Степеневі ряди на будь-якому проміжку, повністю розташованому всередині інтервалу збіжності, є рівномірно збіжними. Їх можна там почленно диференціювати та інтегрувати будь-яку кількість разів. При цьому утворюються степеневі ряди з таким самим радіусом збіжності.

♦ **Нільс Абель** (норв. математик, 1802 – 1829) – син сільського пастора. Знаходячись у постійних злиднях, самостійно за книгами вивчив математику. В школі, за словами його вчителя, проявив геніальні математичні здібності та невичерпний інтерес до науки. Ще до закінчення школи почав наукові дослідження. У 1821 р. вступив до університету м. Осло. Професори університету, знаючи про виключні здібності студента, виплачували Абелю стипендію із власних коштів, «щоб зберегти для науки це рідкісне дарування». Його наукові роботи, які стали видаватися ще за часів навчання, присвячені складним математичним проблемам: розв`язанню у загальному вигляді алгебраїчних рівнянь вище 4-го степеня, інтегруванню алгебраїчних функцій, дослідженню збіжності степеневих рядів, теорії еліптичних функцій, вивченню інтегральних рівнянь. У 1828 р. Абель працював в університеті та Інженерній школі Осло. Коли вчений помер від туберкульозу, йому не було ще й 27 років. Визнання прийшло після смерті. Премія Паризької академії наук за розробку теорії еліптичних функцій присуджена Абелю у 1830 р. (спільно з К. Якобі). Абель першим з математиків звернувся до рівнянь, в яких невідома функція знаходиться під знаком інтеграла (інтегральні рівняння), першим строго довів нерозв`язність у радикалах загального алгебраїчного рівняння 5-го степеня, ця задача не піддавалася зусиллям математиків протягом декількох століть.

♦ **Карл Веєрштрасс** був поборником ретельності та точності в математичному міркуванні, прагнув усунути усі незрозумілості, які супроводжували основні поняття аналізу, він став еталоном математичної скрупульозності, що збережена згодом у виразі «веєршрассова строгість». Жадоба досконалого знання спонукала Веєрштрасса до дослідження тонких особливостей в поведінці рядів, зокрема, до вивчення їх рівномірної збіжності, хоча це поняття було впроваджено в науку Ф. Зейделем (англ. математик, 1821 – 1896) і Дж. Стоксом (англ. математик, механік і фізик, 1819 – 1903).

§ 56. Ряди Тейлора і Маклорена

Все, що звичайний аналіз досягає за допомогою рівностей із скінченною кількістю членів, досягається також за допомогою нескінченних рівностей. Міркування тут не менш достовірні.
І. Ньютон, англ. математик і фізик XVII – XVIII ст.

1^0. ***Формула Тейлора***. Нехай D – проміжок числової осі, що вміщує точку $x = a$. Припустимо, що в області D функція $f(x)$ має неперервні похідні до (n+1)-го порядку включно. Застосовуючи на відрізку $[a, x]$, де $x \in D$, формулу Ньютона – Лейбніца та інтегруючи потім частинами, знаходимо

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \left\{ \begin{array}{l|l} u = f'(t) & du = f''(t)dt \\ dv = dt & v = t - x \end{array} \right\} = (t - x)f'(t)\Big|_a^x -$$

$$-\int_a^x (t - x)f''(t)dt.$$

Оскільки $\int dt = t + C$, а число x фіксоване, то можна прийняти $C=$ $=-x$, що продиктовано міркуваннями зручності. Інтегруємо частинами ще раз:

$$f(x) - f(a) = -(a - x)f'(a) - \int_a^x (t - x)f''(t)dt = \left\{ \begin{array}{l|l} u = f''(t) & du = f'''(t)dt \\ dv = (t - x)dt & v = (t - x)^2/2 \end{array} \right\} =$$

$$= (x - a)f'(a) - \left[\frac{(t - x)^2}{2} f''(t)\Big|_a^x - \int_a^x \frac{(t - x)^2}{2} f'''(t)dt \right] =$$

$$= f'(a)(x - a) + \frac{(a - x)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \frac{(t - x)^2}{2} f'''(t)dt.$$

Повторюючи інтегрування, після n-го кроку отримуємо рівність, яку називають формулою Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

де

$$R_n(x)=(-1)^n\int_a^x\frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt. \qquad (2)$$

Говорять, що (2) є **залишком формули Тейлора**. Окрім інтегральної форми (2), існують також інші вирази для величини $R_n(x)$. На підставі узагальненої теореми про середнє (38.16) маємо

$$R_n(x)=(-1)^n f^{(n+1)}(c)\int_a^x\frac{(t-x)^n}{n!}dt=(-1)^n f^{(n+1)}(c)\left.\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_a^x=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-x)^{n+1}.$$

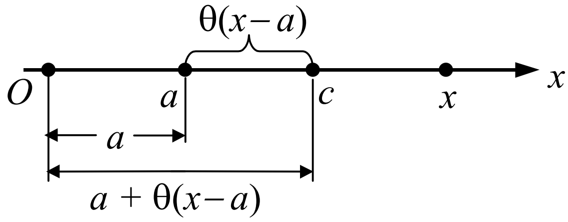


Рис. 1

Тут $a<c<x$. При $0<\theta<1$ добуток $\theta(x-a)$ являє собою якусь частку довжини відрізку $[a,x]$, тому $c=a+\theta(x-a)$ (рис. 1). Таким чином, величина $R_n(x)$ у так званій формі Лагранжа приймає вигляд

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad 0<\theta<1. \qquad (3)$$

2^0. *Ряд Тейлора*. Многочлен із (1)

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

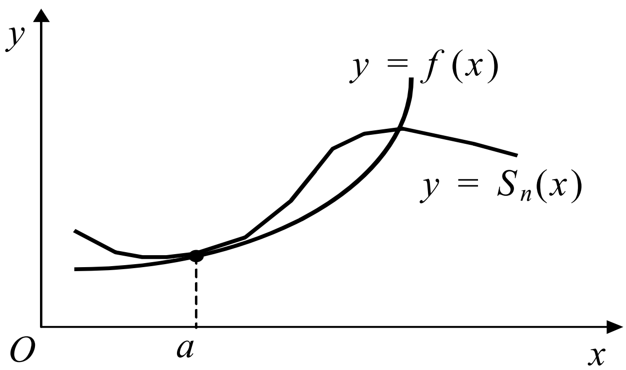


Рис. 2

з функцією $f(x)$ має спільні (які легко перевіряються) властивості:

$$S_n(a)=f(a),\ S_n'(a)=f'(a),$$

$$S_n''(a)=f''(a),\ldots,S_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$$

Це означає, що криві $y=f(x)$ та $y=S_n(x)$ при $x=a$ мають одну й ту саму ординату, тобто спільну точку, спільну дотичну, спільний напрямок опуклості (рис. 2). Природно очікувати, що многочлен $S_n(x)$ близький до функції $f(x)$, принаймні в деякому околі точки $x=a$. Згідно з (1) $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$. Із зростанням n спільність функцій $f(x)$ та $S_n(x)$

збільшується. Якщо при $n \to \infty$ $R_n(x) \to 0$, то $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$ і функція $f(x)$ стає сумою нескінченного ряду, що іменують **рядом Тейлора**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad (4)$$

Існують, однак, функції $f(x)$, для яких при $n \to \infty$ $R_n(x) \not\to 0$. Тоді формально записаний ряд (4), що породжує функція $f(x)$, не виражає цієї функції, хоча він може збігатися до якоїсь іншої функції. Рівність (4) у такому випадку місця не має. Зображення (4), якщо воно справедливо, називають **розвиненням функції $f(x)$ у ряд Тейлора**. Щоб його отримати, потрібно: 1) формально записати ряд (4) (це можливо, якщо у точці $x = a$ існує функція $f(x)$ та її похідні будь-якого порядку); 2) знайти область збіжності ряду (4), тобто значення x, при яких ряд має скінченну суму і, таким чином, може зображувати деяку функцію; 3) показати, що в області збіжності ряду залишок формули Тейлора $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Покладаючи $x - a = h$, ряд Тейлора часто записують у формі

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \cdots \qquad (4')$$

При цьому згідно з (3)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta h]}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1. \qquad (3')$$

3⁰. ***Ряд Маклорена*** є окремим випадком ряду Тейлора. Він утворюється із (4) при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (5)$$

Формула (3) для залишку $R_n(x)$ приймає вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (6)$$

Теорема. Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути у ряд Маклорена в деякому проміжку, який вміщує точку $x = 0$, достатньо, щоб у цьому проміжку функція $f(x)$ та її похідні будь-якого порядку існували та були обмежені за модулем одним й тим самим числом, тобто

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

Доведення. Нехай умови теореми виконуються на відрізку $[-H, H]$. Якщо $x \in [-H, H]$, то при $0 < \theta < 1$ величина $\theta x \in [-H, H]$ також. Згідно з (6) та (7) одержуємо

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{MH^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8}$$

За допомогою ознаки Даламбера можна переконатися в тому, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} MH^{n+1}/(n+1)!$ збігається (див. приклад 54.4). В силу необхідної умови збіжності (53.7) загальний член ряду $MH^{n+1}/(n+1)! \to 0$ при $n \to \infty$. Із нерівності (8) при цьому випливає, що $R_n(x) \to 0$ також. Це означає, що ряд (5), формально складений для функції $f(x)$, збігається саме до неї.

Теорема безпосередньо може бути застосована, зокрема, до функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$ на будь-якому проміжку $[-H, H]$, оскільки похідні цих функцій обмежені в даній області відповідно числами e^H та 1.

Аналогічна теорема має також місце для ряду Тейлора (4) при $a \ne 0$.

4^0. ***Розвинення у ряд Маклорена деяких елементарних функцій***.

1. Функція $f(x) = e^x$. Щоб побудувати ряд Маклорена за формулою (5), відшукуємо величини $f(0)$, $f'(0)$, … Маємо

$f(x) = e^x$,	$f(0) = e^0 = 1$,
$f'(x) = e^x$,	$f'(0) = 1$,
$f''(x) = e^x$,	$f''(0) = 1$,
....	....
$f^{(n)}(x) = e^x$.	$f^{(n)}(0) = 1$.

Підставляємо знайдені числа в праву частину формули (5) та отримуємо ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Радіус збіжності такого ряду $R = \infty$ (приклад 55.2). Згідно з наведеною вище теоремою для функції $f(x) = e^x$ при будь-якому значенні x залишок ряду

Тейлора $R_n(x) \to 0$, якщо $n \to \infty$. Таким чином, справедлива рівність

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{9}$$

Приклад 1. Знайти значення $e^{0,1}$ з точністю до 0,001.

Розв`язування. На основі (9) запишемо $e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \cdots$ Обірвавши ряд на номері $n = 2$, одержимо наближену рівність $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$.

Похибку наближення оцінимо за формулою (6). $|R_2(0,1)| = \frac{|f'''(\theta \cdot 0,1)|}{3!} \cdot 0,1^3$, де $0 < \theta < 1$. Оскільки $f'''(x) = e^x$, то $|f'''(0,1 \cdot \theta)| = e^{0,1 \cdot \theta} < e^{0,1} < 3$. При цьому $|R_2(0,1)| <$ $< \frac{3}{3!} \cdot 0,001 = 0,0005 < 0,001$, тобто потрібна точність досягнута (в противному разі слід взяти $n > 2$).

2. Функція $f(x) = sinx$. Діємо за тією самою схемою, що і вище:

$f(x) = \sin x,$	$f(0) = 0,$
$f'(x) = \cos x,$	$f'(0) = 1,$
$f''(x) = -\sin x,$	$f''(0) = 0,$
$f'''(x) = -\cos x,$	$f'''(0) = -1,$
$f^{IV}(x) = \sin x,$	$f^{IV}(0) = 0,$
$f^{V}(x) = \cos x,$	$f^{V}(0) = 1,$
....	....
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$	$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}.$

Вносимо знайдені числа в праву частину формули (5). Члени, що дорівнюють нулю, не пишемо. Впроваджуємо нову нумерацію з присвоєнням номера тільки членам, що відмінні від нуля. Маємо ряд

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Формула (55.3) для радіуса збіжності ряду тут непридатна. При її доведенні передбачалася присутність усіх степенів x, тоді як отриманий ряд містить тільки непарні степені. Для відшукання області збіжності ряду застосуємо узагальнену ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{x^{2n-1}(2n+1)!}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)2n(2n+1)} =$$

$$= x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1.$$

Встановлений результат справедливий при будь-якому значенні x, отже, ряд збігається на всій числовій осі: $-\infty < x < \infty$. У цій області згідно з теоремою із 3^0 залишок формули Тейлора $R_n(x) \to 0$, що і приводить до рівності

$$sin\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ x \in (-\infty, \infty). \qquad (10)$$

Приклад 2. З точністю до $0{,}001$ обчислити $sin\ 18^0$.

Розв`язування. Запишемо 18^0 в безрозмірних одиницях: $x = \pi/10 = 0{,}3416$, після чого значення x підставимо у формулу (10).

$$sin 18^0 = sin(\pi/10) = \frac{\pi/10}{1!} - \frac{(\pi/10)^3}{3!} + \frac{(\pi/10)^5}{5!} + \cdots$$

Оскільки ряд знакопочережний, то похибка, що виникає при його обриві на номері $n = 2$, за модулем не перевищить абсолютної величини першого відкинутого члена, тобто

$$|R_n(x)| \le \frac{(\pi/10)^5}{5!} < \frac{(1/3)^5}{120} = \frac{1}{243\cdot 120} < \frac{1}{200\cdot 100} = 0{,}5\cdot 10^{-4} < 0{,}001.$$

Отже, з точністю до $0{,}001$ $\quad sin 18^0 \approx 0{,}31416 - \dfrac{0{,}31416^3}{6} = 0{,}30899 \approx 0{,}309.$

3. Функція $f(x) = cosx$. У даному випадку замість відшукування чисел $f^{(n)}(0)$ простіше зробити так. В формулі (10) замінимо x на t і після множення на dt проінтегруємо рівність у межах від 0 до x:

$$\int_0^x sin\,t\,dt = \int_0^x \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots\right)dt,$$

$$1 - cos\,x = \frac{x^2}{2\cdot 1!} - \frac{x^4}{4\cdot 3!} + \frac{x^6}{6\cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)!} + \cdots$$

Як відзначалося вище, інтегрування степеневого ряду приводить до нового ряду з тим самим радіусом збіжності. Дістаємо

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\ x \in (-\infty, \infty). \tag{11}$$

4. Біноміальний ряд. Розглянемо функцію $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α – деяке стале число. Маємо

$$\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^\alpha, & f(0) = 1, \\
f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) = \alpha, \\
f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) = \alpha(\alpha-1), \\
f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, & f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}. & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).
\end{array}$$

При знайдених значеннях $f(0)$, $f'(0)$, … права частина формули (5) приймає вигляд

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

За допомогою (55.3) відшукується радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+1/n}{\alpha/n-1}\right| = 1.$$

Записаний вище ряд збігається у проміжку $(-1;\ 1)$ та розбігається за його межами. Додаткове дослідження (тут воно не наводиться) показує, що поведінка ряду у точках $x = \pm 1$ залежить від показника α, а також, що при $|x| < 1$ та $n \to \infty$ залишок формули Тейлора $R_n(x) \to 0$. Наслідком такого аналізу є розвинення, яке називають біноміальним рядом:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-1,\ 1). \tag{12}$$

При $\alpha = -1$ формула (12) приводить до вже відомої рівності (53.3), де $a = 1,\ q = -x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,\ |x| < 1. \tag{13}$$

Значенню $\alpha = -1/2$ відповідає розвинення

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots,\ |x|<1. \quad (14)$$

Тут використані позначення

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1); \qquad (2n)!! = 2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n).$$

Замінивши в (13) x на x^2, а в (14) x на $-x^2$, одержимо нові розвинення:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad |x|<1; \qquad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots,\ |x|<1. \quad (16)$$

Приклад 3. З точністю до $0{,}001$ обчислити $\sqrt[5]{36}$.

Розв`язування. Щоб скористатися формулою (12), спочатку зобразимо підкоренений вираз у вигляді суми $1+x$, де $|x|<1$. З цією метою візьмемо найближче до 36 число 32, яке допускає точне добування кореня 5-го степеня та запишемо

$$\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = \sqrt[5]{32(1+1/8)} = 2(1+1/8)^{1/5}.$$

Співмножник числа 2 є значенням біноміальної функції $(1+x)^\alpha$ при $x = 1/8$, $\alpha = 1/5$. Згідно з (12) знайдемо

$$\sqrt[5]{36} = 2\cdot(1+1/8)^{1/5} = 2\cdot\left(1 + \frac{1/5}{1!}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1/5\cdot(-4/5)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1/5\cdot(-4/5)\cdot(-9/5)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \cdots\right) \approx$$

$$\approx 2\cdot(1 + 0{,}025 - 0{,}00125) = 2\cdot 1{,}02375 = 2{,}0475 \approx 2{,}048.$$

Оскільки, починаючи з третього члена, відбувається чергування знака, легко оцінити похибку:

$$|R_n(x)| \le 2\cdot\frac{1/5\cdot 4/5\cdot 9/5}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{12}{125\cdot 512} < \frac{1}{10\cdot 500} = 0{,}2\cdot 10^{-3} < 0{,}001.$$

Якщо $|x|$ набагато менше числа 1 (записують $|x| << 1$), то достатня для практичних цілей точність нерідко досягається, якщо залишити у розвиненні (12) всього два перші члени. При цьому

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{k}; \qquad \frac{1}{\sqrt[k]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{k}.$$

Зауваження 1. При $\alpha = m$, де m – натуральне число, ряд (12) самостійно обривається (на номері $n = m$) та перетворюється на многочлен, який відомий як біном Ньютона:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n, \quad C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

C_m^n − біноміальні коефіцієнти, іноді їх позначають $\binom{m}{n}$.

Зауваження 2. Рівності (15) та (16) після заміни в них x на t та інтегрування у межах від 0 до x приводять до таких розвинень:

$$arctgx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \quad |x| < 1;$$

$$arcsin\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

5. Ряд для логарифмічної функції. Інтегруючи по проміжку $[0, x]$ рівність (13), де замість x записано t, одержуємо

$$ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \le 1. \qquad (17)$$

Замінивши тут x на $-x$, маємо рівність

$$ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 \le x < 1. \qquad (18)$$

Ще одну формулу логарифмічного ряду можна утворити почленним відніманням (18) із (17):

$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right], \quad |x| < 1. \qquad (19)$$

У порівнянні з рядами (17) та (18) ряд (19) збігається швидше, що робить його більш зручним для практичного використання (див. далі приклад 4).

Позначивши $\frac{1+x}{1-x} = \frac{M}{N}$, знаходимо $x = \frac{M-N}{M+N}$. Для будь-яких додатних чисел M та N $|x| = \left|\frac{M-N}{M+N}\right| < 1$, таким чином, рівність (19) справедлива. У нових позначеннях при $M, N > 0$ вона приймає вигляд

$$ln\frac{M}{N} = 2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{M-N}{M+N}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{2n-1} + \cdots\right]. \qquad (20)$$

Приклад 4. З точністю до $0{,}001$ обчислити $ln2$.

Розв`язування. Подамо число 2 як відношення двох додатних чисел, наприклад $2 = 2/1$, та застосуємо формулу (20), де $M = 2$, $N = 1$:

$$ln2 = ln\frac{2}{1} = 2\cdot\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots\right]\approx$$

$$\approx 2\cdot(0{,}3333+0{,}0123+0{,}0008) = 2\cdot 0{,}3464 = 0{,}6928\approx 0{,}693.$$

Похибку, що викликає обрив ряду, оцінимо, порівнюючи залишок ряду з геометричною прогресією, сума якої відшукується за формулою (53.3).

$$R_n(x) = 2\cdot\left[\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9+\cdots\right]<\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right]=\frac{2}{7\cdot 3^7}\cdot\frac{1}{1-1/9}=$$

$$=\frac{2\cdot 9}{7\cdot 3^7\cdot 8}=\frac{1}{28\cdot 243}<\frac{1}{5000}=0{,}0002<0{,}001.$$

Зауважимо, що $ln2$ можна знайти також за формулою (17), поклавши там $x = 1$:

$$ln2 = ln(1+1) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

Пов`язана з обривом ряду похибка тут оцінюється за першим відкинутим членом: $|R_n(x)|\le\frac{1}{n+1}$. Щоб забезпечити точність в $0{,}001$, прийдеться взяти $n = 999$, тобто потрібно буде врахувати майже тисячу членів, тоді як для досягнення тієї самої цілі за формулою (20) знадобилося залишити всього три члени розвинення.

5⁰. ***Формула та ряд Тейлора для функції двох змінних***. За умовами, що подібні тим, які мали місце для функції однієї змінної $f(x)$, у випадку двох незалежних змінних справедлива рівність (аналог формули (4′))

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_n. \tag{21}$$

Тут прийняті позначення:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)=\left[h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}};$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)=\left[h^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}$$

і т.д.

Залишковий член формули (21) має вигляд

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(a+\theta_1 h,\, b+\theta_2 k\right), \quad 0<\theta_1,\,\theta_2<1.$$

Якщо при $n \to \infty$ $R_n \to 0$, то формула (21) переходить у ряд Тейлора:

$$f\left(a+h,\, b+k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f\left(a,b\right).$$

♦ Рівність (1) можна вважати центральною формулою аналізу. Вона узагальнює формулу Ньютона – Лейбніца та, якщо із зростанням n $R_n(x) \to 0$, виражає трансцендентну функцію через її аргумент за допомогою простих алгебраїчних операцій. Тим самим трансцендентність втрачає свій містичний ореол та стає настільки ж визначеною, як і многочлен.

Ряд (4) по суті був відомий вже у 1672 р. Дж. Грегорі (шотл. математик, 1638 – 1675). Розвинення (4) з`явилося також в одному невиданому тексті Ньютона, що відноситься до 1692 р. До того самого ряду упритул підійшли І. Бернуллі та Г. Лейбніц. Розвинення (4) Б. Тейлор вивів самостійно, у 1712 р. він сповіщає про це у приватному листі, а у 1715 р. видає у трактаті «Метод приростів». Визнаючи пріоритет Тейлора, нове виведення ряду (4) з $a = 0$ дає К. Маклорен у «Трактаті про флюксії» (1742). За півстоліття до виходу ряду Тейлора у світ (та за 20 років до народження самого Тейлора) Ньютон відкрив біноміальний ряд, будучи ще студентом університету. До 1669 р. він побудував ряди для функцій $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\arcsin x$, стисло виклав результати досліджень в рукописі «Аналіз за допомогою рівнянь із нескінченною кількістю членів» та передав її своєму вчителю Барроу. Розвинення у ряд $\mathrm{arctg}\, x$ одержав у 1671 р. Дж. Грегорі. Новий спосіб обчислення логарифмів за допомогою ряду для функції $\ln(1+x)$ видав у 1668 р. Н. Меркатор (нім. математик, 1620 – 1687).

♦ **Брук Тейлор** (англ. математик, 1685 – 1731) – секретар Лондонського королівського товариства (1714 – 1718), послідовник Ньютона. Його наукові інтереси поширювались на математичний аналіз, диференціальні рівняння, механіку, балістику, математичну фізику.

♦ **Колін Маклорен** (шотл. математик, 1698 – 1746) – учень та послідовник Ньютона. В 12 років – студент університету м. Глазго, ще до 15-річного віку довів декілька теорем з аналізу, у 21 рік вже був членом Лондонського королівського товариства. З 1726 р. Маклорен – професор Единбурзького університету та один з провідних математиків Великої Британії. Встановив інтегральну ознаку збіжності рядів. Отримав премії Паризької академії наук – у 1724 р. за роботу про падіння тіл, у 1740 р. за працю про припливи та відпливи (сумісно з Л. Ейлером та Д. Бернуллі).

§ 57. Застосування рядів

Немає нічого більш практичного, ніж добра теорія.
Л. Больцман, австр. фізик XIX – XX ст.

1^0. *Обчислення значень функцій*. Розвинення у ряд – основний спосіб відшукання значень трансцендентних функцій. У прикладах § 56 для цієї цілі незмінно використовувався ряд Маклорена (56.5). Останній, однак, непридатний, якщо x не належить до області збіжності ряду, або незручний, якщо ряд збігається повільно в силу недостатньої малості $|x|$. Ряд Тейлора (56.4′) має більше можливостей за рахунок вільного вибору точки «a», в околі якої діє розвинення. Її підбирають так, щоб легко було визначити числа $f(a)$, $f'(a)$, … , а величина $|h| = |x - a|$ була якомога меншою, що підвищує швидкість збіжності ряду.

Приклад 1. З точністю до 0,001 обчислити $cos\, 42^0$.

Розв`язування. Візьмемо близьке до 42^0 ($x = 7\pi/30$) значення 45^0, тобто покладемо $a = \pi/4$. Тоді $h = x - a = 7\pi/30 - \pi/4 = -\pi/60$. Ряд (56.4′) для функції $f(x) = cos\, x$ має вигляд

$$cos(a+h) = cos\, a - \frac{sin\, a}{1!}h - \frac{cos\, a}{2!}h^2 + \frac{sin\, a}{3!}h^3 + \frac{cos\, a}{4!}h^4 - \cdots$$

Рівність справедлива при будь-яких значень a та h, радіус збіжності ряду $R = \infty$. Підставимо у розвинення $a = \pi/4$, $h = -\pi/60 = -0{,}0524$. З урахуванням того, що $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, дістанемо

$$cos\, 42^0 = cos(\pi/4 - \pi/60) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi/60}{1!} - \frac{(\pi/60)^2}{2!} - \frac{(\pi/60)^3}{3!} + \cdots\right) \approx$$
$$\approx 0{,}7071 \cdot (1 + 0{,}0524 - 0{,}0014) \approx 0{,}743.$$

За формулою (56.3′) оцінимо похибку, яку викликає обрив ряду на номері $n = 2$:

$$|R_n| \le \frac{sin(a + \theta h)}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 \le \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 < 3 \cdot 10^{-5}.$$

Оскільки обчислення здійснювались з точністю до 4-го знака після коми та округлялися, можна стверджувати тільки те, що вірним є 3-й знак після коми, тобто загальна похибка не більше 0,001.

2^0. *Обчислення визначених інтегралів*. Якщо інтеграл не має елементарної первісної або її відшукування трудомістке, то у багатьох випадках доцільно підінтегральну функцію розвинути у степеневий ряд, а потім цей ряд в області його збіжності почленно проінтегрувати.

Приклад 2. Обчислити $I = \int\limits_0^1 sin\, x^2 dx$.

Розв`язування. Згідно з (56.10) при будь-якому значенні x $sin\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ Замінивши у цьому розвиненні x на x^2, одержимо $sin\,x^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$ Внесемо це розвинення під знак інтеграла та проінтегруємо:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{120 \cdot 11} - \cdots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots \approx 0{,}3333 - 0{,}0238 = 0{,}3095 \approx 0{,}310\,.$$

Оскільки ряд знакопочережний, то викликану його обривом похибку легко оцінити:

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{1320} < 0{,}001\,.$$

Приклад 3. Знайти $I = \int\limits_0^{0,5} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв`язування. Достатньо розвинути у ряд функцію $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{-1/2}$. Для цього скористуємося стандартним розвиненням (56.14):

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Замінивши x на x^3, дістанемо

$$\left(1 + x^3\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots$$

Інтегрування здійснюється по відрізку $[0;\ 0{,}5]$, тому $|x| < 1$ та $\left|x^3\right| < 1$ також. Запишемо під знаком інтеграла замість радикала його розвинення у ряд, помножимо останній на x та проінтегруємо:

$$I = \int_0^{0,5} x\left(1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \cdots\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{10} + \frac{3}{64}x^8 - \frac{5}{176}x^{11} + \cdots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{(0{,}5)^5}{10} + \frac{3 \cdot (0{,}5)^8}{64} - \cdots \approx 0{,}125 - 0{,}0031 = 0{,}1219 \approx 0{,}122\,.$$

Похибка, яку викликає обрив ряду, не перевищує числа $\frac{3 \cdot (0{,}5)^8}{64} < 2 \cdot 10^{-4} < 0{,}001\,.$

3⁰. ***Розв`язування диференціальних рівнянь***. Нехай потрібно знайти частинний розв`язок ДР 1-го порядку $F(x, y, y') = 0$ при початковій умові $y(0) = y_0$. Припустимо, що шукана функція $y = y(x)$ в околі точки $x = 0$ допускає розвинення у ряд Маклорена, тобто

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (1)$$

Ряд (1) визначиться, як тільки стануть відомими числа $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, … Перше з них задано початковою умовою, решту можна знайти із самого рівняння, диференціюючи його необхідну кількість разів та підставляючи в отримані рівності $x=0$. Так само можна розв`язувати ДР 2-го та більш високих порядків.

Приклад 4. $y'+2xy=x^2+2x+1/2$, $\quad y(0)=2$, $\quad y(x)-?$

Розв`язування шукаємо у формі (1). Підставивши у ДР початкову умову, тобто $x=0, y=2$, знайдемо $y'(0)=1/2$. Продиференціюємо ДР за x: $y''+2y+2xy'=2x+2$. Звідси при $x=0$ випливає $y''(0)=-2y(0)+2=-2\cdot2+2=-2$. Отриману вище рівність із змінними величинами продиференціюємо ще раз та підставимо $x=0$:

$$y'''+2y'+2y'+2xy''=2,\quad y'''(0)+4y'(0)=2,\quad y'''(0)=2-4y'(0)=0.$$

Повторимо процедуру:

$$\begin{aligned}
&y^{(4)}+6y''+2xy'''=0, && y^{(4)}(0)=-6y''(0)=12;\\
&y^{(5)}+8y'''+2xy^{(4)}=0, && y^{(5)}(0)=-8y'''(0)=0;\\
&y^{(6)}+10y^{(4)}+2xy^{(5)}=0, && y^{(6)}(0)=-10y^{(4)}(0)=-120;\\
&y^{(7)}+12y^{(5)}+2xy^{(6)}=0, && y^{(7)}(0)=-12y^{(5)}(0)=0;\\
&y^{(8)}+14y^{(6)}+2xy^{(7)}=0, && y^{(8)}(0)=-14y^{(6)}(0)=14\cdot120;\\
&y^{(9)}+16y^{(7)}+2xy^{(8)}=0, && y^{(9)}(0)=-16y^{(7)}(0)=0;\\
&y^{(10)}+18y^{(8)}+2xy^{(9)}=0, && y^{(10)}(0)=-18y^{(8)}(0)=-18\cdot14\cdot120.
\end{aligned}$$

Знайдені числа внесемо в (1). Маємо

$$y(x)=2+\frac{1/2}{1!}x-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{4!}x^4-\frac{120}{6!}x^6+\frac{14\cdot120}{8!}x^8-\frac{18\cdot14\cdot120}{10!}x^{10}+\cdots;$$

$$y(x)=1+\frac{x}{2}+\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\cdots\right)=1+\frac{x}{2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j}}{j!}.$$

Застосувавши узагальнену ознаку Даламбера, можна переконатися в тому, що цей ряд збігається на всій числовій осі. Сумою ряду є функція $y=1+\dfrac{x}{2}+e^{-x^2}$, котра і являє собою шуканий частинний розв`язок заданого ДР.

4⁰. ***Розкриття невизначеностей***. Якщо при $x\to a$ $u(x)\to0$, $v(x)\to0$, то дріб $u(x)/v(x)$ являє собою невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. В багатьох випадках її досить просто розкрити, виділивши за допомогою формули Тейлора головні частини змінних u та v.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^4}-\cos x^2}{x^2\sin x^2-x^4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

**Розв`язування**. Застосовувати правило Лопіталя тут недоцільно внаслідок складності виразів, що з`являються при диференціюванні. Скористаємося відомими розвиненнями (4^0 § 56) та їх наслідками:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\ \Rightarrow\ \left(1-x^4\right)^{1/2}=1+\frac{1/2}{1!}\left(-x^4\right)-\frac{1/4}{2!}x^8+o\left(x^8\right);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\ \Rightarrow\ \cos x^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}+o\left(x^8\right);$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\ \Rightarrow\ \sin x^2=\frac{x^2}{1!}-\frac{x^6}{3!}+o\left(x^6\right).$$

Нагадаємо: вираз виду $\alpha=o(\beta)$ щодо нескінченно малих величин означає, що відношення $\alpha/\beta\to 0$, тобто α є малою більш високого порядку, ніж β. При цьому величини $\alpha+\beta$ та β еквівалентні: $\alpha+\beta\sim\beta$. Обчислюючи границю дробу, і чисельник, і знаменник можна замінити на еквівалентні їм вирази (див. 2^0 § 26). Для цього достатньо утримати тільки незникаючий молодший степінь x, а доданки більш високого порядку відкинути. Отже:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\cos x^2}{x^2\sin x^2-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^8}{8}+o\left(x^8\right)\right]-\left[1-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^8}{24}+o\left(x^8\right)\right]}{x^2\left[\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{x^6}{6}+o\left(x^6\right)\right]-x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}x^8+o\left(x^8\right)}{-\dfrac{1}{6}x^8+o\left(x^8\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}x^8}{-\dfrac{1}{6}x^8}=1.$$

♦ Починаючи з XVII ст., ряди стали ефективним засобом теоретичного аналізу та інструментом, що придатний для найтонших обчислень. Здавна математиків цікавила задача про відшукання якомога точного значення числа π. У III ст. до н.е. Архімед, використовуючи зв`язок між периметрами n- та $2n$-кутників, вписаних до кола та описаних навколо нього, отримав, що $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. У XV ст. середньоазійський математик аль-Каші (помер близько 1430 р.), що працював під Самаркандом в обсерваторії хана Улугбека (онука Тимура), зробив 27 подвоєнь числа сторін многокутника та обчислив число π з точністю до 16-ти десяткових знаків. З такою самою точністю їм були складені таблиці синусів, які використовувалися при астрономічних спостереженнях. Ряди дозволили знаходити число π з будь-якою точністю. Так, ряд для $arctg\, x$ (4^0 § 56) при $x = 1/\sqrt{3}$ приводить до рівності $\pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right)$. Підсумовуючи цей ряд, А. Шарп (англ. астроном, 1651 – 1742) визначив число π з 72-ма вірними десятковими знаками. Л. Ейлер підвищив точність ще на 56 знаків. У. Шенкс (Англія) після 20-ти років обчислень у 1873 р. отримав значення π, що містить 707 десяткових знаків. Пізніше (1945) виявилося, що у 520-му знаку було зроблено помилку. До курйозів належить «законопроект», за який у 1897 р. проголосував Сенат штату Індіана (США): «… математики до цього часу помилялися, оскільки точним значенням π є саме 4». Через 9 днів сенатори зрозуміли, що скоїли дурницю та своє рішення скасували. Відкриття нового в математиці потребує від дослідника, окрім знань та таланту, ще й великого емоційного напруження. Самі ж математичні істини від волі людей не залежать. Вони не підвладні часу та людським пристрастям.

СПИСОК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

СПИСОК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии[Текст] /Н.В.Ефимов. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
2. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия[Текст] /И.И.Привалов. – М.: Наука, 1961. – 300 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 432 с.
4. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике [Текст]. – М.: Наука, 1967. – 640 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа [Текст]: В 2-х т. – М.: Наука, 1968. – Т.1. – 440 с.
6. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике. [Текст] /В.П.Минорский. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
7. Демидович, Б.п. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] /Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
8. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] /За ред. Ю.К.Рудавського – Львів: Бескид Біт, 2002. – 256 с.
9. Овчинников, П.Ф. Вища математика [Текст]: У 2-х ч. / П.Ф.Овчинников, Ф.П.Яремчук, В.М.Михайленко. - К.: Техніка. 2003. -Ч.1.-6О0 с.
10. Щипачев, В.С. Высшая математика [Текст] / В.С.Щипачев. - М.: Высшая школа, 1996. - 473 с.
11. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики [Текст] / И.П.Натансон. - М.: Высш. шк., 1968.- 728 с.
12. Жевержеев, В.Ф. Специальный курс высшей математики [Текст] / В.Ф.Жевержеев, Л.А. Кальницкий, Н.А.Сапогов. - М.: Высш. Шк., 1970.-416 с.
13. Овчинников, П.Ф. Высшая математика (Дифференциальные уравнениями др. разделы) [Текст] / П.Ф.Овчинников, Б.М.Лисицын, В.М.Михайленко. - К.: Вища шк., 1989. - 679 с.
14. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Х.П. Луник, Д.В. Уханська/ - Бескид Біт, 2002. - 262 с.

Навчальне видання

Сінайський Євгеній Самуїлович
Новікова Людмила Василівна
Заславська Людмила Іванівна

Вища математика

Частина I
Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Підп. до друку 08.02.2013. Формат 30×42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 22,2.
Обл.-вид. арк. 22,2. Тираж 100 пр. Зам. №   .

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К.Маркса, 19.