МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

С.А. Ус

Функціональний аналіз

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2013

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73
У74

Рекомендовано редакційною радою НГУ як навчальний посібник з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 4 від 17 квітня 2012).

Рецензенти:

О.М. Кисельова, д-р фіз.-мат. наук, професор (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, завідувач кафедри обчислювальної математики й математичної кібернетики);

Д.Г. Зєлєнцов, д-р техн. наук, професор (ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», завідувач кафедри інформаційних систем).

Ус. С.А.
У74 Функціональний аналіз [Текст]: навч. посібник / С.А. Ус. – Д. : Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою курсу “Функціональний аналіз” для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Розглянуто основні поняття функціонального аналізу, його застосування в топологічних, метричних та нормованих просторах.

Книгу розраховано на осіб, які опанували математику в межах вузівського курсу, зокрема на студентів спеціальності «Системний аналіз».

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Функціональний аналіз як науковий напрям яскраво демонструє докорінні зміни в математиці на сучасному етапі її розвитку, які полягають, перш за все, в трансформації підходу до розв’язання проблем математичного аналізу, а саме: розгляд окремих функцій, співвідношень між ними і рівнянь замінено сукупним дослідженням цих об'єктів, тобто вивченням функціональних просторів та їх перетворень (функціональних операцій). Так, диференціальний оператор чи інтегральне перетворення розглядаються не в їх застосуванні до окремої функції, а в прикладанні до цілого класу функцій, вивчається результат перетворення цього класу, неперервність операції в тому чи іншому сенсі та ін.

Важливою особливістю цієї науки є також загальна абстрактна форма розгляду проблем аналізу, яка дозволяє об'єднувати й піддавати дослідженню на перший погляд далекі одне від одного питання. Прикладом може бути вивчення функціональних рівнянь виду: $F(x)=y$, де x й y – об'єкти довільної природи.

Прийнято вважати, що алгебраїчні науки вивчають множини із заданими на них операціями – такими, як, скажімо, додавання, множення, перехід до оберненого або до симетричного елемента. Топологічні науки вивчають множини, у яких задано неперервний перехід від одних елементів до інших й, зокрема, визначено збіжні послідовності. Функціональний аналіз вивчає множини із синтетичною (складеною) структурою – як алгебраїчною, так і топологічною, причому обидві структури погоджені одна з одною за допомогою деяких природних вимог, і такий підхід дає змогу отримати нові результати.

Становлення функціонального аналізу базувалося на дослідженнях у таких розділах класичного математичного аналізу, як варіаційне обчислення, інтегральні рівняння, теорія ортогональних функцій, чебишевска теорія наближень, проблема моментів. Але початком самостійного існування функціонального аналізу можна вважати систематичну побудову теорії операторів у нескінченновимірних унітарних просторах (вона була започаткована Д. Гільбертом та ін.) і розвиток загальної теорії лінійних нормованих просторів (1918 – 1923) у роботах Ф. Рісса й С. Банаха.

Функціональний аналіз – красива й змістовна теорія. Однак тільки внутрішнього багатства для повноцінного розвитку й довгого існування математичної дисципліни мало. Будь-яка математична наука, позбавлена зв'язків з іншими її напрямами та з природознавством, піддається серйозній небезпеці перейти в розряд, як писав фон Нейман, «усе більше й більше мистецтва заради мистецтва». Функціональному аналізу принаймні сьогодні подібна небезпека не загрожує. Зв'язків з іншими науками в нього достатньо, і вони перебувають у процесі постійного відновлення. Наприклад, як зараз відповідають на запитання про те, що таке математика? Це *наука про моделі*! А згадаємо фізику, вона переповнена моделями з функціонального аналізу – від найдавніших, що виникли у надрах варіаційного обчислення, до ультрасучасних, побудованих на новітніх досягненнях теорії операторних алгебр. Усередині самої математичної науки функціональний аналіз дозволяє розглянути під єдиним кутом такі на перший погляд несхожі речі, як, скажімо, інтегральні рівняння, системи лінійних рівнянь і деякі варіаційні проблеми. Це знов-таки означає, підтверджує можливість побудови засобами функціонального аналізу єдиної моделі певного кола явищ а, отже, запропонувати єдиний метод їхнього дослідження.

Дуже часто студенти, особливо нематематичних спеціальностей, дивуються: «Навіщо нам вивчати цю дисципліну? Вона дуже абстрактна, і її не можна застосувати на практиці!» Дійсно, навряд чи можна використати теоретичні положення й результати цієї науки у побуті та в повсякденному житті, але навички логічного мислення, здатність розглянути проблему з різних боків, виробити узагальнений підхід до явищ – усе це дає вивчення цієї дисципліни – стануть у пригоді всім, а не тільки тим, хто серйозно займається наукою.

Функціональний аналіз – дисципліна особлива. Вникати в неї доводитися, як то кажуть, із зав'язаними очами. Адже це та сфера, де інтуїція не працює. Подібне можна сказати й про лінійну алгебру, але там інтуїцію замінює ілюзія. Наприклад, міркування про задачу, розглянуту на площині, зазвичай дають змогу висунути правильні припущення стосовно простору *n* вимірів. Та ж сама процедура в просторі нескінченного числа вимірів нерідко зумовлює помилкові висновки.

Для прикладу розглянемо таку задачу [9]: уявімо собі *n*-вимірний куб, довжина ребра якого дорівнює 2. Цей куб природно розбитий на 2^n менших кубиків, сторона кожного з яких дорівнює 1 (зображувати *n-вимірні* куби ще не навчилися, тому розглянемо задачу на двовимірному кубі, тобто на квадраті (див. рис. 1). У кожний із цих кубиків вписано сферу (зрозуміло, що *n*-вимірну з одиничним радіусом). Існують дві сфери, які торкаються всіх цих сфер: одна, більша, торкається внутрішнім чином, тобто містить у собі всі сфери; інша, менша – зовнішнім. Нехай r_n – радіус меншої сфери, позначимо, що $r = \lim_{n\to\infty} r_n$.

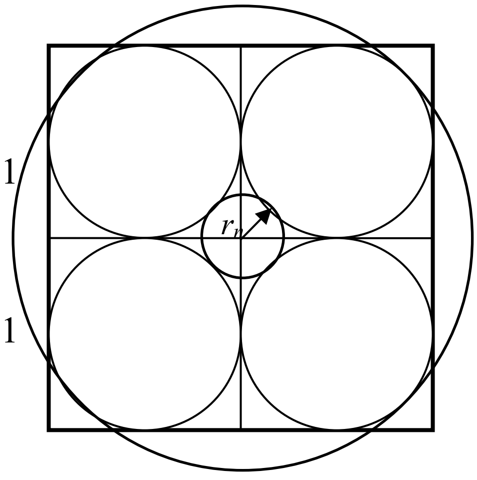


Рис.1. Уписані в куб сфери

Питання на інтуїцію: до чого прямує радіус r_n меншої сфери? Розставте можливі відповіді на нього в порядку правдоподібності, починаючи з найменш правдоподібної. Обчислювати заборонено! Тут можливі відповіді: –1, 0, ½, 1, 10, ∞ .

У виборі правильної відповіді інтуїція підводить дуже багатьох. Правильна відповідь – нескінченність. Переконатися в цьому не важко, якщо розглянути діагональ куба (рис. 2). Її довжина дорівнює $2\sqrt{n}$ і прямує до нескінченності, коли $n \to \infty$. На ній розташовуються три кола: два мають радіуси, що дорівнюють одиниці, а одне, яке торкається цих двох, має радіус r_n. Тоді неважко зрозуміти, якій величині дорівнює радіус r_n і чому він прямує до нескінченності. Інтуїція ж не спрацьовує тому, що важко собі уявити, як сфера, що перебуває всередині, може вийти за межі куба.

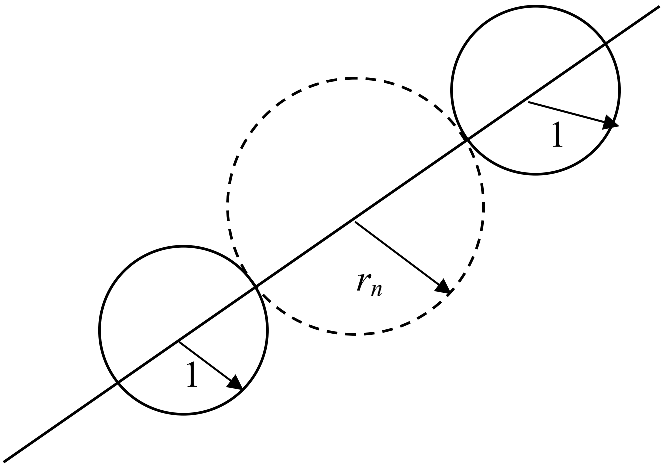


Рис. 2. Такий вигляд мають кола на діагоналі куба

Отже, у функціональному аналізі, як в жодній іншій науці, необхідно концентрувати увагу на суттєвих ознаках вихідних умов, при цьому особливу роль відіграють отримані результати й розуміння, що перебуває за межами системи «теорема – доведення».

Змістом даного навчального посібника є класичний функціональний аналіз у нормованих, банахових і гільбертових просторах. У його першому розділі розглянуто елементи теорії множин. Другий присвячено топологічним і нормованим просторам. У третьому – вивчаються лінійні й нормовані простори, у четвертому – лінійні оператори й функціонали.

РОЗДІЛ І

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

У математиці зазвичай мають справу з найрізноманітнішими множинами. Наприклад, можна говорити про множину граней багатогранника, точок на прямій, цілих або раціональних чисел, неперервних функцій та ін. Поняття множини настільки загальне, що йому важко дати скільки-небудь зрозуміле визначення, яке не зводилося б до заміни слова "множина" синонімами: сукупність, набір елементів і т. ін.

Елементами множини називають ті об'єкти, з яких вона складається. Множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наведемо загальноприйняті позначення деяких множин:

N – множина всіх натуральних чисел,

Q – множина раціональних чисел,

Z – множина цілих чисел,

R – множина дійсних чисел,

C – множина комплексних чисел.

Елементи множини позначають малими літерами. Належність елемента a до множини A можна записати в такий спосіб: $a \in A$. Якщо елемент a не належить множині A записують: $a \notin A$.

Запис $A \subset B$ означає, що множина A міститься в множині B, тобто всі елементи множини A містяться також у множині B. Множина A в цьому випадку називається *підмножиною* множини B.

Якщо множина не містить жодного елемента, вона називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Якщо (P) – деяке твердження, що застосовується до елементів множини A, то підмножину, утворену всіма елементами $a \in A$, для яких виконано умову (P), записують таким чином:

$$\{a \in A : (P)a\} \text{ або } \{a : (P)a\}.$$

Вважаємо, що читачеві відомі операції над множинами та їхні властивості й тому не будемо на них зупинятися.

§ 1. Відображення множин

Нехай X й Y – дві довільних множини. Говорять, що на множині X задано *відображення* f, яке набуває значення з множини Y, якщо кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$. Коли X та Y – числові множини, відображення f називається *функцією*.

Для позначення функції (відображення) з множини X в множину Y користуються таким записом:

$$f\colon X \to Y.$$

Якщо a – елемент множини X, то відповідний йому елемент: $b = f(a)$, множини Y називається *образом* елемента a при відображенні f.

Сукупність усіх елементів $a \in X$, образом яких є даний елемент $b \in Y$, називається *повним прообразом* елемента b і позначається $f^{-1}(b)$, тобто

$$f^{-1}(b) = \{a \in X | f(a) = b\}.$$

Образ будь-якої множини A з множини X ($A \subset X$) при відображенні f визначають у такий спосіб:

$$f(A) = \{b \in Y | \exists\, a \in A : b = f(a)\}.$$

Повний прообраз будь-якої множини B з множини Y ($B \subset Y$) визначають таким чином:

$$f^{-1}(B) = \{a \in X | f(a) \in B\}.$$

Дамо ще кілька визначень.

Відображення f: $X \to Y$, називається *взаємно однозначним*, коли з рівності: $f(a_1) = f(a_2)$, випливає, що $a_1 = a_2$.

Відображення f: $X \to Y$, називається відображенням множини A *на* множину B (відображення «*на*»), якщо $f(A) = B$.

Відображення f: $X \to Y$, називається відображенням множини A *в* множину B (відображення «*в*» або *ін'єкція*), якщо $f(A) \subset B$.

Відображення f: $X \to Y$ називається *бієкцією,* якщо воно взаємно однозначне і являє собою відображення «*на*».

Якщо f – бієкція, то існує відображення g: $Y \to X$, зумовлене співвідношенням: $g(f(a)) = a$, $a \in X$, яке називається *оберненим відображенням* до відображення f й позначається f^{-1}.

Розглянемо деякі властивості відображень.

Теорема 1.1. Прообраз суми двох множин дорівнює сумі їхніх прообразів, тобто:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доведення

Нехай елемент x належить множині $f^{-1}(A \cup B)$. Це означає, що $f(x) \in A \cup B$, тобто $f(x) \in A$ або $f(x) \in B$. Але тоді x належить принаймні одній із множин $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(B)$, тобто

$$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

І, навпаки, якщо $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то x належить принаймні одній із множин $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(B)$, тоді $f(x)$ належить хоча б одній із множин A або B, отже, $f(x) \in A \bigcup B$, але за таких умов $x \in f^{-1}(A \bigcup B)$. Теорему доведено.

Теорема 1.2. Прообраз перетину двох множин дорівнює перетину їхніх прообразів, а саме:

$$f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B).$$

Доведення

Якщо $x \in f^{-1}(A \bigcap B)$, то $f(x) \in A \bigcap B$, тобто $f(x) \in A$ й одночасно $f(x) \in B$, отже, $x \in f^{-1}(A)$ і $x \in f^{-1}(B)$, а значить $x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$.

І, навпаки, якщо $x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{1}(B)$, тобто $x \in f^{-1}(A)$ і $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ й $f(x) \in B$. Інакше кажучи, $f(x) \in A \bigcap B$. Отже, $x \in f^{-1}(A \bigcap B)$.

Теорему доведено.

Теорема 1.3. Образ суми двох множин дорівнює сумі їхніх образів:

$$f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B).$$

Доведення

Якщо $y \in f(A \bigcup B)$, то це означає, що $y = f(x)$, де x належить принаймні одній із множин A й B. Отже, $y = f(x) \in f(A) \bigcup f(B)$. І, навпаки, якщо $y \in f(A) \bigcup f(B)$, то $y = f(x)$, де x належить принаймні одній із множин A або B, тобто $x \in A \bigcup B$, отже, $y = f(x) \in f(A \bigcup B)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що образ перетину двох множин, взагалі-то, не збігається з перетином їхніх образів. Наприклад, розглянемо відображення, що являє собою проеціювання площини на вісь Ox.

Тоді відрізки

$$AB = \{(x, y) : 1 \le x \le 4,\ y = 1\},$$

$$CD = \{(x, y) : 1 \le x \le 4,\ y = 2\},$$

не перетинаються, у той час як їхні образи збігаються (див. рис. 1.1).

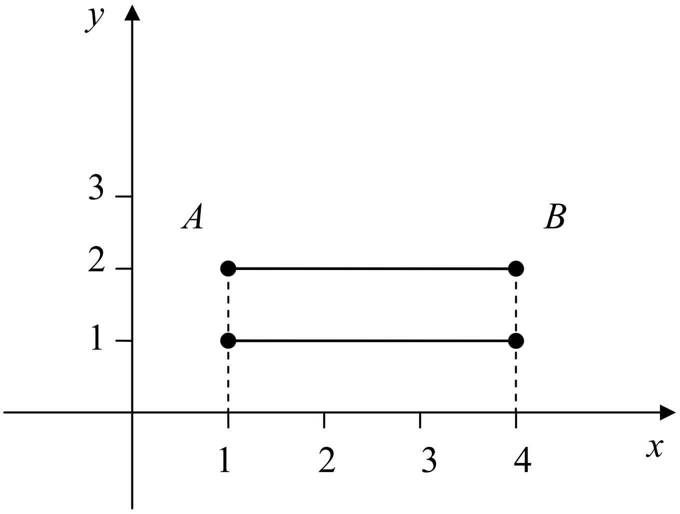


Рис. 1.1. Проеціювання відрізків на вісь Ox

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Як можна визначити відображення множин?
2. Яке відображення називають функцією?
3. Що називають образом (прообразом) елемента при відображенні f?
4. Яким чином визначають образ (прообраз) множини при відображенні?
5. Яке відображення називають бієкцією?
6. Яке відображення називають взаємно однозначним?
7. Сформулюйте властивості відображень.
8. Доведіть властивості відображень.
9. Доведіть такі співвідношення:

а) $X \subset Y \Leftrightarrow X \bigcup Y = Y \Leftrightarrow X \bigcap Y = X$; *б)* $X \subset Z$ й $Y \subset Z \Leftrightarrow X \bigcup Y \subset Z$;
в) $Z \subset X$ й $Z \subset Y \Leftrightarrow Z \subset X \bigcap Y$; *г)* $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
д) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$; *е)* $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus Y$;
ж) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$; *и)* $(X \setminus Y) \cap (Z \setminus U) = (X \cap Z) \setminus (Y \cup U)$;
к) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$; *л)* $(X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus Z$;
м) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$; *н)* $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

10. Доведіть такі співвідношення:

а) $X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$ або $Y = \varnothing$; *б)* $X_1 \times Y_1 \subset X \times Y \Leftrightarrow X_1 \subset X, Y_1 \subset Y$;
в) $X \times Y = A \times B \Leftrightarrow X = A, Y = B$; *г)* $(X \times Y) \cap (X_1 \times Y) = (X \cap X_1) \times Y$;
д) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$; *е)* $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) = (X \times Y) \cup (X_1 \times Y_1)$.

11. Симетричну різницю множин Δ визначають таким чином: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Доведіть такі твердження:

а) $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (Y \cap X)$; *б)* $X \Delta Y = Y \Delta X$;
в) $X \Delta (Y \Delta Z) = (X \Delta Y) \Delta Z$; *г)* $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$;
д) $X \Delta X = \varnothing$; *е)* $X \Delta \varnothing = X$;

§ 2. Еквівалентність множин. Поняття потужності множини

2.1. Скінченні й нескінченні множини

Усі множини можна поділити на два класи: скінченні й нескінченні.

Скінченними називають множини, кількість елементів яких скінченна. Наприклад, це множина студентів, які вчаться в одній групі; множина вершин багатогранника; множина жителів у тому чи іншому місті; множина сполучень, які можна скласти з n елементів та ін.

Множини, число елементів яких нескінченне, називають *нескінченними.* До таких множин належать: множина N всіх натуральних чисел, множина всіх точок на прямій.

Виникає питання, яким чином можна порівняти між собою дві скінченні (або нескінченні) множини?

Якщо йдеться про скінченні множини, то ми можемо перелічити число елементів у кожній з них і в такий спосіб порівняти їх між собою. Але цей підхід не можна застосувати до нескінченних множин.

Іншим способом порівняння є встановлення *бієкції*, тобто взаємно однозначного відображення між множинами. Даний спосіб може бути застосований і для порівняння нескінченних множин.

2.2. Лічильні множини

Множину називають *лічильною*, якщо між її елементами і множиною натуральних чисел можна встановити бієкцію. Іншими словами, лічильними будуть множини, елементи яких можна занумерувати в нескінченну послідовність.

Наведемо приклади множин, що належать до лічильних.

1. *Множина всіх цілих чисел Z.* Взаємно однозначну відповідність між усіма цілими й усіма натуральними числами можна встановити в такий спосіб:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \ldots & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & \ldots, \end{array}$$

тобто кожному невід'ємному цілому числу n поставимо у відповідність натуральне число $2n + 1$, а кожному від'ємному числу n – число $2|n|$.

2. *Множина всіх парних додатних чисел.* Відповідність встановлюється за правилом: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множина* 2, 4, 8, 16, … 2^n … *степенів числа* 2. Кожному числу 2^n відповідає номер n.

4. *Множина Q всіх раціональних чисел.*

Доведемо, що множина всіх раціональних чисел є лічильною.

Кожне раціональне число однозначно записується у вигляді нескоротного дробу: $\alpha = \dfrac{p}{q}$, де $p \in Z,\ q \in N$. Назвемо суму $|p| + q$ висотою раціонального числа α. Очевидно, що число дробів із заданою висотою h скінченне, а саме:

висота: $h = 1$, характерна для числа $\frac{0}{1}$;

$h = 2$ – для чисел $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}$;

$h = 3$ – для чисел $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}$; і т. д.

Будемо нумерувати раціональні числа в порядку зростання висоти. Таким чином, кожному раціональному числу буде присвоєно деякий номер, тобто буде встановлено взаємно однозначну відповідність між усіма натуральними та всіма раціональними числами.

Нескінченна множина, що не є лічильною, називається *незліченною* множиною.

Лічильні множини мають такі властивості:

1. *Усяка підмножина лічильної множини скінченна або лічильна.*

Доведення

Нехай маємо лічильну множину A, і B – її підмножина. Занумеруємо елементи множини A: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ (оскільки множина лічильна, то це можливо). Нехай $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ – ті з них, що входять у множину B. Якщо серед чисел $n_1, n_2, \ldots$ є найбільше, то множина B скінченна, у протилежному випадку – вона лічильна. Твердження доведено.

2. *Сума будь-якого скінченного або лічильного числа лічильних множин є лічильною.*

Доведення

Нехай $A_1, A_2, \ldots$ – лічильні множини. Без втрати загальності можна вважати, що вони не перетинаються, оскільки в протилежному випадку ми розглянули б замість них такі неперетинні множини: $A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ …, кожна з яких не більш ніж лічильна, а їхня сума така сама, що й сума вихідних множин $A_1, A_2, \ldots$

Усі елементи множин $A_1, A_2, \ldots$ можна записати у вигляді такої нескінченної таблиці:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} & \ldots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots & a_{4n} & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots, \end{array}$$

де в першому рядку розташовані елементи множини A_1, у другому – елементи множини A_2 і т. д. Занумеруємо всі ці елементи «по діагоналях», як показано в таблиці нижче, взявши за перший елемент a_{11}, за другий – a_{12}, за третій a_{21} і т. д.

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \ldots & a_{1n} & \ldots \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} & \ldots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots & a_{4n} & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$. \; ... \quad ,$$

Зрозуміло, що при цьому буде встановлено взаємно однозначну відповідність між всіма елементами множин A_1, A_2, … і натуральними числами.

Отже, твердження доведено.

3. У*сяка нескінченна множина містить у собі лічильну підмножину.*

Доведення

Нехай M – нескінченна множина. Візьмемо в ній довільний елемент a_1. Оскільки множина M нескінченна, то в ній знайдеться елемент a_2, відмінний від a_1, потім елемент a_3, відмінний від a_1 та a_2 і т. д. Продовжуючи цей процес, (який не може перерватися через нестачу елементів, оскільки M – нескінченна множина), ми одержуємо лічильну підмножину: $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$, множини M.

Твердження доведено.

2.3. Еквівалентність множин

Дві множини X і Y називаються *еквівалентними* (позначення $X \sim Y$), якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Звідси відразу ясно, що дві скінченні множини еквівалентні між собою тоді й тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Визначення лічильної множини можна тепер сформулювати таким чином: *множина називається лічильною, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.*

Зрозуміло, що коли дві множини еквівалентні третій, то вони будуть еквівалентними і між собою. Зокрема, будь-які дві лічильні множини еквівалентні між собою.

Наведемо приклади еквівалентних множин.

1. Множина парних додатних чисел і множина цілих чисел.

2. Множини точок на будь-яких двох відрізках [*a*, *b*] й [*c*, *d*] еквівалентні між собою.

Як встановити між ними взаємно однозначну відповідність, показано на рис. 1.2. Точки *p* й *q* відрізків [*a*, *b*] й [*c*, *d*] відповідають одна одній, якщо вони є проекціями однієї й тієї самої точки *r* допоміжного відрізка [*e*, *f*].

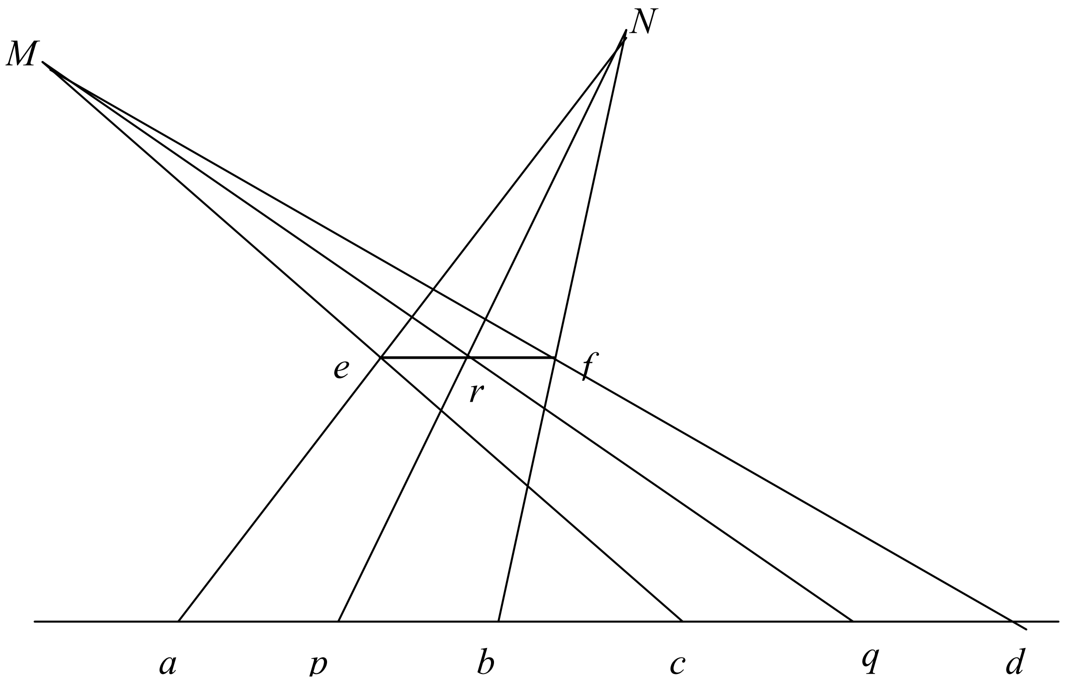


Рис. 1.2. Встановлення взаємно однозначної відповідності між відрізками [*a*, *b*] й [*c*, *d*]

3. Множина всіх чисел в інтервалі (0; 1) еквівалентна множині всіх точок на прямій.

Відповідність можна встановити за допомогою такої функції:

$$y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}.$$

Як видно з цих прикладів, має місце таке твердження: *усяка нескінченна множина еквівалентна деякій своїй власній підмножині*. Ця властивість є настільки важливою, що може бути прийнята за визначення нескінченної множини.

2.4. Незліченність множини дійсних чисел

Теорема 2.1 (Кантора). Множина дійсних чисел, що перебувають між нулем і одиницею, незліченна.

Доведення

Припустимо, що дано лічильну множину (всіх або тільки деяких) дійсних чисел α, що належать відрізку [0; 1]:

$$\alpha_1 = 0,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\ \dots\ \alpha_{1n}\ \dots,$$

$$\alpha_2 = 0,\alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}\ \dots\ \alpha_{2n}\ \dots,$$

$$\alpha_3 = 0,\ \alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{33}\,\alpha_{34}\ \dots\ \alpha_{3n}\ \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n = 0,\alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\,\alpha_{n3}\,\alpha_{n4}\ \dots\ \alpha_{nn}\ \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

тут α_{ik} – *k-та* десяткова цифра числа $\alpha_{i.}$. Побудуємо такий дріб:

$$\beta = 0,\ b_1\,b_2\,b_3\ \dots\ b_n\ \dots,$$

скориставшись *діагональною процедурою Кантора*, а саме: за b_1 приймемо довільну цифру, що не збігається із α_{11} , за b_2 – довільну цифру, що не збігається із a_{22} , і т. д.; за b_n приймемо довільну цифру, яка не збігається з a_{nn}. За своєю будовою, цей десятковий дріб не може збігтися з жодним дробом із описаного переліку. Дійсно, від α_1 дріб β відрізняється принаймні першою цифрою, від α_2 – другою, від α_3 – третьою і т. д. Це означає, що жодна лічильна множина не вміщує всіх чисел від 0 до 1. Отже, множина дійсних чисел, які містяться між нулем і одиницею, незліченна. Теорему доведено.

Потрібно зауважити, що подане доведення має одну неточність. Річ у тім, що деякі числа можуть бути записані у вигляді нескінченного десяткового дробу двома способами: з нескінченним числом нулів або з нескінченним числом дев'яток. Правило побудови числа β, що дозволяє ліквідувати цю неточність, наведено в літературі [4].

Незліченними також будуть такі множини:

1. Множина точок будь-якого відрізка [a, b].
2. Множина точок на прямій.
3. Множина точок площини або простору.
4. Множина всіх прямих на площині.
5. Множина всіх неперервних функцій одного або декількох аргументів.

Теорема 2.2 (Кантора – Бернштейна). Нехай A і B – дві довільні множини. Якщо існують взаємно однозначне відображення f множини A на підмножину B_1 множини B й взаємно однозначне відображення g множини B на підмножину A_1 множини A, то множини A й B еквівалентні.

Доведення

Не обмежуючи загальності твердження, можна вважати, що множини A й B не перетинаються. Нехай x – довільний елемент із множини A. Приймемо, що $x = x_0$, і визначимо послідовність елементів $\{x_n\}$ описаним нижче способом. Нехай елемент x_n вже визначено. Тоді, якщо номер n парний, то за x_{n+1} приймемо елемент із множини B, який задовольняє умову: $g(x_{n+1}) = x_n$ (звісно, у разі його існування); а коли n непарний, то за x_{n+1} приймемо елемент із множини A, який задовольняє умову: $f(x_{n+1}) = x_n$ (якщо такий елемент існує). При цьому можливі два випадки.

1. При деякому значенні n елемента x_{n+1}, який задовольняє описані умови, не існує. Тоді число n називається *порядком* елемента x.

2. Послідовність $\{x_n\}$ нескінченна. Тоді x називається елементом нескінченного порядку.

Розіб'ємо тепер множину A на три підмножини: A_E, що складається з елементів парного порядку, A_T – множину елементів непарного порядку й A_I – множину всіх елементів нескінченного порядку. Здійснивши аналогічним чином розбиття множини B, побачимо, що відображення f задає відповідність між множинами A_E та B_T і A_I та B_I, крім того g^{-1} відображає множину A_T на множину B_E. Отже, побудовано взаємно однозначне відображення ψ усієї множини A на всю множину B, яке збігається із відображенням f на множині $A_E \cup A_I$ та з відображенням g^{-1} на множині A_T. Теорему доведено.

2.5. Поняття потужності множини

Нагадаємо, що еквівалентні скінченні множини мають однакову кількість елементів. Якщо мова йде про еквівалентність довільних множин M й N, то говорять, що вони мають однакову *потужність*. Таким чином, потужність – це те спільне, що є в будь-яких двох еквівалентних множин. Для скінченної множини поняття потужності збігається з поняттям кількості її елементів. Потужність лічильної множини позначається символом $\aleph_0$ (читається як «алеф-нуль»). Про множини, еквівалентні множині всіх дійсних чисел відрізка [0; 1], говорять, що вони мають потужність *континуума.* Ця потужність позначається символом c (або символом $\aleph$).

Нехай A й B – довільні множини, а $m(A)$ і $m(B)$ – їхні потужності. Тоді можна виділити такі ситуації:

1. Множина A еквівалентна деякій частині множини B, а множина B еквівалентна деякій частині множини A. У цьому випадку множини A й B еквівалентні за теоремою Кантора – Бернштейна, тобто $m(A) = m(B)$.

2. Множина A містить деяку частину, що еквівалентна множині B, у той же час множина B не має у своєму складі частини, еквівалентної множині A. У цьому випадку вважаємо, що $m(A) > m(B)$.

3. Множина B містить деяку частину, еквівалентну множині A, але в

множині A немає частини, еквівалентної множині B. У цьому разі вважаємо, що $m(A) < m(B)$.

4. У складі жодної із названих множин немає частини, еквівалентної іншій множині. Тобто множини A й B непорівнянні. Але насправді цей випадок неможливий (див. [4], § 4).

Теорема 2.3. Нехай M деяка множина й нехай $\mathfrak{M}$ – множина, елементами якої є всілякі підмножини множини M. Тоді $\mathfrak{M}$ – має потужність більшу, ніж потужність вихідної множини M.

Доведення

Легко бачити, що потужність $m(\mathfrak{M})$ множини $\mathfrak{M}$, не може бути меншою від потужності $m(M)$ вихідної множини M; дійсно, одноелементні підмножини утворюють у множині $\mathfrak{M}$ частину, еквівалентну множині M, тобто $m(\mathfrak{M}) \geq m(M)$. Залишається довести, що потужності $m(\mathfrak{M})$ і $m(M)$ не збігаються.

Припустимо, що між елементами a, b, … множини M й елементами $A, B, \ldots$ множини $\mathfrak{M}$ (тобто якимись підмножинами з M) встановлено взаємно однозначну відповідність:

$$a \leftrightarrow A,\ b \leftrightarrow B,\ \ldots$$

Покажемо, що вона не вичерпує всієї множини $\mathfrak{M}$. Для цього сконструюємо множину $X \subset M$, яка не має жодного відповідного їй елемента в множині M. Нехай X – це сукупність елементів з множини M, які не входять у ті підмножини, що їм відповідають. Докладніше: якщо $a \leftrightarrow A$, і $a \in A$, то елемент a ми не включаємо в множину X, а якщо $a \leftrightarrow A$, і $a \notin A$, то ми включаємо елемент a в множину X. Певна річ, X являє собою деяку підмножину множини M, тобто елемент множини $\mathfrak{M}$. Покажемо, що множині X не може відповідати жодний елемент із множини M. Припустимо, що такий елемент $x \leftrightarrow X$ існує; подивимося, чи буде він входити до складу множини X, чи ні.

Нехай $x \notin X$. Але за визначенням у множину X входить усякий елемент, що не міститься в підмножині, яка йому відповідає, отже, елемент x повинен бути включений у множину X. Тепер, припустимо, що $x \in X$. Але тоді за визначенням він не може міститися в множині X, оскільки в неї включено тільки ті елементи, що не містяться у відповідних їм підмножинах. Таким чином, елемент x, який відповідає підмножині X, повинен одночасно і міститися й не міститися в множині X. Зрозуміло, що такого елемента не існує, тобто взаємно однозначної відповідності між елементами множини M й множини $\mathfrak{M}$ встановити не можна. Таким чином, теорему доведено.

Ця теорема показує, що для множини будь-якої потужності ми завжди можемо побудувати множину більшої потужності, потім ще більшої й т. д.

Потужність множини $\mathfrak{M}$ всіх підмножин множини M позначають як 2^m, де m – потужність множини M.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Які множини називають скінченними? Нескінченними? Лічильними? Незліченними? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте й доведіть властивості лічильних множин.
3. Доведіть незліченність множини чисел, що перебувають між нулем і одиницею.
4. Перелічіть властивості нескінченних множин.
5. Що характеризує потужність множини?
6. Які множини називають еквівалентними?
7. Наведіть приклади еквівалентних множин.
8. Сформулюйте й доведіть теорему Кантора – Бернштейна.
9. Яким чином можна порівняти множини?
10. Сформулюйте й доведіть теорему про потужність множини всіх підмножин даної множини.
11. Чи існує множина найменшої (найбільшої) потужності?
12. Доведіть, що множини Z і Q лічильні.
13. Число x називається алгебраїчним, коли існує таке число $n \in N$ та цілі числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, що виконується рівність: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Доведіть, що множина алгебраїчних чисел лічильна.
14. Точка (x, y) площини R^2 називається раціональною, якщо $x \in Q$ і $y \in Q$. Доведіть, що множина раціональних точок площини лічильна.
15. Доведіть, що множина всіх послідовностей, складених із чисел 0 та 1, не є лічильною.
16. Доведіть, що множина точок на інтервалі (a, b) еквівалентна множині R точок прямої.
17. Доведіть, що записані нижче множини скінченні або лічильні:

а) будь-яка підмножина лічильної множини;

б) об’єднання скінченної або лічильної кількості скінченних або лічильних множин;

в) добуток скінченного числа множин, кожна з яких є скінченною або лічильною.

18. Доведіть, що наведені нижче множини є лічильними:

а) множина всіх многочленів з цілими коефіцієнтами;

б) множина всіх цілих степенів числа 5;

в) множина трикутників, вершини яких розташовуються в точках з раціональними координатами;

г) множина скінченних підмножин лічильної множини;

д) множина неперетинних інтервалів на числовій осі.

е) множина точок R^n з раціональними координатами.

19. Перевірте твердження: множина A нескінченна тоді і тільки тоді, коли її можна бієктивно відобразити на свою власну підмножину.

§ 3. Частково впорядковані множини

Впорядкована множина – це математичне поняття, що формалізує інтуїтивні ідеї впорядкування, тобто розташування елементів у певній послідовності. Для того, щоб перетворити звичайну множину на впорядковану, необхідно задати на ній деяке *відношення порядку* або коротше *порядок*.

Нехай X – задана множина. *Порядком* на множині X називається бінарне відношення, що має такі властивості:

1) $x \geq x$ (рефлексивність);
2) якщо $x \geq y$, та $y \geq x$, то $x = y$ (антисиметричність);
3) якщо $x \geq y$, та $y \geq z$, то $x \geq z$ (транзитивність).

При цьому запис $x \leq y$ означає, що $y \geq x$, а вираз $x > y$ означає, що $x \geq y$ і $x \neq y$.

Множину X назвемо *частково впорядкованою*, коли для деяких (або для всіх) її елементів задано відношення порядку.

Множина X із заданим на ній відношенням порядку позначається $(X, \geq)$.

Наведемо приклади впорядкованих множин.

1. Множина дійсних чисел R являє собою впорядковану за відношенням менше або дорівнює ($\leq$) множину.

2. Множина натуральних чисел N, впорядкована за тим самим відношенням.

3. Множина натуральних чисел, впорядкована за відношенням «бути дільником».

4. Множина всіх підмножин даної множини X, впорядкована за включенням, тобто підмножина $A \leq B$, якщо $A \subset B$.

5. Множина всіх неперервних функцій на відрізку $[a, b]$, впорядкована за таким правилом: $f \leq g$, якщо $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, b]$.

Зауважимо, що на одній і тій самій множині можна задати різні відношення порядку, і тим самим утворити різні впорядковані множини (див. приклади 2, 3).

Нехай $(X, \geq)$ – впорядкована множина. Підмножина $A \subset (X, \geq)$ називається *обмеженою зверху*, якщо існує елемент $x^* \in X$, для якого буде справедливим твердження: $a \leq x^*$, $\forall a \in A$. Елемент $x^* \in X$ називається в цьому випадку *верхньою межею* або *мажорантою* множини A. Найменша з мажорант називається *точною верхньою межею* множини A й позначається *sup* A.

Аналогічно визначають обмеженість множин знизу й нижню границю, а саме:

Підмножина $A \subset (X, \geq)$ називається *обмеженою знизу*, якщо існує такий елемент $x_* \in X$, що $a \geq x_*$, $\forall a \in A$. Елемент x_* називається *нижньою межею* або *мінорантою* множини A. Найбільша з мінорант називається точною нижньою межею множини A й позначається *inf* A.

Елемент $m \in A \subset (X, \leq)$ називається *найбільшим* у множині *A*, якщо $m \geq a,\ \forall a \in A$.

Елемент $m \in A$ називається *максимальним* у множині *A*, якщо не існує елемента $a \in A$, який відповідав би такій умові: $a \geq m$ і $a \neq m$.

Будь-який найбільший елемент одночасно є максимальним, але протилежне твердження не буде правильним.

Аналогічно можна визначити мінімальний і найменший елементи.

Елемент $m \in A \subset (X, \leq)$ називається *найменшим* у множині *A*, якщо $m \leq a,\ \forall a \in A$.

Елемент $m \in A$ називається *мінімальним* у множині *A*, коли не існує елемента $a \in A$, який відповідав би такій умові: $a \leq m$ і $x \neq m$.

Множина *X* буде *лінійно впорядкованою*, якщо для будь-якої пари елементів $x, y \in X$ виконано хоча б одну з умов: $x \geq y$ або $y \geq x$, тобто всілякі два елементи можна порівняти.

Прикладом лінійно впорядкованої множини може бути множина дійсних чисел *R*.

Прикладом впорядкованої множини, що містить також непорівнянні елементи, є множина всіх підмножин натурального ряду *N*, впорядкована за включенням.

Множина *X* буде *індуктивно впорядкованою*, якщо кожна її лінійно впорядкована підмножина має в *X* верхню межу.

Для впорядкованих множин має місце така лема:

Лема Цорна. У будь-якій індуктивно впорядкованій множині існує максимальний елемент.

В основі цієї леми лежить:

Аксіома вибору. У будь-якій сім'ї непустих множин: $\Phi = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, з кожної множини $X_\alpha \in \Phi$ можна вибрати по одному елементу, тобто існує функція вибору $f : A \to \Phi$.

Названа аксіома, коли йдеться про нескінченну (навіть лічильну) задану сім'ю, не може бути виведена з інших аксіом строгої теорії множин.

Можливо, наша інтуїція підкаже, що іншого й бути не може – як же інакше? Але повіримо класикам науки – іноземному й вітчизняному:

«Коли в перший раз мають справу з аксіомою Цермело, то вона здається безперечною й очевидною, але в міру того, як починають розмірковувати про неї, вона стає все більше й більше загадковою, а її наслідки – дивними, а закінчують міркування тим, що втрачають її сенс і тоді починають запитувати, що ж саме вона означає?» (Б. Рассел).

«Я дні й ночі думаю над аксіомою Цермело. Якби тільки хто-небудь знав, що це таке!» (Н.Н. Лузін).

Був час коли від цієї аксіоми хотіли відмовитися, але виявилося, що на ній явно або неявно базується стільки фундаментальних математичних фактів, що математичній спільноті нічого не залишилося, як підкоритися парадоксу й прийняти аксіому, точніше повірити в неї.

Аксіома вибору має багато еквівалентних їй тверджень. Наведемо ще одне.

Теорема Цермело. На всякій множині X можна ввести таке відношення порядку (цілком її впорядкувати), за яким у кожній підмножині $A \subset X$ буде існувати найменший елемент $x_0 \subset A$.

Крім того справедливі такі твердження:

Теорема 3.1. Нехай $\bar{x}$ – найбільший елемент множини *X*. Тоді ця множина має верхню грань й $\bar{x} = sup\, X$.

Теорема 3.2. Нехай існує таке число b, для якого виконується нерівність: $x \le b \quad \forall x \in X$. Тоді, якщо множина *X* має верхню грань, то $sup\, X \le b$.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Які множини називають впорядкованими? Лінійно впорядкованими? Індуктивно впорядкованими? Наведіть приклади.

2. Дайте визначення найбільшого, найменшого, максимального й мінімального елементів множини.

3. Яким чином співвідносяться між собою перелічені вище елементи? Наведіть приклади.

4. Сформулюйте лему Цорна.

5. Знайти sup, inf, максимальний та мінімальний елементи (якщо вони існують) для таких множин:

а) $\{x \in R \mid 0 \le x \le 1\}$;

б) $\{x \in R \mid 0 \le x < 1\}$;

в) $\{x \in R \mid]0,1[\cup]1,2[\}$.

6. На множині точок площини: $R^2 = \{(x, y)\}$, уведемо відношення $\le$ таким чином: $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2)$, якщо $x_1 \le x_2$ та $y_1 \le y_2$.

а) Довести, що множина $(R^2, \le)$ буде частково впорядкованою, але не лінійно впорядкованою.

б) Знайти максимальний елемент множини: $A = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$.

в) Визначити sup *A*.

г) Чи буде множина *A* індуктивно впорядкованою?

7. Візьмемо множину точок площини *X*. Уведемо на ній відношення $\le$ таким чином: $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2)$, якщо $x_1 < x_2, \forall y_1, y_2 \in X$, та $(x_1, y_1) \le (x_1, y_2)$, коли $y_1 < y_2$. Довести, що множина: $A = \{(x, y) : x = 3\}$, буде обмеженою, але не матиме точної верхньої межі.

8. Нехай X – множина точок площини. Уведемо відношення $\le$ таким чином: $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2)$, якщо $x_1 < x_2, \forall y_1, y_2 \in X$, та $(x_1, y_1) \le (x_1, y_2)$, коли

$y_1 < y_2$. Визначити sup, inf, максимальний, мінімальний, найбільший та найменший елементи (якщо вони існують) таких множин:

а) $A = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le 9\right\}$;

б) $B = \{(x,y): y = 1\}$;

в) $C = \left\{(x,y): (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 4\right\}$;

г) $D = \{(x,y): |x| + |y| \le 4\}$;

д) $E = \{(x,y): 1 \le x \le 4, 2 \le y \le 6\}$;

е) $F = \{(x,y): \max\{|x|,|y|\} = 3\}$;

ж) $G = \{(x,y): x = 2\}$;

и) $H = \left\{(x,y): 4 \le x^2 + y^2 < 9\right\}$.

9. На множині точок площини: $R^2 = \{(x,y)\}$, уведемо відношення $\le$ таким чином: $(x_1,y_1) \le (x_2,y_2)$, якщо $x_1 \le x_2$ та $y_1 \le y_2$. Визначити sup, inf, максимальний, мінімальний, найбільший та найменший елементи (якщо вони існують) для множин із завдання 8, *а – и*.

РОЗДІЛ II

ТОПОЛОГІЧНІ Й МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Простір являє собою множину, між елементами якої аксіоматично задані певні співвідношення (тобто *структура простору*).

Топологічні простори були введені в 1910-х роках Хаусдорфом, метричні – трохи раніше Фреше.

§ 1. Топологічні простори

1.1. Визначення й приклади топологічних просторів. Порівняння топологій

Множина X називається *топологічним простором*, коли в ній виділено систему σ підмножин, названих відкритими, яка задовольняє такі три умови (аксіоми топологічного простору):

1. Порожня множина $\varnothing$ і вся множина X входять у систему σ.

2. Перетин скінченного числа множин G_k системи σ належить до σ, тобто

$$\bigcap_{k=1}^{n} G_k \subset \sigma, \text{ де } G_k \subset \sigma.$$

3. Об′єднання будь-якого (скінченного або нескінченного) числа множин G_α із системи σ належить до σ, тобто

$$\bigcup_{\alpha} G_\alpha \subset \sigma, \text{ де } G_\alpha \subset \sigma.$$

Якщо множина X перетворюється в топологічний простір, то говорять, що в неї введено *топологію*.

Приклад 1. Розглянемо множину: $X = \{a,b,c,d\}$, та систему її підмножин: $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,c\}, \{b\}\}$. З'ясуємо, чи задає система τ топологію на множині X. Для цього необхідно перевірити аксіоми топології, а саме:

1. Множина X та порожня множина $\varnothing$ належать до системи τ, тобто аксіома виконується.

2. Перетин скінченного числа множин G_k із системи τ також належить цій системі: $\bigcap_{k=1}^{n} G_k \subset \tau$, де $G_k \subset \tau$, а значить аксіома виконується.

3. Об′єднання будь-якого (скінченного або нескінченного) числа множин G_α із системи τ належить цій системі: $\bigcup_{\alpha} G_\alpha \subset \tau$, де $G_\alpha \subset \tau$. У цьому випадку аксіома не виконується, оскільки об'єднання множин $\{a,c\}, \{b\}$ не належить системі τ.

Таким чином, система τ не задає топологію на множині X.

Наведемо приклади топологічних просторів.

Нехай множина X складається з двох елементів, а саме: $X = \{a, b\}$. Задамо на цій множині топологію таким чином: $\sigma_1 = \{\{a,b\},\varnothing,\{a\},\{b\}\}$. Отриманий простір називається простором *ізольованих точок*.

На тій самій множині X можна також задати інші топології:

$\sigma_2 = \{\{a,b\},\varnothing,\{a\}\}$ – зв'язана двоточковість,

$\sigma_3 = \{\{a,b\},\varnothing\}$ – простір *злиплих точок.*

Вочевидь, різні топології, задані на одній і тій самій множині, утворюють різні топологічні простори. Щоб підкреслити цей факт, для позначення топологічного простору використовують такий запис: (X, τ) . Він означає, що на множині X задано топологію τ.

Два топологічних простори X_1 і X_2 називаються *гомеоморфними*, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій відкриті множини просторів X_1 і X_2 відповідають одна одній.

Нехай у множині X двома, взагалі-то, різними способами уведено топологію, в результаті чого утворилося два топологічних простори: X_1 і X_2 (які збігаються за вмістом елементів). Позначимо через σ_1 й σ_2 системи відкритих множин просторів X_1 і X_2 відповідно.

Вважається, що топологія в множині X_1 сильніша від топології в множині X_2 (або топологія в множині X_2 слабша від топології в X_1), якщо $\sigma_1 \supset \sigma_2$. При цьому пишуть: $\tau(X_1) \geq \tau(X_2)$ або $\tau(X_2) \leq \tau(X_1)$. У розглянутих вище прикладах найсильнішою буде топологія ізольованих точок, найслабшою – топологія злиплих точок.

Нехай X – топологічний простір, σ – система відкритих множин у ньому, $X_0 \subset X$. Розглянемо систему σ_0, що складається із множин такого вигляду: $G \cap X_0$, де $G \subset \sigma$. Ця система також задовольняє аксіоми топологічного простору й тим самим перетворює множину X_0 у топологічний простір. За таких обставин говорять, що топологія в множині X_0 *індукована* топологією простору X, а X_0 являє собою підпростір X.

Приклад 2. Нехай X являє собою множину точок (x, y) координатної площини. Задамо на цій множині дві топології τ_1 і τ_2 в такий спосіб:

τ_1 – описується системою множин σ_1, яка складається з множини X, порожньої множини $\varnothing$, усіх відкритих кругів із центрами на осі x та всіх множин, отриманих шляхом скінченного перетину й будь-якого об'єднання таких кругів.

τ_2 – задається системою множин σ_2, що складається з X, $\varnothing$, усіх відкритих кругів із центром в точці (0,0) і всіх множин, отриманих шляхом скінченного перетину й будь-якого об'єднання таких кругів.

Зрозуміло, що $\sigma_1 \supset \sigma_2$. Отже, топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

Приклад 3. Нехай X – множина точок (x, y) координатної площини, X_0 – множина точок, розташованих на осі x. Очевидно, що $X_0 \subset X$.

Розглянемо систему σ$_0 = \{G \bigcap X_0, G \subset \sigma_1\}$, де σ$_1$ описується, як у попередньому прикладі. Тоді система σ$_0$ буде включати в себе такі множини: X_0, ∅ та всі відкриті інтервали на осі x і всі множини, утворені їхнім скінченним перетином та будь-яким об'єднанням. Отже, вона буде задавати на множині X_0 топологічний простір (X_0, τ_0). Цей простір буде являти собою підпростір простору (X, τ_1), а топологія τ_0 буде топологією, що *породжена* (*індукована*) топологією τ_1.

Множина F в топологічному просторі X називається *замкненою*, якщо множина: $G = X \setminus F$, відкрита. Система Z усіх замкнених множин простору X має такі властивості:

1. Порожня множина ∅ і вся множина X входить в систему Z.

2. Перетин будь-якого числа замкнених множин є замкненою множиною, тобто, якщо $F_\xi \in Z$, ($\xi \in \Xi$), то $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi \subset Z$.

3. Об'єднання скінченного числа замкнених множин також є замкненою множиною, тобто коли F_1 й $F_2 \subset Z$, то $F_1 \bigcap F_2 \subset Z$.

Оскільки замкнені множини є доповненням відкритих і навпаки, то виходячи із властивостей системи замкнених множин, топологію можна задавати також уведенням системи замкнених множин, а вже потім як їхнє доповнення визначити відкриті.

1.2. Базисні системи околів

Нехай X – топологічний простір. Точка $x \in X$ називається *внутрішньою* точкою множини $E \in X$, коли існує відкрита множина $G \subset X$, що відповідає такій умові: $x \in G \subset E$. Іншими словами, точка x входить у множину X разом із деякою відкритою множиною.

Околом точки $x \in X$ називається будь-яка множина V простору X ($V \subset X$), для якої точка X є внутрішньою.

Система околів B_x точки x називається *фундаментальною*, або *базисом околів* точки x, якщо для будь-якого околу V точки x знайдеться окіл $V_x \in B_\text{x}$, причому $V_x \subset V$.

Сукупність B базисів B_x у всіх точках простору називається *базисом простору*.

Базис має такі властивості:

1. Точка x міститься у своєму базисному околі ($V \in B_x \Rightarrow x \in V$).

2. Якщо V_1, V_2 – базисні околи точки x, то існує базисний окіл V_3, який міститься у перетині околів V_1, V_2 ($V_1, V_2 \in B_x, \Rightarrow \exists V_3 \in B_x$: $V_3 \subset V_1 \bigcap V_2$).

3. Який би не був окіл $V_x \in B_x$, існує базисний окіл $V_x' \in B_x$ такий, що $V_x' \subset V_x$, причому для кожного елемента $y \in V_x'$ знайдеться базисний окіл $V_y \in B_y$, причому $V_y \subset V_x$.

Доведемо третю властивість:

Оскільки V_x – окіл точки x, то існує відкрита множина G, яка містить у собі точку x і цілком включена в окіл V_x , тобто $x \in G \subset V_x$. Оскільки G – окіл точки x, то існує базисний окіл $V_x' \subset B_x$, що передбачає включення $V_x' \subset G \subset V_x$. Далі, коли $y \in V_x'$, то існує відкрита множина G, яка містить у собі точку y, а , оскільки G є околом точки y, то існує базисний окіл V_y точки y, який міститься в множині G. Отже, $V_y \subset G \subset V_x' \subset V_x$, і тим більше буде $V_y \subset V_x$.

Має місце така теорема.

Теорема 1.1

Нехай з кожною точкою x деякої множини X пов'язано систему B_x підмножин множини X, причому виконуються умови 1 – 3. Множину $G \subset X$ назвемо відкритою, якщо для будь-якого елемента $x \in G$ існує множина $V \subset G$ ($V \subset B_x$). Тоді система відкритих множин задовольняє аксіоми топологічного простору, і в отриманому таким чином топологічному просторі кожна система B_x являє собою базис околів точки x.

Ця теорема дозволяє вводити топологію за допомогою задання для кожної точки простору системи фундаментальних околів.

1.3. Всюди щільні множини

Точка x топологічного простору X називається *внутрішньою* точкою множини $E \subset X$, якщо вона входить до множини E разом із деяким своїм околом. Позначимо через $\overset{\circ}{E}$ множину всіх внутрішніх точок множини E. $\overset{\circ}{E}$ – це найбільша відкрита множина, яка міститься в множині E.

Точка x топологічного простору X називається *межовою* точкою множини $E \subset X$, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать до множини E, так і точки, які не належать до цієї множини.

Точка x топологічного простору X називається *точкою дотику* множини $E \subset X$, якщо будь-який окіл V цієї точки має з множиною E непустий перетин, тобто для будь-якого околу V точки x має місце умова: $V \bigcap E \neq \varnothing$.

Точка x топологічного простору X називається *граничною точкою* множини E (точкою згущення, точкою накопичення), якщо в будь-якому околі V точки x знайдеться точка x' множини E, яка не збігається з x.

Множина всіх точок дотику даної множини E називається *замиканням* множини E і позначається через $[E]$. Назвемо його властивості:

1. $[\varnothing]=\varnothing$. Замиканням пустої множини є пуста множина.
2. $E \subset [E]$. Будь-яка множина E міститься у своєму замиканні.
3. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $[E_1] \subset [E_2]$.
4. $[E_1 \cup E_2] = [E_1] \cup [E_2]$.
5. $[[E]] = [E]$.

Множину E будемо називати замкненою тоді й тільки тоді, коли $[E]=E$.

З огляду на те, що точки дотику являють собою або внутрішні точки (вони завжди належать множині) або її граничні точки (вони можуть належати множині чи ні), замикання множини E отримують приєднанням до неї всіх граничних точок. Таким чином, замкнену множину ми можемо визначити як таку, що містить усі свої граничні точки. Отже, замикання множини – це найменша замкнена множина, яка містить дану множину.

Нехай X – топологічний простір.

Множина $E \subset X$ називається *щільною* у множині $X_0 \subset X$, якщо $[E] \supset X_0$.

Коли $[E]=X$, то множина E називається *всюди щільною.*

Множина $E \subset X$ називається ніде не щільною, якщо внутрішність її замикання порожня (або, що те саме, $X \setminus [E]$ – всюди щільна).

Множина $E \subset X$ називається *множиною першої категорії*, якщо її можна подати у вигляді об'єднання лічильної кількості ніде не щільних множин. Всі інші множини називаються множинами другої категорії.

Топологічний простір X називається *сепарабельним*, якщо в ньому існує лічильна всюди щільна множина.

1.4. Важливі класи топологічних просторів

Топологічний простір T називається T_0-простором, якщо для будь-яких двох точок x та y існує або окіл O_x точки x, який не містить у собі точку y, або окіл O_y точки y, що не містить у собі точку x, тобто

$$\forall x, y \in T, \exists O_x : y \notin O_x, \text{ або } \exists O_y : x \notin O_y.$$

Топологічний простір T називається T_1-простором, якщо для будь-яких точок x, y простору T існує окіл O_x точки x, який не містить у собі точку y, та окіл O_y точки y, який не містить у собі точку x:

$$\forall x, y \in T, \exists O_x, O_y : y \notin O_x, x \notin O_y.$$

Наприклад, зв'язана двоточковість не є T_1-простором.

У T_1-просторі будь-яка точка є замкненою множиною і відповідно замкненою буде всіляка кінцева множина точок.

Топологічний простір T називається T_2-простором (хаусдорфовим, або відокремленим простором), якщо будь-які дві точки x та y простору T мають околи, які не перетинаються, тобто

$$\forall x, y \in T, \exists O_x, O_y : O_x \cap O_y = \varnothing.$$

Прикладом нехаусдорфового T_1-простору є відрізок [0; 1], у якому відкритими вважаються $\varnothing$, відрізок [0; 1] і всі множини, отримані викиданням із нього не більш ніж лічильної кількості точок.

Топологічний простір T називається T_3-простором, коли будь-яка точка і замкнена множина, що не містить цю точку, мають неперетинні околи, тобто

$$\forall x, A : x \notin A,\ \overline{A} = A\ \exists O_x, O_A : O_x \cap O_A = \varnothing.$$

Простір, який задовольняє умови T_1 і T_3 одночасно називають *регулярним*.

Топологічний простір називається T_4-простором, або *нормальним*, коли в ньому будь-які дві замкнені множини, які не перетинаються, мають неперетинні околи.

Розглянемо приклад.

Нехай на множині: $X = \{a, b, c, d\}$, задано систему підмножин: $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c\}\}$. Перевіримо, чи буде топологічний простір (X, τ) T_1, T_2, T_3, T_4-простором.

Для цього випишемо околи для кожного з елементів множини X.

$a : \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a\};$

$b : \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,d\}, \{a,b\}, \{b\};$

$c : \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c\};$

$d : \{a,b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,d\};$

Вочевидь, елемент a має окіл, що не містить елементів b, c і d, елемент b має окіл, до якого не входять c і d, а елемент c має окіл, який не включає елемент d. Іншими словами, для кожної пари елементів множини X існує окіл одного з елементів, який не містить другого, таким чином, розглянутий простір відноситься до класу T_0.

Перевіримо, чи буде він T_1-простором. Оскільки елемент c не має околу, який не містить елемента a, то ця топологія не буде T_1-простором, а тому вона не буде і T_2, T_3, T_4-простором.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення топологічного простору. Наведіть приклади топологічних просторів.
2. Сформулюйте аксіоми топології.
3. Які множини називають відкритими?
4. Чи можна на одній множині задати кілька топологій?
5. Яким чином порівнюють топології?
6. Які множини називають замкненими?

7. Яким чином можна задати топологію?

8. Дайте визначення базису простору.

9. Які властивості має базисна система околів?

10. Дайте визначення внутрішньої, межової, граничної, ізольованої точок і точки дотику.

11. Яким чином перелічені вище точки співвідносяться між собою?

12. Як визначають замикання множини?

13. Сформулюйте й доведіть властивості замикання множини.

14. Сформулюйте визначення щільної (всюди щільної) множини.

15. Які простори називають сепарабельними?

16. Яким чином класифікують топологічні простори з огляду на аксіоми віддільності.

17. Довести, що перетин будь-якої множини топологій на множині X також є топологією на цій множині.

18. Показати на прикладі, що об'єднання двох топологій на множині X не завжди буде топологією на цій множині.

19. Довести, що коли G_1 та G_2 – відкриті множини в лінійному топологічному просторі X, то множини G_1+G_2 та $\alpha G_1\left(\alpha\neq 0\right)$ також будуть відкритими.

20. Довести, що множина в топологічному просторі відкрита тоді і тільки тоді, коли вона являє собою окіл кожної своєї точки.

21. Довести, що у хаусдорфовому топологічному просторі кожна точка являє собою замкнену множину.

22. Чи може бути ізольована точка внутрішньою, межовою? Навести приклади.

23. Довести, що замикання множини A являє собою найменшу замкнену множину, яка містить у собі множину A.

24. Довести, що внутрішність множини A являє собою найбільшу відкриту множину, яка міститься в множині A.

25. Припустимо, що на множині X визначено дві топології: τ_1 і τ_2, причому $\tau_1\subset\tau_2$. Нехай $A\subset X$, $\overline{A}_1,\overline{A}_2$ являють собою замикання множини A в топологіях τ_1,τ_2 відповідно. Яке із тверджень буде правильним: $\overline{A}_1\subset\overline{A}_2$ чи $\overline{A}_2\subset\overline{A}_1$?

26. На множині X визначено дві топології: τ_1 і τ_2, причому $\tau_1\subset\tau_2$. Довести, що замикання будь-якої множини в топології τ_2 міститься у замиканні цієї множини в топології τ_1.

27. Навести приклади топологічного простору і множини в ньому:
а) не відкритої й не замкненої; *б*) відкритої та замкненої одночасно.

28. Нехай множина X являє собою точки площини. Систему τ задамо в такий спосіб: $\tau=\{X,\varnothing,$ *всі круги радіуса 1, центри яких перебувають у точках з координатами* (0; *n*), *а також усі множини, що утворюються внаслідок їх*

скінченного перетину та будь-якого об'єднання$\}$. Чи буде система τ задавати топологічний простір на множині X? Чи буде він T_1-, T_2-простором?

29. Нехай множина X являє собою точки площини. Систему τ задамо таким чином: $\tau = \{X, \varnothing,$ *всі круги, центри яких перебувають у точках з цілими координатами, а радіус дорівнює* 1, *та множини, утворені внаслідок їх скінченного перетину й будь-якого об'єднання*$\}$. Чи буде ця топологія задавати T_0-,T_2-,T_1-простір?

30. Нехай множина X являє собою точки площини. Систему τ задано у такому вигляді:

$$\tau = \{\ X, \varnothing, \textit{всі круги довільного радіуса, центри яких перебувають в точці з координатами } (0,0)\ \}.$$

Чи буде система τ задавати топологію? Чи буде ця топологія визначати T_0-,T_1-,... простір?

31. Яка з топологій у завданнях 28 – 30 сильніша? Яка слабша?

32. Перевірити, чи буде система τ задавати топологію на множині X, якщо

1) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a\}, \{b\}\}$.

2) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}\}$.

3) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

4) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$.

5) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}\}$.

6) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

7) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{b,c\}\}$.

8) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a\}, \{c\}\}$.

9) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{c\}\}$.

10) $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

33. За умовами завдання 32 доповнити систему τ (коли вона не задає топологію) таким чином, щоб нова система τ_1 задавала топологію. Перевірити, чи буде отриманий топологічний простір (X, τ_1) являти собою T_1-,T_2-,T_3-,T_4-простір.

34. Довести, що в топологічному просторі з тривіальною топологією кожна послідовність прямує до будь-якої точки цього простору.

35. Довести, що перетин будь-якої множини топологій на множині X також є топологією на цій множині.

36. Показати на прикладі, що об’єднання двох топологій на множині X не завжди буде топологією на цій множині.

37. Нехай множина $X=(0;1]$, а топологія τ визначається множинами X, $\varnothing$, інтервалами $(0,\alpha)$, де $\alpha\in(0;1)$, і множинами такого вигляду: $(0;\alpha)\cup\{1\}$. Довести, що в просторі (X,τ) послідовність: $\{x_n\}$, $x_n=\dfrac{n-1}{n}$, не має границі.

38. Нехай множина $X=R^2$, а топологія τ в ній задається множинами X, $\varnothing$, усіма відкритими кругами, центри яких перебувають на дійсній осі, а також будь-якими їх об'єднаннями і скінченними перетинами. Довести, що топологічний простір (X,τ) не є T_0-простором.

Вказівка. Розглянути точки (x,y) та $(x,-y)$.

39. Нехай множина $X=R^2$, а система τ задається відкритими (в евклідовій метриці) кругами радіуса $\dfrac{1}{2}$, центри яких перебувають у точках з цілочисловими координатами, а також їх скінченними перетинами і будь-якими об'єднаннями. Чи буде топологічний простір (X,τ): а) T_0-простором; б) T_1-простором?

40. Нехай множина $X=[0;1]$. У ній околи всіх точок, крім 0, визначено звичайним способом, а околами нуля вважаються всілякі напівінтервали $[0;a)$, з яких вилучено такі точки: $1/n$, $(n\in N)$. Довести, що простір X є хаусдорфовим, але не нормальним простором.

Вказівка. Розглянути множини: $M_1=\{0\}$ та $M_2=\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in N}$.

41. Довести, що коли G_1 та G_2 – відкриті множини в лінійному топологічному просторі X, то множини G_1+G_2 та αG_1 $(\alpha\neq 0)$ також будуть відкритими.

42. На множині R дійсних чисел побудувати найслабшу з топологій, що містить підмножину B множини R, за таких умов:

а) $B=\{(a,b);\, a\in R, b\in R\}$; *б*) $B=\{[a,b];\, a\in R, b\in R\}$;

в) $B=\{[a,b);\, a\in R, b\in R\}$; *г*) $B=\{(a,b];\, a\in R, b\in R\}$;

д) $B=\{[a,+\infty);\, a\in R\}$; *е*) $B=\{(a,+\infty);\, a\in R\}$;

ж) $B=\{(-\infty,a);\, a\in R\}$; *и*) $B=\{(a,b);\, a>0, b>0\}$;

к) $B=\{[n,m];\, n,m\in Z\}$.

43. Визначити перетин топологій, що побудовані в задачі 42, *в*, *г*.

44. Визначити перетин топологій, що побудовані в задачі 42, *д*, *ж*.

45. Порівняти між собою топології в задачі 42, *а*, *в*.

46. Порівняти між собою топології в задачі 42, *в*, *г*.

47. Довести, що множина в топологічному просторі відкрита тоді і тільки тоді, коли вона являє собою окіл кожної своєї точки.

48. Довести, що у віддільному топологічному просторі кожна точка являє собою замкнену множину.

49. Знайти внутрішні, межові, граничні, ізольовані точки множини $\{0\}$ в топологічних просторах, що побудовані в задачі 42, *а – д*, *и*, *к*.

50. Знайти внутрішні, межові, граничні, ізольовані точки множини $(0{,}1)\bigcup\{2\}$ в топологічних просторах, що побудовані в задачі 42, *а – в*.

51. Знайти внутрішні, межові, граничні, ізольовані точки множини $(0{,}1)\bigcup\{2\}\bigcup\{-1\}$ в топологічних просторах, що побудовані в задачі 42, *г*, *д*, *и*, *к*.

52. Чи може бути ізольована точка множини її внутрішньою точкою? Її межовою точкою? Навести приклади.

53. На множині X визначено дві топології: τ_1 і τ_2, причому $\tau_1 \subset \tau_2$. Довести, що замикання будь-якої множини в топології τ_2 міститься у замиканні цієї множини в топології τ_1.

§ 2. Метричні простори

Основою математичного аналізу є ідея “близькості”. Саме через близькість точок аргументу формулюються базові поняття неперервності, границі та диференційованості функцій. На числовій осі близькість оцінюється абсолютною величиною різниці між числами, на площині й у просторі — довжиною відрізка, що з’єднує точки.

Рівномірна збіжність функціональної послідовності також може бути сформульована через відстань між функціями: $d(f,g)=\sup\limits_{x\in X}|f(x)-g(x)|$, де X – множина, на якій визначено функції. Рівномірна збіжність послідовності функцій: $f_n \underset{X}{\to} f$, означає, що числова послідовність $d(f_n,f)$ є нескінченно малою.

Аналіз понять границі та неперервності показує, що для їх визначення та дослідження важлива не конкретна природа множин, на яких розглядаються послідовності чи досліджуються функції, а лише принцип, за яким оцінюється близькість між точками цих множин.

У зв'язку з цим доцільно визначити й дослідити абстрактний об'єкт, який складається з множини, відстані, визначеної для кожної пари точок цієї множини, та набору аксіом, що забезпечує отримання змістовних результатів.

2.1. Визначення та приклади метричних просторів

Метричним простором називається пара (M,ρ), де M – деяка множина, а $\rho(x,y)$ – дійсна невід'ємна функція, що задовольняє для всіх елементів x,y,z із множини M такі умови (аксіоми метричного простору):

1. $\rho(x,y)\ge 0$. Причому $\rho(x,y)=0$, тоді і тільки тоді, коли $x=y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксіома симетрії);
3. $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (аксіома трикутника).

Функція $\rho(x,y)$ називається в цьому випадку *відстанню* або *метрикою* на множині M.

Наведемо приклади метричних просторів.

1. *Простір ізольованих точок.* Для елементів довільної множини X задамо відстань:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x=y,\\ 1, \text{ коли } x\ne y,\end{cases}$$

тоді (X,ρ) буде метричним простором.

2. *Простір* R^1. Множина дійсних чисел, у якій задано відстань:

$$\rho(x,y)=|x-y|,$$

утворює метричний простір, який позначають R^1.

3. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел: $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, відстань у якій задано такою формулою:

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},$$

називається *n-вимірним* арифметичним евклідовим простором R_2^n.

Доведемо, що це дійсно метричний простір, тобто що функція $\rho_2(x,y)$ є метрикою. Для цього необхідно перевірити всі аксіоми метрики.

Справедливість аксіом 1) і 2) для простору R^n очевидна. Покажемо, що в ньому виконується й аксіома трикутника.

Нехай $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...y_n)$, $z=(z_1,z_2,...z_n)$; тоді аксіома трикутника записується в такому вигляді:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}\,. \qquad (2.1)$$

Уведемо такі позначення: $x_i-z_i=a_i$, $z_i-y_i=b_i$. Тоді $x_i-y_i=a_i+b_i$, а нерівність (2.1) набуває при цьому такого вигляду:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\,.$$

Але це твердження відразу виходить з відомої нерівності Коші – Буняковского, тобто

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\,.$$

Дійсно, з огляду на цю нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}\right)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}+\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\right)^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\right)^2.$$

Отже, третя аксіома також виконується, а це означає, що функція $\rho_2(x,y)$ є метрикою.

4. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, відстань на якій задано такою формулою:

$$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

називається простором R_1^n.

5. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел: $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, відстань на якій задається такою формулою:

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{i=\overline{1,n}}|x_i-y_i|,$$

називається простором R_∞^n.

6. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел: $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, відстань на якій задано такою формулою:

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

називається простором R_p^n.

7. Множина послідовностей, складених із дійсних чисел, які задовольняють умову: $\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|<\infty$, коли метрику задано таким чином:

$$\rho(x,y)=\sup_i\left|x_i-y_i\right|,$$

утворює метричний простір l_1 *абсолютно збіжних послідовностей.*

8. Множина послідовностей, складених з дійсних чисел, які задовольняють умову: $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{\ 2}<\infty$, коли метрику задано в такий спосіб:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2},$$

утворює метричний простір l_2 послідовностей *підсумовуваних із квадратом.*

9. Простір l_p задається множиною послідовностей, складених з дійсних чисел, які задовольняють умову: $\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|^p<\infty,\ p\in N.$ Метрика в цьому просторі задається формулою:

$$\rho(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i-y_i\right|^p}.$$

Це простір послідовностей, підсумованих у степені p. Очевидно, що коли $p=1$, то простір l_p збігається з простором l_1, а якщо $p=2$ – із простором l_2.

10. Простір c збіжних послідовностей. Він має таку саму метрику, як і в прикладі 7.

11. Простір c_0 послідовностей, що прямують до 0 з тією самою метрикою.

12. Простір обмежених послідовностей m, з тією самою метрикою.

13. Нехай $F(T)$ – являє собою множину всіх обмежених функцій (дійсно- чи комплекснозначних) на множині T. Тут метрику можна задати в такий спосіб:

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in T}|f(x)-g(x)|.$$

14. Простір $C[a,b]$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Метрика цього простору задається такою формулою: $\rho(x,y)=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$.

15. Простір $C[a,b]$ абсолютно підсумованих на відрізку $[a,b]$ функцій описується такою метрикою: $\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$.

16. Простір $C^2_{[a,b]}$ інтегрованих з квадратом на відрізку $[a,b]$ функцій задається такою метрикою: $\rho(x,y)=\int_a^b(x(t)-y(t))^2dt$.

Отже, як видно з наведених прикладів, на одній і тій самій множині різні метрики визначають різні метричні простори.

Опишемо спосіб побудови нових метричних просторів за вже відомими.

Нехай (X,ρ) – метричний простір; $Y\subset X$. Запровадимо в множині Y відстань $\widetilde{\rho}$ такою умовою: $\forall x,y\in Y:\widetilde{\rho}(x,y)=\rho(x,y)$. Вочевидь, аксіоми метрики успадковуються для метрики $\widetilde{\rho}$. Отриманий простір $(Y,\widetilde{\rho})$ називається *підпростором* метричного простору (X,ρ). Кажуть, що метрика $\widetilde{\rho}$ індукована в простір Y метрикою ρ (при цьому $\widetilde{\rho}$ замінюють на букву ρ).

Наприклад, $C[a;b]$ – підпростір простору $F([a;b])$.

Зауважимо, що кожний метричний простір можна перетворити в топологічний простір, коли ввести відповідну метриці топологію (це буде доведено в наступному підпункті). Але зворотне твердження не буде правильним, тобто не для всякої топології можна визначити відповідну їй метрику.

2.2. Відкриті й замкнені множини у метричних просторах

Уведемо деякі поняття теорії метричних просторів, які вже застосовувалися в теорії топологічних просторів і будуть неодноразово використані у подальших розділах цього посібника.

Нехай (X,ρ) – метричний простір.

Відкритою кулею $B(a;r)$ назвемо множину точок $x\in X$, які задовольняють умову $\rho(a,x)<r$. Це можна записати таким чином:

$$B(a;r)=\{x\in X\mid \rho(a,x)<r\}.$$

Точка $a \in X$ називається центром цієї кулі, а число r – її радіусом.

Відкрита куля радіуса ε із центром у точці x_0 називається також *ε-околом* точки x_0 і позначається як $O_\varepsilon(x_0)$.

Наведемо приклади відкритих куль у різних метричних просторах.

1. $X = R$; метрика стандартна (див. п. 2.1, приклад 2). $B(a;r) = (a-r; a+r)$.

2. $X = R_2^2$; $\rho = \rho_2$ (див. п. 2.1, приклад 3). $B(0;1) = \left\{(x,y) \middle| \, x^2 + y^2 < 1\right\}$ – круг.

3. $X = R_1^2$; $\rho = \rho_1$ (див. п. 2.1, приклад 4). $B(0;1) = \{(x,y): |x| + |y| < 1\}$ – квадрат.

4. $X = [0;1]$; метрика ρ індукована стандартною метрикою в R. Тоді $B(0;0{,}5) = [0;0{,}5)$; $B(0;10) = [0;1]$.

Замкнутою кулею $B[a;r]$ назвемо множину точок $x \in X$, які задовольняють умову: $\rho(a,x) \le r$. Її можна записати таким чином:

$$B[a;r] = \{x \in X \,|\, \rho(a,x) \le r\}.$$

Множина $M \subset X$ буде *обмеженою*, якщо вона цілком міститься в деякій кулі.

Уведення поняття околу дає можливість описати відкриті й замкнені множини аналогічно тому, як це було зроблено для топологічних просторів.

Нехай A – підмножина в просторі X; елемент $a \in A$. Точка a називається *внутрішньою* точкою множини A, коли існує її ε-окіл, що цілком належить A.

Формально це можна записати так: $\exists\, \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subset A$.

Розглянемо деякі множини й точки в них.

1. $X = R$; $A = [0;1)$. Точка 0,5 – внутрішня для множини A; 0 не являє собою внутрішню точку.

2. $X = [0;1]$ (метрика індукована з простору R); множина $A = [0;1)$. Точка 0 також є внутрішньою.

3. $X = R$; $A = \{0;1\}$. Множина A не має внутрішніх точок.

4. $X = \{0;1;2\}$ – це підпростір метричного простору R; множина $A = \{0;1\}$, тоді кожна точка множини A є внутрішньою.

Множина $A \subset X$ метричного простору (X,ρ) називається *відкритою*, якщо кожна її точка – внутрішня.

Наведемо приклади відкритих множин.

1. $X = R$. $A_1 = (0;1)$ – відкрита; $A_2 = [0;1)$ не є відкритою.

2. $X = [0;1]$. A_1 та A_2 – відкриті.

3. $X = R$; $A \subset Z$. A не є відкритою.

4. $X = Z$; метрика індукована метрикою простору R. Тоді будь-яка підмножина в Z є відкритою.

Таким чином, можна зробити висновок: досліджуючи питання, чи є множина відкритою, слід звернути особливу увагу на те, який метричний простір розглядається.

Точка $x_0 \in X$ називається *граничною* (російською: *предельной*) для множини $A \subset X$, якщо в будь-якому околі цієї точки існує принаймні одна точка з множини A, яка відмінна від x_0.

Формально це можна записати так: $\forall\, \varepsilon > 0 : \left(B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

Розглянемо приклади множин і граничних точок у них.

1. $X = R$; $A = (0;1)$. Точки $\frac{1}{2}$, 0, 1 – граничні для множини A; точка $\frac{3}{2}$ не є граничною для A.

2. $X = R$; $A = \{0;1\}$. Множина A не має жодної граничної точки.

Точка x метричного простору X називається *точкою дотику* множини $M \subset X$, якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку множини M.

Сукупність усіх точок дотику позначається $[M]$ і називається *замиканням* множини M.

Теорема 2.2. Замикання множини має такі властивості:

1. $M \subset [M]$.
2. $[[M]] = [M]$.
3. Якщо $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$.
4. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доведення

Перша властивість очевидна, оскільки всяка точка, що належить множині M, є для неї точкою дотику і тому належить також множині $[M]$.

Доведемо другу властивість.

Нехай $x \in [[M]]$. Тоді в будь-якому околі $O_\varepsilon(x)$ цієї точки можна відшукати точку $x_1 \in [M]$. Задамо, що $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1)$, і розглянемо кулю $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Ця куля цілком міститься в кулі $O_\varepsilon(x)$. Дійсно, якщо $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) \leq \varepsilon_1$ і, враховуючи, що $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, з огляду на аксіому трикутника маємо:

$$\rho(z, x_1) \leq \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

тобто $z \in O_\varepsilon(x)$. Оскільки $x_1 \in [M]$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ знайдеться точка $x_2 \in M$. Але тоді $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Оскільки $O_\varepsilon(x)$ – довільний окіл точки x, то $x \in [M]$. Отже, другу властивість доведено.

Третя властивість очевидна. Доведемо четверту.

Якщо $x \in [M_1 \cup M_2]$, то x належить хоча б одній з множин $[M_1]$ або $[M_2]$, тобто

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Оскільки $M_1 \subset [M_1 \cup M_2]$ і $M_2 \subset [M_1 \cup M_2]$, то обернене включення випливає з властивості 3.

Теорему доведено.

Множина M метричного простору (X, ρ) називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням, тобто $M = [M]$.

Наведемо приклади замкнених множин у метричних просторах.

1. Будь-який відрізок $[a, b]$ числової прямої являє собою замкнену множину.

2. Замкнена куля являє собою замкнену множину.

3. Множина: $|f(t)| \leq K$, буде замкненою в просторі $C[a, b]$, а множина: $|f(t)| < K$, – відкритою.

4. Будь-яка множина, що складається із скінченного числа точок, замкнена.

5. $X = R$. $A_1 = [0; 1]$ – це замкнена множина; $A_2 = (0; 1)$ та $A_3 = [0; 1)$ – не замкнені множини.

6. $X = [0; 1)$. $A_2 = (0; 1)$ – це не замкнена множина; $A_3 = [0; 1)$ – замкнена.

7. $X = R$. $A = Z$. A – замкнена множина (оскільки вона взагалі не має граничних точок).

8. X, $\varnothing$ – замкнені підмножини в метричному просторі (X, ρ).

Розглянемо властивості відкритих і замкнених множин.

Теорема 2.3. Перетин будь-якої кількості й сума скінченного числа замкнених множин являє собою замкнену множину.

Доведення

Нехай F – перетин замкнених множин F_α, тобто $F = \bigcap F_\alpha$, x – гранична точка множини F. Це означає, що будь-який її окіл $O_\varepsilon(x)$ містить нескінченну кількість точок з множини F. Але тоді $O_\varepsilon(x)$ включає нескінченну кількість точок з кожної множини F_α, отже, оскільки всі F_α замкнені, точка x належить кожній з них, а значить належить і їх перетину. Таким чином, $x \in F = \bigcap F_\alpha$, тобто множина F замкнена.

Припустимо тепер, що F – сума скінченної кількості замкнених множин, тобто $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_\alpha$, і що точка x не належить множині F. Покажемо, що в цьому випадку x не може бути граничною точкою для F. Дійсно, x не належить жодній із замкнених множин F_i, отже, вона не буде граничною точкою для жодної з них. Звідси для кожного значення i можна знайти такий окіл $O_{\varepsilon_i}(x)$ точки x, що містить не більше скінченної кількості точок із множини F_i. Взявши з околів $O_{\varepsilon_1}(x)$, $O_{\varepsilon_2}(x)$, $\ldots O_{\varepsilon_n}(x)$ найменший, ми отримаємо окіл $O_\varepsilon(x)$, який містить не більше скінченної кількості точок множини F.

Отже, якщо точка x не належить множині F, то вона не може бути для неї граничною, тобто множина F – замкнена. Теорему доведено.

Теорема 2.4. Для того, щоб множина M була відкритою, необхідно й достатньо, щоб її доповнення $X \setminus M$ до всього простору X було замкненим.

Доведення

Нехай множина M відкрита. Треба довести, що множина: $\overline{M} = X \setminus M$, містить у собі всі свої граничні точки. Припускаємо протилежне: нехай існує точка $x_0 \in M$, яка є граничною для $\overline{M}$. Але x_0 – внутрішня для множини M, а тому має окіл, який не містить жодної точки множини $\overline{M}$, тому вона не може бути граничною для $\overline{M}$. Отримали суперечність.

Нехай тепер $\overline{M}$ – замкнена множина. Тоді кожна точка $x_0 \in M$ не може бути граничною для $\overline{M}$, тому вона є внутрішньою для множини M, отже, множина M – відкрита. Теорему доведено.

Теорема 2.5. Об’єднання довільної кількості відкритих множин U_α в просторі X являє собою відкриту множину. Перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Доведення

1. Нехай $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$. Коли точка $x \in U$, то це означає, що $x \in U_{\alpha_0}$ для якогось значення індекса α_0. Оскільки множина U_{α_0} відкрита, то існує число $\varepsilon > 0$, що забезпечує виконання умови: $B(x;\varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$, тобто множина U містить точку x разом із її ε-околом, а це означає, що вона відкрита.

2. Нехай $x \in V = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$. Тоді для будь-якого індекса $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ існує число $\varepsilon_k > 0$, яке забезпечує виконання умови: $B(a;\varepsilon_k) \subset U_k$. Отже, коли вибрати, що $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, то окіл $B(a;\varepsilon) \subset V$, тобто множина V відкрита.

Теорему доведено.

Оскільки порожня множина і весь простір X є доповненням одне одного, то вони одночасно являють собою і відкриті й замкнені множини.

Зауважимо, що твердження: “Множина A не відкрита, тому замкнена”, – абсурдне (контрприклад: $[0;1) \subset R$). Так само, абсурдним є твердження: “Множина A відкрита, а тому не замкнена” (контрприклад: $\varnothing$; $R \subset R$).

Легко бачити, що теореми 2.3 і 2.5 є наслідками одна одної.

Визначені вище відкриті множини задовольняють аксіоми топологічного простору (див. теорему 2.5), тому всілякий метричний простір буде також і топологічним простором, більш того, він буде також T_2-простором.

Твердження. Метричний простір є хаусдорфовим.

Доведення

Розглянемо дві довільні точки: $x \neq x_0$ метричного простору X. Виберемо додатне число ε таким чином: $\varepsilon < \dfrac{\rho(x, x_0)}{2}$, тоді внаслідок нерівності трикутника одержуємо, що відкриті кулі $B(x, \varepsilon)$ і $B(x_0, \varepsilon)$ не перетинаються, тобто дві довільні точки мають неперетинні околи, а це означає, що простір є хаусдорфовим.

2.3. Відкриті й замкнені множини на прямій

Структура відкритих і замкнених множин в довільному метричному просторі може бути досить складною, однак в одновимірному випадку, тобто на прямій, можна без труднощів зробити вичерпний опис усіх відкритих (а значить і замкнених) множин.

Теорема 2.6. Будь-яка відкрита множина на числовій прямій являє собою суму скінченної або лічильної кількості неперетинних інтервалів.

Доведення

Нехай G – відкрита множина на числовій прямій. Уведемо для точок множини G відношення еквівалентності таким чином: будемо вважати точки x та y еквівалентними ($x \sim y$), якщо існує інтервал (α, β), який містить обидві ці точки: $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$. Вочевидь, це відношення рефлексивне й симетричне, воно також є транзитивним, оскільки коли $x \sim y$ й $y \sim z$, то існують інтервали (α, β) й (γ, δ), які задовольняють такі умови включення:

$$x, y \in (\alpha, \beta) \subset G \quad \text{й} \quad y, z \in (\gamma, \delta) \subset G.$$

Тоді $\gamma < \beta$ й інтервал (α, δ) цілком належить множині G і містить точки x та z.

Зауважимо, що всіляке визначене на множині відношення еквівалентності задає деяке розбиття цієї множини на неперетинні підмножини – класи еквівалентності. Отже, множина G розпадається на неперетинні класи I_τ еквівалентних між собою точок, тобто

$$G = \bigcup I_\tau .$$

Доведемо, що кожна множина I_τ являє собою деякий інтервал (a, b), причому $a = inf\ I_\tau$, $b = sup\ I_\tau$. Включення $I_\tau \subset (a, b)$ очевидне. З іншого боку, якщо $x, y \in I_\tau$, то за визначенням I_τ інтервал (x, y) міститься в I_τ. При цьому як завгодно близько від точки a праворуч і від точки b ліворуч знайдуться точки з множини I_τ. Тому I_τ містить будь-який інтервал (a', b'), границі якого належать інтервалу (a, b), звідси $I_\tau = (a, b)$.

Доведемо тепер, що система таких інтервалів не більше ніж лічильна. Для цього виберемо довільно в кожному з них раціональну точку (це завжди можна зробити, оскільки множина раціональних точок всюди щільна на числовій прямій). Тим самим ми встановимо взаємно-однозначну відповідність між цими інтервалами і деякою підмножиною множини раціональних чисел. Оскільки множина раціональних чисел лічильна, то множина інтервалів також буде не більше ніж лічильною.

Теорему доведено.

Враховуючи той факт, що замкнені множини являють собою доповнення відкритих, з цієї теореми випливає, що кожна замкнена множина на числовій прямій утворюється викиданням із неї не більше як лічильної кількості інтервалів. Наприклад, множина $(0;1)$ – відкрита, а $R\setminus(0;1)=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ – замкнена. Дуже цікавим прикладом замкненої множини на числовій прямій є *канторова множина.*

Ця множина будується таким чином: візьмемо відрізок $[0;1]$ і позначимо його через F_0. Вилучимо з нього інтервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Множина, яка залишається: $F_1=\left[0;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};1\right]$, буде замкненою (згідно з доведеною вище теоремою). Тепер вилучимо із неї множини $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ та $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ і таким чином отримуємо множину F_2 (вона буде складатися вже з чотирьох відрізків і також буде замкненою) і т. д. На k-му кроці ми отримуємо замкнену множину F_k.

Позначимо, що

$$F=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n.$$

Множина F замкнена, оскільки є наслідком вилучення з відрізка $[0;1]$ лічильної кількості інтервалів. Вона має у своєму складі точки

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\dots \qquad (*)$$

Вони являють собою кінці вилучених інтервалів, але згадана множина не вичерпується цими точками. Сумарна довжина вилучених інтервалів дорівнює одиниці, але потужність множини F – це континуум. Точки (*) утворюють в цій множині всюди щільну підмножину, а точки вигляду t_1+t_2, де $t_1,t_2\in F$, заповнюють весь проміжок $[0;2]$. Докладніше про властивості цієї множини можна дізнатися в літературі [1].

2.4. Збіжність у метричних просторах. Повні метричні простори

Нехай (M,ρ) – метричний простір. Послідовність $\{x_n\}$ *прямує* до точки x_0 простору *M*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$. Точка x_0 у цьому випадку називається *границею* послідовності $\{x_n\}$, а сама послідовність $\{x_n\}$ – *збіжною*. Цей факт можна записати таким чином: $x_n \to x_0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *фундаментальною* (збіжною у собі, послідовністю Коші), якщо для будь-якого додатного числа ε існує номер $N(\varepsilon)$, який забезпечує виконання умови: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, для всіх значень $m, n > N(\varepsilon)$.

Використовуючи терміни границь, це можна записати таким чином:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Якщо в просторі (M, ρ) кожна фундаментальна послідовність є збіжною, то такий простір називається *повним*.

У метричному просторі кожна збіжна послідовність є фундаментальною. Але зворотне твердження не буде правильним. Наприклад, нехай $X = (0;1) \subset R$ являючи собою підпростір R. Послідовність: $x_n = 1/n$, не має границі в просторі X (поясніть, чому), але вона фундаментальна за цим твердженням, бо має границю в просторі R.

Якщо метричний простір є повним, то має місце ознака збіжності Коші, сформульована таким чином: для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжною, необхідно й достатньо, щоб вона була збіжною у собі (фундаментальною).

Зауважимо, що при переході від простору X до його замкнутого підпростору X_0 властивість повноти зберігається.

Далі ми будемо використовувати доведену в курсі математичного аналізу теорему про повноту множини дійсних чисел, яку можна сформулювати таким чином:

Теорема 2.7. Множина дійсних чисел R із заданою на ній метрикою: $\rho(x, y) = |x - y|$, являє собою повний метричний простір.

Наведемо приклади повних просторів.

1. Усі простори R^n є повними. Це безпосередньо випливає з повноти простору R^1.

2. Простір $C[a,b]$ також є повним. Доведемо це.

Нехай $\{x_n\}$ – фундаментальна послідовність із $C[a,b]$. Це означає, що для кожного числа $\varepsilon > 0$, існує номер $N(\varepsilon)$, який забезпечує для всіх m, $n > N(\varepsilon)$ виконання такої умови:

$$\rho(x_m, x_n) = \sup_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon,$$

тобто для всіх значень $t \in [a,b]$ справедлива нерівність: $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$.

Отже, послідовність функцій $\{x_n(t)\}$ прямує до $x_0(t)$ рівномірно. У цьому випадку її границя – функція $x_0(t)$ – буде неперервною, тобто $x_0 \in C[a,b]$ і, відповідно, послідовність $\{x_n\}$ прямує в просторі $C[a,b]$ до точки x_0.

Нехай (X,ρ) – повний метричний простір, а $Y \subset X$. Тоді простір (Y,ρ) буде повним тоді й тільки тоді, коли множина Y замкнена в просторі X.

Зверніть увагу на цей факт! Його врахування дає змогу перевірити повноту багатьох метричних просторів.

Наприклад, $X_1 = [0;1]$, це повний метричний простір (множина X_1 замкнена у повному просторі R^1), $X_2 = (0;1]$ – неповний (множина X_2 незамкнена), Z – повний, оскільки множина Z замкнена в R.

Лема 2.1. Якщо фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ містить у собі збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, яка прямує до точки x, то вона також є збіжною, причому з тією самою границею, тобто $x_n \to x$.

Доведення

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ – фундаментальна, то для будь-якого додатного числа ε існує такий номер N, що відстань $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всіх $m,n > N$. Тоді для всякого номера $n_k > N$ також буде справедливою така нерівність:

$$\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon .$$

Враховуючи, що $x_{n_k} \to x$, й переходячи в останній нерівності до границі, коли $n_k \to \infty$, одержуємо, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, а це означає, що $x_n \to x$.

Теорема про вкладені кулі (критерій Кантора). Для того, щоб метричний простір R був повним, необхідно й достатньо, щоб у ньому всіляка послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непустий перетин.

Доведення

Необхідність. Нехай простір R повний і B_1, B_2, ... B_n ...– послідовність вкладених одна в одну замкнених куль. Позначимо через r_n радіус, а через x_n центр кулі B_n. Послідовність центрів куль $\{x_n\}$ фундаментальна, оскільки $\rho(x_n, x_m) < r_n$, коли $m > n$, а $r_n \to 0$, якщо $n \to \infty$. Простір R повний, тому кожна фундаментальна послідовність має границю, отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; тоді $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Дійсно, куля B_n містить усі точки послідовності $\{x_n\}$, за винятком, хіба що, точок x_1, ..., x_{n-1}. Таким чином, x для кожної кулі B_n буде точкою дотику . Але за припущеннями теореми B_n – замкнена множина, і тому вона містить у собі всі точки дотику, це означає, що $x \in B_n$ для всіх значень n і відповідно $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Отже, необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що $\{x_n\}$ – фундаментальна послідовність. Доведемо, що вона має границю. Враховуючи фундаментальність $\{x_n\}$, ми можемо вибрати таку точку x_{n_1} послідовності, що $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$, коли $n \geq n_1$.

Візьмемо точку x_{n_1} за центр замкненої кулі, радіус якої дорівнює 1. Позначимо цю кулю через B_1. Потім виберемо точку x_{n_2} послідовності $\{x_n\}$ таким чином, щоб виконувалася нерівність: $n_2 > n_1$ й $\rho\left(x_n, x_{n_2}\right) < \frac{1}{2^2}$, коли значення $n \geq n_2$. Приймемо точку x_{n_2} за центр кулі з радіусом $\frac{1}{2}$ і позначимо цю кулю через B_2. Взагалі, коли точки $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ вже обрано ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k$), то точку $x_{n_{k+1}}$ вибираємо таким чином, щоб $n_{k+1} > n_k$ й $\rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$, коли значення $n \geq n_{k+1}$, та оточуємо її замкненою кулею B_{k+1}, радіус якої $\frac{1}{2^k}$. Продовжуючи цю побудову, одержимо послідовність замкнених куль B_k, вкладених одна в одну, причому куля B_k матиме радіус $\frac{1}{2^{k-1}}$. Ця послідовність куль має, за припущенням теореми, спільну точку; позначимо її через x. Зрозуміло, що ця точка x буде границею підпослідовності $\left\{x_{n_k}\right\}$. Але, якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, яка прямує до точки x , то вона сама прямує до тієї ж самої границі. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ Теорему доведено.

Теорема Бера. Повний метричний простір R не може бути поданий у вигляді об'єднання лічильної кількості ніде не щільних множин.

Доведення

Припустимо протилежне. Нехай $R = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, де кожна з множин M_n ніде не щільна. Оберемо деяку замкнену кулю, радіус якої дорівнює 1, і позначимо її через S_0. Оскільки множина M_1 ніде не щільна, вона не щільна і в множині S_0, тому існує замкнена куля S_1 з радіусом, меншим від $\frac{1}{2}$, для якої справедливими будуть умови: $S_1 \subset S_0$ й $S_1 \bigcap M_1 = \varnothing$. Так само, оскільки множина M_2 не щільна в кулі S_1, то в цій кулі утримується замкнена куля S_2, радіус якої менший за $\frac{1}{3}$, причому $S_2 \bigcap M_2 = \varnothing$ і т. д. Ми одержуємо, таким чином, послідовність вкладених одна в одну замкнених куль $\{S_n\}$, радіуси яких прямують до нуля, причому $S_n \bigcap M_n = \varnothing$. За теоремою про вкладені кулі $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ містить деяку точку x. Але ця точка за побудовою не належить жодній із множин M_n, отже, $x \notin \bigcup\limits_{n} M_n$, тобто $R \neq \bigcup\limits_{n} M_n$, а це суперечить зробленому припущенню.

Таким чином, теорему доведено.

2.5. Поповнення метричного простору

Виявляється, що кожен неповний метричний простір можна вважати щільним підпростором деякого повного метричного простору, який задано у певному сенсі однозначно. Перейдемо до точних формулювань цих понять.

Метричні простори (X,ρ) та $(Y,\widetilde{\rho})$ називаються *ізометричними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $f:X\to Y$ на всю множину Y, при якому $\forall\, x, y\in X$ виконується така рівність: $\widetilde{\rho}(f(x), f(y))=\rho(x,y)$.

Відображення f при цьому називається *ізометрією*. Інакше кажучи, ізометрія – це відображення, яке зберігає відстань.

Наприклад, відображення $\operatorname{arctg}: R\to(-\pi/2;\,\pi/2)$, що діє за правилом: $x\to\operatorname{arctg}x$, є ізометрією між просторами $\left(R, \overset{\wedge}{\rho}\right)$ та $(-\pi/2;\pi/2)$ зі стандартною метрикою. Тут $\overset{\wedge}{\rho}(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$.

Перевірте самостійно той факт, що два ізометричні метричні простори або одночасно повні, або одночасно неповні.

У теорії метричних просторів ізометрія відіграє ту саму роль, що ізоморфізм в алгебрі; ізометричні простори мають однакові властивості, а тому їх прийнято ототожнювати.

Припустимо, що R – метричний простір. Повний метричний простір R^* називається *поповненням* простору R, якщо:

1. R являє собою підпростір простору R^*.

2. R усюди щільний у просторі R^*, тобто $[R]=R^*$. Тут $[R]$ означає замикання простору R в R^*.

Наприклад, $Y=[0;1]$, це поповнення простору: $X=(0;1)$; $Y=R$, це поповнення простору: $X=Q$.

Теорема (про поповнення простору). Кожен метричний простір R має поповнення, і це поповнення єдине з точністю до ізометрії, яка залишає нерухомими точки, що належать простору R.

Доведення

Доведемо спочатку, що поповнення простору єдине. Для цього нам потрібно довести, що коли R^* й R^{**} – два поповнення простору R, то існує взаємно однозначне відображення φ простору R^* на R^{**}, що задовольняє такі умови:

1. $\varphi(x)=x,\ \forall\ x\in R$;

2. якщо $x^{**}=\varphi(x^*)$ і $y^{**}=\varphi(y^*)$, то $\rho_1(x^*, y^*)=\rho_2(x^{**}, y^{**})$, де ρ_1 – відстань у просторі R^*, а ρ_2 – відстань в R^{**}.

Відображення φ визначимо описаним нижче способом. Нехай x^* – довільна точка з простору R^*. Тоді, за визначенням поповнення, існує послідовність $\{x_n\}$ точок простору R, яка прямує до x^*. Точки послідовності $\{x_n\}$ також належать і простору R^{**}. Оскільки простір R^{**} повний, то послідовність

$\{x_n\}$ прямує в ньому до деякої точки x^{**}. Зрозуміло, що точка x^{**} не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$, яка прямує до точки x^{*}. Задамо, що $\varphi(x^{*}) = x^{**}$. Відображення φ і буде шуканим ізометричним відображенням простору R^{*} на R^{**}.

Дійсно, за побудовою $\varphi(x) = x$ для всіх елементів $x \in R$.

Далі, нехай

$$x_n \to x^{*} \text{ в } R^{*} \text{ й } x_n \to x^{**} \text{ в } R^{**},$$
$$y_n \to y^{*} \text{ в } R^{*} \text{ й } y_n \to y^{**} \text{ в } R^{**};$$

тоді в силу неперервності відстані

$$\rho_1(x^{*}, y^{*}) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

і аналогічно

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Отже,

$$\rho_1(x^{*}, y^{*}) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Доведемо тепер існування поповнення. Ідея цього доведення така сама, що й у канторовій теорії дійсних чисел.

Нехай R – довільний метричний простір. Назвемо дві фундаментальні послідовності $\{x_n\}$ й $\{x'_n\}$ із R *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$. Еквівалентність послідовностей позначається таким чином: $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$.

Зауважимо, що назва “еквівалентність” виправдана, оскільки це відношення рефлексивне, симетричне й транзитивне. Після введення відношення еквівалентності множина всіх фундаментальних послідовностей, які можна скласти із точок простору R, розпадається на класи еквівалентних між собою послідовностей.

Визначимо тепер простір R^{*}. За його точки ми приймемо всілякі класи еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей, а відстань між ними задамо описаним нижче способом.

Нехай x^{*} й y^{*} – два класи еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей. Виберемо в кожному із цих класів по одному представнику: $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, кожен з яких являє собою фундаментальну послідовність, і задамо відстань за таким правилом:

$$\rho(x^{*}, y^{*}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \qquad (2.2)$$

Доведемо коректність цього визначення відстані, тобто доведемо, що границя в рівності (2.2) існує й не залежить від вибору представників $\{x_n)\in x^{*}$ та $\{y_n\} \in y^{*}$.

З огляду на таку нерівність (вона має назву *нерівність чотирикутника*):

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m), \qquad (2.3)$$

і фундаментальність послідовностей $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, робимо висновок, що для всіх досить великих значень n й m буде справедливою нерівність:

$$| \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) | < \varepsilon.$$

Таким чином, послідовність дійсних чисел: $s_n = \rho(x_n, y_n)$, задовольняє критерій Коші, отже, має границю. Ця границя не залежить від вибору послідовностей $\{x_n\} \in x^*$ й $\{y_n\} \in y^*$. Дійсно, нехай $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \in x^*$ й $\{y_n\}$, $\{y'_n\} \in y^*$.

Міркування, аналогічні нерівності (2.3), дають такі співвідношення:

$$| \rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n) | \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Оскільки $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ і $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Доведемо, що в просторі R^* справедливими будуть аксіоми метричного простору.

Перша аксіома безпосередньо випливає із визначення еквівалентності фундаментальних послідовностей.

Друга аксіома очевидна.

Перевіримо аксіому трикутника. Оскільки у вихідному просторі R аксіома трикутника виконується, то

$$\rho(x_n, z_n) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Переходячи до границі, коли $n_k \to \infty$, одержуємо, таке співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

тобто

$$\rho(x^*, z^*) \le \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Доведемо тепер, що R можна розглядати як підпростір простору R^*.

Кожній точці $x \in R$ відповідає деякий клас еквівалентних фундаментальних послідовностей, зокрема сукупність усіх послідовностей, що прямують до точки x. Цей клас не порожній, оскільки він містить стаціонарну послідовність, усі члени якої дорівнюють x. При цьому, якщо $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ й $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то $\rho(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.

Отже, поставивши у відповідність кожній точці $x \in R$ клас x^* фундаментальних послідовностей, які прямують до неї, ми ізометрично відобразимо простір R у простір R^*. Тому надалі ми можемо не розрізняти сам простір R і його образ у просторі R^* і розглядати R як підпростір в R^*.

Покажемо тепер, що простір R всюди щільний в R^*. Дійсно, нехай x^* – деяка точка із простору R^*, візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Виберемо в класі

x^* представника, тобто деяку фундаментальну послідовність $\{x_n\}$. Нехай число N забезпечує виконання умови: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, коли $m, n > N$, тоді $\rho(x_n, x^*) = \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \le \varepsilon$, якщо $n > N$, тобто довільний окіл точки x^* містить деяку точку з множини R. Таким чином, замиканням простору R в R^* буде весь простір R^*.

Залишається довести повноту простору R^*. Зауважимо, насамперед, що за його побудовою будь-яка фундаментальна послідовність x_1, ..., x_n, ... точок з простору R прямує в просторі R^* до деякої точки $x^* \in R^*$, що зумовлена самою цією послідовністю. Далі, оскільки простір R щільний у просторі R^*, то для будь-якої фундаментальної послідовності x_1^*, ..., x_n^*, ... точок з R^* можна побудувати еквівалентну їй послідовність x_1, ... , x_n, ... точок з R. Для цього достатньо за x_n взяти будь-яку точку з простору R, що відповідає умові: $\rho(x_n, x_n^*) < 1/n$. Побудована послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна в просторі R і за визначенням прямує до деякої точки $x^* \in R^*$. Але тоді до x^* прямує й послідовність $\{x_n^*\}$. Теорему доведено.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення метричного простору.
2. Наведіть приклади метричних просторів.
3. Дайте визначення відкритих і замкнених множин у метричному просторі.
4. Доведіть властивості операції замикання множин.
5. Опишіть множину Кантора та її властивості.
6. Яка послідовність називається збіжною? Дайте визначення збіжної послідовності, використовуючи поняття відстані, околів.
7. Сформулюйте й доведіть властивості границі послідовності.
8. Сформулюйте й доведіть теорему про точку дотику множини.
9. Сформулюйте й доведіть теорему про граничну точку множини.
10. Дайте визначення щільної множини в метричних просторах.
11. Які простори називаються сепарабельними? Наведіть приклади сепарабельних просторів.
12. Що являють собою відкриті й замкнені множини в метричних просторах. Опишіть властивості замкнених множин (теорема).
13. Сформулюйте й доведіть теорему про структуру відкритої множини на прямій.
14. Які метричні простори називаються повними?
15. Які послідовності називають фундаментальними?
16. Дайте визначення фундаментальної послідовності, використовуючи поняття відстані, поняття границі .

17. Сформулюйте й доведіть властивості фундаментальної послідовності.

18. Що називають поповненням простору?

19. Які властивості повинно мати поповнення простору?

20. Яке відображення називають ізометрією?

21. Які простори називають ізометричними?

22. Наведіть приклади ізометричних просторів.

23. Сформулюйте й доведіть теорему про існування поповнення простору.

24. Сформулюйте й доведіть теорему про вкладені кулі.

25. Сформулюйте й доведіть теорему Бера.

26. Які з перелічених нижче функцій $\rho(x,y)$ встановлюють відстань на множині R^4? Тут $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$.

а) $\rho(x,y)=\max\limits_{k=\overline{1,4}}|x_k-y_k|$; *б)* $\rho(x,y)=\max\limits_{k=\overline{1,4}}k\cdot|x_k-y_k|^{1/8}$;

в) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{4}|x_k-y_k|$; *г)* $\rho(x,y)=\max\limits_{k=\overline{1,4}}\dfrac{|x_k-y_k|^{1/8}}{1+|x_k-y_k|^{1/8}}$;

д) $\rho(x,y)=\left\{\sum\limits_{k=1}^{4}(x_k-y_k)^2\right\}^{1/2}$; *е)* $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+\max\limits_{k=\overline{1,4}}\left(\dfrac{1}{k}\cdot|x_k-y_k|^{1/2}\right)$;

ж) $\rho(x,y)=\max\limits_{k=\overline{1,4}}|x_k-y_k|^{1/2}$; *и)* $\rho(x,y)=\dfrac{|x_1-y_1|}{1+|x_1-y_1|}+\sum\limits_{k=2}^{4}k^2\cdot|x_k^3-y_k^3|$;

к) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{4}|x_k-y_k|^{1/k}$.

27. Припустимо, що $x=x(t)$, $y=y(t)$ і вони являють собою неперервно-диференційовні на відрізку $[0;1]$ функції. Які із наведених нижче функцій $\rho(x,y)$ визначають відстань на множині $C^1[0;1]$ усіх неперервно-диференційованих на відрізку $[0;1]$ функцій?

а) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$;

б) $\rho(x,y)=\int\limits_0^1|x(t)-y(t)|dt$;

в) $\rho(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|$;

г) $\rho(x,y)=\max\{\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|,\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\}$;

д) $\rho(x,y) = \max\limits_{0 \le t \le 0.5} |x(t) - y(t)|$;

е) $\rho(x,y) = \sup\limits_{0 < t < 1} |x(t) - y(t)|$.

28. Нехай $x = (1,2,3,4)$, $y = (-1,5,7,0)$. Обчислити відстань $\rho(x,y)$ в кожному із метричних просторів завдання 26, *а – к* відповідно.

29. Візьмемо такі функції: $x(t) = t^3, y(t) = 0$. Обчислити відстань $\rho(x,y)$ в кожному із просторів завдання 27, *а – г*. Накреслити графіки функцій $x(t)$ та $y(t)$ і дати геометричне тлумачення відстані $\rho(x,y)$ у випадках *а*) і *б*).

30. Показати, що коли $\alpha = \frac{3}{2}$, 2, 3, то нерівність: $(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha$, має місце не для всіх додатних значень a, b.

31. Довести, що в довільному просторі $(X;\rho)$ справедливі такі нерівності:

а) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y), \forall x,y,z \in X$ (друга нерівність трикутника);

б) $|\rho(x,z) - \rho(y,u)| \le \rho(x,y) + \rho(z,u), \forall x,y,z,u \in X$ (нерівність чотирикутника).

32. Нехай на прямій R відстань визначається за такою формулою:

$$\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}}, \quad (\forall x, y \in R).$$

Перевірити, що функція $\rho(x,y)$ дійсно є метрикою.

33. Чи є метричним простором множина двовимірних векторів, коли припустити, що $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$?

34. Показати, що на множині N натуральних чисел такі функції:

а) $\rho(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$; *б)* $\rho(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \ne n, \end{cases}$

визначають метрику.

35. Нехай X являє собою множину всіх точок кола з радіусом R і з центром у початку координат. Візьмемо за відстань між двома точками цього кола довжину найкоротшої дуги, яка їх з′єднує. Чи буде X метричним простором?

36. Припустимо, що $f(x)$ – подвійно неперервно диференційована на множині R^+ функція, яка задовольняє такі умови: *а*) $f(0) = 0$ та $f(x) > 0$, якщо

$x > 0$; *б*) $f(x)$ не спадає; *в*) $f'(x) \le 0$, коли $x > 0$. Довести, що формула: $\rho(x,y) = f(|x-y|)$, визначає метрику в множині R.

37. На множині: $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, задамо такі функції: $\rho_1(x,y) = |x-y|$ та $\rho_2(x,y) = |\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y|$. Довести, еквівалентність метрик ρ_1 та ρ_2.

38. Перевірте, що куля: $B(a;r) = \{x \mid \mathrm{\rho}(a,x) < r\}$ є відкритою множиною, а множина: $B[a;r] = \{x \mid \mathrm{\rho}(a;x) \le r\}$ – замкненою.

39. Чи може куля з радіусом 4 бути власною підмножиною кулі, що має радіус 3?

40. Довести, що коли куля з радіусом 7 міститься в кулі, радіус якої 3, то вони збігаються.

41. Нехай функція $\rho(x,y)$ являє собою метрику на множині X. Довести, що функції:

а) $\rho_1(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, *б*) $\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}$,

також є метриками на цій множині, причому топології, породжені метриками ρ, ρ_1, ρ_2, збігаються.

42. Доведіть, що замкненість множини A в просторі X еквівалентна умові: $(x_n \in A; x_n \to x_0) \Rightarrow (x_0 \in A)$.

43. Доведіть, що замикання множини A є найменшою замкненою множиною, яка містить множину A.

44. Доведіть, що $[A \cup B] = [A] \cup [B]$; $[A \cap B] \subset [A] \cap [B]$.

45. Доведіть, що A замкнена тоді й тільки тоді, коли $A = [A]$.

46. Чи завжди в метричному просторі замикання відкритої кулі $B(a;r)$ дорівнює замкненій кулі $B[a;r]$?

47. Доведіть, що такі дві умови еквівалентні:

а) множина A щільна в множині X;

б) для всіх елементів $x \in X$ існує послідовність $x_n \in A$, яка прямує до x.

48. Доведіть, що простір R^n – сепарабельний.

49. Доведіть, що множина всіх числових послідовностей, у яких тільки скінченна кількість членів не дорівнює нулю, щільна в просторі l_2.

50. Чи є простір l_2 (l_p , $p \ge 1$) сепарабельним?

51. Доведіть, що простір $C[a;b]$ – сепарабельний.

Вказівка: застосувати теорему Вейєрштрасса про наближення многочленом неперервної на відрізку функції.

52. Довести, що простір l_∞ не є сепарабельним.

53. Довести, що підпростір сепарабельного метричного простору також сепарабельний.

54. Доведіть, що два ізометричні метричні простори або одночасно повні, або одночасно неповні.

55. Нехай (Y,ρ) – повний підпростір метричного простору (X,ρ). Доведіть, що Y – замкнена підмножина в просторі X.

56. Нехай (X,ρ) – повний метричний простір, а $A\subset X$. Тоді поповнення простору (A,ρ) ізометричне простору $([A],\rho)$, тобто його замиканню.

57. Доведіть, що на множині: $X=(-\pi;\pi)$, можна запровадити метрику за допомогою такої формули: $\rho(x,y)=\sin|(x-y)/2|$. Чи буде цей метричний простір повним? Знайти поповнення простору $(X,\ \rho)$.

§ 3. Принцип стискальних відображень і його застосування

3.1. Неперервні відображення

Нехай $(X,\ \rho)$ та $(Y,\tilde{\rho})$ – метричні простори. Відображення $f:X\to Y$, називається *неперервним у точці* x_0, якщо з умови: $x_n\to x_0$ у просторі X, випливає, що $f(x_n)\to f(x_0)$ у просторі Y. Відображення f називається *неперервним* на множині X, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0\in X$.

Коли $Y=R_2^n$ і задано стандартну метрику $(\rho=\rho_2)$, домовимося називати відображення (вектор) функцією (у широкому розумінні поняття “функція” та “відображення” синонімічні). Такі функції $f,g:X\to R^n$ можна додавати, множити на числа, а коли $n=1$, то й перемножувати. Названі операції запроваджуються поточково. До того ж, якщо функції f та g неперервні в точці $x_0\in X$, то їх сума $f+g$; множення на число αf; а якщо $n=1$, то й добуток $f\cdot g$, також неперервні в точці $x_0\in X$ (перевірте це самостійно).

Теорема 3.1. Відображення $f:X\to Y$ неперервне на множині X в тому й тільки в тому разі, якщо для кожної замкненої в просторі Y множини A її повний прообраз: $f^{-1}(A)=\{x\in X|\ f(x)\in A\}$, буде замкненим у просторі X.

Доведення

Необхідність. Нехай відображення f неперервне у просторі X, а множина A замкнена в просторі Y. Слід перевірити, що множина $f^{-1}(A)$ замкнена в просторі X. Для цього достатньо упевнитись у справедливості такої умови:

$$\left(x_n\in f^{-1}(A);x_n\to x_0\right)\Rightarrow\left(x_0\in f^{-1}(A)\right).$$

Тобто, якщо послідовність $\{x_n\}$ прямує до точки x_0, а всі її члени (окрім, можливо, скінченної їх кількості) належать множині $f^{-1}(A)$, то точка x_0 також належатиме цій множині. Але $\left(x_n \in f^{-1}(A)\right) \Leftrightarrow \left(f(x_n) \in A\right)$, а зі збіжності $x_n \to x_0$ та з неперервності відображення f випливає, що $f(x_n) \to f(x_0)$. Отже, враховуючи замкненість множини A, можна зробити висновок, що $f(x_0) \in A$, а це означає, що $x_0 \in f^{-1}(A)$.

Достатність. Припустимо тепер, що повний прообраз кожної замкненої в просторі Y множини A є замкненою множиною в просторі X. Перевіримо неперервність відображення f. Нехай $x_n \to x_0$. Тоді, якщо відображення f не є неперервним, тобто $f(x_n) \not\to f(x_0)$, то існує окіл $B(f(x_0); \varepsilon)$ точки $f(x_0)$, поза яким розташовано підпослідовність $\left\{f\left(x_{n_k}\right)\right\}$. Позначимо через A замикання множини $\left\{f\left(x_{n_k}\right)\right\}$, тоді $x_{n_k} \in f^{-1}(A)$, а $f(x_0) \notin A$, і тому $x_0 \notin f^{-1}(A)$. Але оскільки $x_{n_k} \to x_0$, то x_0 є граничною точкою для $f^{-1}(A)$, а це суперечить замкненості множини A. Теорему доведено.

Наслідок. Відображення $f : X \to Y$, неперервне на множині X в тому й тільки в тому разі, якщо для кожної відкритої множини $U \subset Y$ її повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в просторі X.

Доведення випливає з теореми 3.1, якщо застосувати тотожність: $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$, і теорему 2.4.

Нехай (X, ρ), $(Y, \widetilde{\rho})$ – метричні простори. Відображення $f : X \to Y$, називається *рівномірно неперервним*, якщо виконується така умова:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left(\forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta\right) \Rightarrow \left(\widetilde{\rho}\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon\right).$$

Відображення метричних просторів $f : X \to Y$, задовольняє *умову Ліпшица* з константою $C > 0$, якщо для всіх точок $x, y \in X$ буде справедливою така умова:

$$\widetilde{\rho}\left(f(x), f(y)\right) \le C\rho(x, y).$$

3.2. Принцип стискальних відображень

Ряд питань, пов'язаних з існуванням й одиничністю розв'язків рівнянь того чи іншого типу (наприклад, диференціальних), можна сформулювати у вигляді питання про існування й одиничність нерухомої точки деякого відображення відповідного метричного простору в себе. Серед різних критеріїв існування й одиничності нерухомої точки таких відображень одним з найпростіших, і в той же час найбільш важливим, є так званий *принцип стискальних відображень.*

Нехай R – метричний простір. Відображення A простору R у себе називається *стискальним відображенням*, або, коротше, *стисненням*, якщо існує число $0 < \alpha < 1$, яке забезпечує виконання нерівності:

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y), \tag{3.1}$$

для будь-яких двох точок $x, y \in R$.

Усяке стискальне відображення неперервне. Дійсно, коли $x_n \to x$, то з огляду на нерівність (3.1) $Ax_n \to Ax$.

Точка x називається *нерухомою точкою* відображення A, якщо $Ax = x$. Інакше кажучи, нерухомі точки – це розв'язки рівняння: $Ax = x$.

Теорема 3.2. (Принцип стискальних відображень). Усяке стискальне відображення, задане в повному метричному просторі R, має одну й тільки одну нерухому точку.

Доведення

Нехай x_0 – довільна точка простору R. Задамо, що $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2 x_0$ і т. д.; тобто $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ – фундаментальна. Дійсно, коли припустити для визначеності, що $m \ge n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho\left(A^n x_0, A^m x_0\right) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + ...$$

$$+ \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1}\} \le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Враховуючи, що $\alpha < 1$, при досить великому значенні n ця величина буде як завгодно малою, а це означає фундаментальність послідовності $\{x_n\}$. З огляду на повноту простору R, послідовність $\{x_n\}$, будучи фундаментальною, має границю. Припустимо, що $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Тоді в силу неперервності відображення A отримуємо такі співвідношення:

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, існування нерухомої точки доведено. Доведемо її одиничність.

Припустимо протилежне, тобто, що існує дві нерухомі точки x і у, тоді, вочевидь, для них будуть виконуватися такі рівності:

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

а нерівність (3.1) набуває такого вигляду:

$$\rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y).$$

Враховуючи, що $0 < \alpha < 1$, робимо такий висновок: $\rho(x, y) = 0$, тобто $x = y$. Теорему доведено.

3.3. Найпростіші застосування принципу стискальних відображень

Як вже було сказано вище, принцип стискальних відображень можна застосовувати для доведення теорем про існування й одиничність розв'язків рівнянь різних типів, які ми можемо звести до вигляду: $Ax = x$. Крім того, принцип стискальних відображень дозволяє не тільки довести існування й одиничність розв'язку, але й дає фактичний метод наближеного знаходження цього розв'язку (*метод послідовних наближень*). Розглянемо деякі прості приклади.

1. Нехай функція f визначена на відрізку $[a, b]$, задовольняє на ньому умову Ліпшиця:

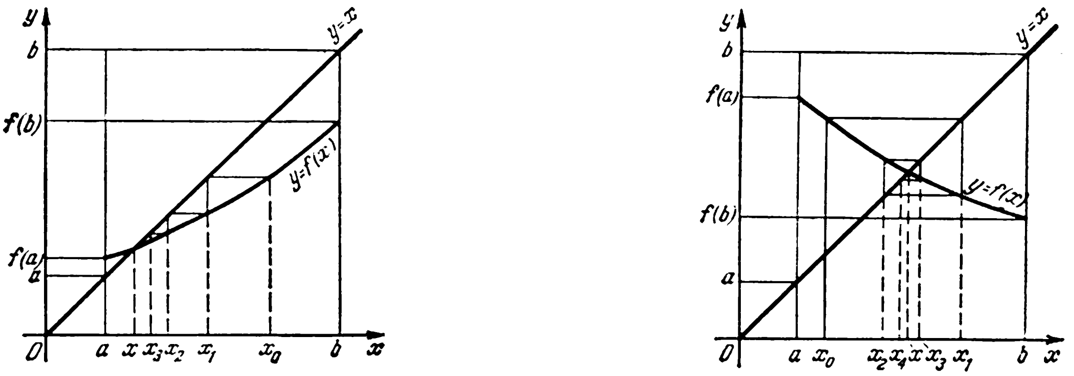
$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|,$$

із константою $K < 1$ і відображає відрізок $[a, b]$ в себе.

Тоді f є стискальним відображенням й, згідно з доведеною теоремою, послідовність x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, … прямує до єдиного кореня рівняння: $x = f(x)$.

Зокрема, умову стискальності буде виконано, якщо функція має на відрізку $[a, b]$ похідну $f'(x)$, причому $|f'(x)| \le K < 1$.

На рис. 3.1 зображений хід послідовних наближень у двох випадках, коли $0 < f'(x) < 1$ та якщо $-1 < f'(x) < 0$.



а *б*

Рис. 3.1. Хід послідовних наближень за таких умов: $0 < f'(x) < 1$ (*а*); $-1 < f'(x) < 0$ (*б*)

Нехай тепер будемо мати справу з рівнянням такого вигляду: $F(x) = 0$, причому $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ й $0 < K_1 < F'(x) \le K_2$ на $[a, b]$. Введемо функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$ і будемо шукати розв'язок рівняння: $x = f(x)$, рівносильного рівнянню: $F(x) = 0$, якщо $\lambda \ne 0$. Оскільки $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то

$$1-\lambda K_2 \leq f'(x) \leq 1-\lambda K_1,$$

і завжди можна підібрати таке число λ, щоб можна було діяти методом послідовних наближень. Це один із поширених методів пошуку кореня рівняння.

2. Розглянемо відображення A n-вимірного простору R^n в себе, яке задається такою системою лінійних рівнянь:

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + b_j, i = 1, \ldots n.$$

Якщо відображення A стискальне, то можна застосувати метод послідовних наближень для відшукування розв'язку рівняння: $x = Ax$.

З'ясуємо, за яких умов відображення A буде стисненням. Відповідь на це питання залежить від вибору метрики в просторі R^n. Розглянемо три її варіанти.

а) Простір R_∞^n.

Метрика в цьому випадку має такий вигляд: $\rho(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.

Оцінимо відстань між образами при відображенні A, а саме:

$$\rho(y', y'') = \max_i |y_i' - y''| = \max_i \left| \sum_j a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right) \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}||x_j' - x_j''| \leq$$

$$\leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j' - x_j''| = \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отже, умова стискальності буде мати такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

б) Простір R_1^n.

Цьому простору властива така метрика: $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

Обчислимо відстань між образами, а саме:

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j' - x_j''| \leq$$

$$\leq \left(\max_{j=1,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Умова стискальності набуває такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \le \alpha < 1, \quad j = 1, \ldots n. \tag{3.3}$$

в) Простір R_2^n. Метрика цього простору $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Запишемо відстань між образами, враховуючи нерівність Коші - Буняковского, а саме:

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x'_j - x''_j) \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'').$$

Тоді умова стискальності буде такою:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \le \alpha < 1. \tag{3.4}$$

Таким чином, якщо виконується хоча б одна з умов (3.2) – (3.4), то існує одна й тільки одна точка ($x_1, \ldots , x_n$) така, що справедливими будуть рівняння $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots n$, причому послідовні наближення до цього розв'язку мають такий вигляд:

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots , x_n^{(0)}\right),$$
$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ldots , x_n^{(1)}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots , x_n^{(k)}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

тут $x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$, а за початкове наближення: $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots , x_n^{(0)}\right)$, можна взяти будь-яку точку простору R^n.

Кожна з умов (3.2) – (3.4) достатня для того, щоб відображення: $y = Ax$, було стисненням. Коли йдеться про умови (3.2) й (3.3), то можна було б довести їх необхідність для того, щоб відображення: $y = Ax$, було стисненням (у сенсі їхніх метрик відповідно).

Але жодна з умов (3.2) – (3.4) не є необхідною для застосовності методу послідовних наближень.

Зауважимо також, що коли $\left|a_{ij}\right| < 1/n$ для всіх значень $i, j = 1, 2, \ldots n$, то всі три умови (3.2) – (3.4) буде виконано, а метод послідовних наближень сміливо можна застосовувати.

Якщо $\left|a_{ij}\right| \ge 1/n$ для всіх значень: $i, j = 1, 2, \ldots n$, то жодна з умов (3.2) – (3.4) не виконується.

3.4. Теореми про існування й одиничність розв'язків диференціальних рівнянь

У попередньому пункті було дано два найпростіших приклади застосування принципу стискальних відображень в одновимірному й в *n*-вимірному просторах. Однак найбільш істотним для аналізу буде застосування цього принципу в нескінченновимірних функціональних просторах. Зараз ми розглянемо, як за його допомогою можна довести теореми про існування й одиничність розв'язку деяких типів диференціальних й інтегральних рівнянь.

1. *Задача Коші*. Нехай дано диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3.5}$$

що має таку початкову умову: $y(x_0) = y_0,$ (3.6)

причому функція f визначена й неперервна в деякій плоскій області G, що містить точку (x_0, y_0), і задовольняє в цій області умову Ліпшиця за y, а саме:

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) \le M \,| y_1 - y_2 |.$$

Доведемо, що тоді на деякому сегменті: $| x - x_0 | \le d$, існує, причому тільки один, розв'язок: $y = \varphi\,(x)$, рівняння (3.5), який задовольняє початкову умову (3.6) (теорема Пікара).

Рівняння (3.5) разом з початковою умовою (3.6) еквівалентне такому інтегральному рівнянню:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt. \tag{3.7}$$

Враховуючи неперервність функції f, маємо, що $| f(x, y) | \le K$ в деякій області $G' \subset G$, котра містить точку (x_0, y_0). Підберемо значення $d > 0$ з огляду на виконання таких умов:

1. $(x, y) \in G'$, якщо $| x - x_0 | \le d, \; | y - y_0 | \le Kd$.

2. $Md < 1$.

Позначимо через C^* простір неперервних функцій φ, визначених на сегменті: $| x - x_0 | \le d$, які задовольняють умову: $| \varphi(x) - y_0 | \le Kd$. Метрику в цьому просторі задано такою формулою: $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{x} | \varphi_1(x) - \varphi_2(x) |$.

Простір C^* повний, оскільки він є замкненим підпростором повного простору всіх неперервних функцій на сегменті $[x_0 - d, x_0 + d]$. Розглянемо відображення: $\psi = A\varphi$, зумовлене такою формулою:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt,$$

де $| x - x_0 | \le d$.

Це відображення переводить повний простір C^* у самого себе і в ньому являє собою стиснення. Дійсно, нехай $\phi \in C^*$, $| x - x_0 | \ \le d$, тоді

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \right| \le Kd,$$

отже, $A\left(C^*\right) \subset C^*$.

Крім того,

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| dt \le Md \max_{x} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Оскільки $Md < 1$, то відображення A являє собою стиснення.

Звідси випливає, що рівняння $\varphi = A\varphi$, тобто (3.7), має один і тільки один розв'язок у просторі C^*.

2. *Задача Коші для системи рівнянь.*

Нехай дано систему диференціальних рівнянь:

$$\varphi'_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \ i = 1, \dots, n, \tag{3.8}$$

з такими початковими умовами:

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.9}$$

причому функції f_i визначені й неперервні в деякій області G простору R^{n+1}, яка містить точку $(x_0, y_{01}, \dots y_{0n})$, і задовольняють у ній умову Ліпшиця, тобто

$$\left| f_i\left(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}\right) - f_i\left(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}\right) \right| \le M \mathop{max}_{1 \le i \le n} | y_1^{(1)} - y_n^{(2)} | .$$

Доведемо, що тоді на деякому сегменті: $| x - x_0 | \le d$, існує один і тільки один розв'язок початкової задачі (3.8), (3.9), тобто існує одна й тільки одна система функцій φ_i, які задовольняють рівняння (3.8) та початкові умови (3.9).

Система (3.8) разом з початковими умовами (3.9) буде еквівалентною такій системі інтегральних рівнянь:

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))dt, \ \ i = 1, \dots, n. \tag{3.10}$$

У силу неперервності функції f_i будуть обмеженими в деякій області $G' \subset G$, яка містить точку $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n})$, тобто існує стале число K, що відповідає такій умові: $|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \le K.$

Підберемо величину: $d > 0$ з огляду на виконання таких умов:

1. $(x, y_1, \dots, y_n) \in G'$, якщо $|x - x_0| \le d, \quad |y - y_0| \le Kd \quad (i = 1, \dots, n)$;

2. $Md < 1$.

Тепер розглянемо простір C_n^*, елементами якого є набори з n функцій: $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, визначених і неперервних, коли $|x - x_0| \le d$, і таких, що відповідають умові: $|\varphi_0(x) - y_{0i}| \le Kd$. Визначимо метрику цього простору за такою формулою:

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{x,i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

Уведений простір буде повним, а відображення: $\psi = A\varphi$, задане системою рівностей:

$$\psi_i(x) = y_{oi} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) dt,$$

є стискальним відображенням повного простору C_n^* в себе.

Дійсно,

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f_i\left(t, \varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_n^{(1)}(t)\right) - f_i\left(t, \varphi_1^{(2)}(t), \dots, \varphi_n^{(2)}(t)\right) \right] dt,$$

отже, $\max_{x,i} \left|\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)\right| \le Md \max_{x,i} \left|\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)\right|.$

І, враховуючи, що $Md < 1$, відображення A є стискальним.

Звідси випливає, що операторне рівняння: $\varphi = A\varphi$, має один і тільки один розв'язок у просторі C_n^*.

3.5. Застосування принципу стискальних відображень до інтегральних рівнянь

1. *Рівняння Фредгольма.* Застосуємо тепер метод стискальних відображень для доведення існування й одиничності розв'язку неоднорідного лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, тобто

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x), \tag{3.11}$$

де K (так зване ядро) і φ – задані функції, f – шукана функція, а λ – довільний параметр.

Ми побачимо, що цей метод може бути застосований лише при досить малих значеннях параметра λ.

Припустимо, що $K(x, y)$ і $\varphi(x)$ неперервні, коли $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, отже, $| K(x, y) | \le M$. Розглянемо відображення: $g = Af$, повного простору $C\,[a, b]$ в себе, задане такою формулою:

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x),$$

тоді $\rho(g_1, g_2) = \max | g_1(x) - g_2(x) | \le | \lambda | M(b-a) \max | f_1(x) - f_2(x) |$.

Отже, якщо $\lambda < \dfrac{1}{M(b-a)}$, то відображення A є стискальним.

З принципу стискальних відображень випливає, що для всякого значення λ, яке відповідає умові: $| \lambda | < \dfrac{1}{M(b-a)}$, рівняння Фредгольма має єдиний неперервний розв'язок. Послідовні наближення до цього розв'язку $f_0, f_1 \ldots, f_n, \ldots$ мають такий вигляд:

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x),$$

де за початкове наближення $f_0\,(x)$ можна взяти будь-яку неперервну функцію.

2. *Нелінійні інтегральні рівняння.* Принцип стискальних відображень можна застосувати й до нелінійного інтегрального рівняння такого вигляду:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y)) dy + \varphi(x), \qquad (3.12)$$

де функції K й φ – неперервні, крім того, ядро K задовольняє умову Ліпшиця за своїм «функціональним» аргументом, тобто

$$| K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2) \le M \,| z_1 - z_2 |.$$

У цьому випадку для відображення: $g = Af$, повного простору $C\,[a, b]$ у себе, заданого такою формулою:

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x), \qquad (3.13)$$

має місце така нерівність:

$$\max | g_1(x) - g_2(x) | \le | \lambda | M(b-a) \max | f_1(x) - f_2(x) |,$$

тут $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Отже, якщо $| \lambda | < \dfrac{1}{M(b-a)}$, то відображення A буде стискальним.

3. *Рівняння Вольтерра.* Розглянемо, нарешті, інтегральне рівняння типу Вольтерра, тобто

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x) \tag{3.14}$$

Тут, на відміну від рівнянь Фредгольма, верхня межа в інтегралі являє собою змінну величину x. Формально це рівняння можна розглядати як окремий випадок рівняння Фредгольма, якщо довизначити функцію K такою рівністю: $K(x, y) = 0$, коли всі значення $y > x$.

Однак, маючи справу з інтегральним рівнянням Фредгольма, ми були змушені обмежитися малими значеннями параметра λ, а до рівнянь Вольтерра принцип стискальних відображень (і, відповідно, метод послідовних наближень) будемо застосовувати при всіх значеннях λ. Точніше, мова йде про узагальнення принципу стискальних відображень.

Нехай A – таке неперервне відображення повного метричного простору R в себе, що деякий його степінь: $B = A^n$, являє собою стиснення. Тоді рівняння:

$$Ax = x,$$

має один і тільки один розв'язок.

Дійсно, припустимо, що x – нерухома точка відображення B, тобто $Bx = x$. Оскільки відображення B стискальне, то $Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x,\ \ k \to \infty$, а тому послідовність $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0,\ ...$ для всякого елемента $x_0 \in R$ прямує до нерухомої точки x відображення B. Отже, $Ax = x$.

Ця нерухома точка – єдина, оскільки всяка точка, нерухома відносно відображення A, буде нерухомою також щодо стискального відображення A^n, для якого нерухома точка може бути тільки єдиною.

Покажемо тепер, що деякий степінь відображення:

$$Af(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x),$$

є стисненням. Нехай f_1 й f_2 – дві неперервні функції на відрізку $[a, b]$. Тоді

$$|Af_1(x)-Af_2(x)|=|\lambda|\left|\int_a^x K(x,y)(f_1(y)-f_2(y))dy\right|\le|\lambda|M(x-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Тут $M = \max |K(x, y)|$. Звідси

$$|A^2f_1(x)-A^2f_2(x)|=|\lambda|^2 M^2\frac{(x-a)^2}{2}\max|f_1(x)-f_2(x)|$$

і, взагалі,

$$|A^nf_1(x)-A^nf_2(x)|\le|\lambda|^n M^n\frac{(x-a)^n}{n!}m\le|\lambda|^n M^n m\frac{(x-a)^n}{n!},$$

тут $m=\max|f_1(x)-f_2(x)|$.

При будь-якому значенні параметра λ число n можна вибрати настільки великим, що

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Тоді відображення A^n буде стисненням. Отже, рівняння Вольтерра (3.14) при будь-якому значенні параметра λ має розв'язок і причому єдиний.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Які відображення називають стискальними?

2. Доведіть неперервність стискального відображення.

3. Яка точка називається нерухомою точкою відображення?

4. Сформулюйте й доведіть принцип стискальних відображень.

5. Довести, що будь-яке неперервне відображення відрізка в себе має нерухому точку.

6. Доведіть, що умову: $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$, $\alpha < 1$, не можна замінити більш слабкою умовою: $\rho(Ax, Ay) < \alpha\rho(x, y)$, $\alpha \le 1$.

7. Наведіть приклад застосування принципу стискальних відображень до розв'язування нелінійних рівнянь.

8. Наведіть приклад застосування принципу стискальних відображень до розв'язування систем лінійних рівнянь у просторах R_1^n, R_∞^n, R_2^n.

9. Наведіть приклад застосування стискальних відображень до розв'язування задачі Коші.

10. Доведіть, що неперервність відображення f у точці x_0 еквівалентна такій умові: для будь якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх елементів $x \in X$, які задовольняють нерівність: $\rho(x, x_0) < \delta$, також буде справедливою нерівність: $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

11. Нехай X, Y, Z – метричні простори; $f : X \to Y$; $g : Y \to Z$; причому відображення f неперервне в точці $x_0 \in X$; а відображення g – у точці $f(x_0) \in Y$. Доведіть, що відображення $g \circ f : X \to Z$ неперервне в точці $x_0 \in X$.

12. Нехай (X, ρ) – метричний простір, а $x_0 \in X$. Доведіть неперервність функції: $f(x) = \rho(x, x_0)$, у просторі X.

13. Доведіть, що функція: $x \to \|x\|$, неперервна на нормованому просторі, функція: $x \to (x, x_0)$, – на евклідовому.

14. Виявити, при яких значеннях параметра λ оператор: $(Ax)(t) = \lambda \int\limits_0^1 A(t,\tau)x(\tau)d\tau$, буде стискальним у просторі $C[0;1]$, коли функція $A(t,\tau)$ $(0 \le t, \tau \le 1)$ (ядро оператора) має такий вигляд:

а) $A(t,\tau) = \begin{cases} \sqrt{t-\tau}, & \text{коли } \tau < \text{t}, \\ 0, & \text{коли } \tau > t; \end{cases}$

б) $A(t,\tau) = \begin{cases} \sin(t-2\tau), & \text{коли } \tau < t, \\ 0, & \text{коли } \tau > t; \end{cases}$

в) $A(t,\tau) = |1-2\tau|\sin t$;

г) $A(t,\tau) = \tau \sin^2(\pi t)$;

д) $A(t,\tau) = t\left[\exp(t\tau) - \frac{1}{2}\right]$;

е) $A(t,\tau) = t \cdot \operatorname{ch}\tau$;

ж) $A(t,\tau) = \sin(t-2\tau)$;

и) $A(t,\tau) = (t^2+\tau)\cos\tau$;

к) $A(t,\tau) = (t-\tau)^2$;

л) $A(t,\tau) = \sin(t\tau)$;

м) $A(t,\tau) = (t-\tau)^5$;

н) $A(t,\tau) = t+\tau$.

п) $A(t,\tau) = t^2 - \tau^2$;

15. З′ясувати, при яких значеннях параметра λ відповідні оператори A із завдання 14, *а – п* будуть стискальними в просторі $L[0;1]$.

16. Встановити, при яких значеннях параметра λ відповідні оператори A із завдання 14, *а – п* будуть стискальними в просторі $L^2[0;1]$.

17. З′ясувати, при яких значеннях параметра λ оператор A такого вигляду:

$$Ax = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 0{,}5 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}06 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

є стискальним у просторах із завдання 26 (§ 2), *а – г* відповідно.

18. Нехай оператор A визначено відповідно до завдання 14, *а – п*. Довести, що при досить малих значеннях параметра λ рівняння: $x - Ax = \sin t$, має єдиний диференційований розв'язок.

19. Доведіть, що неперервна функція f, визначена на відрізку $[0;1]$, яка задовольняє такі нерівності: $0 < f(x) < 1$ та $|f(x) - f(y)| < |x-y|$, має єдину нерухому точку.

20. Перевірити, чи буде відображення: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$, стискальним на відрізку $[1;2]$.

21. Дано диференційовану на відрізку $[0;1]$ функцію f, причому $0\le f(x)\le 1,\quad 0\le f'(x)\le \dfrac{1}{2}$. Чи має розв'язок таке рівняння: $f(x)-x=0$?

22. Нехай $F(x)$ – функція, неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку в околі точки $(0;0)$, при цьому $F(0;0)=0$, $F'_y(0;0)\ne 0$. За допомогою принципу нерухомої точки довести, що при всіх достатньо малих значеннях $|x|$ рівняння: $F(x,y)=0$, має єдиний розв'язок: $y=y(x)$, який тотожно задовольняє це рівняння та перетворюється на нуль, коли $x=0$.

23. Довести, що коли неперервно диференційована функція $f:R\to R$, задовольняє умову: $0<c<f'(x)<d<+\infty$, то рівняння: $f(x)=0$, має єдиний розв'язок.

Вказівка. Розглянути відображення $A:x\to\left(x-\dfrac{1}{d}f(x)\right)$.

24. Методом послідовних наближень розв'язати такі рівняння:

а) $2x+\sin x=1$; *б*) $x^3+5x^2-15x-7=0$.

Вважати, що $x\in R$.

25. Довести, що існує неперервна на відрізку $[0;1]$ функція *x*, яка задовольняє таку рівність: $x(t)-e^{-x(t)}=\sin t$.

26. Для яких значень параметра λ принцип стискальних відображень можна застосовувати до рівняння Фредгольма другого роду: $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 t^2 s x(s)ds+t$, якщо воно визначене: *а*) у просторі $L^2[0;1]$; *б*) у просторі $C[0;1]$?

§ 4. Компактність у метричних просторах

У курсі математичного аналізу було доведено, що неперервні функції на обмежених замкнених множинах у просторі R^n мають багато властивостей (обмеженість, рівномірна неперервність, наявність найбільшого та найменшого значень). Відокремимо в загальних метричних просторах клас множин, які успадковують ці властивості.

Нехай (X,ρ) – метричний простір; $A \subset X$. Множина A називається *компактом*, коли будь-яка її нескінченна підмножина має граничну точку, що належить A, і *передкомпактом*, якщо будь-яка її нескінченна підмножина має граничну точку в просторі X (вона не обов'язково належить множині A).

Поняттям передкомпактності й компактності можна дати й інші визначення: підмножина A метричного простору (X,ρ) називається передкомпактом, якщо з будь-якої послідовності $\{x_n\} \subset A$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Якщо ж цю послідовність завжди можна вибрати так, щоб вона прямувала до точки множини A, то A називається компактом.

Доведіть еквівалентність цих визначень самостійно.

Зауважимо, що будь-яка обмежена множина в просторі R^n є передкомпактом (теорема Больцано – Вейєрштрасса), а обмежена замкнена множина в просторі R^n являє собою компакт.

Нехай $A \subset X$; $\varepsilon > 0$. Скінченна множина точок простору X: $C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називається *скінченною ε-сіткою* для множини A, якщо для кожної точки $x \in A$ існує точка $x_k \in C_\varepsilon$, що відповідає умові: $\rho(x, x_k) \le \varepsilon$, інакше кажучи, $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B[x_k;\varepsilon]$.

Наприклад, якщо множина $A = [0;1] \subset R$, то множини: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $\left\{\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right\}$; $\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{6}\right\}$ будуть для неї $1/2$-сітками.

Множина A метричного простору (X,ρ) називається *цілком обмеженою*, якщо вона має скінченну ε-сітку для кожного числа $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.1 (критерій Фреше – Хаусдорфа). Передкомпактна множина $A \subset X$ цілком обмежена. Навпаки: якщо метричний простір X повний і A – цілком обмежена множина в просторі X, то A являє собою передкомпакт.

Доведення

Нехай передкомпакт A не має скінченної ε-сітки для деякого додатного числа ε. Візьмемо точку $x_1 \in A$. Тоді існує точка $x_2 \in A$, що відповідає умові: $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$ (якщо ні, то $\{x_1\}$ – ε-сітка для множини A). Аналогічно можна довести, що існує точка x_3, для якої $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon$; $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$, і т. д. Таким чином, ми будуємо послідовність $\{x_n\}$, відповідну умові: $\rho(x_k, x_l) > \varepsilon$, для будь-яких значень $k \ne l$, а це означає, що жодна її підпослідовність не може збігатися.

Нехай тепер простір X повний; а множина A в ньому цілком обмежена; $\{a_n\}$ – послідовність точок із множини A. Якщо $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – 1-сітка для множини A, то всередині принаймні однієї з куль $B[x_k;1]$ міститься підпослідовність $\{a_{n_k}\}$. З тієї самої причини вона у свою чергу включає підпослідовність, що належить деякій кулі $B[y;1/2]$; підпослідовність цієї останньої послідовності перебуває всередині кулі, що має радіус $1/4$ і т. д. Це дає можливість утворити фундаментальну підпослідовність у послідовності $\{x_n\}$ (обміркуйте це твердження), яка є збіжною внаслідок повноти простору X. Теорему доведено.

Наслідок 1. Підмножина повного метричного простору є компактом тоді й тільки тоді, коли вона цілком обмежена та замкнена.

Підмножина в просторі R^n компактна в тому й тільки в тому разі, якщо вона обмежена та замкнена.

Сім'я відкритих множин $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ простору X називається (відкритим) *покриттям* множини A, якщо $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$.

Однією з основних у математичному аналізі є лема Гейне – Бореля, що формулюється таким чином:

З будь-якого покриття замкненого числового відрізка $[a;b]\subset R$ відкритими інтервалами можна вибрати скінченну сукупність інтервалів, яка також утворює покриття (скінченне підпокриття).

Природне узагальнення цього факту виглядає таким чином:

Теорема 4.2. Множина $A\subset X$ є компактом у тому й тільки в тому разі, якщо з будь-якого її відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття.

Доведення

Нехай спочатку множина A має зазначену в умові теореми властивість. Перевіримо її компактність. Припустимо протилежне: нехай $\{x_n\}$ – послідовність у множині A, яка не має часткових границь. Тоді кожна точка $a\in A$ має відкритий окіл U_a, що містить лише скінченну кількість членів послідовності. Множина околів $\{U_a\}_{a\in A}$ являє собою відкрите покриття множини A, отже, якщо за умовою $\{U_{a_1},\dots,U_{a_m}\}$ – це скінченне покриття множини A, то $\bigcup\limits_{k=1}^{m}U_{a_k}$ може містити лише скінченну кількість членів послідовності.

Навпаки: припустимо, що A – компакт і $\{U_\alpha\}$ – таке відкрите покриття множини A, з якого неможливо виділити скінченне підпокриття. Якщо $\{x_1,\dots,x_n\}$ – скінченна 1-сітка для множини A, то $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A\cap B[x_k;1])$ (до того ж можна вважати, що $x_k\in A$), і принаймні одну з множин: $A_k=A\cap B[x_k;1]$, неможливо покрити скінченною кількістю множин із $\{U_\alpha\}$. Множина A_k цілком обмежена, і тому для якогось елемента $y\in A_k$ множину $A_k\cap B[y;1/2]$ також не можна покрити скінченним набором множин $\{U_\alpha\}$. Продовження цієї процедури дає таку послідовність куль: $B_n=B[y_n;1/2^n]$, для якої $y_n\in B_{n-1}$; $y_n\in A$. Тоді $K_n=B_n\cap A$ – це замкнені кулі в множині A (множина A сама є метричним простором в індукованій метриці) з радіусами $1/2^n$ відповідно; причому центр кулі K_n належить кулі K_{n-1}. Коли радіуси цих куль подвоїти, то одержимо послідовність вкладених куль, що стягується (обміркуйте), яка через повноту компакту A і з огляду на критерій Кантора має спільну точку $a \in A$. Точка a належить принаймні одній із множин покриття U_{α_0}, до того ж разом зі своїм δ-околом V, бо множина U_{α_0} відкрита. Кулі K_n, радіуси яких менші за $\delta/2$, належать δ-околу V й можуть бути покриті лише однією множиною U_{α_0}, а це суперечить принципу, за яким їх було вибрано. Отже, теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай f – неперервне відображення компакту X в Y. Тоді $f(X)$ являє собою компакт у просторі Y.

Доведення

Візьмемо відкрите покриття $\{U_\alpha\}$ множини $f(X)$. Тоді $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ – це відкрите покриття множини X. Якщо $\{f^{-1}(U_1),\dots,f^{-1}(U_m)\}$ – його скінченне підпокриття, то $\{U_1,\dots,U_m\}$ являє собою скінченне підпокриття множини $f(X)$. Залишилося лише скористатися теоремою, і наслідок буде доведено.

Наслідок 2. Числова неперервна функція $f: X \to R$ на компакті X обмежена й набуває свого найбільшого та найменшого значень.

Доведення

Множина $f(X)$ є компактом, тому вона обмежена. Крім того, множина $f(X)$ замкнена, тому $\sup f(X) \in f(X); \inf f(X) \in f(X)$. Отже, наслідок доведено.

Теорема 4.3. Нехай $f: X \to Y$ неперервне відображення; X – компакт, тоді відображення f буде рівномірно неперервним.

Доведення

Припустимо протилежне: нехай існує таке число $\varepsilon > 0$, що для кожного числа $\delta > 0$ можна знайти точки $x, y \in X$, які відповідають умові: $\rho(x, y) < \delta$, але $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ ($\tilde{\rho}$ – метрика в просторі Y).

Утворимо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ у множині X, що задовольняють умову: $\rho(x_n, y_n) < 1/n$, але $\tilde{\rho}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Виберемо з них збіжні підпослідовності $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$, які повинні мати однакову границю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n = x_0$. З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y'_n)$ (обґрунтуйте це самостійно), що суперечить неперервності відображення f.

Теорему доведено.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Яку множину називають компактом? Передкомпактом?
2. Дайте визначення ε-сітки.
3. Яку множину називають цілком обмеженою?
4. Сформулюйте й доведіть критерій Фреше – Хаусдорфа.
5. Сформулюйте лему Гейне – Бореля.
6. Доведіть ознаку компактної множини (теорему 4.2).
7. Сформулюйте й доведіть ознаку рівномірної неперервності функції (теорему 4.3).
8. Якщо $A \subset X$ і A – компакт, то множина A замкнена в просторі X. Доведіть це твердження.
9. Множина A являє собою передкомпакт у просторі (X, ρ) тоді й тільки тоді, коли її замикання $\overline{A}$ є компактом.
10. Якщо X – компакт і A – замкнена множина в X, то A – компакт. Доведіть це твердження.
11. Доведіть, що компактний метричний простір є повним.
12. Доведіть, що перетин довільної сукупності компактів також буде компактом.
13. Доведіть, що об’єднання скінченної кількості компактів теж являє собою компакт.
14. Доведіть, що куля $B[0;1]$ в просторі l_2 не буде передкомпактною множиною.
15. Якщо множина A – передкомпакт у просторі (X, ρ), то вона обмежена. Доведіть це твердження.
16. Якщо $A \subset X$ має скінченну ε-сітку для деякого числа $\varepsilon > 0$, то A – обмежена множина. Доведіть дане твердження.
17. Обмежена множина A в просторі R^n має скінченну ε-сітку для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ (доведіть цей факт принаймні в припущенні, що $\rho = \rho_2$).
18. Довести, що куля $B[0;1]$ в просторі l_2 не має скінченної ε-сітки коли $\varepsilon < \sqrt{2}/2$. За яких значень числа $\varepsilon > 0$ вона має скінченну ε-сітку?
19. Доведіть, що обмежена множина в просторі R^n $(\rho = \rho_2)$ буде цілком обмеженою.
20. Доведіть, що цілком обмежена множина є обмеженою.
21. Доведіть, що куля $B[0;1]$ у просторі l_2 не являє собою цілком обмежену множину.
22. За яких умов для послідовності $\{a_n\}$ множина A, визначена таким чином: $A = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{a_n^2} \le 1 \right\}$, у просторі l_2 буде цілком обмеженою?
23. Доведіть, що цілком обмежена множина має для кожного $\varepsilon > 0$ скінченну ε-сітку з точок самої множини.

24. Доведіть, що спадна послідовність $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ непорожніх замкнених підмножин компакту має непорожній перетин.

25. Доведіть, що компакт являє собою сепарабельний метричний простір.

26. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Доведіть еквівалентність таких умов:

а) X – компакт;

б) кожна дійсна неперервна функція на просторі X обмежена;

в) кожна дійсна неперервна функція на просторі X досягає максимуму.

27. Нехай X – такий метричний простір, на якому кожна дійсна неперервна функція є рівномірно неперервною. Чи правильним буде твердження, що простір X повний? Чи можна стверджувати, що X – компакт?

28. Нехай відображення $f : X \to Y$ неперервне. Довести, що коли X – компакт і f взаємно однозначно відображає X на всю множину Y, то відображення f^{-1} неперервне.

29. Нехай відображення f компакта в себе задовольняє таку умову: $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всіх пар точок (x, y): $x \neq y$. Доведіть, що f має (і до того ж єдину) нерухому точку.

30. Доведіть, що компакт не можна ізометрично відобразити на його власну підмножину.

РОЗДІЛ III

ЛІНІЙНІ Й НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ

§ 1. Лінійні простори

1.1. Визначення й приклади лінійних просторів

Поняття лінійного простору є одним з основних у математиці. Розглянемо його.

Непуста множина L елементів x, y, z, ... називається *лінійним*, або *векторним*, простором, якщо вона задовольняє такі умови:

I. Для будь-яких двох елементів $x, y \in L$ визначено єдиний третій елемент $z \in L$, названий їхньою сумою та позначуваний, як $x + y$, причому виконано такі вимоги:

1) $x + y = y + x$ (комутативність);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);

3) у множині L наявний елемент 0, який відповідає умові: $x + 0 = x$, для всіх елементів $x \in L$ (так зване існування нуля);

4) для кожного $x \in L$ існує протилежний елемент $-x$, який відповідає умові: $x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента).

II. Для будь-якого числа α і для будь-якого елемента $x \in L$ визначено елемент $\alpha x \in L$ (добуток елемента x і числа α), причому справедливі такі властивості:

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

2) $1 \cdot x = x$;

3) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$;

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Залежно від того, який запас чисел (усі комплексні або тільки дійсні) використовується, розрізняють комплексні й дійсні лінійні простори. Усюди, де не обумовлено протилежне, подальші міркування будуть справедливими як для дійсних, так і для комплексних просторів.

Зауважимо, що всякий комплексний лінійний простір можна розглядати як деякий дійсний простір, коли обмежитися в ньому множенням векторів на дійсні числа.

Наведемо деякі приклади лінійних просторів.

1. Пряма лінія R, тобто сукупність дійсних чисел, де мають місце звичайні арифметичні операції додавання й множення, являє собою лінійний простір.

2. Сукупність усіляких наборів, що складаються із n дійсних чисел: $x = (x_1, \dots , x_n)$, де додавання й множення на число визначаються за такими формулами:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

також є лінійним простором. Він називається дійсним n-вимірним арифметичним простором і позначається символом R^n. Аналогічно, комплексний n-вимірний арифметичний простір C^n за визначенням являє собою сукупність наборів з n комплексних чисел (у них задано множення на будь-які комплексні числа).

3. Неперервні (дійсні або комплексні) функції на деякому відрізку $[a, b]$ зі звичайними операціями додавання функцій і множення їх на число, тобто

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

утворюють лінійний простір $C[a; b]$, який відіграє важливу роль у функціональному аналізі.

4. Простір l_2, у якому елементами служать послідовності чисел (дійсних або комплексних), тобто $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, причому виконано таку умову:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 < \infty . \qquad (1.1)$$

Операції додавання і множення на число в цьому просторі визначено за такими правилами:

$$(x_1, \dots, x_n, \dots) + (y_1, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots) \qquad (1.2)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots), \qquad (1.3)$$

Тоді він також являє собою лінійний простір. Той факт, що сума двох послідовностей, які задовольняють умову (1.1), також задовольняє цю умову, випливає з елементарної нерівності: $(a_1 + a_2)^2 \le 2a_1^2 + 2a_2^2$.

5. Збіжні послідовності $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ з покоординатними операціями додавання (1.2) й множення на число (1.3) утворюють лінійний простір, який позначається через c.

6. Послідовності, що прямують до 0, коли операції додавання й множення задано так, як це було описано в прикладі 4, також утворюють лінійний простір. Він позначається символом c_0.

7. Сукупність всіх обмежених числових послідовностей m, у якій мають місце ті самі операції додавання й множення на число, що й у прикладах 4 – 6, теж являє собою лінійний простір.

8. Нарешті, сукупність R^{∞} усіляких числових послідовностей, де введено ті самі операції додавання й множення на число, що й у прикладах 4 – 7, також є лінійним простором.

Завдання. Перевірте, чи відповідають у розглянутих вище прикладах введені операції додавання й множення на число визначенню лінійного простору.

Оскільки властивості лінійного простору по суті – це властивості операцій додавання елементів і множення їх на число, було природним ввести таке визначення:

Лінійні простори L й L^{*} називаються *ізоморфними*, коли між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, узгоджену з операціями, які в них визначені. Це означає, що коли $x \leftrightarrow x^{*}$ і $y \leftrightarrow y^{*}$, необхідно, щоб $x + y \leftrightarrow x^{*} + y^{*}$ й $\alpha x \leftrightarrow \alpha x^{*}$, де α – довільне число.

Ізоморфні простори можна розглядати як різні реалізації одного й того самого простору. Прикладами ізоморфних лінійних просторів можуть бути арифметичний n-вимірний простір (дійсний або комплексний) і простір усіх многочленів степеня, не більшого за $(n-1)$ (відповідно з дійсними або комплексними коефіцієнтами), із звичайними операціями додавання многочленів і множення їх на число. Ізоморфність цих просторів доведіть самостійно.

1.2. Лінійна залежність

Елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$ лінійного простору L називаються *лінійно залежними*, коли існують такі числа α_1, α_2, ... , α_n, серед яких не всі дорівнюють 0, що справедлива рівність:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 . \tag{1.4}$$

У протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно незалежними*. Інакше кажучи, елементи x_1, x_2, ... , x_n лінійно незалежні, коли з рівності (1.4) випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Нескінченна система елементів $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ простору L називається лінійно незалежною, коли будь-яка її скінченна підсистема лінійно незалежна.

Коли в просторі L можна знайти n лінійно незалежних елементів, а будь-яка система, котра включає $(n + 1)$ елемент цього простору, лінійно залежна, то говорять, що простір L має розмірність n. Коли ж у ньому можна виявити систему, складену з довільного скінченного числа лінійно незалежних елементів, то говорять, що простір L нескінченновимірний. *Базисом* в n-вимірному просторі L називається будь-яка система, складена з n лінійно незалежних елементів. Простори R^n й C^n мають, як легко перевірити, розмірність n, підтверджуючи тим самим свою назву.

У курсі лінійної алгебри розглядаються лінійні простори скінченної розмірності. У функціональному аналізі, як правило, досліджуються простори нескінченного числа вимірів.

Завдання. Доведіть, що кожен із просторів, наведених у прикладах 3 – 8, має нескінченну розмірність.

1.3. Підпростори й фактор-простори

Непуста множина L_0 лінійного простору L називається *підпростором*, якщо вона сама утворює лінійний простір по відношенню до визначених у просторі L операцій додавання елементів і множення їх на число. Інакше кажучи, $L_0 \subset L$ являє собою підпростір, коли для будь-яких елементів $x, y \in L_0$ справедливе твердження: $\alpha x + \beta y \in L_0$, для довільних значень α та β.

Усякий лінійний простір L має принаймні два підпростори: підпростір, який складається тільки з одного нуля – так званий *нульовий підпростір*, і другий, який збігається з усім простором L. Підпростір, який не збігається з L і має хоча б один ненульовий елемент називається *власним*.

Наведемо приклади власних підпросторів.

1. Якщо L – довільний лінійний простір, а x – деякий його ненульвий елемент, то сукупність елементів вигляду $\{\alpha x\}$, де α перебігає всі числа (дійсні або комплексні), утворює, вочевидь, одновимірний підпростір. Він буде власним підпростором, якщо розмірність L більша одиниці.

2. Розглянемо простір неперервних функцій $C[a; b]$ (приклад 3 в пункті 1.1), а в ньому сукупність усіх многочленів $P[a; b]$. Зрозуміло, що многочлени утворюють у просторі $C[a; b]$ підпростір, який має так само, як і $C[a; b]$, нескінченну розмірність. У той же час простір $C[a; b]$ є підпростором більш широкого простору всіх, неперервних і розривних, функцій на відрізку $[a; b]$.

3. Простори l_2, c, c_0, m, R^{∞} (приклади 4 – 8 у пункті 1.1). Кожен з них є власним підпростором наступного.

Нехай $\{x_\alpha\}$ – довільна непуста множина елементів у лінійному просторі L. Тоді в L існує найменший підпростір (можливо такий, що збігається з L), який містить множину $\{x_\alpha\}$. Дійсно, один такий підпростір існує – це, власне, L. Далі, зрозуміло, що перетин будь-якої кількості підпросторів також являє собою підпростір. Візьмемо тепер усі підпростори, що включають систему $\{x_\alpha\}$, і розглянемо їхній перетин. Це й буде найменший підпростір, який містить систему $\{x_\alpha\}$. Назвемо його підпростором, що породжений множиною $\{x_\alpha\}$, або *лінійною оболонкою* множини $\{x_\alpha\}$. Він позначається через $L(\{x_\alpha\})$.

Розглянемо лінійний простір L і деякий його підпростір L'. Два елементи $x, y \in L$ назвемо еквівалентними, якщо їх різниця $x - y$ належить L'. Це відношення є рефлексивним, симетричним і транзитивним, тобто визначає розбиття множини L на класи. Клас еквівалентних елементів називається *класом суміжності* (за простором L'). Сукупність усіх таких класів називається *фактор-простором* L за L' і позначається як L / L'.

У будь-якому фактор-просторі можна природно ввести операції додавання й множення на число. Зробимо це у такий спосіб: нехай ξ та η – два класи, що являють собою елементи з фактор-простору L/L'. Оберемо в кожному з них по одному представнику, наприклад x та y і назвемо сумою класів ξ та η той клас ζ, що містить елемент $x + y$, а добутком класу ξ і числа α той клас, який включає елемент αx. Легко перевірити, що результат не зміниться, коли замінити представників x та y якими-небудь іншими представниками тих самих класів ξ, η. Таким чином, операції над елементами фактор-простору L/L' визначено. Вони задовольняють умови, сформульовані у визначенні лінійного простору (перевірте самостійно). Таким чином, кожний фактор-простір являє собою лінійний простір.

Нехай L – довільний лінійний простір і L' – деякий його підпростір. Розмірність фактор-простору L/L' називається *корозмірністю* підпростору L' у просторі L.

Якщо L – лінійний простір n вимірів, а його підпростір L' має розмірність k, то фактор-простір L/L' має розмірність $n – k$ (доведіть самостійно).

Якщо підпростір $L' \subset L$ має скінченну корозмірність n, то в просторі L можна вибрати елементи $x_1, \dots , x_n$ таким чином, що кожен елемент $x \in L$ можна однозначно подати в такому вигляді:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ \dots + \alpha_n x_n + y,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ – числа, $y \in L'$.

Дійсно, нехай фактор-простір L/L' має розмірність n. Виберемо в ньому базис $\xi_1, \xi_2, \dots \ \xi_n$ і з кожного класу ξ_k виберемо представника x_k. Нехай x – довільний елемент із простору L, а ξ – клас у фактор-просторі L/L', який містить у собі x, тоді

$$\xi \ = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ \dots + \alpha_n \xi_n.$$

За визначенням це свідчить про те, що кожен елемент із класу ξ, зокрема x, відрізняється лише на один елемент з підпростору L' від такої самої лінійної комбінації елементів $x_1, \dots , x_n$, тобто

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ \dots + \alpha_n x_n + y.$$

Однозначність такого запису доведіть самостійно.

1.4. Лінійні функціонали

Відображення f, задане на довільному векторному просторі L, яке набуває значення з R_1, називається *функціоналом*. Іншими словами, функціонал – це деяка числова функція, визначена на лінійному просторі L.

Функціонал f називається *адитивним*, якщо

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ для всіх елементів } x, y \in L.$$

Його називають однорідним, коли $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ для всіх елементів $x \in L$; α – довільне число.

Адитивний й однорідний функціонал називають *лінійним*.

Наведемо приклади лінійних функціоналів.

1. Нехай R^n являє собою n-вимірний арифметичний простір, елементи якого $x = (x_1, \dots , x_n)$ та $a = (a_1, \dots , a_n)$, являють собою довільний набір із n фіксованих чисел, тоді лінійний функціонал в просторі R^n можна задати такою формулою:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ .$$

2. Інтеграл $I(x)=\int_a^b x(t)dt$, являє собою лінійний функціонал у просторі $C[a,b]$.

3. Ще один приклад лінійного функціонала в цьому просторі:

$$F(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt,$$

де y_0 – фіксована неперервна функція на відрізку $[a;b]$.

Його лінійність випливає з основних властивостей інтеграла.

4. Розглянемо приклад лінійного функціонала в просторі l_2. Нехай k – фіксоване ціле додатне число. Для кожного елемента: $x = (x_1, \dots , x_n, \dots)$, простору l_2 задамо функціонал таким чином:

$$f_k(x)=x_k.$$

Лінійність такого функціонала очевидна.

Геометричний сенс лінійного функціонала полягає в тому, що *кожному нетривіальному лінійному функціоналу, визначеному на лінійному просторі L, відповідає деяка гіперплощина в L, що не проходить через початок координат.*

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення лінійного простору.
2. Наведіть приклади лінійних просторів.
3. Які елементи називають лінійно залежними? Лінійно незалежними?
4. Що називають базисом простору?
5. Дайте визначення розмірності простору?
6. Яким чином визначають підпростір лінійного простору? Наведіть приклади.
7. Які підпростори називають власними? Невласними? Наведіть приклади.

8. Яку множину називають фактор-простором?

9. Що являє собою корозмірність простору?

10. Яке відображення називають функціоналом?

11. Дайте визначення адитивного функціонала.

12. Дайте визначення однорідного функціонала.

13. Який функціонал називають лінійним?

14. Наведіть приклади лінійних функціоналів.

15. Перевірте, чи будуть подані нижче функціонали лінійними в просторі $C[0;1]$?

а) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\sin t dt$; *б*) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t) sign\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$;

в) $f(x)=\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}} x(t^2)dt$; *г*) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t^2)dt$;

д) $f(x)=\int\limits_0^1 |x(t)|dt$; *е*) $f(x)=\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt$;

ж) $f(x)=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$; *и*) $f(x)=\int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t}dt$;

к) $f(x)=x'(t)$; *л*) $f(x)=x'(t_0)$;

м) $f(x)=x\left(\frac{1}{2}\right)$; *н*) $f(x)=\max\limits_{0\le t\le 1} x(t)$.

16. Доведіть, що кожен із просторів, зазначених у прикладах 3 – 8 пункту 1.1, має нескінченну розмірність.

§ 2. Опуклі множини й опуклі функціонали. Теорема Хана – Банаха

2.1. Опуклі множини й опуклі тіла

Багато важливих розділів теорії лінійних просторів пов’язано із поняттям опуклості. У його основі – наочні геометричні уявлення, хоча разом з тим воно допускає й чисто аналітичне формулювання.

Нехай L – деякий лінійний дійсний простір, а x, y – дві його точки. Назвемо *замкнутим відрізком*, що з'єднує точки x та y в просторі L, сукупність усіх елементів такого вигляду:

$$\alpha x+\beta y, \text{ де } \alpha,\beta\ge 0,\ \alpha+\beta=1.$$

Відрізок без кінцевих точок x та y називається *відкритим*.

Множина $M \subset L$ називається *опуклою*, якщо вона разом з будь-якими двома точками x та y містить і відрізок, що їх з'єднує.

Назвемо ядром $J(E)$ довільної множини $E \subset L$ сукупність таких її точок x, що для кожного елемента $y \in L$ знайдеться таке число: $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, яке забезпечує виконання умови: $x + ty \in E$, коли $|t| < \varepsilon$.

Опукла множина з непорожнім ядром називається *опуклим тілом*.

Наведемо приклади опуклих тіл й опуклих множин.

1. У тривимірному евклідовому просторі куб, куля, тетраедр, півпростір являють собою опуклі тіла. Відрізок, площина, трикутник в тому самому просторі є опуклими множинами, але вони не будуть опуклими тілами.

2. Розглянемо в просторі неперервних функцій на відрізку $[a; b]$ множину функцій, що задовольняють таку умову: $|f(t)| \le 1$. Ця множина є опуклою. Дійсно, якщо $|f(t)| \le 1$ й $|g(t)| \le 1$,то коли $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \ge 0$, буде правильним і таке твердження: $|\alpha f(t) + \beta g(t)| \le 1$.

Завдання. Перевірте, чи буде ця множина опуклим тілом.

3. Одинична куля в просторі l_2, тобто сукупність точок: $x = (x_1, \dots x_n, ...)$, які відповідають умові: $\sum x_n^2 \le 1$, являє собою опукле тіло. Його ядро складається із точок x, для яких буде виконано нерівність: $\sum x_n^2 < 1$.

4. Основний паралелепіпед П у просторі l_2 – це опукла множина, але не опукле тіло. Справді, нехай $x \in \Pi$; це означає, що $|x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}$, для всіх значень: $n = 1, 2, \dots$. Припустимо, що $y_0 = (1, 1/2, \dots ,1/n, \dots)$. Нехай $x + ty_0 \in \Pi$, тобто $\left| x_n + \frac{t}{n} \right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$; тоді

$$\left| \frac{t}{n} \right| \le \left| x_n + \frac{t}{n} \right| + |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

звідки робимо висновок, що $t = 0$, тобто ядро множини П виявилося порожнім.

Якщо M – опукла множина, то її ядро $J(M)$ також опукле. Дійсно, нехай $x, y \in J(M)$, і $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$. Тоді для даного елемента $a \in L$ знайдуться такі числа $\varepsilon_1 > 0$ й $\varepsilon_2 > 0$, що коли $|t_1| < \varepsilon_1$, $|t_2| < \varepsilon_2$, тоді точки $x + t_1 a$ й $y + t_2 a$ належать множині M, отже, їй належить і точка $\alpha(x + ta) + \beta(y + ta)$, якщо $|t| < \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, тобто $z \in J(M)$.

Встановимо одну з властивостей опуклих множин.

Теорема 2.1. Перетин будь-якого числа опуклих множин являє собою опуклу множину.

Доведення

Нехай $M = M_1 \bigcap M_2 \bigcap \ldots \bigcap M_n \bigcap \ldots$ і всі множини M_n – опуклі. Візьмемо дві довільні точки x та y з множини M. Тоді відрізок, що з'єднує точки x та y, належить кожній з множин M_n, а значить, і множині M. Отже, множина M опукла. Теорему доведено.

Зауважимо, що перетин опуклих тіл (будучи опуклою множиною) не обов'язково буде опуклим тілом (наведіть приклад).

Для довільної множини A в лінійному просторі L існує найменша опукла множина, що її містить; такою буде перетин усіх опуклих множин, які включають множину A (принаймні одна така опукла множина існує – це весь простір L). Мінімальна опукла множина, що містить A, називається *опуклою оболонкою* множини A.

Розглянемо один специфічний приклад опуклої оболонки. Нехай $x_1, \ldots , x_{n+1}$ – точки деякого лінійного простору. Будемо говорити, що ці точки перебувають у *загальному положенні*, якщо вектори $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, $x_{n+1} - x_1$ лінійно незалежні. Це рівносильно тому, що з умов: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$ й $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$ випливає справедливість таких рівностей: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$. Опукла оболонка точок $x_1, \ldots , x_{n+1}$, що перебувають у загальному положенні, називається *n-вимірним симплексом*, а самі точки $x_1, \ldots , x_{n+1}$ – його вершинами. Нульвимірний симплекс являє собою одну точку. Одновимірний симплекс – це відрізок, двовимірний – трикутник, тривимірний – тетраедр.

Якщо точки $x_1, \ldots , x_{n+1}$ перебувають у загальному положенні, то будь-які $(k + 1)$ з них $(k < n)$ також перебувають у загальному положенні, породжуючи деякий k-вимірний симплекс, названий k-вимірною гранню даного n-вимірного симплекса. Наприклад, тетраедр із вершинами e_1, e_2, e_3, e_4 має чотири двовимірні грані, утворені відповідно трійками вершин: (e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_3); шість одновимірних граней і чотири нульвимірні.

Теорема 2.2. Симплекс із вершинами $x_1, \ldots , x_{n+1}$ являє собою сукупність усіх точок, які можна подати в такому вигляді:

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k , \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 , \; \alpha_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots n + 1. \tag{2.1}$$

Доведення

Легко перевірити, що сукупність S точок вигляду (2.1) являє собою опуклу множину, яка містить точки $x_1, \ldots , x_{n+1}$. З іншого боку, усяка опукла множина, що має у своєму складі ці точки, повинна містити й точки вигляду (2.1); отже, S є найменшою опуклою множиною, яка містить точки $x_1, \ldots , x_{n+1}$.

Теорему доведено.

2.2. Однорідно-опуклі функціонали

З поняттям опуклої множини тісно пов'язане ще одне важливе поняття однорідно-опуклого функціонала. Нехай L – дійсний лінійний простір. Визначений на просторі L функціонал p називається *опуклим*, якщо

$$p(\alpha x+(1-\alpha y))\leq \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y), \tag{2.2}$$

для всіх елементів $x, y \in L$ і будь-якого числа $0 \leq \alpha \leq 1$.

Функціонал p називається *додатно-однорідним*, якщо

$$p(\alpha x)=\alpha p(x), \tag{2.3}$$

для всіх елементів $x \in L$ і всіх чисел $\alpha > 0$.

Для опуклого додатно-однорідного функціонала буде правильною така нерівність:

$$p(x+y)\leq p(x)+p(y). \tag{2.2'}$$

Дійсно,

$$p(x+y)=2p\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq 2p\left(\frac{x}{2}\right)+2p\left(\frac{y}{2}\right)=p(x)+p(y).$$

Легко зрозуміти, що умова (2.2') разом з умовою (2.3) забезпечує опуклість функціонала p. Додатно-однорідний опуклий функціонал ми будемо називати коротше – *однорідно-опуклим*. Виявимо деякі найпростіші властивості однорідно-опуклих функціоналів.

1. Вважаючи, що в рівності (2.3) $x = 0$, робимо такий висновок:

$$p\ (0) = 0. \tag{2.4}$$

2. Із формул (2.2') та (2.4) виходить, що

$$0=p(x+(-x))\leq p(x)+p(-x) \tag{2.5}$$

для всіх елементів $x \in L$.

Із цієї нерівності, зокрема, випливає, що коли $p(x)<0$, то обов'язково $p(-x)>0$. Таким чином, ненульовий однорідно-опуклий функціонал може бути всюди невід’ємним (тобто $p(x)\geq 0$), але якщо всюди $p(x)\leq 0$, то вочевидь, $p(x)\equiv 0$.

3. При будь-якому значенні числа α виконується така нерівність:

$$p(\alpha x)\geq \alpha p(x).$$

Дійсно, якщо $\alpha > 0$, то це є наслідком рівності (2.3); якщо $\alpha = 0$, то – (2.4); коли ж $\alpha < 0$, то, враховуючи нерівність (2.5), одержуємо, що

$$0 \le p(\alpha x) + p(|\alpha| x) = p(\alpha x) + |\alpha| p(x).$$

Інакше кажучи, $p(\alpha x) \ge -|\alpha| p(x) = \alpha p(x)$.

Наведемо приклади однорідно-опуклих функціоналів.

1. Усякий лінійний функціонал буде однорідно-опуклим. Певна річ, однорідно-опуклим також буде функціонал: $p(x) = |f(x)|$, якщо функціонал f лінійний.

2. Довжина вектора в n-вимірному евклідовому просторі є однорідно-опуклим функціоналом. Тут умова (2.2') означає, що модуль суми двох векторів не перевищує суми їхніх модулів (нерівність трикутника), а умова (2.3) безпосередньо випливає із визначення довжини вектора в просторі R^n.

3. Нехай m – простір обмежених послідовностей: $x = (x_1, \dots , x_n, \dots)$. Функціонал: $p(x) = \sup\limits_n |x_n|$, буде в цьому просторі однорідно-опуклим.

2.3. Функціонал Мінковського

Розглянемо довільний лінійний простір L і в ньому опукле тіло A, ядро якого містить точку 0. Функціонал, заданий такою формулою:

$$p_A(x) = \left\{ r : \frac{x}{r} \in A, r > 0 \right\}, \tag{2.6}$$

називається *функціоналом Мінковського* опуклого тіла A.

Теорема 2.3. Функціонал Мінковського (2.6) – однорідно-опуклий і невід’ємний. І навпаки, якщо $p(x)$ – довільний однорідно-опуклий невід’ємний функціонал на лінійному просторі L і k – додатне число, то множина:

$$A = \{x : p(x) \le k\}, \tag{2.7}$$

являє собою опукле тіло, ядром якого служить множина $\{x : p(x) < k\}$ (що містить точку 0). Коли в умові (2.7) $k = 1$, то вихідний функціонал $p(x)$ є функціоналом Мінковського для множини A.

Доведення

Для всякого елемента $x \in L$ елемент $\frac{x}{r}$ належить множині A, якщо значення r достатньо велике; тому величина $p_A(x)$, з огляду на рівність (2.6), невід’ємна й скінченна. Перевіримо додатну однорідність функціонала (2.6).

Якщо $t > 0$ й $y = tx$, то

$$p_A(y)=\inf\left\{r>0:\frac{y}{r}\in A\right\}=\inf\left\{r>0:\frac{tx}{r}\in A\right\}=\inf\left\{tr'>0:\frac{x}{r'}\in A\right\}=$$
$$=t\inf\left\{r'>0:\frac{x}{r'}\in A\right\}=tp_A(x). \qquad (2.8)$$

Це означає, що функціонал $p_A(x)$ – додатно-однорідний.

Тепер перевіримо опуклість $p_A(x)$. Нехай маємо точки $x_1, x_2 \in L$ й $\varepsilon > 0$ – довільне число. Виберемо числа r_i $(i = 1, 2)$ таким чином, щоб $p_A(x_i) < r_i < p_A(x_i) + \varepsilon$; тоді $\frac{x_i}{r_i} \in A$.

Припустимо, що $r = r_1 + r_2$, тоді точка: $\frac{(x_1+x_2)}{r}=\frac{r_1x_1}{rr_1}+\frac{r_2x_2}{rr_2}$, належить до відрізка з кінцями $\frac{x_1}{r_1}$ і $\frac{x_2}{r_2}$. Через опуклість множини A цей відрізок, а виходить і точка $\frac{(x_1+x_2)}{r}$ належать множині A, звідси

$$p_A(x_1+x_2)\le r = r_1 + r_2 < p_A(x_1)+p_A(x_2)+2\varepsilon .$$

Оскільки число додатне число ε вибрали довільно, то

$$p_A(x_1+x_2)\le p_A(x_1)+p_A(x_2).$$

Отже, функціонал $p_A(x)$ задовольняє умови (2.2') і (2.3), а тому він являє собою невід’ємний однорідно-опуклий функціонал.

Розглянемо тепер множину (2.7).

Якщо $x, y \in A$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \ge 0$, то $p(\alpha x_1 + \beta x_2) \le \alpha p(x_1) + \beta p(x_2) \le k$, тобто множина A – опукла.

Далі, нехай $p(x) < k, t > 0$ й $y \in L$, тоді

$$p(x \pm ty) \le p(x) + tp(\pm y).$$

Якщо $p(-y) = p(y) = 0$, то $x \pm ty \in A$ при всіх значеннях t; коли ж хоча б одне з невід’ємних чисел $p(y)$, $p(-y)$ відмінне від 0, то $x \pm ty \in A$, якщо

$$t < \frac{k - p(x)}{\max\{p(y), p(-y)\}}.$$

Безпосередньо із уведених визначень випливає, що p служить функціоналом Мінковського для множини $\{x : p(x) \le 1\}$.

Отже, увівши поняття функціонала Мінковського, ми встановили відповідність між невід’ємними однорідно-опуклими функціоналами й опуклими тілами, кожне з яких має ядро, що містить точку 0.

Наведемо приклади множин і відповідних їм функціоналів Мінковського.

1. Якщо $A = L$, то $p_L(x) = 0$.

2. Нехай A – куля із центром 0 і радіусом r у просторі R^n. Тоді

$$p_A(x) = \frac{\|x\|}{r},$$

де $\|x\|$ – довжина вектора x.

3. Нехай A являє собою кулю: $-1 < x_1 < 1$, у просторі l_2 послідовностей: $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$. Тоді $p_A(x) = |x_1|$.

Зауваження

1. Іноді зручно розглядати однорідно-опуклі функціонали, які можуть набувати не тільки скінченних значень, але й значення $+\infty$ (але не $-\infty$). Тоді з рівності: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (де $\alpha > 0$), випливає, що $p(0) = 0$ або $p(0) = +\infty$. Легко перевірити, що в цьому останньому випадку можна, не порушуючи однорідної опуклості функціонала, змінити його значення в одній точці, задаючи, що $p(0) = 0$ замість $p(0) = +\infty$. Найчастіше так і роблять.

Якщо $p(x)$ – однорідно-опуклий, але не обов'язково скінченний, функціонал, то $A = \{x : p(x) \le k\}$, – це опукла множина, але не обов'язково опукле тіло. І навпаки, якщо A – довільна опукла множина, що містить точку 0, то для неї можна визначити функціонал Мінковського формулою (2.6), але при цьому доведеться припустити, що r може набувати і значення $+\infty$.

2. Якщо $p_1(x)$ і $p_2(x)$ – однорідно-опуклі функціонали, то такими ж будуть і $p_1(x) + p_2(x)$ та $\alpha p_1(x)$, коли $\alpha > 0$.

Далі, якщо $\{p_s(x)\}_{s \in S}$ – довільна сім'я однорідно-опуклих функціоналів, то таким буде і функціонал: $p(x) = \sup\limits_s p_s(x)$. Зокрема, верхня грань: $p(x) = \sup\limits_s f_s(x)$, будь-якої непустої множини лінійних функціоналів на просторі L є однорідно-опуклим функціоналом. Скориставшись теоремою Хана – Банаха, легко впевнитися, що так можна подати всякий (скінченний) однорідно-опуклий функціонал.

2.4. Теорема Хана – Банаха

Нехай L – дійсний лінійний простір а L_0 – деякий його підпростір. Припустимо, що на цьому підпросторі задано деякий лінійний функціонал f_0. Лінійний функціонал f, визначений на всьому просторі L, називається *поширенням* функціонала f_0, якщо

$$f(x) = f_0(x) \text{ для всіх елементів } x \in L_0.$$

Задача про поширення лінійного функціонала часто зустрічається в аналізі. У її дослідженні важливу роль відіграє така теорема:

Теорема 2.4 (Хана – Банаха). Нехай p – однорідно-опуклий функціонал, визначений на дійсному лінійному просторі L, і нехай L_0 – лінійний підпростір в L. Якщо f_0 – лінійний функціонал на підпросторі L_0 і підпорядкований на ньому функціоналу p, тобто, якщо для $x \in L_0$ виконується така нерівність:

$$f_0(x) \le p(x), \tag{2.9}$$

то f_0 може бути поширений до лінійного функціонала f на просторі L, який підпорядкований функціоналу $p(x)$ на всьому L.

Доведення

Покажемо, що коли $L_0 \neq L$, то функціонал f_0 можна поширити з L_0 на деякий більший підпростір L' зі збереженням умови (9). Дійсно, нехай z – довільний елемент простору L, який не належить L_0, і нехай L' – підпростір, породжений L_0 і елементом z. Кожен елемент із L' має тоді такий вигляд: $tz + x$, де $x \in L_0$.

Якщо f' – шукане поширення функціонала f_0 на підпростір L', то

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x),$$

або, припустивши, що $f'(z) = c$,

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Тепер виберемо число c з метою збереження на підпросторі L' умови підпорядкування (2.9), тобто таким чином, щоб для всіх елементів $x \in L_0$ і всіх дійсних чисел t виконувалася нерівність:

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x) \le p(tz + x).$$

Коли $t > 0$, то ця нерівність рівносильна такій умові:

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \le p\left(z + \frac{x}{t}\right) \text{ або } c \le p\left(z + \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

а якщо $t < 0$, то буде справедливою умова:

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \ge -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) \text{ або } c \ge -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Доведемо, що завжди існує число c, яке задовольняє ці дві умови.

Нехай y' й y'' – довільні елементи з L_0, тоді

$$f_0(y'') + p(y'' + z) \ge -f_0(y'') - p(-y'' - z). \tag{2.10}$$

Це випливає з такої нерівності:

$$f_0(y'')-f_0(y')\le p(y''-y')=p((y''+z)-(y'+z))=p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Задамо, що

$$c'=\inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)),$$

$$c''=\sup_{y''}(-f_0(y')-p(y'-z)).$$

Із умови (2.9), з огляду на довільність y' й y'', випливає, що $c''\ge c'$, тому ми завжди можемо вибрати число c, яке задовольняє умову: $c''\ge c\ge c'$, і визначити функціонал f' на підпросторі L' за такою формулою:

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x).$$

Цей функціонал задовольняє умову підпорядкування (2.9).

Отже, ми показали, що функціонал f_0, визначений на деякому підпросторі $L_0\subset L$, який задовольняє на L_0 умову (2.9), можна поширити зі збереженням цієї умови на деякий більший підпростір L'.

Якщо в просторі L можна вибрати лічильну систему елементів $x_1, \dots, x_n, \dots$, яка породжує цей простір, то функціонал на L будуємо за індукцією, розглядаючи зростаючий ланцюжок підпросторів:

$$L^{(1)}=\{L_0, x_1\},\ L^{(2)}=\{L^{(1)}, x_2\}, \dots$$

(тут $\{L^{(k)}, x_{k\text{-}1}\}$ означає мінімальний лінійний підпростір у просторі L, який містить підпростір $L^{(k)}$ й елемент $x_{k\text{-}1}$. Тоді кожен елемент $x\in L$ увійде в деякий підпростір $L^{(k)}$, а відтак функціонал буде поширено на весь простір L.

У загальному випадку (тобто коли лічильної множини, що породжує L, не існує) доведення закінчується застосуванням леми Цорна. Оскільки сукупність $\mathfrak{I}$ всіх можливих продовжень функціонала f_0, які задовольняють умову (2.9), частково впорядкована і кожна її лінійно впорядкована підмножина $\mathfrak{I}_0$ має верхню грань (нею служить функціонал, визначений на об'єднанні областей визначення функціоналів $f'\in\mathfrak{I}_0$, і який збігається із кожним таким функціоналом f' на його області визначення), то згідно з лемою Цорна на всій сукупності функціоналів $\mathfrak{I}$ існує максимальний елемент f. Цей максимальний елемент f і являє собою шуканий функціонал. Дійсно, він є поширенням вихідного функціонала f_0, задовольняє умову (2.9) на своїй області визначення й заданий на всьому просторі L, тому що інакше ми б могли поширити його описаним вище способом з того власного підпростору, на якому він визначений, на більший підпростір, і тоді f не був би максимальним.

Теорему доведено.

Ця теорема має комплексний варіант, який буде подано нижче (теорема 2.4 *a*).

Невід'ємний функціонал p на комплексному лінійному просторі L називається однорідно-опуклим, якщо для всіх елементів $x, y \in L$ і всіх комплексних чисел λ

$$p(x+y) \le p(x) + p(y),$$

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Теорема 2.4 *а*. Нехай p – однорідно-опуклий функціонал, визначений на комплексному лінійному просторі L, а f_0 – лінійний функціонал, який визначено на деякому лінійному підпросторі L_0 простору L і який задовольняє на ньому таку умову:

$$|f_0(x)| \le p(x), \quad x \in L_0 .$$

Тоді функціонал f_0 може бути поширено до лінійного функціонала f на просторі L, який підпорядкований функціоналу p (x) на всьому L. Іншими словами, існує лінійний функціонал f, визначений на всьому просторі L, який задовольняє такі умови:

$$|f(x)| \le p(x), \quad x \in L,$$

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L_0 .$$

Доведення

Позначимо через L_R та L_{0R} простори L й L_0, розглянуті як дійсні лінійні простори. Зрозуміло, що функціонал p буде однорідно-опуклим на просторі L_R, а функціонал: f_{0R} $(x) = \mathrm{Re} f_0$ (x), – дійсний лінійний функціонал на L_{0R}, який відповідає такій умові:

$$|f_{0R}(x)| \le p(x),$$

а тим більше, умові:

$$f_{0R}(x) \le p(x).$$

З огляду на теорему 2.4 існує дійсний лінійний функціонал f, визначений на всьому просторі L_R і який задовольняє такі умови:

$$|f(x)| \le p(x), \quad x \in L_R (= L),$$

$$f(x) = f_{0R}(x), \ x \in L_{0R} (= L_0).$$

Очевидно, що

$$-f_R(x) \le f_R(-x) \le p(-x) = p(x),$$

а тому

$$|f(x)| \le p(x), \ x \in L_R (= L). \tag{2.11}$$

Визначимо функціонал f на просторі L таким чином:

$$f(x) = f(x) - if(ix)$$

(тут ми використовуємо той факт, що L – комплексний лінійний простір, у якому задано множення на комплексні числа). Безпосередня перевірка підтверджує, що f – комплексний лінійний функціонал на просторі L, причому

$$f(x) = f_0(x), \text{ коли } x \in L_0,$$

$$Re\, f(x) = f_R(x), \text{ коли } x \in L.$$

Залишилося показати, що $f(x) \le p(x)$ для всіх елементів $x \in L$.

Припустимо протилежне. Тоді для деякого елемента $x_0 \in L$, буде справедливою нерівність: $|f(x_0)| > p(x_0)$. Запишемо комплексне число $f(x_0)$ у такому вигляді: $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$, де $\rho > 0$, і задамо, що $y_0 = e^{i\varphi} x_0$.

Тоді $f(y_0) = Re\, f(y_0) = Re\left[e^{i\varphi} f(x_0)\right] = p > p(x_0) = p(y_0)$, що суперечить умові (2.11).

Теорему доведено.

2.5. Віддільність опуклих множин у лінійному просторі

Нехай L – дійсний лінійний простір, а M та N – дві його підмножини. Говорять, що визначений на просторі L лінійний функціонал f *розділяє* ці множини, якщо існує число C, для якого виконано такі нерівності:

$$f(x) \ge C, \text{ коли } x \in M \text{ й } f(x) \le C, \text{ якщо } x \in N,$$

тобто

$$\inf_{x \in M} f(x) \ge \sup_{x \in N} f(x).$$

Функціонал f *строго розділяє* множини M та N, якщо виконано строгу нерівність:

$$\inf_{x \in M} f(x) > \sup_{x \in N} f(x).$$

Наступні два твердження безпосередньо випливають із визначення віддільності

1) Лінійний функціонал f відділяє множини M та N тоді і тільки тоді, коли він розділяє множини $(M - N)$ й $\{0\}$ (тобто множини всіх елементів, які мають вигляд: $x - y$, де $x \in M$, $y \in N$, і точку 0).

2) Лінійний функціонал f відділяє множини M та N тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $x \in L$ він розділяє множини $(M - x)$ й $(N - x)$.

Використовуючи теорему Хана – Банаха, легко довести теорему про віддільність опуклих множин у лінійному просторі, яка має численні застосування.

Теорема 2.5. Нехай M и N – опуклі множини в дійсному лінійному просторі L, причому ядро хоча б однієї з них, скажімо M, не є порожнім і не перетинається з іншою множиною, тоді існує ненульовий лінійний функціонал f на просторі L, який розділяє множини M і N.

Доведення

Без обмеження спільності можна вважати, що точка 0 належить ядру $\overset{\circ}{M}$ множини M [інакше ми розглянули б множини $(M-x_0)$ і $(N-x_0)$, де $x_0 \in \overset{\circ}{M}$]. Нехай $y_0 \in N$, тоді точка $(-y_0)$ належить ядру множини $M-N$, а 0 належить ядру $\overset{\circ}{K}$ множини: $K = M - N + y_0$. Оскільки $\overset{\circ}{M} \bigcap N = 0$, то 0 не належить до ядра множини $M-N$ й $y_0 \notin \overset{\circ}{K}$. Нехай p – функціонал Мінковського для множини $\overset{\circ}{K}$. Тоді $p(y_0) \geq 1$, оскільки $y_0 \notin \overset{\circ}{K}$. Уведемо такий лінійний функціонал:

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0).$$

Його визначено на одновимірному просторі, що складається з елементів вигляду αy_0, і задовольняє таку умову:

$$f(\alpha y_0) \leq p(\alpha y_0),$$

оскільки $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$, коли $\alpha \geq 0$, і $f(\alpha y_0) = \alpha f(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$, якщо $\alpha < 0$. За теоремою Хана – Банаха функціонал f_0 можна поширити до лінійного функціонала f, визначеного на всьому просторі L і такого, що задовольняє на ньому умову: $f(y) \leq p(y)$. Звідси випливає, що $f(y) \leq 1$, коли $y \in K$, у той же час $f(y_0) \geq 1$. Таким чином, функціонал f відділяє множини K й $\{y_0\}$, отже, f відділяє множини $(M-N)$ й $\{0\}$; а це означає, що f відділяє множини M та N.

Теорему доведено.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Які множини називають опуклими?
2. Які множини називають опуклими тілами?
3. Наведіть приклади опуклих множин і опуклих тіл.
4. Сформулюйте й доведіть властивості опуклих множин.
5. Чи завжди перетин опуклих множин буде опуклою множиною? Обгрунтуйте свою відповідь.
6. Чи буде правильним попереднє твердження в застосуванні до опуклих тіл? Наведіть приклади.
7. Які функціонали називають опуклими? Однорідними? Однорідно-опуклими? Наведіть приклади.

8. Сформулюйте й доведіть властивості однорідно-опуклих функціоналів.

9. Сформулюйте й доведіть теорему Хана – Банаха.

10. Сформулюйте наслідки з теореми Хана – Банаха.

11. Які множини називають віддільними? Строго віддільними?

12. Сформулюйте й доведіть теорему про існування лінійного функціонала, який розділяє дві множини.

13. Покажіть, що умова скінченності функціонала p у теоремі Хана – Банаха не є обов'язковою.

14. Нехай Φ – сукупність точок: $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$, простору l_2, які задовольняють таку умову: $\sum n^2 x_n^2 \le 1$. Доведіть, що Φ – опукла множина, але не опукле тіло.

15. Доведіть, що множина точок простору l_2, кожна з яких має лише скінченну кількість відмінних від нуля координат, також є опуклою множиною але не опуклим тілом.

16. Множина A в лінійному просторі L називається *поглинальною*, коли для кожного елемента $x \in L$ існує таке число $\alpha > 0$, що $x \in \lambda A$, $\forall \lambda \ge \alpha$. Доведіть, що опукла множина A буде поглинальною тоді й тільки тоді, коли її ядро містить точку 0.

17. Доведіть, що перетин будь-якої кількості підпросторів також являє собою підпростір.

18. Припустимо, що L – лінійний n-вимірний простір, а L' – його k-вимірний підпростір. Доведіть, що фактор-простір L/L' має розмірність $n - k$.

19. Нехай R – лінійний нормований простір; доведіть справедливість такого твердження: нехай Q – відкрита опукла множина в просторі R, і нехай $x_0 \notin Q$; тоді існує гіперплощина, що проходить через точку x_0 і не перетинає Q.

§ 3. Нормовані простори

У попередньому розділі ми розглянули топологічні й, зокрема, метричні простори, тобто множини, у яких введено, тим або іншим способом, поняття близькості елементів, а в попередніх параграфах даного розділу ознайомилися із лінійними просторами. Дотепер кожне із цих понять було відокремлене одне від одного. Однак в аналізі доводиться мати справу із просторами, у яких введено, крім операцій додавання елементів і множення їх на число, також і деяку топологію, тобто розглядати так звані *топологічні лінійні простори*, серед яких особливе місце посідає клас *нормованих* просторів. Теорія цих просторів набула розвитку в роботах С. Банаха та інших авторів.

3.1. Визначення й приклади нормованих просторів

Нехай L – лінійний простір. *Нормою* в L називається функціонал, який задовольняє такі три умови:

1) $p(x) \geq 0$, причому $p(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in L$;

3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, для всіх чисел α.

Лінійний простір L, у якому задано деяку норму, називається *нормованим*.

Норма елемента $x \in L$ позначається символом $\| x \|$.

Дві норми $\|x\|_1$ та $\|x\|_2$, визначені на одному й тому самому лінійному просторі L, називаються *еквівалентними*, коли існують такі додатні числа C_1 і C_2, що для всіх елементів x із цього простору буде справедливою нерівність:

$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2 . \tag{3.1}$$

Приклад 1. Нехай $\|x\|_1 = \max\limits_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$; $\|x\|_2 = \max\limits_{0\leq t\leq 1}|g(t)| \cdot |x(t)|$. Перевіримо, чи будуть справедливими аксіоми норми для $\| \cdot \|_2$ та визначимо, чи будуть еквівалентними $\| \cdot \|_1$ та $\| \cdot \|_2$ у просторі $C[0;1]$, якщо функція $g(t) = t^2 + 1$.

Розв'язування. Перевіримо виконання аксіом норми стосовно $\| \cdot \|_2$. За умовами завдання $\|x\|_2 = \max\limits_{0\leq t\leq 1}\left(\left|t^2 + 1\right| \cdot |x(t)|\right)$.

Перша аксіома: $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$. Виходячи з властивості модуля, $\|x\|_2 \geq 0$. Коли $x = 0$, то $x(t) = 0$, для всіх значень аргументу $t \in [0;1]$ і, відповідно, $\|x\|_2 = 0$.

Тепер припустимо, що $\|x\|_2 = 0$. Тоді $\max\limits_{0\leq t\leq 1}\left(\left|t^2 + 1\right| \cdot |x(t)|\right) = 0$. Враховуючи невід'ємність модуля, $\left|t^2 + 1\right| \cdot |x(t)| = 0$ для всіх значень аргументу $t \in [0;1]$. Оскільки $\left|t^2 + 1\right| \neq 0$, коли $t \in [0;1]$, то $x(t) = 0$ для всіх значень аргументу $t \in [0;1]$ і, відповідно, $x = 0$. Отже, перша аксіома виконується.

Друга аксіома має такий вигляд: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$. Перевіримо її виконання.

$$\|\alpha x\|_2 = \max_{0\leq t\leq 1}\left(\left|t^2 + 1\right| \cdot |\alpha x(t)|\right) = |\alpha| \max_{0\leq t\leq 1}\left(\left|t^2 + 1\right| \cdot |x(t)|\right) = |\alpha| \cdot \|x\|_2 .$$

Таким чином і друга аксіома виконується.

І, нарешті, перевіримо виконання третьої аксіоми: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, а саме:

$$\|x+y\|_2=\max_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|x(t)+y(t)|\right)\le\max_{0\le t\le 1}\left[\left|t^2+1\right|\cdot\left(|x(t)|+|y(t)|\right)\right]\le\max_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|x(t)|\right)+$$

$$+\max_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|y(t)|\right)=\|x\|+\|y\|.$$

Як бачимо, третю аксіому теж виконано.

Висновок: аксіоми норми для $\|\cdot\|_2$ виконуються, тобто формула: $\|x\|_2=\max\limits_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|x(t)|\right)$, задає норму на множині $C[0;1]$.

Тепер перевіримо еквівалентність заданих норм.

Для цього необхідно знайти такі додатні числа C_1 і C_2, при яких для всіх елементів $x\in C[0;1]$ буде справедливою одна з нерівностей: $C_1\|x\|_2\le\|x\|_1\le C_2\|x\|_2$, $C_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le C_2\|x\|_1$, або показати, що таких чисел не існує.

Визначимо оцінки зверху й знизу для $\|x\|_2$ таким чином:

$$\|x\|_2=\max_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|x(t)|\right)\le\max_{0\le t\le 1}\left|t^2+1\right|\cdot\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\le 2\max_{0\le t\le 1}|x(t)|=2\|x\|_1,$$

$$\|x\|_2=\max_{0\le t\le 1}\left(\left|t^2+1\right|\cdot|x(t)|\right)\ge\min_{0\le t\le 1}\left|t^2+1\right|\cdot\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\le 1\cdot\max_{0\le t\le 1}|x(t)|=\|x\|_1.$$

Отже, $\|x\|_1\le\|x\|_2\le 2\|x\|_1$, тобто норми еквівалентні.

Зауважимо, що для доведення нееквівалентності норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ у просторі E потрібно відшукати таку послідовність елементів $\{x_n\}$, для якої або $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}=\infty$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}=0$.

Приклад 2. У просторі $L^p[0;1]$ дано такі норми:

$$\|x\|_1=\left\{\int_0^1|x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},\quad \|x\|_2=\left\{\int_0^1|t-0{,}5||x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

Перевірити їх еквівалентність.

Розв'язування. Визначимо верхню межу для $\|x\|_2$ таким чином:

$$\|x\|_2=\left\{\int_0^1|t-0{,}5||x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}\le\left\{\int_0^1\max_{0\le t\le 1}|t-0{,}5||x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}=0{,}5^{1/p}\left\{\int_0^1|x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}=$$

$$=0{,}5^{1/p}\|x\|_1,$$

тобто $\|x\|_2\le 0{,}5^{1/p}\|x\|_1$.

Знайдемо тепер нижню межу для $\|x\|_2$, тобто

$$\|x\|_2 = \left\{ \int_0^1 |t-0{,}5| |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \int_0^1 \min_{0 \le t \le 1} |t-0{,}5| |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} = 0^{1/p} \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} = 0,$$

отже, $0 \le \|x\|_2$.

Оскільки нижня межа має нульове значення, то умови еквівалентності не виконуються. Упевнимось, що $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ не еквівалентні. Для цього візьмемо функцію: $x(t) = |t-0{,}5|^{-1/p}$, яка не належить простору $L^p[0;1]$, і для якої $\|\cdot\|_2$ скінченна, а $\|\cdot\|_1$ не існує. Оскільки ця функція не належить простору $L^p[0;1]$, то візьмемо такі її зрізи:

$$x_n(t) = \begin{cases} |t-0{,}5|^{-1/p}, \text{якщо } |t-0{,}5|^{-1/p} > \dfrac{1}{n}, \\ 0, \qquad \text{якщо } |t-0{,}5|^{-1/p} \le \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Функції $x_n(t)$ вже належать простору $L^p[0;1]$. Обчислимо їхні норми, а саме:

$$\|x_n\|_2^p = 1 - \frac{2}{n},$$

$$\|x_n\|_1^p = \int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt = \int_0^{0{,}5-\frac{1}{n}} |0{,}5-t|^{-1} dt + \int_{0{,}5+\frac{1}{n}}^1 |t-0{,}5|^{-1} dt = -ln\frac{2}{n} + ln\frac{n}{2} = 2ln\frac{n}{2}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} = \infty$. Отже, норми не еквівалентні.

Будь-який нормований простір може бути перетворений на метричний, якщо відстань між двома елементами x та y визначити таким чином:

$$\rho(x,y) = \|x-y\|. \tag{3.3}$$

Справедливість аксіом метричного простору прямо випливає із сформульованих вище властивостей 1 – 3 норми (перевірте це самостійно). На нормовані простори переносяться таким чином усі ті поняття й факти, які характеризують метричні простори.

Обернене твердження не буде правильним. Метричний простір можна перетворити на нормований лише в тому випадку, коли його метрика має властивість *лінійності*, тобто

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y), \tag{3.4}$$

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y). \tag{3.5}$$

Тоді норму елемента можна визначити такою формулою: $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Приклад 3. З'ясувати, чи можна метричний простір R^4, метрика якого $\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^3 \right\}^{1/3}$, перетворити на нормований.

Розв'язування

Для того, щоб відповісти на поставлене питання, визначимо, чи є лінійною метрика, тобто необхідно перевірити виконання умов (3.4), (3.5), а саме:

$$\rho(x+z, y+z) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} |(x_k + z_k) - (y_k + z_k)|^3 \right\}^{1/3} = \left\{ \sum_{k=1}^{4} |x_k + z_k - y_k - z_k|^3 \right\}^{1/3} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^3 \right\}^{1/3} = \rho(x, y).$$

Таким чином, умову (3.4) виконано.

Перевіримо виконання умови (3.5):

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} |\lambda x_k - \lambda y_k|^3 \right\}^{1/3} = \left\{ \sum_{k=1}^{4} |\lambda|^3 |x_k - y_k|^3 \right\}^{1/3} = \left\{ |\lambda|^3 \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^3 \right\}^{1/3} =$$

$$= |\lambda| \left\{ \sum_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^3 \right\}^{1/3} = |\lambda| \rho(x, y),$$

Як бачимо, умову (3.5) теж виконано.

Отже, вихідний простір може бути перетворений на нормований.

Повний нормований простір називається *банаховим простором* або, коротше, *B-простором*.

Наведемо приклади нормованих просторів. Багато із розглянутих у попередньому розділі метричних (а в § 1 даного розділу – лінійних) просторів, можуть бути наділені природною структурою нормованого простору.

Наприклад:

1. Пряма лінія R стає нормованим простором, коли для всякого числа $x \in R$ задати, що $\| x \| = | x |$.

2. Якщо в дійсному n-вимірному просторі R^n з елементами: $x = (x_1, ..., x_n)$, прийняти, що

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ , \tag{3.6}$$

то всі аксіоми норми буде виконано.

Формула:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\ ,$$

визначає в R^n ту саму метрику, яка вже була розглянута в цьому просторі (приклад 3, п. 2.1 § 2 розділу II).

У цьому ж лінійному просторі можна ввести такі норми:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{3.7}$$

або

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|. \tag{3.8}$$

Ці норми визначають в R^n метрики, які були розглянуті в прикладах 4 й 5 п. 2.1, § 2, розд. II. Можна легко перевірити, що в кожному із цих випадків аксіоми норми дійсно виконані.

У комплексному n-вимірному просторі C^n можна ввести таку норму:

$$|| x || = \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2\ ,$$

або кожну з норм (3.2) або (3.3).

3. У просторі $C[a; b]$ неперервних функцій на відрізку $[a; b]$ введемо норму таким чином:

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|. \tag{3.9}$$

Відповідна цій нормі відстань уже розглядалася в прикладі 14 п. 2.1, § 2, розд. II.

4. Нехай m – простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, ..., x_n, ...)$. Задамо, що

$$\|x\| = \sup_{n} |x_n|. \tag{3.10}$$

Очевидно, що умови 1 – 3 визначення норми тут буде виконано. Метрика, яка породжується в просторі m цією нормою, збігається з тією, котру ми вже розглядали (розд. II, § 2, п. 2.1, приклад 12).

3.2. Підпростори нормованого простору

Ми визначили підпростір лінійного простору L (для якого не було введено жодної топології) як непусту множину L_0, що має таку властивість: коли $x, y \in L_0$, то $\alpha x + \beta y \in L_0$, тобто по відношенню до визначених у просторі L операцій додавання елементів і множення на число множина L_0 сама утворює лінійний простір. У нормованому просторі основну увагу привертають *замкнені лінійні підпростори*, тобто такі, що містять усі свої граничні точки. У скінченновимірному нормованому просторі всякий підпростір автоматично є замкненим (доведіть це самостійно). Це не поширюється на нескінченновимірні простори. Наприклад, у просторі $C[a; b]$ неперервних функцій з нормою (3.9) многочлени утворюють підпростір, але не замкнений.

Інший приклад: у просторі m обмежених послідовностей ті з них, які містять лише скінченне число відмінних від нуля членів, утворюють підпростір. Однак він не буде замкненим з огляду на норму (3.10), бо в його замиканні міститься, наприклад, така послідовність: $(1, 1/2, ..., 1/n, ...)$.

Далі нашому розгляду підлягають тільки замкнені підпростори, тому будемо називати підпростором саме *замкнений* підпростір. Зокрема, підпростором, породженим даною системою елементів $\{x_\alpha\}$, буде найменший замкнений підпростір, який містить систему $\{x_\alpha\}$. Його називають її *лінійним замиканням*.

Сукупність елементів (не обов'язково замкнену), що містить разом із x та y їх довільну лінійну комбінацію: $\alpha x + \beta y$, називають *лінійним багатовидом*.

Система елементів, що лежить у нормованому просторі E, буде називатися повною, якщо породжений нею (замкнений) підпростір збігається з усім простором E. Наприклад, згідно з теоремою Вейєрштрасса, сукупність усіх функцій $1, t, t^2, ..., t^n, ...$ буде повною в просторі неперервних функцій $C\,[a; b]$.

3.3. Фактор-простір нормованого простору

Нехай R – нормований простір і M – деякий його підпростір. Розглянемо фактор-простір: $P = R\backslash M$. Відповідно до розглянутих у п.1.3 положень, P являє собою лінійний простір. Визначимо в ньому норму, задаючи для кожного класу суміжності ξ його норму в такий спосіб:

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \|x\|. \tag{3.11}$$

Покажемо, що при цьому буде виконано сформульовані в п. 4.1 аксіоми нормованого простору. Певна річ, що за будь-яких умов $\|\xi\| \geq 0$. Якщо ξ_0 – нульовий елемент фактор-простору P (тобто ξ_0 збігається з підпростором M), то за $x \in \xi_0$ можна взяти нуль простору R, і тоді $\|\xi_0\| = 0$. І навпаки, якщо $\|\xi\| = 0$, то з визначення норми (3.11) випливає існування в класі ξ послідовності, яка прямує до нуля. Але оскільки підпростір M замкнений, то замкненим буде і кожен клас суміжності, тоді виходить, що $0 \in \xi$, а значить, $\xi = M$, тобто ξ являє собою нульовий елемент у фактор-просторі P. Отже, $\| \xi \| \geq 0$ й $\| \xi \| = 0$ лише тоді, коли ξ – нуль простору P. Таким чином, першу аксіому виконано.

Перевіримо виконання другої аксіоми. Для всякого елемента $x \in R$ і будь-якого числа α буде справедливою рівність:

$$\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \| .$$

Беручи в обох частинах цієї рівності нижню грань за змінною $x \in \xi$, робимо висновок, що

$$\| \alpha \xi \| = | \alpha | \cdot \| \xi \| .$$

Отже, другу аксіому також виконано.

Нарешті, нехай $\xi,\ \eta \in P$ й $x \in \xi,\ y \in \eta$, тоді

$$\|\xi + \eta\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Беручи в правій частині цієї нерівності нижню грань за всіма елементами $x \in \xi,\ y \in \eta$, одержуємо, що

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|.$$

Отже, усі аксіоми нормованого простору для P виконано.

Доведемо тепер, що коли простір R повний, то повним буде й фактор-простір: $P = R/M$. Дійсно, згідно із формулою (3.11) для кожного класу суміжності $\xi \in R/M$ знайдеться елемент $x \in \xi$, що відповідає такій умові:

$$\|\xi\| \geq \frac{1}{2}\|x\| .$$

Нехай $\{\xi_n\}$ – фундаментальна послідовність у просторі P. Переходячи, у разі потреби, до підпослідовності, можна вважати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| \xi_{n+1} - \xi_n \|$ збігається. Додавши до $\{\xi_n\}$ ще ξ_0 – нульовий елемент простору P, виберемо елемент $x_n \in \xi_{n+1} - \xi_n$ ($n = 0, 1, 2, ...$) таким чином, щоб забезпечити виконання умови:

$$\| \xi_{n+1} - \xi_n \| \geq \frac{1}{2} \| x_n \| .$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| x_n \|$ збігається, отже, з огляду на повноту простору R, збігається й ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Задамо, що $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \| x_n \|$, тоді, позначивши через ξ клас, який включає x, робимо висновок (оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k \in \xi_n$ для кожного n), що

$$\| \xi - \xi_n \| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \to 0, \text{ коли } n \to \infty,$$

тобто $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$.

Отже, *фактор-простір банахового простору, відповідний будь-якому його (замкненому) підпростору, теж буде банаховим простором.*

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Що називають нормою елемента.
2. Сформулюйте аксіоми нормованого простору.
3. Дайте визначення нормованого простору.
4. Які норми називають еквівалентними?
5. Який простір називають банаховим?
6. Наведіть приклади нормованих просторів.
7. Який зв'язок існує між метричними та нормованими просторами?
8. Яким чином можна перетворити нормований простір у метричний?
9. За яких умов метричний простір можна перетворити на нормований?
10. Дайте визначення підпростору.
11. Що називають лінійним замиканням системи елементів $\{x_\alpha\}$?
12. Що прийнято називати лінійним багатовидом?
13. Дайте визначення фактор-простору нормованого простору.
14. Які простори називають банаховими?
15. Довести, що замикання лінійного багатовиду являє собою підпростір.
16. Які з перелічених нижче метричних просторів можуть бути перетворені на нормовані? Які ні? Чому?

а) $\rho(x,y) = \max\limits_{k=1,4} |x_k - y_k|$;

б) $\rho(x,y) = \max\limits_{k=1,4} k \cdot |x_k - y_k|^{1/8}$;

в) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{4} |x_k - y_k|$;

г) $\rho(x,y) = \max\limits_{k=1,4} \dfrac{|x_k - y_k|^{1/8}}{1 + |x_k - y_k|^{1/8}}$;

д) $\rho(x,y) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{4} (x_k - y_k)^2 \right\}^{1/2}$;

е) $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + \max\limits_{k=1,4} \left(\dfrac{1}{k} \cdot |x_k - y_k|^{1/2} \right)$;

ж) $\rho(x,y) = \max\limits_{k=1,4} |x_k - y_k|^{1/2}$;

и) $\rho(x,y) = \dfrac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \sum\limits_{k=2}^{4} k^2 \cdot |x_k^3 - y_k^3|$;

к) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{4} |x_k - y_k|^{1/k}$.

17. Перевірити аксіоми норми для $\|\cdot\|_2$ та перевірити еквівалентність норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ у просторі $C[0;1]$, якщо

$$\|x\|_1 = \max_{0\le t\le 1}|x(t)|; \quad \|x\|_2 \max_{0\le t\le 1}|g(t)|\cdot|x(t)|,$$

а функцію $g(t)$ задано таким чином:

а) $g(t)=t^2-\frac{9}{16}$;

б) $g(t)=\exp\left(\frac{t}{2}\right)$;

в) $g(t)=\left|t-\frac{1}{3}\right|^{1/2}$;

г) $g(t)=\ln(t+1)$;

д) $g(t)=\sin\left(t-\frac{1}{3}\right)$;

е) $g(t)=t^2$;

ж) $g(t)=t^2-t$;

и) $g(t)=\sqrt{t^2+0{,}1}$;

к) $g(t)=cht$;

л) $g(t)=sht$;

м) $g(t)=t^2+4$;

н) $g(t)=t^2+2t$.

18. Перевірити еквівалентність норм у просторі $L^2[0;1]$, якщо $\|x\|_1=\left\{\int_0^1|x(t)|^2dt\right\}^{1/2}$, $\|x\|_2=\left\{\int_0^1|g(t)x(t)|^2dt\right\}^{1/2}$, причому функцію $g(t)$ задано так само, як і в задачі 17, *а – н*.

19. Перевірити еквівалентність норм у просторі $L[0;1]$, якщо $\|x\|_1=\left\{\int_0^1|x(t)|dt\right\}$, $\|x\|_2=\left\{\int_0^1|g(t)x(t)|dt\right\}$, а функцію $g(t)$ задано так само, як і в задачі 17, *а – н*.

20. Нехай $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ й $\|x\|_1=\|x\|_E$, $\|x\|_2=\|(a_1,x_2,a_2,x_2,\ldots)\|$, причому $a=\left(1,\sqrt{2},\ldots,n^{1/n},\ldots\right)$. Перевірити еквівалентність цих норм, за таких умов: *а*) $E=m$; *б*) $E=l_1$; *в*) $E=l_2$; *г*) $E=c_0$.

21. Нехай $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $y=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)$, $\|x\|_1=\|x\|_E$, $\|x\|_2=\|y\|_E$. Перевірити еквівалентність норм $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$, за таких умов: *а*) $E=m$; *б*) $E=l_1$; в) $E=l_2$; г) $E=c_0$.

22. Перевірити у просторі R^4 еквівалентність таких норм:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|; \qquad \|x\|_\infty = \max_k |x_k|; \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Чи буде повним простір $C[0;1]$ з нормою $\|\cdot\|_2$, яку дано в задачі 17, *а – н* відповідно?

23. Довести, що в просторі R^n усі норми еквівалентні.

24. Довести, що будь-який нормований простір є топологічним векторним простором.

25. Перевірити, що норми: $\|x\|_0 = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$ та $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)| dt$, не еквівалентні в просторі $C[0;1]$.

26. Показати, що норми $\sup(\|x\|_1, \|x\|_2)$, $\|x\|_1 + \|x\|_2$, $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2}$ еквівалентні на декартовому добутку $E \times E$, де $\|x\|_1, \|x\|_2$ – дві довільні норми в просторі E.

27. Нехай R – лінійний нормований простір; доведіть справедливість таких тверджень:

1) усякий скінченновимірний лінійний багатовид у просторі R замкнений;

2) якщо M – підпростір, а N – скінченновимірний підпростір у просторі R, то їхня сума: $M + N = \{x : x = y + z,\ y \in M,\ z \in N\}$, замкнена; наведіть приклади двох (замкнених) лінійних підпросторів у просторі l_2, сума яких не буде замкненою.

28. Нехай R – банахів простір, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ – послідовність вкладених замкнених куль у ньому. Доведіть, що вона має непустий перетин (радіуси куль не обов'язково прямують до 0).

29. Наведіть приклад послідовності вкладених непустих обмежених замкнених опуклих множин у деякому B-просторі, що мають порожній перетин.

§ 4. Евклідові простори

4.1. Визначення й приклади евклідових просторів

Один із добре відомих способів уведення норми в лінійному просторі – це задання в ньому скалярного добутку. Нагадаємо, що *скалярним добутком* у дійсному лінійному просторі R називається дійсна функція двох аргументів (x, y), що визначена для кожної пари елементів x, $y \in R$ і задовольняє такі умови:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y)$;
4) $(x, x) > 0$, причому $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$.

Лінійний простір із фіксованим у ньому скалярним добутком називається *евклідовим простором*. В евклідовому просторі R норма вводиться за допомогою такої формули:

$$||\,x\,|| = \sqrt{(x, x)}\,.$$

Із властивостей 1 – 4 скалярного добутку випливає, що всі аксіоми норми при цьому буде виконано.

Дійсно, виконання аксіом 1 і 2 норми очевидне, а виконання аксіоми 3 (нерівність трикутника) випливає з нерівності *Коші – Буняковського*, тобто

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|, \tag{4.1}$$

яку ми зараз доведемо.

Розглянемо квадратний тричлен від дійсної змінної λ, невід’ємний при всіх її значеннях, а саме:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = ||x||^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + ||y||^2 .$$

Цей вираз являє собою скалярний квадрат деякого вектора, тому $\varphi(\lambda) \ge 0$ для всіх значень змінної λ. Це означає, що дискримінант цього квадратного тричлена менший або дорівнює нулю, тобто $4(x,\ y)^2 - 4||\,x\,||^2||\,y\,||^2 \le 0$, що й потрібно було довести.

Зауважимо, що в евклідовому просторі сума, множення на число й скалярний добуток неперервні, тобто якщо $x_n \to x$, $y_n \to y$ (у сенсі збіжності за нормою) і $\lambda_n \to \lambda$ (як числова послідовність), то

$$x_n + y_n \to x + y\,;$$

$$\lambda_n x_n \to \lambda x\,;$$

$$(x_n,\ y_n) \to (x,\ y).$$

Доведення цих фактів базується на використанні нерівності Коші – Буняковского (4.1).

Наявність у просторі R скалярного добутку дозволяє задати в ньому не тільки норму (тобто довжину) вектора, але й кут між векторами, зокрема, кут φ між векторами x й y визначають за такою формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{4.2}$$

При цьому з нерівності Коші – Буняковского (4.1) випливає, що права частина формули (4.2), за абсолютним значенням не перевищує 1, отже, формула (4.2) для будь-яких ненульових векторів x та y встановлює деякий кут φ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Коли $(x, y) = 0$, то з виразу (4.2) випливає, що $\varphi = \pi/2$; у цьому випадку вектори x та y називаються *ортогональними*.

Система ненульових векторів $\{x_\alpha\}$ простору R називається *ортогональною*, якщо

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0, \text{ коли } \alpha \ne \beta.$$

Якщо вектори $\{x_\alpha\}$ ортогональні, то вони лінійно незалежні. Справді, нехай

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n} = 0;$$

оскільки $\{x_\alpha\}$ – ортогональна система, то

$$\left(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}\right) = a_i \left(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}\right) = 0,$$

але $\left(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1}\right) \ne 0$ і, виходить, що $a_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Якщо ортогональна система $\{x_\alpha\}$ повна (тобто найменший замкнений підпростір, у якому вона міститься, являє собою весь простір R), то вона називається *ортогональним базисом*. Коли ж при цьому норма кожного елемента дорівнює 1, то система $\{x_\alpha\}$ називається *ортогональним нормованим базисом*. Взагалі, коли система $\{x_\alpha\}$ (повна чи ні) відповідає такій умові:

$$\left(x_\alpha, x_\beta\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha \ne \beta; \\ 1, & \text{якщо } \alpha = \beta, \end{cases}$$

то вона називається *ортогональною нормованою* (коротше *ортонормальною*) *системою*. Певна річ, що коли $\{x_\alpha\}$ – ортогональна система, то $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ буде ортогональною нормованою системою.

Розглянемо деякі приклади евклідових просторів й ортогональних базисів, які існують в них.

1. Множина впорядкованих систем дійсних чисел: $x = (x_1, ..., x_n)$, зі звичайними операціями додавання, множення на число й скалярним добутком, який визначено за такою формулою:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{4.3}$$

являє собою широко відомий приклад евклідового простору, так званий *n-вимірний арифметичний простір* R^n. Нормований базис у ньому (один з нескінченного числа можливих) утворюють такі вектори:

$$
\begin{gathered}
e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\\
e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
e_n = (0, 0, 0, ..., 1).
\end{gathered}
$$

2. Простір l_2, елементами якого виступають послідовності: $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, що задовольняють умову: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, а скалярний добуток задано такою формулою:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \tag{4.4}$$

являє собою евклідів простір.

Дійсно, збіжність ряду, записаного у правій частині формули (4.4), як необхідність випливає з нерівності Коші – Буняковського. Перелічені вище властивості 1 – 4 скалярного добутку можна перевірити безпосередньо. Найпростіший ортогональний нормований базис у просторі l_2 утворюють такі вектори:

$$
\begin{gathered}
e_1 = (1, 0, 0, ...),\\
e_2 = (0, 1, 0, ...),\\
e_3 = (0, 0, 1, ...),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

Ортогональність і нормованість цієї системи очевидні. Разом з тим система (4.5) є повною: нехай $x = (x_1 ..., x_n, ...)$, це будь-який вектор з l_2 й $x^{(n)} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$. Тоді $x^{(n)}$ є лінійною комбінацією векторів $e_1, ..., e_n$, а $\| x^{(n)} - x \| \to 0$, коли $n \to \infty$.

3. Простір $C_2[a; b]$, що складається з неперервних на відрізку $[a, b]$ дійсних функцій, скалярний добуток яких визначено за таким правилом:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt, \tag{4.6}$$

також є евклідовим.

Серед різних ортогональних базисів, які можна назвати в ньому, найважливішим є тригонометрична система, що складається з таких функцій:

$$\frac{1}{2}, \cos n\frac{2\pi t}{b-a}, \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Ортогональність цієї системи перевіряється безпосередньо.

Якщо розглядаються неперервні функції на відрізку, довжина якого дорівнює 2π, наприклад, на [–π; π], то відповідна тригонометрична система буде мати такий вигляд: 1/2, cos nt, sin nt ($n = 1, 2, ...$).

Система (4.7) повна. Дійсно, згідно з теоремою Вейєрштрасса, усяка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція φ, що набуває в точках a й b однакових значень, може бути подана у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності тригонометричних многочленів, тобто лінійних комбінацій елементів системи (4.7). Така послідовність прямує до функції φ за нормою простору $C_2[a; b]$. Якщо ж f – довільна функція із $C_2[a; b]$, то її можна подати як границю (за нормою простору $C_2[a; b]$) послідовності функцій φ_n, кожна з яких збігається з f на відрізку $[a; b - 1/n]$, буде лінійною на $[b - 1/n; b]$ а в точці b набуває того самого значення, що й у точці a (рис. 4.1).

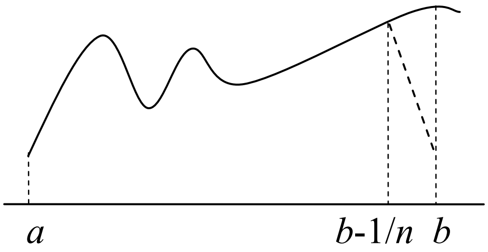


Рис. 4.1. Схематичне зображення графіка функції φ_n

Отже, кожен елемент простору $C_2[a; b]$ можна наблизити як завгодно точно (у метриці цього простору) за допомогою лінійних комбінацій елементів системи (4.7), а це й означає її повноту.

Зауважимо, що кожен із розглянутих просторів є сепарабельним, тобто містить у собі лічильну всюди щільну множину (доведіть це самостійно).

Побудуємо несепарабельний евклідів простір. З цією метою розглянемо на прямій усілякі функції $x(t)$, для кожної з яких множина точок $t_1, t_2, ...$, де $x(t)$, відмінна від нуля, буде не більше ніж лічильною, а $\sum x^2(t)$, узята за всіма такими точками, скінченною. Операції додавання й множення на число визначимо в цьому просторі, як звичайні операції додавання й множення функцій, а скалярний добуток – за такою формулою:

$$(x, y) = \sum x(t)\, y(t),$$

тут сума береться за множиною тих точок t, у яких $x(t)y(t) \neq 0$. Відзначимо, що цей простір є повним, а його несепарабельність доведіть самостійно.

4.2. Існування ортогональних базисів, ортогоналізація

Далі обмежимося розглядом сепарабельних евклідових просторів.

Отже, нехай R – сепарабельний евклідів простір. Упевнимося, що в такому просторі всяка ортогональна система буде не більше ніж лічильною.

Дійсно, розглянуту систему $\{\varphi_\alpha\}$ можна вважати не тільки ортогональною, але й нормованою (в іншому випадку ми замінили б її системою $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$). При цьому $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}$, якщо $\alpha \neq \beta$.

Розглянемо сукупність куль $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Ці кулі не перетинаються. Якщо лічильна множина $\{\psi_n\}$ усюди щільна в просторі R, то кожна така куля містить принаймні один елемент із множини $\{\psi_n\}$. Отже, кількість таких куль (а виходить, і елементів φ_α) не більше ніж лічильна.

У кожному з описаних вище евклідових просторів ми назвали ортогональні базиси. Доведемо тепер загальну теорему, аналогічну теоремі про існування ортогонального базису в n-вимірному евклідовому просторі.

Теорема 4.1 (*про ортогоналізацію*)

Нехай

$$f_1, \ldots, f_n, \ldots \tag{4.8}$$

– лінійно незалежна система елементів в евклідовому просторі R. Тоді в R існує система елементів

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{4.9}$$

яка задовольняє такі умови:

1) система (4.9) ортогональна й нормована;

2) кожен елемент φ_n являє собою лінійну комбінацію елементів $f_1, \ldots, f_n$, тобто

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n, \text{ причому } a_{nn} \neq 0;$$

3) кожен елемент f_n подано в такому вигляді:

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad \text{причому} \quad b_{nn} \neq 0.$$

Кожен з елементів системи (4.9) установлено умовами 1 – 3 однозначно з точністю до множника ± 1.

Доведення

Елемент φ_1 з огляду на припущення теореми будемо відшукувати у такому вигляді: $\varphi_1 = a_{11} f_1$; при цьому коефіцієнт a_{11} повинен задовольняти таку умову:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1.$$

Тоді

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Отже, елемент φ_1 можна знайти за допомогою цих рівностей однозначно (з точністю до знака). Нехай елементи φ_k ($k < n$), які задовольняють умови 1 – 3, вже побудовано. Тоді елемент f_n можна подати в такому вигляді:

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

при цьому

$$(h_n, \varphi_k) = 0, \text{ коли } k < n.$$

Дійсно, відповідні коефіцієнти b_{hk}, а виходить і елемент h_n, можна обчислити однозначно, зважаючи на такі умови:

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Очевидно, що $(h_n, h_n) > 0$ [припущення $(h_n, h_n) = 0$, суперечило б лінійній незалежності системи (4.8)]. Задамо, що

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Із індуктивної побудови ясно, що h_n, а виходить і φ_n, виражаються через систему $f_1, \ldots, f_n$, тобто $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n$, причому $a_{nn} = \dfrac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$.

Крім того,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = 0, \quad k < n;$$

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0.$$

Таким чином, елемент φ_n відповідає умовам теореми.

Теорему доведено.

Перехід від системи (4.8) до системи (4.9), яка задовольняє умови 1 – 3, називається *процесом ортогоналізації*.

Певна річ, що підпростори, породжені системами (4.8) і (4.9), збігаються між собою. Отже, обидві ці системи повні або не повні одночасно.

Наслідок. *У сепарабельному евклідовому просторі R існує ортогональний нормований базис.*

Дійсно, нехай $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ – лічильна всюди щільна множина в просторі R. Виберемо з неї повну систему лінійно незалежних елементів $\{f_n\}$. Для цього достатньо із послідовності $\{\psi_n\}$ вилучити всі ті елементи ψ_k, кожний з яких може бути подано у вигляді лінійної комбінації ψ_i, коли $i < k$. Застосувавши до отриманої в такий спосіб повної системи лінійно незалежних елементів процес ортогоналізації, ми зможемо побудувати ортогональний нормований базис.

4.3. Нерівність Бесселя. Замкнені ортогональні системи

Вибравши в *n-вимірному* евклідовому просторі ортогональний нормований базис $e_1 ..., e_n$, можна кожен вектор $x \in R^n$ записати в такому вигляді:

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \,, \tag{4.10}$$

тут

$$c_k = (x, e_k). \tag{4.11}$$

З'ясуємо, яким чином можна узагальнити розкладання (4.10) у застосуванні до евклідового нескінченновимірного простору.

Нехай

$$\varphi_1, ..., \varphi_n, ... \tag{4.12}$$

– ортогональна нормована система в евклідовому просторі R й f – довільний елемент із R. Зіставимо з елементом $f \in R$ послідовність таких чисел:

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, ...; \tag{4.13}$$

числа c_k будемо називати *координатами*, або *коефіцієнтами Фур'є* елемента f за системою $\{\varphi_k\}$, а ряд (поки що формальний):

$$\sum_{k} c_k \varphi_k \,, \tag{4.14}$$

назвемо *рядом Фур'є* елемента f за системою $\{\varphi_n\}$.

Природно виникає питання: чи буде збіжним ряд (4.14), тобто чи прямує послідовність його часткових сум (у сенсі метрики простору R) до якої-небудь границі, а якщо так, то чи збігається його сума з вихідним елементом f?

Для того, щоб відповісти на ці питання, спочатку розглянемо таку задачу: при заданому значенні n підібрати коефіцієнти a_k ($k = 1, ..., n$) так, щоб відстань між f і сумою:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \,, \tag{15}$$

була мінімальною.

Обчислимо цю відстань. Оскільки система (4.12) ортогональна й нормована, то

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) = (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Зрозуміло, що мінімального значення цей вираз набуває тоді, коли останній доданок дорівнює 0, тобто якщо

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, ..., n. \tag{4.16}$$

У цьому випадку

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \tag{4.17}$$

Таким чином, ми показали, що серед усіх сум, що мають вигляд (4.15), при даному значенні n найменше відхиляється від елемента f часткова сума його ряду Фур'є.

Цьому результату можна дати таке геометричне тлумачення: елемент $f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ ортогональний до всіх лінійних комбінацій вигляду $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$, тобто, ортогональний до підпростору, породженого елементами φ_1, …, φ_n, у тому і тільки в тому випадку, коли виконується умова (4.16) (перевірте це самостійно).

Отже, отриманий нами результат являє собою узагальнення відомої теореми елементарної геометрії: довжина перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму або площину, менша, від довжини будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки.

Оскільки завжди $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, то з рівності (4.17) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

Тут значення n вибране довільно, а права частина виразу не залежить від n; отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ є збіжним, а тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 . \tag{4.18}$$

Ця нерівність називається *нерівністю Бесселя*. З геометричного погляду вона означає, що сума квадратів проекцій вектора f на взаємно ортогональні напрямки не перевищує квадрата довжини самого вектора f. Уведемо ще одне важливе поняття.

Ортогональна нормована система (4.12) називається *замкненою*, якщо для будь-якого елемента $f \in R$ буде справедливою така рівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 , \tag{4.19}$$

що була названа *рівністю Парсеваля*.

З огляду на рівність (4.17) замкненість системи (4.12) рівносильна твердженню: для кожного елемента $f \in R$ часткові суми його ряду Фур'є $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ утворюють послідовність, яка прямує до f.

Поняття замкненості ортогональної нормованої системи тісно пов'язане з уведеним вище поняттям повноти системи.

Теорема 4.2. У сепарабельному евклідовому просторі R усяка повна ортогональна нормована система буде замкненою і навпаки.

Доведення

Нехай система $\{\varphi_n\}$ замкнена; тоді, який би не був елемент $f \in R$, послідовність часткових сум його ряду Фур'є прямує до f. Це означає, що лінійні комбінації елементів системи $\{\varphi_n\}$ усюди щільні в просторі R, тобто система $\{\varphi_n\}$ повна. І навпаки, нехай система $\{\varphi_n\}$ повна, тобто будь-який елемент $f \in R$ можна як завгодно точно апроксимувати такою лінійною комбінацією: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ елементів системи $\{\varphi_n\}$; часткова сума $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ ряду Фур'є елемента f дає не менш точну апроксимацію. Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ прямує до елемента f, і рівність Парсеваля має місце. Теорему доведено.

У попередньому пункті ми довели існування повних ортогональних нормованих систем у сепарабельному евклідовому просторі. Оскільки для ортогональних нормованих систем поняття замкненості й повноти збігаються, то існування замкнених ортогональних систем у просторі R не потребує нового доведення, а наведені в попередньому пункті приклади повних ортогональних нормованих систем одночасно являють собою і приклади замкнених систем.

У попередніх міркуваннях ми постійно припускали, що розглянуті ортогональні системи є нормованими. Але можна переформулювати поняття коефіцієнтів Фур'є, ряду Фур'є й т. д. застосовуючи їх до будь-яких ортогональних систем.

Нехай $\{\varphi_n\}$ – довільна ортогональна система. На її основі можна побудувати нормовану систему, що складається з таких елементів: $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$.

Для будь-якого елемента $f \in R$ можна записати, що

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

при цьому

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{4.20}$$

Коефіцієнти a_n, визначені з використанням формули (4.20), назвемо *коефіцієнтами Фур'є* елемента f за ортогональною (ненормованою) системою $\{\varphi_n\}$. Підставивши в нерівність (4.18), замість коефіцієнтів c_n, їх значення: $c_n = a_n \|\varphi_n\|$, отримані з рівності (4.20), одержуємо таку нерівність:

$$\sum_{n=1}^{\propto} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \le \|f\|^2. \tag{4.21}$$

Вона називається нерівністю Бесселя для довільної ортогональної системи.

4.4. Повні евклідові простори. Теорема Рісса – Фішера

Раніше нами були охарактеризовані сепарабельні евклідові простори; тепер припустимо, що розглянуті простори повні.

Отже, нехай R – повний сепарабельний евклідів простір й $\{\varphi_n\}$ – деяка ортогональна нормована система в ньому (не обов'язково повна). З нерівності Бесселя випливає, що для того щоб числа $c_1, ..., c_n, ...$ слугували коефіцієнтами Фур'є якого-небудь елемента $f \in R$, необхідна збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\propto} c_n^2$.

Виявляється, що у повному просторі ця умова буде не тільки необхідною, але й достатньою, тобто справедливою буде наведена нижче теорема.

Теорема 4.3 (Рісса – Фішера). Нехай $\{\varphi_n\}$ – довільна ортогональна нормована система в повному евклідовому просторі R, і нехай числа $c_1, ..., c_n, ...$ забезпечують збіжність ряду:

$$\sum_{k=1}^{\propto} c_k^2. \tag{4.22}$$

Тоді існує елемент $f \in R$, для якого характерні такі властивості:

$$c_k = (f, \varphi_k);$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доведення

Задамо, що $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, тоді

$$\left\| f_{n+p} - f_n \right\|^2 = \left\| c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p} \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 .$$

Із збіжності ряду (4.22), з огляду на повноту простору R, випливає, що послідовність $\{f_n\}$ прямує до деякого елемента $f \in R$.

Далі,

$$\left(f, \varphi_i\right) = \left(f_n, \varphi_i\right) + \left(f - f_n, \varphi_i\right), \tag{4.23}$$

причому перший доданок у правій частині виразу, коли $n \geq i$, дорівнює c_i, а другий прямує до нуля, якщо $n \to \infty$, оскільки

$$\left|\left(f - f_n, \varphi_i\right)\right| \leq \left\| f - f_n \right\| \cdot \left\| \varphi_i \right\| .$$

Ліва частина рівності (4.23) від n не залежить; тому, переходячи в цій рівності до границі, коли $n \to \infty$, робимо висновок, що

$$\left(f, \varphi_i\right) = c_i .$$

Оскільки, за визначенням f, $\left\| f - f_n \right\| \to 0$, коли $n \to \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) .$$

Дійсно,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k , f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0 ,$$

якщо $n \to \infty$.

Теорему доведено.

У зв’язку з цим, доведемо ще одне корисне положення.

Теорема 4.4. Для того, щоб ортогональна нормована система $\{\varphi_n\}$ у повному сепарабельному евклідовому просторі R була повною, необхідно й достатньо, щоб у ньому не існувало ненульового елемента, ортогонального до всіх елементів системи $\{\varphi_n\}$.

Доведення

Нехай система $\{\varphi_n\}$ повна й унаслідок цього замкнена. Якщо елемент f ортогональний до всіх елементів системи $\{\varphi_n\}$, то всі його коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0 ,$$

тобто $f = 0$.

Припустимо протилежне, нехай система $\{\varphi_n\}$ не повна. Тоді в просторі R існує елемент $g \neq 0$, для якого буде справедливою така нерівність:

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \text{причому } c_k = (g, \varphi_k).$$

На підставі теореми Рісса – Фішера існує елемент $f \in R$, відповідний таким умовам:

$$(f, \varphi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Елемент $f - g$ буде ортогональним до всіх елементів φ_i. Із нерівності:

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g),$$

випливає, що $f - g \neq 0$.

Теорему доведено.

Система $\{\varphi_\alpha\}$ векторів евклідового простору R називається *тотальною*, якщо в ньому не існує відмінних від 0 векторів, ортогональних до всіх елементів системи φ_α. Теорема 4.4. означає, що в повному евклідовому просторі тотальність системи векторів еквівалентна її повноті.

Завдання. Доведіть, що в неповних просторах можуть існувати тотальні, але не повні системи.

4.5. Характеристична властивість евклідових просторів

У пункті 4.1 було показано, яким чином можна визначити норму, коли в просторі задано скалярний добуток. Розглянемо тепер інше питання. Нехай R – нормований простір. Яким додатковим умовам має відповідати норма, визначена в просторі R, щоб він був евклідовим, тобто норма у ньому була б зумовлена деяким скалярним добутком. Інакше кажучи, як охарактеризувати евклідові простори в класі всіх нормованих просторів?

Теорема 4.5. Для того, щоб нормований простір був евклідовим, необхідно й достатньо, щоб для будь-яких двох елементів f та g виконувалася така рівність:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\| + \|g\|). \tag{4.24}$$

Оскільки $f + g$ та $f - g$ – це діагоналі паралелограма, побудованого на сторонах f та g, то рівність (4.24) описує відому властивість паралелограма в евклідовому просторі: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Доведення цієї теореми можна знайти в підручнику [4] (гл. III, § 4, теорема 8).

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Які простори називають евклідовими? Наведіть приклади.
2. Які простори називають гільбертовими?
3. Яким чином можна задати норму в евклідовому просторі?
4. Яка система елементів називається ортогональною? Нормованою? Ортонормальною?
5. Сформулюйте й доведіть теорему про ортогоналізацію.
6. Наведіть приклад (несепарабельного) евклідового простору, у якому немає жодного ортогонального базису.
7. Доведіть, що в повному евклідовому просторі (не обов'язково сепарабельному) існує ортогональний нормований базис.
8. Доведіть, що в повному евклідовому просторі (не обов'язково сепарабельному) всяка послідовність непустих вкладених опуклих замкнених обмежених множин має непустий перетин.
9. Сформулюйте й доведіть теорему Рісса – Фішера.
10. Яким вимогам повинна відповідати норма, щоб отриманий нормований простір був евклідовим?
11. Нехай H – повний евклідів простір (не обов'язково сепарабельний), тоді в ньому існує повна ортогональна нормована система $\{\varphi_\alpha\}$ (див. вище завд. 7). Довести, що для будь-якого вектора $f \in H$ справедливі такі розкладання:

$$f = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha , \qquad \| f \|^2 = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha)^2 ,$$

тут суми, що розташовані праворуч, мають не більше ніж лічильну кількість відмінних від 0 доданків.

РОЗДІЛ IV
ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ Й ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

§ 1. Неперервні лінійні функціонали

1.1. Неперервні лінійні функціонали в топологічних лінійних просторах

У § 1 розділу III ми вже розглядали функціонали, визначені на лінійному просторі. Якщо говорити про функціонали, задані на топологічному лінійному просторі, то найбільш цікавими з них будуть *неперервні* функціонали.

Функціонал f, визначений на просторі E, називається *неперервним*, якщо для всякого елемента $x_0 \in E$ й усякого числа $\varepsilon > 0$ існує окіл U елемента x_0, котрий відповідає такій умові:

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon, \text{ коли } x \in U . \tag{1.1}$$

Це визначення буде справедливим, зокрема, і щодо лінійних функціоналів.

Якщо E – скінченновимірний топологічний лінійний простір, то всякий лінійний функціонал на ньому автоматично є неперервним. У загальному випадку з лінійності функціонала його неперервність не випливає. Але лінійні функціонали мають дуже важливу властивість, яку ми сформулюємо нижче.

Твердження 1.1. Якщо лінійний функціонал f неперервний у якій-небудь одній точці $x \in E$, то він неперервний і всюди на просторі E.

Доведення

Дійсно, нехай y – довільна точка простору E і нехай $\varepsilon > 0$. Виберемо окіл U точки x так, щоб виконувалася умова (4.1). Тоді зрушення цього околу

$$V - U + (y - x)$$

буде шуканим околом точки y, оскільки, якщо $z \in V$, то $z + x - y \in U$, отже,

$$\left|f(z) - f(y)\right| = \left|f(z - y + x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Твердження доведено.

Таким чином, перевіряти неперервність лінійного функціонала достатньо в одній точці, це може бути, наприклад, точка 0.

Якщо E – простір, характерний першою аксіомою лічильності, то неперервність лінійного функціонала на ньому можна сформулювати, користуючись термінами послідовностей: функціонал f називається неперервним у точці $x \in E$, коли із того, що $x_n \to x$, випливає: $f(x_n) \to (x)$ (спробуйте самостійно довести рівносильність цього визначення неперервності наведеному вище, з огляду на виконання першої аксіоми лічильності).

Теорема 1.1. Для того щоб лінійний функціонал f був неперервним на просторі E, необхідно й достатньо, щоб існував такий окіл нуля в E, на якому функціонал f був би обмеженим.

Доведення

Якщо функціонал f неперервний у точці 0, то для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує окіл нуля, на якому

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

А це означає обмеженість функціонала f.

І навпаки, нехай U – окіл нуля, що відповідає такій умові:

$$|f(x)| < C, \quad \text{коли} \quad x \in U,$$

і нехай $\varepsilon > 0$. Тоді $\frac{\varepsilon}{C}U$ являє собою окіл нуля, на якому $|f(x)| < \varepsilon.$ Тим самим доведено неперервність функціонала f в точці 0, а значить, і всюди на просторі E.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що для виявлення неперервності лінійного функціонала достатньо перевірити, чи буде він обмеженим.

Приклад. Установити, чи є лінійним і неперервним такий функціонал:

$$f(x) = \int_a^b x(t)(b-t)^n \, dt, \; x(t) \in C_{[a;b]}?$$

Розв'язування

Перевіримо функціонал на лінійність.

Для цього обчислимо його значення в елементах $(x + y)$ та λx, а саме:

$$f(x+y) = \int_a^b (x(t) + y(t))(b-t)^n \, dt = \int_a^b x(t)(b-t)^n \, dt + \int_a^b y(t)(b-t)^n \, dt = f(x) + f(y),$$

$$f(\lambda x) = \int_a^b \lambda \cdot x(t)(b-t)^n \, dt = \lambda \cdot \int_a^b x(t)(b-t)^n \, dt = \lambda \cdot f(x).$$

Умови лінійності виконуються , отже, функціонал є лінійним.

Перевіримо даний функціонал на неперервність.

З цією метою необхідно визначити сталу C, з огляду на виконання такої умови: $|f(x)| \le C \cdot \|x\|$, де $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$, тобто

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)(b-t)^n\,dt\right| \le \left|\int_a^b \max_{a\le t\le b} x(t)(b-t)^n\,dt\right| \le \max_{a\le t\le b}|x(t)|\left|\int_a^b (b-t)^n\,dt\right| =$$

$$= \max_{a\le t\le b}|x(t)|\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)}(-1)\right]_a^b = \max_{a\le t\le b}|x(t)|\left(\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}\right) = \|x\|\cdot\left(\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}\right).$$

Звідси $C = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}$.

Отже, функціонал є обмеженим, а значить і неперервним.

Відповідь: функціонал: $f(x) = \int\limits_a^b x(t)(b-t)^n\,dt$, є лінійним і неперервним у просторі $C[a;b]$.

1.2. Лінійні функціонали на нормованих просторах

Нехай розглянутий простір E – нормований. За теоремою 4.1 будь-який неперервний лінійний функціонал f є обмеженим у деякому околі нуля. Але в нормованому просторі всякий окіл нуля містить кулю й тому виходить, що функціонал f обмежений на деякій кулі. З огляду на лінійність функціонала, це рівносильно його обмеженості на будь-якій кулі, зокрема, на одиничній: $\|x\| \le 1$. Навпаки, з обмеженості функціонала f на одиничній кулі випливає, з огляду на ту саму теорему 4.1, його неперервність (оскільки внутрішність цієї кулі являє собою окіл нуля).

Отже, *у нормованому просторі лінійний функціонал неперервний тоді й тільки тоді, коли його значення на одиничній кулі обмежені в сукупності.*

Нехай f – неперервний лінійний функціонал у нормованому просторі E. Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|, \tag{1.2}$$

тобто точну верхню грань значень $|f(x)|$ на одиничній кулі простору E, назвемо *нормою* функціонала f.

Сформулюємо такі майже очевидні властивості $\|f\|$:

1) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\ne 0}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$;

це відразу випливає з того, що $\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right|$ для всіх $x \neq 0$.

2) Для будь-якого елемента $x \in E$

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|. \tag{1.3}$$

Дійсно, якщо $x \neq 0$, то елемент $\frac{x}{\|x\|}$ належить одиничній кулі, отже, згідно з визначенням норми функціонала,

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|,$$

звідки випливає нерівність (1.3). Якщо ж $x = 0$, то в обох частинах нерівності (1.3) будуть нулі.

Розглянемо *приклади лінійних функціоналів* у нормованих просторах.

1. Нехай R^n – n-вимірний евклідів простір та a – який-небудь фіксований вектор у ньому. Скалярний добуток:

$$f(x) = (x, a), \text{ де } x \text{ перебігає весь простір } R^n,$$

являє собою лінійний функціонал на R^n.

Беручи до уваги нерівність Коші – Буняковського,

$$|f(x)| = |(x, a)| \leq \|x\| \cdot \|a\|. \tag{1.4}$$

Отже, цей функціонал обмежений, а виходить і неперервний на просторі R^n. З нерівності (1.4) випливає, що

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|.$$

Оскільки права частина цієї нерівності не залежить від елемента x, то $\sup\limits_{x} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|$, отже $\|f\| \leq \|a\|$.

Але коли $x = a$, то $f(a) = |(a, a)| = \|a\|^2$, тобто $\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|$, тому $\|f\| = \|a\|$.

2. Інтеграл $I(x)=\int\limits_a^b x(t)dt,$ де $x(t)$ – неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, являє собою лінійний функціонал у просторі $C[a; b]$. Цей функціонал обмежений, а його норма дорівнює $(b - a)$. Дійсно,

$$|I(x)|=\left|\int\limits_a^b x(t)dt\right|\leq \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|(b-a)=\|x\|(b-a).$$

Причому, коли $x=const$, то досягається рівність.

3. Розглянемо більш загальний приклад. Нехай $y_0(t)$ – фіксована неперервна функція на відрізку $[a, b]$. Визначимо для будь-якої функції $x(t)\in C[a;b]$, що

$$F(x)=\int\limits_a^b x(t)y_0(t)dt.$$

Цей функціонал лінійний. Він обмежений, оскільки

$$|F(x)|=\left|\int\limits_a^b x(t)y_0(t)dt\right|\leq \|x\|\int\limits_a^b |y_0(t)|dt. \tag{1.5}$$

Будучи лінійним і обмеженим, він неперервний. Із нерівності (1.5) випливає оцінка його норми:

$$\|F\|\leq \int\limits_a^b |y_0(t)|dt.$$

Доведіть самостійно, що насправді тут має місце точна рівність.

4. У просторі $C[a;b]$ функціонал: $\delta_{t_0}(x)=x(t_0),$ буде лінійним.

Його значення на функції $x(t)$ дорівнює її значенню в даній точці t_0. Ясно, що

$$|x(t_0)|\leq \|x\|, \tag{1.6}$$

причому, коли $x\equiv const$, то у формулі (1.6) має місце рівність. Звідси відразу випливає, що норма функціонала δ_{t_0} дорівнює 1.

5. У будь-якому евклідовому просторі X можна визначити лінійний функціонал так само, як і в просторі R^n, вибравши деякий фіксований елемент $a\in X$ і задаючи для будь-якого елемента $x\in X$, що

$$F(x)=(x, a).$$

Як у випадку з простором R^n, легко перевірити, що при цьому

$$||F||=||a||.$$

Надалі зосередимо нашу увагу тільки на неперервних лінійних функціоналах, тому слово «неперервний» при вживанні цього поняття будемо для стислості опускати.

Норму лінійного функціонала можна інтерпретувати наочно. Як вже було сказано вище (розд. III, § 1), усякому ненульовому лінійному функціоналові можна поставити у відповідність гіперплощину L, зумовлену таким рівнянням:

$$f(x) = 1.$$

Знайдемо відстань d від цієї гіперплощини до точки 0. За визначенням $d = \inf\limits_{f(x)=1}\|x\|$. З урахуванням того, що

$$|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|,$$

на гіперплощині: $f(x) = 1$, буде виконуватись така нерівність: $\|x\| \ge \dfrac{1}{\|f\|}$ й, виходить, що $d \ge \dfrac{1}{\|f\|}$.

З іншого боку, з огляду на визначення норми функціонала f, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент x_ε, підпорядкований умові $f(x_\varepsilon)=1$, який забезпечує справедливість нерівності:

$$1 > \left(\|f\| - \varepsilon\right) \cdot \|x_\varepsilon\|;$$

тому $d = \inf\limits_{f(x)=1}\|x\| < \dfrac{1}{\|f\| - \varepsilon}$.

Оскільки значення $\varepsilon > 0$ вибрано довільно, то

$$d = \frac{1}{\|f\|},$$

отже, *норма лінійного функціонала f обернена до відстані між гіперплощиною:* $f(x) = 1$, *і точкою* 0.

Розглянемо приклади обчислення норм функціоналів.

Приклад 1. Визначити норму лінійного функціонала f, заданого такою формулою: $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{4} f_i x_i$, якщо $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{4} |x_i|$.

Розв'язування

Знайдемо оцінку зверху для $\|f\|$, а саме:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}\left|\sum_{i=1}^{4} f_i x_i\right|\le\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=1}^{4}|f_i|\,|x_i|\le\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|\sup_{\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{4}|x_i|=1}\sum_{i=1}^{4}|x_i|=\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|\,.$$

Нехай $\sup\limits_{i=\overline{1,4}}|f_i|$ досягається коли $i=i^*$. Тоді критичний елемент x_0 вибираємо за такими правилами: $x_0=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, тут $x_{i^*}=1$, $x_i=0,\ i\ne i^*$. Вочевидь, $\|x_0\|=1$, $|f(x_0)|=\sum\limits_{i=1}^{4} f_i x_i=f_{i^*}=\sup\limits_{i=\overline{1,4}}|f_i|$. За таких умов оцінку знизу для $\|f\|$ можна отримати таким чином:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\ge|f(x_0)|=\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|\,.$$

Отже,

$$\|f\|\le\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|$$

й одночасно

$$\|f\|\ge\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|\,.$$

Враховуючи це, робимо висновок, що

$$\|f\|=\sup_{i=\overline{1,4}}|f_i|\,.$$

Відповідь: $\|f\|=\sup\limits_{i=\overline{1,4}}|f_i|$.

Приклад 2. Знайти норму лінійного функціонала, заданого таким виразом: $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)g(t)dt$, у просторі $C[0;1]$, якщо

$$g(t)=\begin{cases}-2, & \text{коли} \quad 0\le t\le\dfrac{1}{10},\\ \dfrac{1}{2}, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{10}\le \mathrm{t}\le 1.\end{cases}$$

Розв'язування

Знайдемо оцінку зверху для норми функціонала f, а саме:

$$\|f(x)\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}\left|\int_0^1 x(t)g(t)dt\right|=\sup_{\|x\|=1}\left|-2\int_0^{1/10}x(t)dt+\frac{1}{2}\int_{1/10}^{1}x(t)dt\right|\le$$

$$\le \sup_{\|x\|=1}\left\{\left|-2\int_{0}^{1/10}x(t)dt\right|+\left|\frac{1}{2}\int_{1/10}^{1}x(t)dt\right|\right\}\le \sup_{\|x\|=1}\left\{\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\left|-2\int_{0}^{1/10}dt\right|+\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\left|\frac{1}{2}\int_{1/10}^{1}x(t)dt\right|\right\}\le$$

$$\le \sup_{\|x\|=1}\left\{\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\left|-\frac{2}{10}\right|+\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\right|\right\}\le \sup_{\|x\|=1}\left\{\|x\|\left|-\frac{1}{5}\right|+\|x\|\left|\frac{9}{20}\right|\right\}\le\frac{13}{20}\ .$$

Тепер знайдемо оцінку знизу норми функціонала.

Розглянемо функцію x_0:

$$x_0(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\dfrac{1}{10},\\ 1, & \dfrac{1}{10}\le t\le 1,\end{cases}$$

Очевидно, що для неї виконуються такі умови:

$$\|x_0\|=1,$$

$$|f(x_0)|=\frac{13}{20}.$$

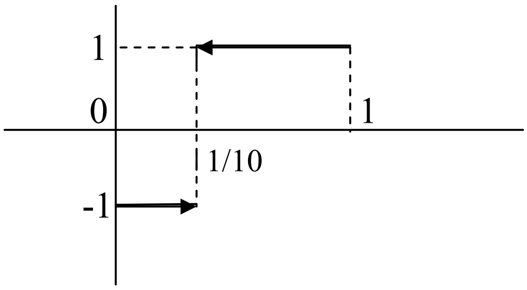


Рис. 4.1. Графік функції x_0

Але функція $x_0(t)$ розривна (її графік подано на рис. 4.1), й тому не належить до простору $C[0;1]$, і тому вона не може бути вибрана в ролі критичного елемента. Отже, необхідно побудувати послідовність функцій $\{x_n\}$, що має такі властивості:

$$\|x_n\|=1, \qquad \text{тобто} \qquad \max_{0\le t\le 1}|x_n(t)|=1,$$

$\forall n\in N$

$$|f(x_n)|=\frac{13}{20},\ \forall n\in N\,.$$

Шукані функції можуть мати, наприклад, такий вигляд:

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & t\in\left(0;\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{n}\right),\\ at+b, & t\in\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{n}\right),\\ 1, & t\in\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{n};1\right),\end{cases}$$

Вочевидь, $\lim x_n(t) = x_0(t)$.

Уведемо такі позначення: $\Delta_{\varepsilon} = \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{n}; \frac{1}{10} + \frac{1}{n}\right]$,

$$x_{\varepsilon} = \left\{ \operatorname{sign}\left[x(t) - \frac{1}{10}\right], \quad \text{коли } t \notin \Delta_{\varepsilon},\ x = \frac{1}{10} \pm \frac{1}{n}, \right.$$

тоді

$$\left|f\left(x_{\varepsilon} - x_0\right)\right| \le \int\limits_{\frac{1}{10}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{10}+\frac{1}{n}} x(t)\left|x_n(t) - x_0(t)\right| dt \le C \cdot \varepsilon,$$

тобто, $\lim\limits_{n \to 0} f(x_n) \ge f(x_0) = \int\limits_0^1 \left|x_0(t)\right| g(t) dt = \frac{13}{20}$,

і $\|f\| \ge \sup\left|f(x_n)\right| \ge \int\limits_0^1 \left|x(t)\right| dt = \frac{13}{20}$.

Таким чином, отримано оцінку знизу для $\|f\|$.

З урахуванням оцінки зверху, $\|f\| = \frac{13}{20}$.

1.3. Теорема Хана – Банаха в нормованому просторі

У § 2 розділу ІІІ ми довели теорему Хана – Банаха для загального випадку (теорема 2.4), відповідно до якої всякий лінійний функціонал f_0, визначений на деякому підпросторі L лінійного простору E, який задовольняє на цьому підпросторі умову:

$$\left|f_0(x)\right| \le p(x), \tag{1.7}$$

(p – фіксований однорідно-опуклий функціонал на E) може бути поширений на весь простір E зі збереженням цієї умови. Стосовно нормованих просторів цю теорему можна сформулювати в такий спосіб:

Теорема 1.2. Нехай E – дійсний нормований простір, L – його підпростір й f_0 – обмежений лінійний функціонал на L. Цей лінійний функціонал може бути поширений до деякого лінійного функціонала f на всьому просторі E без збільшення норми, тобто таким чином, що

$$\|f_0\|_{\text{на } L} = \|f\|_{\text{на } E}.$$

Дійсно, нехай

$$\|f_0\|_{\text{на } L} = k.$$

Зрозуміло, що $k\|x\|$ – однорідно-опуклий функціонал. Взявши його за функціонал p і застосовуючи загальну теорему Хана – Банаха, одержимо необхідний результат.

Цей варіант теореми Хана – Банаха допускає описану нижче геометричну інтерпретацію.

Рівняння: $$f_0(x) = 1, \tag{1.8}$$

визначає в підпросторі L гіперплощину, що лежить на відстані $\frac{1}{f_0}$ від нуля. Поширюючи функціонал f_0 без збільшення норми до функціонала f на всьому просторі E, ми проводимо через цю часткову гіперплощину «більшу» гіперплощину у всьому просторі E, причому «не дозволяємо» їй наблизитися до нуля.

Комплексний варіант теореми Хана – Банаха (теорема 2.4 *а*, § 2 розд. ІІІ), дає нам комплексний аналог сформульованої вище теореми:

Теорема 1.2 *а*. Нехай E – комплексний нормований простір, f_0 – лінійний обмежений функціонал, визначений на підпросторі L □ E. Тоді існує лінійний обмежений функціонал f, визначений на всьому просторі E, який задовольняє такі умови:

$$f(x) = f_0(x),\ x \in L,$$

$$\|f\|_{\text{на } E} = \|f_0\|_{\text{на } L}.$$

Відзначимо деякі важливі факти, що випливають із теореми Хана – Банаха для нормованих просторів. Нагадаємо, що опукла множина в лінійному просторі називається опуклим тілом, коли вона має непусте ядро. Можна показати, що в нормованому просторі ядро опуклої множини збігається із сукупністю його внутрішніх точок. Тобто, у нормованому просторі опукле тіло – це опукла множина, яка має хоча б одну внутрішню точку. З цього факту й з теореми 2.5 (§ 2, розд. ІІІ) випливає таке твердження:

Наслідок 1 (перша теорема віддільності). *Нехай A і B – опуклі множини в нормованому просторі X, причому хоча б одна з них, скажімо A, є опуклим тілом, ядро якого не перетинається із множиною B. Тоді існує ненульовий неперервний лінійний функціонал, який розділяє A й B.*

Існування ненульового функціонала, що розділяє A й B, забезпечується самою теоремою 2.5, § 2, розд. ІІІ. Покажемо, що відповідний функціонал обов'язково буде неперервним. Дійсно, якщо

$$\sup_{x\in A} f(x) \le \inf_{x\in B} f(x), \tag{1.9}$$

то функціонал f обмежений на множині A зверху. Нехай x_0 – внутрішня точка множини A, а $U\,(x_0)$ – кульовий окіл цієї точки, який цілком лежить в A. З огляду на нерівність (1.9) функціонал f обмежений на $U\,(x_0)$ зверху. Але тоді він також обмежений на околі $U(x_0)$ знизу (доведіть це самостійно). Оскільки лінійний функціонал, обмежений на якій-небудь кулі, є неперервним, то твердження доведено.

Наслідок 2 (друга теорема віддільності). *Нехай A – замкнена опукла множина в нормованому просторі X й $x_0 \in X$ – точка, яка не належить множині A. Тоді існує неперервний лінійний функціонал, що строго розділяє точку x_0 й множину A.*

Дійсно, достатньо взяти деякий опуклий окіл U точки x_0, що не перетинається з множиною A, і розглянути функціонал, який розділяє множини U й A (доведіть самостійно, що ненульовий функціонал, який розділяє U й A, неодмінно буде строго розділяти точку x_0 й множину A).

Наслідок 3 (лема про анулятор). *Для всякого (замкненого) власного підпростору L нормованого простору X існує ненульовий неперервний лінійний функціонал f, який на цьому підпросторі дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай $x_0 \notin L$ й f – неперервний лінійний функціонал, який строго розділяє x_0 й L, тобто

$$f(x_0) > \sup_{x \in L} f(x).$$

Тоді $f(x) = 0$ на підпросторі L, оскільки інакше верхня грань праворуч повинна дорівнювати $+\infty$.

Сукупність функціоналів, які дорівнюють нулю на даному підпросторі, називають його *анулятором* й позначають як $L^{\perp}$.

Наслідок 4. *Якщо x_0 – ненульовий елемент у нормованому просторі X, то існує неперервний лінійний функціонал f на X, який задовольняє такі умови:*

$$\|f\| = 1, \;\; f(x_0) = \|x_0\|. \qquad (1.10)$$

Дійсно, визначивши спершу функціонал f на одновимірному підпросторі, що складається з елементів виду ax_0, за такою формулою: $f(ax_0) = a\|x_0\|$, а потім поширивши його без збільшення норми на весь простір X, ми й одержимо функціонал, який задовольняє умови (1.10).

Зауваження. Для довільних локально-опуклих просторів наслідки 1 – 3 залишаються в силі без змін, а наслідок 4 може бути замінено таким твердженням: для всякого елемента: $x_0 \neq 0$, існує неперервний лінійний функціонал f, який задовольняє таку умову: $f(x_0) \neq 0$.

Приклад. Поширити лінійний функціонал f_0, заданий на підпросторі: $L = \{x : x_1 = 2x_2\}$, на весь простір R^2 зі збереженням норми, якщо $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, $f_0(x) = -2x_2$.

Розв'язування

Знайдемо норму функціонала f_0 у підпросторі L.

Відповідно до визначення норми функціонала (1.2)

$$\|f_0\|_L = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in L}} |f_0(x)| = \sup_{\substack{|x_1|+|x_2|=1 \\ x_1=2x_2}} |-2x_2| = \sup_{|2x_2|+|x_2|=1} |-2x_2| = \sup_{3|x_2|=1} |-2x_2| = \sup_{|x_2|=\frac{1}{3}} |-2x_2| = \frac{2}{3}.$$

Запишемо тепер загальний вигляд функціонала, а саме: $f(x) = f_1x_1 + f_2x_2$.

На підпросторі L шуканий функціонал повинен збігатися із функціоналом f_0. Виходячи з цієї умови, знайдемо обмеження для його коефіцієнтів, а саме:

$$f(x)\big|_{x\in L} = f_1x_1 + f_2x_2\big|_{x_1=2x_2} = f_1 \cdot (2x_2) + f_2x_2 = (2f_1 + f_2)x_2 = f_0(x) = -2x_2,$$

тобто $2f_1 + f_2 = -2$.

Для даної $\|x\|$ відповідна норма функціонала обчислюється за такою формулою: $\|f\| = \max\{|f_1|, |f_2|\}$.

Тоді можемо записати систему для визначення коефіцієнтів f_1, f_2. Вона матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \max\{f_1, f_2\} = \dfrac{2}{3}, \\ 2f_1 + f_2 = -2. \end{cases} \tag{1.11}$$

Розв'яжемо систему (1.11) графічно. Із цією метою зобразимо на координатній площині лінії, що відповідають кожному з рівнянь (див. рис. 4.2).

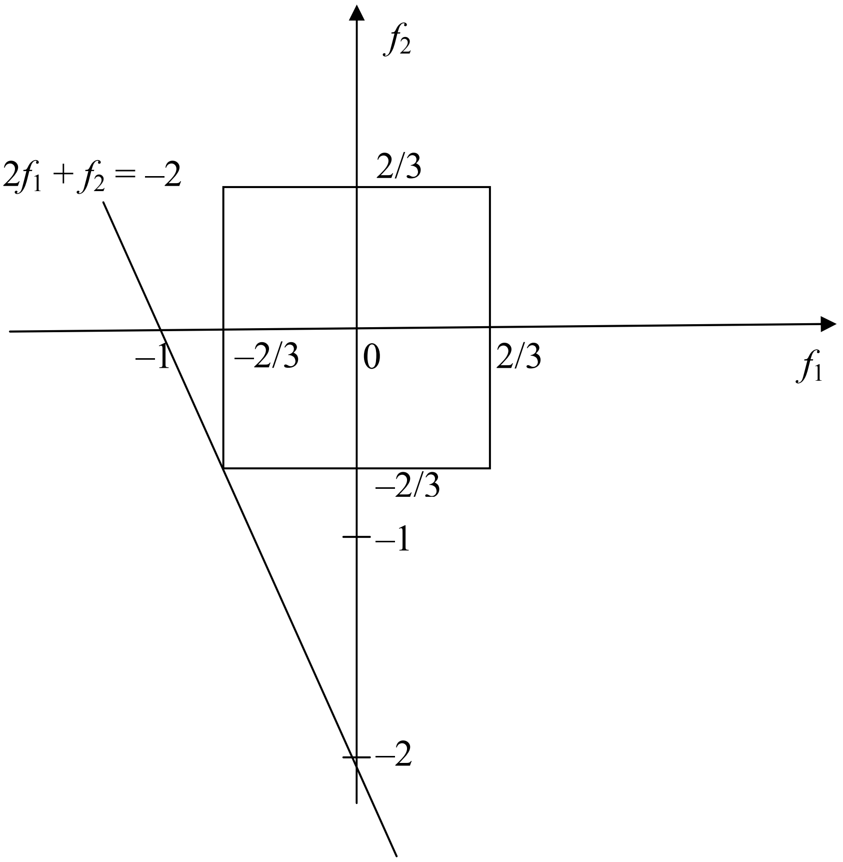


Рис. 6.2. Графічна інтерпретація розв'язування системи рівнянь (1.11)

На рисунку видно, що розв’язком системи буде точка, координати якої $f_1 = -\frac{2}{3}, f_2 = -\frac{2}{3}$. Отже, шуканий функціонал буде мати такий вигляд:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 .$$

1.4. Лінійні функціонали в лічильно-нормованому просторі

Нехай E – лічильно-нормований простір із нормами $\| \cdot \|_k$, (k = 1, 2, ...); не зменшуючи загальності, можна вважати, що для всякого елемента $x \in E$ мають місце такі нерівності:

$$\| x \|_1 \leq \ldots \leq \| x \|_n \leq \ldots \tag{1.12}$$

Нехай f – неперервний лінійний функціонал, визначений на просторі E; тоді в E існує окіл нуля U, на якому функціонал f буде обмеженим. З огляду на визначення топології в лічильно-нормованому просторі знайдеться таке натуральне число k й таке дійсне число $\varepsilon > 0$, для яких куля: $B_{k\varepsilon} = \{x : \|x\|_k < \varepsilon\}$, цілком лежить в околі U; тоді функціонал f буде обмеженим на цій кулі, а тому обмеженим і неперервним щодо норми $\| \cdot \|_k$, тобто існує таке число $C > 0$, для якого справедлива нерівність:

$$|f(x)| \leq C\|x\|_k, \; x \in E.$$

З іншого боку, очевидно, що коли лінійний функціонал є обмеженим за якою-небудь із норм $\| \cdot \|_k$, то він буде неперервним на просторі E. Таким чином, якщо E_k^* – запас усіх лінійних функціоналів на E, неперервних щодо норми $\| \cdot \|_k$, а E^* – запас усіх лінійних неперервних функціоналів на E, то має місце така рівність:

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^* . \tag{1.13}$$

Крім того, з умови (1.12) випливає, що $E_1^* \subset \ldots \subset E_k^* \subset \ldots$

Якщо f – неперервний лінійний функціонал на просторі E, тобто $f \in E^*$, то його *порядком* називається найменше із чисел k, які задовольняють таку умову: $f \in E_k^*$; з урахуванням рівності (1.13) кожен неперервний лінійний функціонал на просторі E має скінченний порядок.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення функціонала.
2. Які функціонали називають лінійними? Наведіть приклади лінійних функціоналів.
3. Який функціонал називають неперервним?
4. Яким чином пов'язані між собою неперервність і лінійність функціонала у скінченновимірному просторі? У загальному випадку?
5. Доведіть твердження про неперервність функціонала в точці.
6. Яким чином пов'язані неперервність й обмеженість функціонала?
7. Доведіть теорему про необхідну умову неперервності функціонала.
8. Яке геометричне тлумачення лінійного функціонала?
9. Які властивості неперервних функціоналів мають місце в нормованому просторі.
10. Який зв'язок існує між неперервністю й обмеженістю лінійного функціонала в нормованому просторі?
11. Сформулюйте й доведіть необхідну та достатню умову неперервності функціонала.
12. Дайте визначення норми функціонала.
13. Сформулюйте й доведіть властивості норми функціонала.
14. Наведіть приклади лінійних функціоналів у нормованих простори.
15. Сформулюйте теорему Хана – Банаха для нормованого простору.
16. Сформулюйте наслідки з теореми Хана – Банаха для нормованого простору.
17. Визначте загальний вигляд лінійного функціонала в просторі R^4.
18. Знайти норму функціонала f, заданого формулою: $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, якщо норму елемента: $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, задано таким чином:

а) $\|x\|=\sum_{k=1}^{4}|x_k|$;

б) $\|x\|=\max_{k=\overline{1,4}}|x_k|$;

в) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{4}x_k^2\right)^{1/2}$;

г) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$;

д) $\|x\|=\frac{|x_1|}{2}+\frac{|x_2|}{3}+3|x_3|+\frac{|x_4|}{4}$;

е) $\|x\|=\max\left\{2|x_1|,\frac{|x_2|}{3},7|x_3|,\frac{|x_4|}{6}\right\}$;

ж) $\|x\|=\left\{\sum_{k=1}^{4}(k+2)x_k^2\right\}^{1/2}$;

и) $\|x\|=|x_1-2x_2|+|x_1+x_2|+|x_3|+|x_4|$.

19. Знайти норму лінійного функціонала в просторі $C[0;1]$, заданого таким виразом: $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)g(t)dt$, якщо функцію $g(t)$ визначено однією з таких формул:

а) $g(t) = ln(t+0{,}5)$; *б)* $g(t) = t^3 - \frac{1}{8}$;

в) $g(t) = \begin{cases} -2, & \text{коли } 0 \le t \le \frac{1}{10}, \\ 1/2, & \text{коли } \frac{1}{10} \le \mathrm{t} \le 1; \end{cases}$ *г)* $g(t) = \sin(t-0{,}5)$;

д) $g(t) = \begin{cases} +1, & \text{коли } 0 \le t \le \frac{1}{4}, \\ -3, & \text{коли } \frac{1}{4} \le \mathrm{t} \le 1; \end{cases}$ *е)* $g(t) = t^2 - 6t + 0{,}5$;

ж) $g(t) = t - \frac{1}{2}$; *и)* $g(t) = \cos\pi t$;

к) $g(t) = t^2 - 0{,}25$; *л)* $g(t) = e^t - 1{,}5$;

м) $g(t) = \sin\pi\left(t - \frac{1}{3}\right)$; *н)* $g(t) = \sin\pi t - 0{,}5$;

п) $g(t) = \exp(t) - 2$; *р)* $g(t) = (t+2)^{1/2}$;

с) $g(t) = t^2 - 3t + 1$; *т)* $g(t) = (t^2 - t + 4)$;

у) $g(t) = \sin(2\pi t)$; *ф)* $g(t) = cht$.

20. Обчислити норму лінійного функціонала із задачі 19, *а – ф* у просторі $L^1[0;1]$.

21. Знайти в просторі l_1 норму лінійного функціонала $f(x)$, заданого такими виразами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k x_k / k!$; *д)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \left[(-1)^k + 3 - 1/k\right]$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k /(-2)^k$; *е)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \frac{k-1}{k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k / k$; *ж)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot (-1)^k$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k / k^{3/2}$;   *и)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot (k)^{1/k}$.

22. Знайти в просторі c_0 норму лінійного функціонала, заданого такими виразами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 2^k / k!$;   *в)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k /(-2)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k / k^{3/2}$;   *г)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k /\left[(-1)^k + 3\right]^k$.

23. Знайти необхідні й достатні умови для послідовності $(f_1, f_2, \ldots)$ з тим, щоб формула: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, задавала лінійний обмежений функціонал у просторах: *а)* l_1, *б)* c_0, *в)* m.

24. Поширити лінійний функціонал f_0 з підпростору L на весь простір R^2 зі збереженням норми, якщо $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, а функціонал f_0 і підпростір L мають такий вигляд:

а) $f_0(x) = -x_2$, $L = \{x : x_1 = 0\}$;

б) $f_0(x) = -x_1$, $L = \{x : x_2 = -3x_1\}$;

в) $f_0(x) = -2x_2$, $L = \{x : x_1 = 0.5x_2\}$;

г) $f_0(x) = 6x_2$, $L = \{x : x_1 = -2x_2\}$;

д) $f_0(x) = x_1$, $L = \{x : x_2 = 2x_1\}$;

е) $f_0(x) = -x_1$, $L = \{x : x_2 = 2x_1\}$.

25. Поширити лінійний функціонал f_0 з підпростору L на весь простір R^2 із збереженням норми, якщо $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, а функціонал f_0 і підпростір L мають той самий вигляд, що й у задачі 24, *а – е*.

26. Поширити лінійний функціонал f_0 з підпростору L на весь простір R^2, якщо $\|x\| = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2}$, а функціонал f_0 і підпростір L задано так само, як у задачі 24, *а – е*.

27. Чи будуть перелічені нижче функціонали неперервними в просторі $C[0;1]$?

а) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\sin t dt$; *б*) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\operatorname{sign}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$;

в) $f(x)=\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}x\left(t^2\right)dt$; *г*) $f(x)=\int\limits_0^1 x\left(t^2\right)dt$;

д) $f(x)=\int\limits_0^1 |x(t)|dt$; *е*) $f(x)=\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}x(t)dt$;

ж) $f(x)=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$; *и*) $f(x)=\int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t}dt$;

к) $f(x)=x'(t)$; *л*) $f(x)=x'(t_0)$;

м) $f(x)=x\left(\frac{1}{2}\right)$; *н*) $f(x)=\max\limits_{0\le t\le 1} x(t)$.

28. Які з функціоналів у завданні 27, $а-н$ неперервні в просторі $C^2[0;1]$? Обчисліть їхні норми.

29. Які з функціоналів у завданні 27, $а-н$ неперервні в просторі $L^2[0;1]$? Обчислити їхні норми.

30. Нехай E – топологічний лінійний простір; доведіть справедливість таких тверджень:

а) Лінійний функціонал f на просторі E неперервний тоді й тільки тоді, коли існує відкрита множина $U\subset E$ й число t, що відповідають такій умові: $t\notin f(U)$, тут $f(U)$ – множина значень функціонала f на множині U.

б) Лінійний функціонал f на просторі E неперервний тоді й тільки тоді, коли його ядро $\{x : f(x) = 0\}$ являє собою замкнену множину в E.

в) Якщо E – нескінченновимірний, нормований простір, то на ньому існує не неперервний лінійний функціонал (скористайтеся існуванням у просторі E базису Гамеля).

31. Нехай число $C\ge 0$ для будь-яких x задовольняє таку нерівність:

$$|f(x)|\le C\|x\| \qquad (*)$$

Довести, що $\|f\|=\inf C$, де inf береться серед усіх значень C, які задовольняють нерівність (*).

32. Доведіть, що для того, аби лінійний функціонал f був неперервним на просторі E, необхідно, а в разі, коли E задовольняє першу аксіому лічильності, то й достатньо, щоб він був обмеженим на кожній обмеженій множині.

§ 2. Спряжений простір

2.1. Визначення спряженого простору

Оперуючи лінійними функціоналами можна задати операції їх додавання й множення на число. Нехай f_1 й f_2 – два лінійних функціонали на деякому лінійному просторі *E*. Їхньою *сумою* $f_1 + f_2$ називається лінійний функціонал $f(x)$, який визначається за таким правилом:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),\ x \in E\,.$$

Добутком αf_1 лінійного функціонала f_1 і числа α називається функціонал, який визначається таким чином:

$$f(x) = af_1(x),\ x \in E\,.$$

Рівності, що визначають суму $f_1 + f_2$ й добуток αf_1, можна записати також у такий спосіб:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),\ \ (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Певна річ, що сума $f_1 + f_2$ й добуток αf_1 являють собою лінійні функціонали. Крім того, якщо простір *E* топологічний, то з неперервності функціоналів f_1 та f_2 випливає, що сума $f_1 + f_2$ й добуток αf_1 також неперервні на просторі *E*.

Легко перевірити, що визначені в такий спосіб операції додавання функціоналів і множення їх на числа задовольняють усі аксіоми лінійного простору. Інакше кажучи, сукупність усіх неперервних лінійних функціоналів, визначених на деякому топологічному лінійному просторі *E*, утворює лінійний простір. Він називається простором, *спряженим із E*, і позначається як E^*.

У спряженому просторі E^* можна різними способами задати топологію. Найважливіші з них – це *сильна* й *слабка* топології.

2.2. Сильна топологія в спряженому просторі

Почнемо із того найпростішого випадку, коли вихідний простір *E* нормований. Для неперервних лінійних функціоналів, заданих на нормованому просторі, було введено поняття норми за таким правилом:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}\,.$$

Ця величина задовольняє всі вимоги, включені у визначення нормованого простору, а саме:

1) $\|f\| \geq 0$ для будь-якого ненульового лінійного функціонала *f*;

2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\|f_1 + f_2\| = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\| + \|f_2\|$.

Таким чином, простір E^*, спряжений із нормованим, можна наділити природною структурою нормованого простору. Топологія в просторі E^*, яка відповідає уведеній нормі, називається *сильною топологією* в E^*. Коли необхідно підкреслити, що E^* розглядається як нормований простір, то його позначення буде таким: $(E^*, \|\cdot\|)$.

Встановимо таку важливу властивість простору, спряженого із нормованим.

Теорема 2.1. *Спряжений простір* $(E^*, \|\cdot\|)$ *повний.*

Доведення

Нехай $\{f_n\}$ – фундаментальна послідовність лінійних функціоналів. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число *N*, що забезпечує виконання умови: $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для всіх $n, m \geq N$. Звідси для будь-якого елемента $x \in E$ буде справедливою нерівність:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

тобто, при будь-якому $x \in E$ числова послідовність $\{f_n(x)\}$ є збіжною.

Припустимо, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Перевіримо безпосередньо, чи являє собою *f* неперервний лінійний функціонал, тобто

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Для доведення неперервності функціонала *f* повернімося до нерівності: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|$, і перейдемо в ній до границі, коли $m \to \infty$; тоді отримуємо, що

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Звідси випливає, що функціонал $(f - f_n)$ буде обмеженим. Але тоді обмеженим, а значить і неперервним, буде функціонал: $f = f_n + (f - f_n)$. Крім того, звідси ж випливає, що $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ для всіх $n \geq N$, тобто послідовність $\{f_n\}$ прямує до *f*.

Підкреслимо ще раз, що справедливість цієї теореми не залежить від того, чи є повним вихідний простір.

Зауваження. *Якщо нормований простір E не повний, а $\overline{E}$ – його поповнення, то простори E^* й $\left(\overline{E}\right)^*$ ізоморфні.*

Дійсно, якщо E міститься в просторі $\overline{E}$ як всюди щільна підмножина, то всякий лінійний неперервний на E функціонал f поширюється із збереженням неперервності з простору E на його поповнення $\overline{E}$. Позначимо це поширення через $\bar{f}$. Ясно, що $\bar{f} \in \left(\overline{E}\right)^*$, $\|\bar{f}\| = \|f\|$ і при цьому всякий функціонал із простору $\left(\overline{E}\right)^*$ є поширенням деякого функціонала з E^* (а саме, свого звуження на E). Отже, відображення: $f \to \bar{f}$, являє собою ізоморфне відображення простору E^* на весь простір $\left(\overline{E}\right)^*$.

Визначимо тепер *сильну топологію* в просторі, спряженому з довільним лінійним топологічним простором.

У просторі, спряженому з нормованим, ми визначили окіл нуля як сукупність функціоналів, що відповідають такій умові: $\|f\| < \varepsilon$.

Інакше кажучи, за окіл нуля в просторі E^*, спряженому з нормованим, приймають сукупність функціоналів, для яких $|f(x)| < \varepsilon$, коли x перебігає одиничну кулю: $\|x\| \leq 1$ в просторі E. Беручи всілякі числа □, одержимо визначальну систему околів нуля. У тому разі, коли E – не нормований, а топологічний лінійний простір, замість одиничної кулі в ньому природно взяти довільну обмежену множину A. Окіл нуля $U_{□,A}$ в просторі E^* визначається як сукупність лінійних функціоналів, що задовольняють таку умову:

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ для всіх } x \in A.$$

Варіюючи ε і A, одержимо визначальну систему околів нуля в просторі E.

Отже, *сильна топологія в E^** задається сукупністю околів нуля, що залежать від додатного числа ε й обмеженої множини $A \subset E$. Доведення того факту, що така система околів дійсно перетворює E^* в лінійний топологічний простір можна знайти в посібнику [1]. Зрозуміло, що коли простір E нормований, то описана вище сильна топологія в E^* збігається з тією, котра визначалася за допомогою норми.

Зауважимо, що сильна топологія в E^* обов'язково задовольняє аксіомі віддільності T_1 і є локально опуклою (незалежно від топології в просторі E). Дійсно, якщо $f_0 \subset E^*$ й $f_0 \neq 0$, то знайдеться такий елемент $x_0 \subset E$, для якого $f_0(x_0) = 0$; задамо, що $\varepsilon = \frac{1}{2}|f_0(x_0)|$ й $A = \{x_0\}$, тоді $f_0 \notin U_{\varepsilon A}$, тобто E^* являє собою T_1-простір. Для доведення локальної опуклості сильної топології в E^* достатньо врахувати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і будь-якої обмеженої множини $A \subset E$ окіл $U_{\varepsilon A}$ опуклий у просторі E. Сильну топологію в E^* позначимо символом b; і підкреслюючи, що простір E^* розглядається з урахуванням сильної топології, будемо позначати його таким чином: (E^*, b).

2.3. Приклади спряжених просторів

1. Нехай E – n-вимірний лінійний простір (дійсний або комплексний). Виберемо в ньому який-небудь базис $e_1, \dots, e_n$; тоді всякий вектор $x \subset E$ можна (причому єдиним способом) подати в такому вигляді: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Коли f – лінійний функціонал на просторі E, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i , \qquad (2.1)$$

отже, лінійний функціонал єдиним способом можна описати своїми значеннями на векторах базису $e_1, \dots, e_n$, причому ці значення можна взяти довільно.

Задамо лінійні функціонали $g_1, \dots, g_n$ таким чином:

$$g(e_i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \ i = j, \\ 0, \text{ якщо } \ i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, що ці функціонали лінійно незалежні. Причому $g_j(x) = x_j$, тому формулу (2.1) можна записати в такому вигляді:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) g_i(x).$$

Таким чином, функціонали $g_1, \dots, g_n$ становлять базис у просторі E^*, тобто E^* являє собою n-вимірний лінійний простір; базис $g_1, \dots, g_n$ у просторі E^* називають *двоїстим* по відношенню до базису $e_1, \dots, e_n$ у просторі E.

Очевидно, що різні норми в просторі E індукують різні норми в спряженому просторі E^*. Приклади відповідних норм у цих просторах наведено нижче в табл.1. У цих формулах $x_1, \dots, x_n$ – координати вектора $x \subset E$ в базисі $e_1, \dots, e_n$, а $f_1, \dots, f_n$ – координати функціонала $f \subset E^*$ в двоїстому базисі $g_1, \dots, g_n$.

Завдання

а) перевірте відповідність наведених вище норм;

б) доведіть, що всі названі норми визначають у n-вимірному просторі одну й ту саму топологію.

Таблиця 1

Відповідні норми у вихідному та спряженому просторах

Норма в просторі E	Норма в просторі E^*
1. $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	$\|f\| = \max_{i=1,2,\ldots n} \|f_i\|$
2. $\|x\| = \max_{i=1,2,\ldots n} \|x_i\|$	$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|$
3. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$	$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2}$
4. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$	$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1,$ $0 < p < \infty$

2. Розглянемо простір c_0 послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, які прямують до 0, коли норму задано такою формулою: $\|x\| = \sup_n |x_n|$, і покажемо, що спряжений з ним простір $\left(c_0^*, \|\cdot\|\right)$ ізоморфний простору l_1 всіх абсолютно підсумовних послідовностей $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, із нормою $\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Будь-яка послідовність $f \in l_1$ визначає в просторі c_0 лінійний обмежений функціонал $\bar{f}$ за такою формулою:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \ . \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що $\left|\bar{f}\right| \le \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, тому $\left\|\bar{f}\right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \le \|f\|$.

Розглянемо в просторі c_0 такі вектори:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ \ldots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

і задамо, що $x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} e_n$ (при цьому, коли $f_n = 0$, то вважаємо, що $\frac{f_n}{|f_n|} = 0$). Тоді $x^{(N)} \in c_0$, $\left\|x^{(N)}\right\| \le 1$ і $\bar{f}\left(x^{(N)}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} \bar{f}(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$.

Отже, $\lim_{N\to\infty} \bar{f}\left(x^{(N)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|$. Це означає, що $\|\bar{f}\| \ge \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Порівнюючи це з оберненою нерівністю, яку було доведено вище, робимо висновок, що

$$\|\bar{f}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|.$$

Таким чином, побудовано лінійне ізометричне відображення: $f \to \bar{f}$, простору l_1 в простір c_0^*; нам залишилося перевірити, чи буде образ простору l_1 при цьому відображенні збігатися з усім простором c_0^*, тобто, чи кожен функціонал $\bar{f} \in c_0^*$ можна подати у вигляді (2.2), коли $f = \{f_n\} \in l_1$.

Для всіх послідовностей $x = \{x_n\} \in c_0$ маємо, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, причому ряд, який перебуває праворуч, прямує в просторі c_0 до елемента x, оскільки $\left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\| = \sup_{n>N} |x_n| \to 0$, коли $N \to \infty$. Функціонал $\bar{f} \in c_0^*$ неперервний, тому $\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{f}(e_n)$, а значить достатньо перевірити, чи $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\bar{f}(e_n)\right| < \infty$. Задаючи, що $x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{f}(e_n)}{\left|\bar{f}(e_n)\right|} e_n$ і враховуючи, що $x^{(N)} \in c_0$, $\left\|x^{(N)}\right\| \le 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \bar{f}(e_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{f}(e_n)}{\left|\overline{f}(e_n)\right|} \bar{f}(e_n) = \bar{f}\left(x^{(N)}\right) \le \bar{f}.$$

Отже, з огляду на довільний вибір числа N, робимо висновок, що $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(e_n) \le \infty$.

3. Неважко довести, що простір l_1^* спряжений з простором l_1 буде ізоморфним простору m усіх обмежених послідовностей: $x = \{x_n\}$, норма яких $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

4. Нехай $p > 1$, а l_p – простір усіх послідовностей: $x = \{x_n\}$, для яких виконується така умова:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Можна показати, що спряжений з ним простір l_p^* ізоморфний простору l_q, причому $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Доведення цього факту базується на нерівності Гельдера. Загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на l_p такий:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n ; \quad x=\{x_n\}\in l_p , \quad f=\{f_n\}\in l_q .$$

5. Тепер розглянемо структуру простору, спряженого з гільбертовим.

Теорема 2.2. Для всякого неперервного лінійного функціонала f на дійсному гільбертовому просторі H існує єдиний елемент $x_0 \in H$, відповідний такій рівності:

$$f(x)=(x,x_0), \qquad x\in H, \tag{2.3}$$

причому $\|f\|=\|x_0\|$. І навпаки, якщо $x_0 \in H$, то формула (2.3) задає такий неперервний лінійний функціонал f, що відповідає умові: $\|f\|=\|x_0\|$. Таким чином, рівність (2.3) визначає ізоморфізм: $f \to x_0$, між просторами H^* і H.

Доведення

Очевидно, що для всякого елемента $x_0 \in H$ формула (2.3) визначає лінійний функціонал на просторі H. Оскільки $|f(x)|=|(x,x_0)|\le \|x\|\cdot\|x_0\|$, то цей функціонал неперервний, і враховуючи, що $f(x_0)=(x_0,x_0)=\|x_0\|^2$, робимо такий висновок: $\|f\|=\|x_0\|$. Покажемо, що будь який лінійний неперервний функціонал f на H можна подати у вигляді виразу (2.3). Коли $f=0$, то задаємо, що $x_0=0$. Нехай тепер $f\neq 0$, а $H_0=\{x: f(x)=0\}$, це ядро функціонала f; оскільки функціонал f неперервний, то H_0 – замкнений лінійний підпростір простору H. Враховуючи, що ортогональне доповнення до простору скінченної розмірності n має корозмірність 1 і навпаки (наслідок 3 теореми 7, § 4, розд. 3 [4]), робимо висновок, що ортогональне доповнення: $H_0^{\perp}=0$, до простору H_0 одновимірне, тобто існує такий (ненульовий) вектор y_0, ортогональний до простору H_0, що будь-який вектор $x\in H$ можна подати у такому вигляді: $x=y+\lambda y_0$, де $y\in H$. Очевидно, можна вважати, що $\|y_0\|=1$. Візьмемо $x_0=f(y_0)y_0$, тоді для всякого елемента $x\in H$ будуть справедливими такі рівності:

$$x=y+\lambda y_0 , \quad y\in H ,$$

$$f(x)=\lambda f(y_0),$$

$$(x,x_0)=\lambda(y_0,x_0)=\lambda f(y_0)(y_0,y_0)=\lambda f(y_0).$$

Таким чином, $f(x)=(x,x_0)$ для всіх $x\in H$. Якщо $f(x)=(x,x_0')$, $x\in H$, то $(x,x_0-x_0')=0$, звідси, з огляду на припущення: $x=x_0-x_0'$, робимо висновок, що $x_0=x_0'$.

Зауваження

1. Нехай E – неповний евклідів простір, а H – гільбертів простір, що являє собою його поповнення. Оскільки простори E^* та H^* ізоморфні, а H^* ізоморфний H, то справедливим буде таке твердження: *простір E^* спряжений з неповним евклідовим простором E, ізоморфний поповненню H простору E.*

2. Теорема справедлива також для комплексного гільбертового простору.

2.4. Другий спряжений простір

Оскільки неперервні лінійні функціонали на лінійному топологічному просторі E самі утворюють лінійний топологічний простір, зокрема спряжений з E простір (E^*, b), то можна говорити про існування простору E^{**} неперервних лінійних функціоналів на просторі E^*, тобто про другий спряжений з E простір і т. д.

Зауважимо, що всякий елемент x_0 простору E визначає деякий лінійний функціонал на просторі E^*. Дійсно, покладемо, що

$$\psi_{x_0}(f)=f(x_0), \tag{2.5}$$

де x_0 – фіксований елемент простору E, а f перебігає весь простір E^*. Рівність (2.5) ставить у відповідність кожному функціоналу f деяке число $\psi_{x_0}(f)$, тобто задає функціонал на E^*. Оскільки при цьому

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1+\beta f_2)=\alpha f_1(x_0)+\beta f_2(x_0)=\alpha\psi_{x_0}(f_1)+\beta\psi_{x_0}(f_2),$$

то цей функціонал лінійний.

Далі, всякий функціонал неперервний на E^*. Дійсно, візьмемо число $\varepsilon>0$ й обмежену множину A в просторі E, яка містить у собі точку x_0. Розглянемо в E^* окіл нуля $U(\varepsilon, A)$. Із визначення $U(\varepsilon, A)$ робимо такий висновок:

$$\left|\psi_{x_0}(f)\right|=\left|f(x_0)\right|\le\varepsilon\text{, якщо } f\in U(\varepsilon,A).$$

Але це означає, що функціонал ψ_{x_0} неперервний у точці 0, а значить і на всьому просторі E^*.

Отже, ми отримали відображення всього простору E на деяку підмножину простора E^{**}. Це відображення, вочевидь, лінійне. Таке відображення E на E^{**} називається *природним відображенням* простору E в другий спряжений простір. Позначимо його через π. Якщо на просторі E існує достатньо лінійних функціоналів (наприклад, коли E нормований або хоча б локально опуклий та віддільний простір), то це відображення взаємно однозначне, оскільки тоді для будь-яких двох різних елементів $x', x'' \in E$ існує такий функціонал $f \notin E^*$, що відповідає умові: $f(x') \neq f(x'')$, тобто $\psi_{x'}$ та $\psi_{x''}$ – різні функціонали на E^*.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Яким чином визначають суму функціоналів та добуток функціонала й числа?
2. Дайте визначення спряженого простору.
3. Які властивості має спряжений простір?
4. Яким чином задають сильну топологію на спряженому просторі?
5. Наведіть приклади спряжених просторів.
6. Яким чином пов’язані норми в спряженому й вихідному просторах.
7. Яку властивість має простір, спряжений з гільбертовим простором?
8. Сукупність усіх лінійних функціоналів на просторі *E*, не обов'язково неперервних, називається *алгебраїчно спряженим* простором і позначається $E^\#$. Наведіть приклад топологічного векторного простору *E*, відповідного такій умові: $E^* \neq E^\#$.

§ 3. Лінійні неперервні оператори

3.1. Визначення та приклади лінійних операторів

Нехай *X*, *Y* – два лінійні топологічні простори.

Лінійним оператором, що діє із простору *X* в простір *Y*, називається відображення:

$$y = Ax, \text{ де } x \in X,\ y \in Y,$$

яке задовольняє таку умову: $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$.

Сукупність D_A всіх тих точок $x \in X$, для яких визначено відображення *A*, називається *областю визначення* оператора *A*. У загальному випадку $D_A \neq X$, але ми завжди будемо вважати, що D_A являє собою лінійний багатовид, тобто, коли x', $x'' \in D_A$, то $\alpha x' + \beta x'' \in D_A$ для всіх чисел α, β.

Припустимо, що оператор *A* визначено на всьому просторі *X*.

Оператор *A* називається *неперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу *V* точки: $y_0 = Ax_0$, існує окіл *U* точки x_0, відповідний умові: $Ax \in V$, як тільки $x \in U$, тобто

$$\forall V(y_0)\ \exists U(x_0) : x \in U(x_0) \Rightarrow y \in V(y_0).$$

Оператор *A* називається *неперервним*, якщо він неперервний у кожній точці $x \in X$.

Коли *X*, *Y* являють собою нормовані простори, то це визначення можна сформулювати таким чином: оператор *A* називається *неперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число: $\delta(\varepsilon) > 0$, що із нерівності: $\|x - x_0\| < \delta$, $x,\ x_0 \in X$, випливає виконання нерівності $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Множина всіх точок *x*, для яких $Ax = 0$, називається *ядром* лінійного оператора *A* і позначається $\operatorname{Ker} A$. Множина тих елементів $y \in Y$, для яких $y = Ax$, коли $x \in D_A$, називається *образом* лінійного оператора *A* і позначається $\operatorname{Im} A$. І ядро, і образ лінійного оператора являють собою лінійні багатовиди. Якщо оператор неперервний і $D_A = X$, то $\operatorname{Ker} A$ – це підпростір, тобто є замкненою множиною, тоді як образ оператора не обов’язково буде підпростором, навіть, коли $D_A = X$.

Нагадаємо, що лінійні функціонали являють собою окремий вид лінійних операторів, а саме: лінійний функціонал – це лінійний оператор, який переводить простір *X* у числову пряму *R*.

Наведемо приклади лінійних операторів.

1. У будь-якому лінійному просторі *X* *одиничний оператор* задається таким чином:

$$Ix = x, \ \ \forall x \in X .$$

2. Для довільних лінійних просторів *X*, *Y* задамо *нульовий оператор* O в такий спосіб:

$$\mathrm{O}x = 0, \ \ \forall x \in X , \ 0 \in Y .$$

3. Побудуємо загальний вигляд лінійного оператора, який переводить скінченновимірний простір у скінченновимірний, тобто розглянемо оператор *A*, який відображає *n*-вимірний простір R^n, з базисом $e_1, ..., e_n$, у *m*-вимірний простір R^m із базисом $f_1, ..., f_m$.

Для всякого елемента $x \in R^n$ має місце розкладання за векторами базису, а саме:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Тоді, з огляду на лінійність оператора *A*, для образу елемента *x* буде правильним таке розкладання:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i . \tag{3.1}$$

Із цієї рівності випливає, що для того, аби задати оператор *A*, необхідно задати його значення на базисних векторах.

Елемент Ae_i є елементом простору *Y*, і тому може бути поданий розкладанням за базисом $f_1, ..., f_m$ цього простору, а саме:

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k . \tag{3.2}$$

Отже, для того, щоб задати оператор A, необхідно задати матрицю коефіцієнтів a_{ik}.

Таким чином, образ простору R^n в просторі R^m являє собою лінійний підпростір, розмірність якого дорівнює рангу матриці $\|a_{ki}\|$, тобто у всякому разі не перевищує n.

4. У просторі C[a; b] задамо лінійний оператор таким чином:

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt.$$

Тут $K(s, t)$ – деяка фіксована неперервна функція двох змінних, $\psi(s)$ – неперервна функція.

Отже, цей оператор переводить простір неперервних функцій сам у себе, тобто

$$C[a;\, b] \to C[a;\, b].$$

Його лінійність випливає з лінійності інтегралу, а неперервність залежить від способу задання топології.

Зокрема, якщо топологію визначено нормою такого вигляду:

$$\|\varphi\|_1 = \max_{a \le t \le b} \varphi(t) \quad \text{або} \quad \|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b \varphi^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

то цей оператор буде неперервним.

5. Інший лінійний оператор у просторі $C[a; b]$ можна задати таким чином:

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\varphi(t),$$

де $\varphi_0(t)$ – деяка фіксована функція із простору $C[a; b]$. Лінійність цього оператора очевидна. Неперервність залежить від способу задання норми. Розглянемо дві норми: $\|\varphi\|_1 = \max\limits_{a \le t \le b}|\varphi(t)|$ й $\|\varphi\|_2 = \int\limits_a^b \varphi(t)dt$.

Нехай φ', $\varphi'' \in C[a;b]$: $\|\varphi' - \varphi''\| < \delta$. Виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і розглянемо $\|A\varphi' - A\varphi''\|_1$, а саме:

$$\|A\varphi' - A\varphi''\|_1 = \max_{a \le t \le b}|(A\varphi')(t) - (A\varphi'')(t)| = \max_{a \le t \le b}|\varphi_0(t)\varphi'(t) - \varphi_0(t)\varphi''(t)| =$$

$$= \max_{a \le t \le b}(|\varphi_0(t)| \cdot |\varphi'(t) - \varphi''(t)|) \le \max_{a \le t \le b}|\varphi_0(t)| \max_{a \le t \le b}|\varphi'(t) - \varphi''(t)| = \|\varphi_0\| \cdot \|\varphi' - \varphi''\| < \varepsilon.$$

Очевидно, що коли $\|\varphi' - \varphi''\| < \dfrac{\varepsilon}{\|\varphi_0\|} = \delta$, то $\|A(\varphi'(t)) - A(\varphi''(t))\| < \varepsilon$.

Отже, неперервність оператора для $\|\cdot\|_1$ доведено.

Неперервність оператора для $\|\cdot\|_2$ доведіть самостійно.

6. Оператор диференціювання.

Розглянемо його як такий, що діє із простору $C[a; b]$ в $C[a; b]$. Зрозуміло, що він визначений не на всьому просторі $C[a; b]$, а лише на множині неперервних функцій, що мають неперервну похідну.

Цей оператор буде лінійним, але не буде неперервним.

Наведемо приклад. Розглянемо таку послідовність функцій:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}.$$

Очевидно, що $\varphi_n(t) \to 0$, коли $n \to \infty$. При цьому $\varphi_n'(t) = \cos nt$ і, вочевидь, не має границі.

Лінійний оператор, що діє із простору X в простір Y називається *обмеженим*, якщо він визначений на всьому просторі X і кожну обмежену множину переводить також в обмежену множину. Між обмеженістю й неперервністю лінійного оператора існує тісний зв'язок, який можна сформулювати у вигляді поданих нижче тверджень.

Теорема 3.1. Усякий неперервний лінійний оператор є обмеженим.

Доведення

Нехай A – неперервний лінійний оператор. Припустимо, що $M \in X$ – обмежена множина, а $AM \in Y$ – необмежена. Тоді в множині Y знайдеться окіл нуля V, який не містить жодної із множин $\frac{1}{n}AM$. Це означає , що існує така послідовність елементів $x_n \in M$, що відповідає умові: $\frac{1}{n}Ax_n \notin V$. Тобто послідовність $\frac{1}{n}x_n \to 0$, але послідовність $\left\{\frac{1}{n}Ax_n\right\}$ не прямує до 0 в просторі Y, що суперечить припущенню про неперервність оператора A. Теорему доведено.

Якщо топологічний простір T має в кожній точці лічильну визначальну систему околів, то він називається *простором із першою аксіомою лічильності.*

Лема 3.1. Якщо A – обмежений лінійний оператор, що діє із простору X в Y, а в просторі X виконано першу аксіому лічильності, то оператор A – неперервний.

Інакше кажучи, для просторів, що характеризуються першою аксіомою лічильності (зокрема до таких належать всі нормовані простори), обмеженість рівносильна неперервності.

Якщо X та Y являють собою нормовані простори, то умову обмеженості можна сформулювати і в такий спосіб: оператор A обмежений, якщо він переводить усяку кулю в обмежену множину B.

3.2. Обмежені та неперервні лінійні оператори в банахових і гільбертових просторах. Норма оператора

Нагадаємо, що банаховим називається повний нормований, а гільбертовим – повний евклідів простір.

Підпростір L банахового простору X сам є повним нормованим простором, якщо норма в ньому індукована нормою в X. До того ж підпростір L гільбертового простору H теж буде гільбертовим (скалярний добуток у просторі L запозичується з простору H).

Інший спосіб побудови нових банахових і гільбертових просторів – це поповнення відомих нормованих й евклідових просторів. У поповненні природним чином запроваджується структура лінійного, потім нормованого простору, а також скалярний добуток (у випадку з евклідовим простором), узгоджений з метрикою. Якщо $\overline{\{x_n\}}$, $\overline{\{y_n\}}$ – елементи поповнення Y нормованого простору X (див. розд. II, § 2), то операції додавання та множення на константу задаються такими формулами $\overline{\{x_n\}}+\overline{\{y_n\}}=\overline{\{x_n+y_n\}}$; $\alpha\cdot\overline{\{x_n\}}=\overline{\{\alpha x_n\}}$; норма $\left\|\overline{\{x_n\}}\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$, а для евклідового простору скалярний добуток $\left(\overline{\{x_n\}},\overline{\{y_n\}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$ (перевірте самостійно існування границь і незалежність їх від вибору фундаментальних послідовностей із класу еквівалентних).

У лінійному просторі неперервних функцій на числовому відрізку [*a*; *b*] можна ввести норму такою формулою: $\|f\|_1=\int\limits_a^b|f(x)|dx$ (перевірте аксіоми норми самостійно). Поповнення цього нормованого простору називається *простором інтегрованих функцій* L_1 (детальніше див. розд. V, § 1).

Якщо ж у просторі неперервних функцій запровадити скалярний добуток, використовуючи таку формулу: $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$, то гільбертів простір, одержаний шляхом поповнення вихідного, називається *простором інтегрованих у квадраті функцій* і позначається L_2. При цьому, як можна довести, $L_2\underset{\neq}{\subset}L_1$.

Сформулюємо визначення обмеженого оператора в нормованих просторах.

Нехай X, Y – нормовані простори. Лінійний оператор $A: X\to Y$, називають *обмеженим*, коли існує константа $C>0$, яка для всіх елементів $x\in X$ забезпечує виконання такої нерівності:

$$\|Ax\|_2\leq C\|x\|_1,$$

тут $\|\cdot\|_1$ – норма в просторі X; $\|\cdot\|_2$ – норма в просторі Y.

Надалі в позначеннях норм ми не завжди будемо вживати індекси, але при цьому належить розрізняти норми в різних просторах.

Якщо оператор $A: X \to Y$ є обмеженим та лінійним, то множина: $\left\{ C \middle| \forall\, x \in X : \| Ax \| \le C \| x \| \right\}$, непорожня й обмежена знизу (в усякому разі, нулем). Точна нижня межа цієї множини констант існує й називається нормою оператора A. При цьому точна нижня межа досягається, і

$$\| Ax \| \le \| A \| \cdot \| x \|, \text{ для всіх } x \in X . \tag{3.3}$$

Дійсно, згідно з визначенням норми оператора, для кожного числа $\varepsilon > 0$ та кожного елемента $x \in X$ виконується така нерівність: $\| Ax \| \le \left(\| A \| + \varepsilon \right) \| x \|$. Отже, ця нерівність буде виконуватися також і тоді, коли $\varepsilon = 0$ (граничний перехід $\varepsilon \to 0+$).

Теорема 3.2. Для обмеженого оператора A справедливі такі формули:

$$\| A \| = \sup_{x \ne 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| \le 1} \| Ax \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| . \tag{3.4}$$

Доведення

Нерівність: $\sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} \le \| A \|$, безпосередньо випливає із нерівності (3.3). Якби ця нерівність була строгою, то існувало б таке число $\varepsilon > 0$, що забезпечує для всіх елементів $x \in X$ виконання нерівності: $\|Ax\| \le \left(\|Ax\| - \varepsilon \right) \|x\|$. А це суперечило б визначенню норми оператора A.

Оскільки для кожного елемента *x*, який задовольняє умовам: $x \ne 0$; $\| x \| \le 1$, виконується нерівність $\dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} \ge \| Ax \|$, то $\sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} \ge \sup\limits_{\| x \| \le 1} \| Ax \|$; отже, нерівність: $\sup\limits_{\| x \| \le 1} \| Ax \| \ge \sup\limits_{\| x \| = 1} \| Ax \|$, очевидна. Тепер для повного доведення теореми залишилося перевірити, чи $\sup\limits_{\| x \| = 1} \| Ax \| \ge \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\| Ax \|}{\| x \|}$.

Остання нерівність є наслідком того, що для кожного $x \ne 0$ число: $\dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} = \left\| A \left(\dfrac{x}{\| x \|} \right) \right\|$, належить множині: $\left\{ \| Ax \| \;\middle|\; \| x \| = 1 \right\}$. Теорему доведено.

Із визначення норми оператора випливає така нерівність:

$$\| Ax_n - Ax_0 \| \le \| A \| \cdot \| x_n - x_0 \| .$$

Вона означає, що обмежений лінійний оператор є неперервним у будь-якій точці простору X. Таким чином, ми підтвердили справедливість теореми 3.1 у нормованих просторах.

З іншого боку, якщо лінійний оператор A неперервний в одній точці $x_0 \in X$, то він буде неперервним і скрізь на просторі X. Дійсно, для кожного елемента $\tilde{x} \in X$ з умови: $x_n \to \tilde{x}$, випливає, що $x_n + x_0 - \tilde{x} \to x_0$, а тому $A(x_n + x_0 - \tilde{x}) \to Ax_0$. Враховуючи лінійність оператора A, можемо зробити висновок, що $Ax_n \to A\tilde{x}$. Іншими словами, оператор A неперервний і в точці $\tilde{x} \in X$.

Якщо A – необмежений оператор, то існує послідовність векторів $x_n \in X$, для яких $\| x_n \| = 1$; $\| Ax_n \| > n$ (обміркуйте це), а тому $\frac{x_n}{n} \to 0$; але $A\left(\frac{x_n}{n}\right)$ не прямує до 0, що суперечить неперервності оператора A в нулі.

Цим самим доведено таку теорему:

Теорема 3.3. Лінійний оператор $A : X \to Y$, у нормованих просторах обмежений тоді й тільки тоді, коли він неперервний у якійсь (а тому й у кожній) точці $x_0 \in X$.

Це означає, що для перевірки неперервності оператора на нормованому просторі достатньо перевірити його неперервність у якій-небудь одній точці цього простору (наприклад, у точці нуль).

3.3. Сума й добуток операторів. Простір обмежених операторів

Для будь-якої пари нормованих просторів X, Y можна розглянути множину всіх обмежених лінійних операторів, що діють з простору X в Y. У цій множині цілком природно запроваджуються операції додавання:

$$(A + B)x = Ax + Bx \text{ (для всіх елементів } x \in X \text{)}$$

та множення на константу:

$$(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax .$$

При цьому слід зауважити, що з нерівностей:

$$\| (A + B)x \| \le \| Ax \| + \| Bx \| \le (\| A \| + \| B \|) \| x \|$$

та

$$\| \alpha Ax \| \le | \alpha | \cdot \| A \| \cdot \| x \|,$$

випливає, що оператори $A + B$ та αA також обмежені, причому

$$\| A + B \| \le \| A \| + \| B \| ; \ \| \alpha A \| \le | \alpha | \cdot \| A \| . \qquad (3.5)$$

Таким чином, можна розглядати лінійний простір: $L(X;Y)=\{X\to Y\}$ лінійних обмежених операторів, які відображають простір X у простір Y [в алгебраїчному сенсі $L(X;Y)$ є підпростором лінійного простору всіх лінійних операторів, що діють із X в Y].

Із співвідношень (3.4) випливає, що коли $\alpha\neq 0$, то $\|A\|=\left\|\alpha^{-1}\cdot\alpha A\right\|\le|\alpha|^{-1}\|\alpha A\|$, звідки $\|\alpha A\|\ge|\alpha|\cdot\|A\|$, а це з урахуванням нерівності (3.5) дозволяє зробити висновок, що $\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$ (коли $\alpha=0$, це очевидно).

Отже, $L(X,Y)$ є нормованим простором з нормою $\|A\|$ (першу аксіому норми перевірте самостійно).

Теорема 3.4. Якщо простір Y повний, то простір $L(X,Y)$ – теж повний.

Доведення

Нехай $\{A_n\}$ – фундаментальна послідовність із простору $L(X,Y)$, тоді для кожного елемента $x\in X$ послідовність $\{A_nx\}$ є фундаментальною в просторі Y (перевірте це самостійно), а тому має границю (z). Відповідність $x\mapsto z$ позначимо символом A. Доведемо тепер, що A – обмежений лінійний оператор і $A_n\to A$ в просторі $L(X,Y)$.

1. Лінійність.

$$A(\alpha x+\beta y)=\lim_{n\to\infty}A_n(\alpha x+\beta y)=\alpha\lim_{n\to\infty}A_nx+\beta\lim_{n\to\infty}A_ny=\alpha Ax+\beta Ay.$$

2. Обмеженість.

Послідовність $\{A_n\}$ фундаментальна, тому вона обмежена, тобто $\exists C>0$ $\forall n:\|A_n\|\le C$, тому $\|Ax\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nx\|\le C\|x\|$.

Зверніть увагу, що остання рівність є наслідком неперервності норми: $\|x_n\|-\|x\|\le\|x_n-x\|$.

3. Збіжність $A_n\to A$.

$\|(A_n-A)x\|=\lim\limits_{m\to\infty}\|(A_n-A_mx)\|$. Оскільки послідовність $\{A_n\}$ фундаментальна, то для кожного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер N, що для всіх значень $m,n\ge N$ та всіх елементів $x\in X$ виконується нерівність: $\|(A_n-A_m)x\|\le\varepsilon\|x\|$, а тому й $\|(A_n-A)x\|\le\varepsilon\|x\|$. Звідси $\|A_n-A\|\le\varepsilon$. Тим самим доведено збіжність $A_n\to A$.

Якщо простір Y одновимірний (наприклад R), то $L(X,Y)$ називають *спряженим з X простором* і позначають як X^*. За доведеною теоремою цей простір завжди повний. Його елементами є обмежені лінійні функціонали (ми розглядали цей простір у § 2 цього розділу).

Нормовані простори називаються *ізоморфними*, коли існує взаємно однозначне лінійне відображення A простору X на весь простір Y, що відповідає такій умові: $\|Ax\|_Y=\|x\|_X$ для всіх елементів $x\in X$ (тоді відображення A називають *ізоморфізмом*). Це позначається в такий спосіб: $X \cong Y$.

Теорема 3.5 (принцип рівномірної обмеженості, або теорема Банаха–Штейнгауза). Нехай X, Y – нормовані простори, простір X – повний, а послідовність $A_n \in L(X, Y)$ має таку властивість: для всіх елементів $x \in X$ існує таке число: $C = C(x)$, що при всіх значеннях n задовольняє нерівність: $\| A_n x \| \le C(x)$. Тоді існує константа: $C > 0$, що відповідає такій умові: $\| A_n \| \le C$ для всіх значень n.

Цю теорему можна тлумачити таким чином: якщо оператор $A_n : B[0; 1] \to Y$ – це обмеження оператора A_n на одиничну кулю простору X і для всіх точок $x \in B[0; 1]$ послідовність $\{A_n x\}$ обмежена в просторі Y, то послідовність $\left\{ \sup\limits_{\| x \| = 1} \| A_n x \| \right\}$ також буде обмеженою. Інакше кажучи,

$$\left(\forall\, x \in B[0;1] : \sup_n \| A_n x \| < \infty \right) \Rightarrow \left(\sup \| A_n \| < \infty \right).$$

Перш за все доведемо лему.

Лема 3.2. Нехай $K = B[a; r]$ – довільна куля в просторі X, $r > 0$, тоді

$$\left(C_1 = \sup_{x \in K} \sup_{n \ge 1} \| A_n x \| < \infty \right) \Leftrightarrow \left(C_2 = \sup_{x \in B[0;1]} \sup_{n \ge 1} \| A_n x \| < \infty \right).$$

Доведення леми

Спочатку припустимо, що $\sup\limits_{x \in B[0;1]} \sup\limits_n \| A_n x \| = C_2 < \infty$. Тоді, оскільки $K \subset B[0; r + \|a\|]$, то $\sup\limits_{x \in K} \sup\limits_n \| A_n x \| \le (r + \| a \|) C$.

Зворотне твердження. Перетворення: $x \to \dfrac{(x-a)}{r}$, взаємно однозначно відображає кулю K на кулю $B[0;1]$ (композиція паралельного перенесення та гомотетії). Крім того, $\left\| A\left(\dfrac{(x-a)}{r} \right) \right\| \le \dfrac{(\|Ax\| + \|Aa\|)}{r}$. Звідси $C_2 \le \dfrac{2C_1}{r}$.

Лему доведено.

Доведення теореми 3.5

Припускаємо протилежне: нехай $\sup\limits_n \| A_n \| = \infty$, тоді $\exists\, n_1 : \| A_{n_1} \| > 1$, а тому існує елемент $x_1 \in B(0; 1)$, що відповідає такій умові: $\| A_{n_1} x_1 \| > 1$. З неперервності функції $\| A_{n_1}(\cdot) \|$ випливає , що нерівність: $\| A_{n_1}(x) \| > 1$, виконується в цілому околі x_1, а тому й у замкненій кулі K_1, радіус якої менший від $\frac{1}{2}$ і яка вкладена в кулю: $K_1 = B[0;1]$.

Вихідне припущення та лема дозволяють зробити такий висновок:

$$\sup_{x \in K_1} \sup_n \| A_n x \| = \infty ,$$

а тому існують такий номер: $n_2 > n_1$ та елемент $x_2 \in K_1$, що забезпечують виконання нерівності: $\| A_{n_2} x_2 \| > 2$. Аналогічні міркування доводять існування замкненої кулі $K_2 \subset K_1$; причому радіус кулі K_2 менший від $\frac{1}{4}$, а для всіх елементів $x \in K_2$ буде справедливою така нерівність: $\| A_{n_2} x \| > 2$ і т. д.

Послідовність замкнених куль стягується, і за принципом Кантора вона має спільну точку x_0 (оскільки простір X – повний). У цій точці $\| A_{n_k} x_0 \| > k$, а це суперечить умові теореми. Отже, теорему доведено.

3.4. Спряжені й самоспряжені оператори. Слабка збіжність. Слабка компактність

Нехай H – гільбертів простір, а A – обмежений лінійний оператор заданий у просторі H, тобто $A \in L(H)$. Тоді функція двох змінних: $\varphi(x, y) = \varphi_A(x, y) = (A x, y)$, являє собою *півторалінійний* функціонал на просторі H (білінійний, коли йдеться про дійсний простір H). З нерівності Коші – Буняковського випливає таке співвідношення:

$$|\varphi(x, y)| \le \| Ax \| \cdot \| y \| \le \| A \| \cdot \| x \| \cdot \| y \| .$$

Півторалінійний функціонал $\varphi(x, y)$ на просторі H називається *обмеженим*, коли існує константа: $C > 0$, що задовольняє таку нерівність:

$$|\varphi(x, y)| \le C \| x \| \cdot \| y \|, \ \forall x, y \in H . \tag{3.6}$$

Нормою $\| \varphi \|$ обмеженого півторалінійного функціонала φ назвемо точну нижню межу множини констант C, які задовольняють умову (3.6).

Доведіть самостійно такі властивості норми:

1. $|\varphi(x, y)| \le \| \varphi \| \cdot \| x \| \cdot \| y \|$ (інфінум досягається).

2. $\| \varphi \| = \sup\limits_{\substack{x \ne 0 \\ y \ne 0}} \frac{|\varphi(x, y)|}{\| x \| \cdot \| y \|} = \sup\limits_{\substack{\|x\| \le 1 \\ \|y\| \le 1}} |\varphi(x, y)| = \sup\limits_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} |\varphi(x, y)|$.

3. $\| \varphi_A \| = \| A \|$ (скористайтеся таким фактом: $\| \varphi_A \| \geq \sup\limits_{x\neq 0;\, Ax\neq 0} \dfrac{(Ax, Ax)}{\| x \| \cdot \| Ax \|}$).

Теорема 3.6. Для будь-якого обмеженого півторалінійного функціонала φ на просторі H існує, причому єдиний обмежений лінійний оператор $A : H \to H$, який відповідає умові: $\varphi = \varphi_A$ ($\forall x, y \in H : \varphi(x, y) = (Ax, y)$), і при цьому $\| \varphi \| = \| A \|$.

Доведення

Для будь-якого елемента $x \in H$ функція: $y \to \overline{\varphi(x, y)}$, є обмеженим лінійним функціоналом на просторі H (перевірте це самостійно). Тому, за теоремою Рісса, існує єдиний вектор $z \in H$, для якого при всіх значеннях $y \in H$ буде справедливою така рівність: $\overline{\varphi(x, y)} = (y, z)$. Цей закон побудови вектора z за елементом x позначимо через A, тобто $z = Ax$, тоді $\varphi(x, y) = (Ax, y)$. Доведемо, що A являє собою обмежений лінійний оператор.

Його лінійність випливає з такої рівності:

$$(A(\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\varphi(x_1, y) + \beta\varphi(x_2, y) = (\alpha A x_1 + \beta A x_2, y),$$

що виконується для всіх елементів $y \in H$.

Обмеженість оператора A випливає з наведеної нижче оцінки.

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \frac{\varphi(x, Ax)}{\| x \| \cdot \| Ax \|} \leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{| \varphi(x, y) |}{\| x \| \cdot \| y \|}, \text{ для всіх } x \neq 0.$$

Єдиність оператора A перевірте самостійно.

Теорему доведено.

Нехай A – обмежений лінійний оператор у просторі H. Тоді функціонал $\Psi(x, y)$, заданий рівністю: $\psi(x, y) = (x, Ay)$ також є півторалінійним обмеженим функціоналом у просторі H, причому $\| \psi \| = \| A \|$. Із доведеної теореми випливає існування обмеженого лінійного оператора A^*, який для всіх елементів $x, y \in H$ задовольняє таку рівність: $\psi(x, y) = (A^* x, y)$, тобто маємо відповідність: $A \mapsto A^*$, і $\| A^* \| = \| A \|$. Оператор A^* називається *спряженим* з оператором A.

Операція переходу до спряженого оператора має такі властивості:

а) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

б) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

в) $(AB)^* = B^* A^*$;

г) $I^* = I$;

д) якщо A – взаємно однозначне лінійне відображення простору H на себе , то оператор A^* також має обернений, причому $\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$.

Доведіть ці властивості самостійно.

Лінійний обмежений оператор $A \in L(H)$ називається *самоспряженим*, якщо $A = A^*$ [тобто для всіх елементів $x, y \in H$ $\quad (Ax, y) = (x, Ay)$].

Теорема 3.7. Нехай A – обмежений самоспряжений лінійний оператор у просторі H. Тоді $\| A \| = \sup\limits_{\| x \| = 1} |(Ax, x)|$.

Доведення

Розглянемо випадок, коли вихідний простір H являє собою дійсний простір.

Оскільки $|(Ax, x)| \le \| Ax \| \cdot \| x \| \le \| Ax \| \cdot \| x \|^2$, то довести треба лише нерівність: $\| A \| \le \sup\limits_{\| x \| = 1} |(Ax, x)|$.

Позначимо, що $C = \sup\limits_{\| x \| = 1} |(Ax, x)|$, тоді для всіх елементів $x \in H$ буде справедливим таке співвідношення: $|(Ax, x)| \le C \|x\|^2$.

Запишемо рівність:

$$(Ax, y) = 1/4\big((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\big). \tag{3.7}$$

Із неї випливає таке співвідношення:

$$|(Ax, y)| \le 1/4\big(|(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)|\big) \le$$

$$\le 1/4C\left(\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2\right) = 1/2C\left(\| x\|^2 + \|y \|^2\right).$$

Тут застосовано так звану “тотожність паралелограма”:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Отже, $\sup\limits_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax, y)| \le C$.

Залишилося зауважити, що ліва частина останньої нерівності дорівнює $\| A \|$.

Якщо простір H комплексний, то замість формули (3.7) використаємо таку:

$$(Ax, y) + (Ay, x) = 1/2\big((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\big),$$

звідки, за аналогією до випадку з дійсним простором

$$|(Ax,y)+(Ay,x)|\le 1/2C\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)=C\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

і коли $\|x\|=\|y\|=1$, то $|(Ax,y)+(Ay,x)|\le 2C$.

Оскільки $(Ay,x)=(y,Ax)=\overline{(Ax,y)}$, то $(Ax,y)=|(Ax,y)|e^{i\alpha}$; $(Ay,x)=$ $=|(Ax,y)|e^{-i\alpha}$. Замінивши y на $e^{i\alpha}y$, перепишемо останню нерівність у такому вигляді: $\left|e^{-i\alpha}(Ax,y)+e^{i\alpha}(Ay,x)\right|\le 2C$, звідки $|(Ax,y)|\le C$, і т. д. Теорему доведено.

Послідовність векторів x_n нормованого простору X називають *слабо збіжною* до вектора x, якщо для кожного обмеженого лінійного функціонала $\varphi\in X^*$ виконується умова: $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$, коли $n\to\infty$ (позначення: $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} x$).

При цьому збіжність за нормою називають також *сильною збіжністю*. Нерівність: $|\varphi(x_n)-\varphi(x)|\le\|\varphi\|\cdot\|x-x_n\|$, дозволяє зробити висновок, що із сильної збіжності: $x_n\to x$, випливає слабка.

Коли розглядають гільбертів простір на основі теореми Рісса, останнє визначення припускає описану нижче модифікацію.

Послідовність векторів x_n гільбертового простору H *слабо прямує* (*збігається*) до вектора x, якщо для кожного вектора $y\in H$ виконується умова: $(x_n,y)\to(x,y)$, коли $n\to\infty$.

Послідовність обмежених лінійних функціоналів $\varphi_n\in X^*$ нормованого простору *слабо прямує* (*збігається*) до функціонала $\varphi\in X^*$(позначення $\varphi_n \underset{\text{сл.}}{\to} \varphi$), якщо для кожного вектора $x\in X$ числова послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ прямує до $\varphi(x)$.

При цьому збіжність: $\varphi_n\to\varphi$ за нормою, називається також сильною.

Зауваження. Якщо X – банахів простір; $\varphi_n\in X^*$; $\varphi_n \underset{\text{сл.}}{\to} \varphi$, то для кожного елемента $x\in X$ числова послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ обмежена, а тому з теореми Банаха – Штейнгауза робимо висновок, що послідовність $\{\varphi_n\}$ обмежена, тобто $\sup\{\|\varphi_n\|\}<+\infty$. Аналогічні міркування доводять обмеженість слабо збіжної послідовності векторів у гільбертовому просторі (теорема Рісса).

Послідовність операторів $A_n\in L(X)$ (тут X – банахів простір) називається *сильно збіжною* до оператора $A\in L(X)$, якщо для кожного елемента $x\in X$ послідовність векторів $\{A_n x\}$ прямує (сильно) до вектора Ax.

При цьому вже відома нам збіжність ($\|A_n-A\|\to 0$) називається *збіжністю за нормою*.

Нижче будемо розглядати тільки сепарабельні гільбертові простори.

Множина Z сепарабельного гільбертового простору H називається *слабо компактною*, якщо з кожної послідовності векторів $x_n\in Z$ можна вибрати слабо збіжну послідовність (її слабка границя не обов'язково належить множині Z).

Теорема 3.8. (Банаха – Алаоглу). Множина Z сепарабельного гільбертового простору слабо компактна тоді й тільки тоді, коли вона обмежена.

Доведення

Якщо множина Z не обмежена, то існує послідовність $x_n \in Z$, для якої $\| x_n \| > n$. Будь-яка її підпослідовність не може слабо збігатися (див. зауваження).

Нехай тепер Z – обмежена множина в просторі H; $Z \subset B[0; C]$; $\{x_n\}$ – послідовність у Z; y_n – щільна зліченна множина в H. Розглянемо числову послідовність $\{(y_1, x_n)\}$. Вона обмежена, оскільки $\| (y_1, x_n) \| \leq \| x_n \| \cdot \| y_1 \| \leq C \| y_1 \|$. Тоді за теоремою Больцано – Вейєрштрасса, існує збіжна підпослідовність $\{(y_1, x_{n_m})\}$.

Тепер розглянемо числову послідовність $\{(y_2, x_{n_m})\}$. Ті самі міркування доводять існування збіжної підпослідовності $\{(y_2, x_{n_{m_k}})\}$. Продовжимо процедуру. У результаті одержимо послідовність векторів x_{n_1}; $x_{n_{m_2}}$; $x_{n_{m_{k_3}}}$, … (будемо для спрощення позначати її $\tilde{x}_n$), що має таку особливість: вона є підпослідовністю послідовностей $\{x_{n_m}\}$; $\{x_{n_{m_k}}\}$ і т. д., а тому для кожного y_j числова послідовність $\{(y_j, \tilde{x}_n)\}$ збігається, коли $n \to \infty$.

Якщо послідовності $\{x_{n_m}\}$; $\{x_{n_{m_k}}\}$ … виписати послідовними рядками, то в утвореній ними нескінченній таблиці $\{\tilde{x}_n\}$ являє собою діагональ. Порядок вибору $\{\tilde{x}_n\}$ – це вже знайома нам діагональна процедура Кантора (п. 2.4, розд. I).

Далі розглянемо порядок доведення. Спершу доведемо, що для кожного елемента $y \in H$ послідовність $\{(y, \tilde{x}_n)\}$ є збіжною. Тим самим на просторі H визначено функцію: $f(y) = \lim\limits_{n \to \infty} (y, \tilde{x}_n)$. Якщо довести, що f – лінійний обмежений функціонал на просторі H, то згідно з теоремою Рісса існує вектор $x \in H$, який відповідає такій умові: $(y, x) = \lim\limits_{n \to \infty} (y, \tilde{x}_n)$ для всіх $y \in H$, а значить мету доведення буде досягнуто.

То ж нехай $y \in H$. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і виберемо елемент y_j, що відповідає такій умові: $\| y - y_j \| < \varepsilon$. Вочевидь, існує таке число N, що коли $m, n \geq N$, то виконується нерівність: $|(y_j, \tilde{x}_n) - (y_j, \tilde{x}_m)| < \varepsilon$. Тоді для всіх значень $m, n \geq N$ буде справедливим твердження:

$$|(y, \tilde{x}_n) - (y, \tilde{x}_m)| \leq |(y, \tilde{x}_n) - (y_j, \tilde{x}_n)| + |(y_j, \tilde{x}_n) - (y_j, \tilde{x}_m)| + |(y_j, \tilde{x}_m) - (y, \tilde{x}_m)| \leq \varepsilon(2C + 1).$$

Отже, послідовність $\{(y,\tilde{x}_n)\}$ фундаментальна, а тому збіжна.

Тепер перевіримо лінійність функціонала f, а саме:

$$f(y+z)=\lim_{n\to\infty}(y+z,\tilde{x}_n)=\lim_{n\to\infty}(y,\tilde{x}_n)+\lim_{n\to\infty}(z,\tilde{x}_n)=f(y)+f(z)$$

Аналогічно необхідно довести, що $f(\alpha y)=\alpha f(y)$. Нарешті, як граничний перехід від нерівності: $|(y,\tilde{x}_n)|\le C\|y\|$, одержимо обмеженість функціонала f.

Теорему доведено.

3.5. Цілком неперервні лінійні оператори

Нехай X, Y – нормовані простори; $A : X \to Y$ – лінійний оператор.

Зауважимо, що оператор A обмежений тоді й тільки тоді, коли виконується умова: для кожної обмеженої множини Z в просторі X її образ: $A(Z)=\{Ax \mid x\in Z\}$, являє собою обмежену множину в просторі Y.

Оператор A називається *цілком неперервним*, або *компактним*, якщо виконується така умова: для кожної обмеженої множини Z в просторі X її образ $A(Z)$ є передкомпактною множиною в просторі Y.

Розглянемо важливий для застосування приклад цілком неперервного оператора – *інтегральний оператор Фредгольма.*

Нехай $X=C[a;b]$, це банахів простір функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$ (дійснозначних), $K(t,\tau)$ – неперервна функція двох змінних на декартовому квадраті $[a;b]\times[a;b]$. Тоді для кожної неперервної функції $x(\cdot)\in C[a;b]$ коректно визначено функцію на відрізку $[a;b]$: $(Ax)(t)=\int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau$. Дійсно, для кожного числа $t\in[a;b]$ під інтегралом стоїть неперервна, а тому інтегровна функція аргументу τ. Із класичних теорем аналізу робимо висновок про неперервність функції Ax. Таким чином буде визначено відображення $A : X \to X$. Лінійність оператора A очевидна. Функція K називається “інтегральним ядром”.

Теорема 3.9. Оператор A – компактний.

Доведення. Спочатку перевіримо обмеженість оператора A.

Насамперед, неперервна функція K на квадраті $[a;b]\times[a;b]$ обмежена. Позначимо, що $\sup\limits_{t,\tau\in[a,b]}|K(t,\tau)|=C$. Тоді для кожного значення $t\in[a;b]$ буде справедливою така нерівність: $|(Ax)(t)|\le\int\limits_a^b|K(t,\tau)|\times|x(\tau)|d\tau\le C(b-a)\|x\|$, а тому $\|Ax\|=\sup\limits_{a\le t\le b}|(Ax)(t)|\le C(b-a)\|x\|$. Це означає, що оператор A – обмежений, і $\|A\|\le C(b-a)$.

Для неперервних функцій однієї змінної в курсі математичного аналізу доведено теорему Вейєрштрасса про апроксимацію їх на числовому відрізку алгебраїчними многочленами. Цю теорему можна суттєво узагальнити (це узагальнення відоме як теорема Стоуна – Вейєрштрасса). Використаємо без доведення таке узагальнення стосовно функцій двох змінних:

Для неперервної на квадраті $[a;b]\times[a;b]$ *функції* K *та будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *існує такий многочлен двох змінних:* $K_\varepsilon(t,\tau)=\sum\limits_{0\le i,j\le m} a_{ij}t^i\tau^j$ *, що для всіляких значень* $t,\tau\in[a,b]$ буде справедливою нерівність: $|K(t,\tau)-K_\varepsilon(t,\tau)|\le\varepsilon$.

Тепер розглянемо оператор: $(A_\varepsilon x)(t)=\int\limits_a^b K_\varepsilon(t,\tau)x(\tau)d\tau$. Він також являє собою оператор Фредгольма з ядром K_ε, і тому оператор A_ε обмежений.

Цей оператор скінченновимірний ($\dim\operatorname{Im}A_\varepsilon<\infty$). Дійсно, $(A_\varepsilon x)(t)=\int\limits_a^b\left(\sum\limits_{0\le i,j\le m}a_{ij}t^i\tau^j\right)x(\tau)d\tau=\sum\limits_{0\le i\le m}b_it^j$, це означає, що функції $A_\varepsilon x$ належать лінійній оболонці системи $\{1,t,\ldots,t^m\}$. Отже, оператор A_ε є цілком неперервним.

Для кожного значення $t\in[a,b]$ та функції $x\in C[a,b]$ справедливою буде така нерівність:

$$|(Ax)(t)-(A_\varepsilon x)(t)|\le\int\limits_a^b|K(t,\tau)-K_\varepsilon(t,\tau)||x(\tau)|d\tau\le\varepsilon(b-a)\|x\|.$$

Отже, $\|A-A_\varepsilon\|\le\varepsilon(b-a)$, і послідовність $A_{1/n}\to A$ (за нормою). Використовуючи без доведення той факт, що підмножина лінійних цілком неперервних операторів являє собою підпростір у просторі лінійних операторів, робимо висновок про компактність оператора A. Теорему доведено.

Далі в цьому параграфі будемо вважати, що основний простір є гільбертовим.

Теорема 3.10. Нехай A – обмежений оператор у гільбертовому просторі H. Він буде компактним тоді й тільки тоді, коли існує послідовність $\{A_n\}$ скінченновимірних обмежених операторів у просторі H, що прямує за нормою до оператора A.

Доведення

Залишилося довести лише необхідність умови.

Нехай оператор A – цілком неперервний; $\varepsilon>0$; $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ являє собою ε-сітку в $A(B[0;1])$. Розглянемо лінійну оболонку L векторів $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ і $P=P_\varepsilon$ – ортопроектор на просторі L ($\operatorname{Im}P=L$). З екстремальної властивості ортопроекції $\left(\|y-Py\|=\min\limits_{z\in L}\|y-z\|\right)$ робимо висновок, що для кожного елемента $x\in B[0;1]$ буде справедливою нерівність:

$\| Ax - PAx \| \le \varepsilon$, оскільки в просторі L існує вектор y_i відповідний такій умові: $\| Ax - y_i \| \le \varepsilon$. Звідси $\| A - PA \| = \sup\limits_{\| x \| \le 1} \| (A - PA)(x) \| \le \varepsilon$. Отже, послідовність операторів $P_{1/n}A$ задовольняє умову. Теорему доведено.

Теорема 3.11. Нехай A – обмежений оператор у гільбертовому просторі H. Він буде компактним тоді й тільки тоді, коли для будь-якої слабо збіжної послідовності $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} x$, її образ Ax_n сильно прямує до Ax.

Доведення

Доведемо спочатку необхідність умови. Нехай A – компактний оператор; $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} x$. Тоді для кожного елемента $y \in H$ буде справедливою така рівність: $(Ax_n - Ax, y) = (x_n - x, A^* y) \to 0$, отже, послідовність Ax_n принаймні слабо прямує до Ax. Припустимо протилежне: нехай Ax_n не прямує до Ax за нормою. Тоді існує таке число $\varepsilon > 0$ й підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що буде справедливим твердження: $\| Ax_{n_k} - Ax \| \ge \varepsilon$. Оскільки послідовність $\{ x_n \}$ – обмежена, а множина $\{Ax_n\}$ передкомпактна, то існує збіжна за нормою підпослідовність $\{Ax_{n_{k_m}}\}$. Границя z останньої підпослідовності не може дорівнювати Ax (оскільки $\| Ax - z \| \ge \varepsilon$), але, з іншого боку, послідовність $\{Ax_{n_{k_m}}\}$ також має слабо прямувати до z. Це суперечить єдиності слабкої границі.

Тепер доведемо достатність умови. Візьмемо обмежену множину Z в просторі H і дослідимо її образ. Послідовність точок образу: $y_n = Ax_n$, породжена послідовністю $\{x_n\}$ в множині Z, яка за теоремою Банаха – Алаоглу має слабо збіжну підпослідовність x_{nk}. Але тоді за припущенням послідовність $\{Ax_{n_k}\}$ являє собою сильно збіжну підпослідовність. Це міркування доводить передкомпактність множини $A(Z)$. Теорему доведено.

Наслідок. Нехай A – компактний оператор у гільбертовому просторі H. Тоді оператор A^* – компактний.

Доведення

Зауважимо, що оператор AA^* компактний. Якщо $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} x$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена й відповідна послідовність $AA^*(x_n - x) \to 0$ за нормою.

Побудуємо оцінку зверху для $\| A^* x_n - A^* x \|^2$, а саме:

$$\| A^*(x_n - x) \|^2 = (AA^*(x_n - x), x_n - x) \le \| AA^*(x_n - x) \| \cdot \| x_n - x \|,$$

тобто послідовність $\left\| A^* x_n - A^* x \right\|^2$ оцінюється зверху добутком нескінченно малої та обмеженої послідовностей. Отже, $A^* x_n \to Ax$ за нормою. Застосуємо теорему. Наслідок доведено.

3.6. Спектр і резольвента лінійного оператора

У лінійній алгебрі особливу роль при дослідженні матриць (операторів) відіграють їх власні числа. Вони формують спектр оператора (матриці). Ці поняття узагальнюються також на випадок розгляду операторів у нескінченновимірних просторах.

У скінченновимірних просторах з невиродженості оператора $A: X \to X$ ($\mathrm{Ker} A = \{0\}$), випливає, що образ $\mathrm{Im} A = X$, тобто A – взаємно однозначне відображення простору X на себе. Проте, коли йдеться про нескінченновимірні простори, то це загалом не так.

Наприклад, якщо лінійний оператор $A: l_2 \to l_2$ задано такою умовою: $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$, то $\mathrm{Ker} A = \{0\}$, але $\mathrm{Im}\, A \neq l_2$.

Наведені нижче визначення ґрунтуються на такому нетривіальному положенні:

Теорема 3.12 (теорема Банаха про обернений оператор). Нехай X, Y – банахові простори; $A \in L(X; Y)$, оператор A взаємно однозначно відображає простір X на весь простір Y $\left(\mathrm{Ker} A = \{0\}; \mathrm{Im}\, A = Y\right)$. Тоді обернений оператор A^{-1} – обмежений.

Нехай $A \in L(X)$ – лінійний оператор у комплексному банаховому просторі X (якщо простори комплексні, то вдається одержати найбільш змістовні результати); $\lambda \in C$. Для оператора $A - \lambda I$, де I – тотожний оператор, можливий один із таких чотирьох випадків:

1. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Тоді існує ненульовий розв'язок рівняння: $Ax = \lambda x$; λ називається *власним числом* оператора A (а x – *власним вектором*). Сукупність усіх власних чисел називається *точковим спектром* оператора A [позначається $\sigma_т(A)$].

2. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$; $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq X$; $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = X$. Сукупність таких чисел λ називається *неперервним спектром* оператора A [позначається $\sigma_н(A)$].

3. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$; $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} \neq X$. Сукупність таких чисел λ називається *залишковим спектром* оператора A [позначається $\sigma_з(A)$].

4. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$; $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = X$. У цьому випадку за теоремою Банаха оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ є обмеженим. Такі значення λ називаються

регулярними числами оператора A, а їх сукупність – його *резольвентною* множиною [позначається $\rho(A) = \rho_A$].

Таким чином, усю комплексну площину ***C*** можна розкласти на дві множини, що не перетинаються, а саме: $C = \sigma(A) \cup \rho(A) = \sigma_A \cup \rho_A$ [тут $\sigma(A) = \sigma_A$ – спектр оператора A; $\sigma_A = \sigma_{\text{т}}(A) \cup \sigma_{\text{н}}(A) \cup \sigma_{\text{з}}(A)$].

На множині ρ_A задано операторозначну функцію: $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$, її називають *резольвентою* оператора A і записують у такий спосіб: $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda; A) = R_A(\lambda) = R_\lambda(A)$).

Приклад. Нехай $X = C[0;1]$ – банахів простір комплекснозначних неперервних функцій на відрізку $[0;1]$. Оператор A задано в X такою формулою: $(Ax)(t) = tx(t)$. Цей оператор буде лінійним та обмеженим (перевірте це самостійно). Визначимо множини σ_A; $\sigma_{\text{т}}(A)$; $\sigma_{\text{н}}(A)$; $\sigma_{\text{з}}(A)$.

Спочатку знайдемо точковий спектр оператора A. Для цього розглянемо функціональне рівняння: $(A - \lambda I)x = 0$, тобто $(t - \lambda)x(t) \equiv 0$, з параметром λ. Коли $\lambda \notin [0;1]$, то перший множник у жодній точці відрізка не дорівнює 0, а тому $x(t) \equiv 0$, і рівняння не має ненульових розв'язків. Якщо ж $\lambda \in [0;1]$, то $x(t)$ може не дорівнювати нулю лише тоді, коли $t = \lambda$, але для неперервних функцій це неможливо. Отже, $x(t) \equiv 0$, тобто рівняння не має ненульових розв'язків і $\sigma_{\text{т}}(A) = \varnothing$.

Тепер визначимо резольвентну множину. Для всіх чисел $\lambda \in [0;1]$ множина $\operatorname{Im}(A - \lambda)$ містить лише ті функції y, для яких $y(\lambda) = 0$, тому $[0;1] \subset \sigma_A$. Але коли $\lambda \notin [0;1]$ рівняння: $(A - \lambda)x = y$ (відносно x), тобто $(t - \lambda)x(t) = y(t)$, має розв'язок, а саме: $x(t) = \dfrac{y(t)}{t - \lambda}$, що являє собою неперервну на відрізку $[0;1]$ функцію, тому $\operatorname{Im}(A - \lambda) = X$, і $\sigma_A = [0;1]$; $\rho_A = C \setminus [0;1]$.

Залишилося детальніше з'ясувати характер точок спектра. Коли $\lambda \in [0;1]$, то образу оператора $(A - \lambda I)$ можуть належати лише такі функції y, які в точці λ набувають значення 0. Але одиничну функцію не можна подати як рівномірну границю послідовності таких функцій, тому $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda)} \neq X$; $[0;1] = \sigma_{\text{з}}(A)$.

Теорема 3.13. Нехай A – обмежений лінійний оператор у комплексному банаховому просторі X. Тоді $\sigma(A)$ являє собою обмежену замкнену множину в просторі ***C***.

Лема 3.1. Нехай A – обмежений лінійний оператор у банаховому просторі, який відповідає такій умові: $\|I - A\| < 1$. Тоді оператор A взаємно однозначно відображує простір X на себе.

Доведення леми

Достатньо довести існування операторів $B, C \in L(X)$, що відповідають такій умові: $BA = AC = I$. Дійсно, тоді $\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}BA = \{0\}$; $\mathrm{Im}\, A \supset \mathrm{Im}\, AC = X$. Звідси можна зробити висновок, що $B = C = A^{-1}$ (обміркуйте це).

Нехай $B = I - A$. Оскільки $\| B \| = q < 1$, то ряд $I + B + B^2 + \ldots$ абсолютно збіжний у просторі $L(X)$ (тобто $\| B^n \| \le \| B \|^n = q^n$). Простір $L(X)$ повний, тому цей ряд збігається. Уведемо таке позначення: $C = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, тоді

$$AC = (I - B) \times \lim_{n\to\infty}\left(I + B + \ldots + B^n\right) = \lim_{n\to\infty}(I - B)\left(I + B + \ldots + B^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(I - B^{n+1}\right) = I$$

Тут використано той факт, що відображення $D \mapsto A \cdot D$ є неперервним у просторі $L(X)$. Аналогічно можна довести, що $CA = I$. Лему доведено.

Доведення теореми. Якщо $|\lambda| > \| A \|$, то за лемою оператор $I - \lambda^{-1} A$ взаємно однозначно відображує X на себе. Ту саму властивість має також такий оператор: $-\lambda\left(I - \lambda^{-1} A\right) = A - \lambda I$, тому $\lambda \in \rho_A$ і $\sigma_A \subset \left\{ \lambda \,\big|\, |\lambda| \le \| A \| \right\}$.

Доведемо відкритість резольвентної множини. Коли $\lambda \in \rho_A$, то оператор $(A - \lambda I)$ має обернений; причому $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$. Для $\mu \in \boldsymbol{C}$, відповідних такій умові: $|\lambda - \mu| < \|(A - \lambda I)\|^{-1}$, будуть справедливими твердження:

$$\left\| I - (A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I) \right\| = \left\| (A - \lambda I)^{-1} \times \left((A - \lambda I) - (A - \mu I)\right) \right\| \le \left\| (A - \mu I)^{-1} \right\| \cdot |\mu - \lambda| < 1,$$

а тому за лемою оператор: $B = (A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)$, взаємно однозначно діє на просторі X. Отже, ту саму властивість має і оператор: $A - \mu I = (A - \mu I)B$. Теорему доведено.

Лема 3.2 (тотожність Гільберта). Нехай $A \in L(X)$; $\lambda, \mu \in \rho_A$, тоді $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$.

Доведення

$$R_\lambda(A)(\mu I - A) R_\mu(A) - R_\lambda(A)(\lambda I - A) R_\mu(A) = R_\lambda(A)(\mu I - \lambda I) R_\mu(A).$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Коли $\lambda, \mu \in \rho_A$, то $R_\lambda(A) R_\mu(A) = R_\mu(A) R_\lambda(A)$ (оператори резольвенти комутують).

Для того, щоб довести цей наслідок, необхідно записати тотожність Гільберта, замінивши λ на μ й навпаки, та порівняти два записи. Зробіть це самостійно.

Подамо без доведення ще один факт, стосовно множини $\sigma(A)$, а саме: нехай $A \in L(X)$, тоді $\sigma(A) \ne \varnothing$.

3.7. Спектральний радіус. Інтегральні оператори Вольтерра. Спектр самоспряженого оператора

Нехай A – лінійний обмежений оператор у комплексному банаховому просторі X. Тоді, як було доведено вище, спектр оператора непорожній і міститься в кулі $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \| A \|\} \subset C$. Отже, існує число: $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$, яке називається *спектральним радіусом* оператора $\|A\|$. Відносно спектрального радіуса має місце таке твердження:

Теорема 3.15. Спектральний радіус оператора $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|}$.

Наслідок. Нехай A – самоспряжений обмежений лінійний оператор у гільбертовому просторі, тоді $r(A) = \| A \|$.

Доведення

Оскільки оператор A^2 самоспряжений, то

$$\| A^2 \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \left| \left(A^2 x, x \right) \right| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| Ax \|^2 = \| A \|^2 .$$

Аналогічно $\| A^4 \| = \| A^2 \|^2 = \| A \|^4$.

За індукцією

$$\| A^{2^n} \| = \| A \|^{2^n} ; \quad \sqrt[2^n]{\| A^{2^n} \|} = \| A \|,$$

тому $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\| A^{2^n} \|} = \| A \|$. Наслідок доведено.

Повертаємося до загального випадку, коли A являє собою обмежений лінійний оператор в банаховому просторі X. Нехай $|\lambda| > r(A)$, тоді рівняння: $\lambda x - Ax = y$ відносно x, має в просторі X єдиний розв’язок для кожного елемента $y \in X$. Цей розв’язок має такий вигляд:

$$x = (\lambda - A)^{-1} y = \lambda^{-1} y + \lambda^{-2} Ay + \lambda^{-3} A^2 y + \cdots .$$

Його наближення можна отримати, якщо взяти обмежену кількість членів цього ряду, тобто $x \approx \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^{-n-1} A^n y$. Це дає метод наближеного розв’язування таких рівнянь.

Розглянемо приклад.

Нехай $X = C[a;b]$. Оператор A визначено в просторі X відповідно до такої формули:

$$(Ax)(t)=\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (*)$$

Тут $K(t,\tau)$ – функція на трикутнику: $a \le \tau \le t \le b$. Якщо функція K неперервна на цьому трикутнику, то інтеграл у правій частині рівності (*) визначено, і результат дійсно являє собою неперервну функцію на відрізку $[a;b]$.

Якщо поширити функцію K на квадрат $[a;b]\times[a;b]$, використовуючи формулу:

$$K_1(t,\tau)=\begin{cases} K(t,\tau), & \tau \le t, \\ 0, & \tau > t, \end{cases}$$

то оператор A матиме такий вигляд:

$$(Ax)(t)=\int_a^b K_1(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Оператор цього типу вже було розглянуто раніше: для неперервної функції K_1 він буде компактним у просторі X. Можна довести, що це правильно й для розривної функції K_1. Надалі ми не будемо брати до уваги цей факт.

Лінійність оператора A очевидна, а доведення обмеженості й оцінку норми здійснюємо за аналогією до міркуваннь пункту 3.5 цього розділу, а саме: для всіх значень $t \in [a;b]$ буде справедливою така нерівність:

$$|(Ax)(t)| \le C \cdot \|x\| \cdot (t-a),$$

а тому $\|A\| \le C(b-a)$, тут $C=\max\limits_{a\le\tau\le t\le b}|K(t,\tau)|$.

Звідси

$$(A^2x)(t)=\int_a^t K(t;\tau_1)(Ax)(\tau_1)d\tau_1=\int_a^t K(t;\tau_1)\left(\int_a^{\tau_1} K(\tau_1;\tau_2)x(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1;$$

$$\left|(A^2x)(t)\right| \le \int_a^t C\left(\int_a^{\tau_1} C\|x\|d\tau_1\right)=C^2(t-a)^2\|x\|/2.$$

Справедливість останньої рівності перевірте самостійно.

Тепер $\|A^2\| \le \dfrac{C^2(b-a)^2}{2}$.

Індуктивно перевіряється така нерівність: $\| A^n \| \leq \frac{C^n (b-a)^n}{n!}$ (зробіть це самостійно). Отже, $\sqrt[n]{\| A^n \|} \leq \frac{C(b-a)}{\sqrt[n]{n!}}$ і оскільки $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$, коли $n \to \infty$, то $r(A) = 0$.

Оператор A називається *інтегральним оператором Вольтерра* (узагалі так прийнято називати компактні оператори з нульовим спектральним радіусом).

Рівняння $(\lambda - A)x = y$, відносно функції x, або записане у розширеному вигляді,

$$\lambda x(t) + \int_a^t K(t,\tau)\, x(\tau) d\tau = y(t),$$

має для кожного $y \in X$ єдиний розв'язок, коли $\lambda \neq 0$. Воно називається *інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду*. При цьому

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n y .$$

Нехай тепер H – гільбертів (комплексний) простір; A – самоспряжений обмежений оператор в просторі H. Тоді квадратична форма (Ax, x) набуває тільки дійсних значень, тобто $(Ax,x) = (x, Ax) = \overline{(Ax,x)}$. Крім того, $\sup\limits_{\| x \| = 1} \left| (Ax,x) \right| < +\infty$ (оскільки дорівнює $\| A \|$).

Уведемо такі позначення: $m = \inf\limits_{\| x \| =1} (Ax,x)$; $M = \sup\limits_{\| x \| =1} (Ax,x)$.

Теорема 3.16. $\sigma(A) \subset [m; M]$.

Для її доведення спочатку доведемо дві леми.

Лема 3.3. Власні числа λ самоспряженого обмеженого оператора A дійсні й належать відрізку $[m; M]$.

Доведення леми

Припустимо, що $x \neq 0$. Оскільки λ – власне число оператора A, то буде справедливою така рівність: $Ax = \lambda x$. Тоді, враховуючи самоспряженість оператора,

$$\lambda \|x\|^2 = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{\lambda} \| x \|^2 .$$

Отже, $\lambda \in R$. Крім того, можна вважати, що $\| x \| = 1$, а значить,

$$\lambda = \lambda \| x \|^2 = (Ax, x) \geq \inf_{\| x \| =1} (Ax, x) = m .$$

Аналогічно можна довести, що $\lambda \leq M$. Лему доведено.

Лема 3.4. Нехай $A \in L(H)$. Тоді $\mathrm{Ker}A \oplus \overline{\mathrm{Im}A^*} = H$.

Доведення леми

Насамперед покажемо, що $\mathrm{Ker}A \perp \mathrm{Im}A^*$. Дійсно, для всіх елементів $x \in \mathrm{Ker}A$ справедлива рівність: $Ax = 0$, а для всіх $y \in \mathrm{Im}A^*$ буде правильним твердження: $y = A^* z$, тому $(x, y) = (x, A^* z) = (Ax, z) = 0$. Звідси $\mathrm{Ker}A \perp \overline{\mathrm{Im}A^*}$ (перевірте самостійно твердження: якщо $X, Y \subset H$ та $X \perp Y$, то $X \perp \overline{Y}$).

Залишилося довести, що $H = \mathrm{Ker}A + \overline{\mathrm{Im}A^*}$. Беремо $x \in H$. Нехай $x_1 = \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{Im}A^*}}\, x \in \overline{\mathrm{Im}A^*}$. Доведемо, що $(x - x_1) \in \mathrm{Ker}A$. Оскільки $(x - x_1) \perp \overline{\mathrm{Im}A^*}$, то для кожного елемента $y \in H$ буде справедливим твердження: $(A(x - x_1), y) = (x - x_1, A^* y) = 0$. Отже, $A(x - x_1) = 0$. Лему доведено.

Доведення теореми 3.16

Спочатку доведемо, що $\sigma(A) \subset R$.

Нехай $\lambda = \alpha + \beta i$; $\beta \neq 0$, тобто $\lambda \notin R$. За лемою 3.3 числа λ та $\overline{\lambda}$ не можуть бути власними числами оператора A, а тому, по-перше, $\mathrm{Ker}(\lambda - A) = \{0\}$, а по-друге – $\overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} = \left(\mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - A)\right)^{\perp} = H$ [тут застосовується лема 3.4 й самоспряженість оператора A: $(\lambda - A)^* = \overline{\lambda} - A$]. Враховуючи це, достатньо довести, що лінійний багатовид $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ замкнений, тоді буде справедливим твердження: $\mathrm{Im}(\lambda - A) = H$ і $\lambda \in \rho(A)$.

Для всіх елементів $x \in H$

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = ((\alpha - A)x + i\beta x, (\alpha - A)x + i\beta x) = \|\alpha x - Ax\|^2 +$$

$$+ \|\beta x\|^2 + i(\beta x, \alpha x - Ax) - i(\alpha x - Ax, \beta x) = \|\alpha x - Ax\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2.$$

Отже, для кожного елемента $x \in H$ буде справедливою нерівність: $\|(\lambda - A)x\| \geq |\beta| \|x\|$, тобто оператор $(\lambda - A)^{-1}$ є обмеженим.

Нехай тепер y – гранична точка лінійного багатовиду $\mathrm{Im}(\lambda - A)$. Тоді існує послідовність векторів: $y_n = (\lambda - A)x_n \in \mathrm{Im}(\lambda - A)$, що відповідає такій умові: $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

Оскільки з доведення випливає, що $\|x_n - x_m\| \leq |\beta|^{-1} \|y_n - y_m\|$, то послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, а тому існує елемент: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Звідси $(\lambda - A)x = \lim\limits_{n \to \infty} (\lambda - A)x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$. Цим доведено, що $y \in \mathrm{Im}(\lambda - A)$. Отже, $\lambda \in \rho(A)$ і $\sigma(A) \subset R$.

Тепер доведемо, що $\sigma(A) \subset [m;M]$. Нехай $\lambda \in R$ і $\lambda > M$ (тобто $\lambda = M + \delta$ для якогось числа $\delta > 0$). Подальше доведення цілком аналогічне першій частині, а саме: $\mathrm{Ker}(\lambda - A) = \{0\}$ (лема 3.3); $\overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} = H$. Залишається перевірити замкненість лінійного багатовиду $\mathrm{Im}(\lambda - A)$, а саме:

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = (\delta x + (M - A)x, \delta x + (M - A)x) = \delta^2 \|x\|^2 + 2\delta((M - A)x, x) + \|(M - A)x\|^2.$$

За визначенням числа M для всякого елемента $x \in H$ буде справедливою нерівність: $(Ax, x) \le M \| x \|^2$. Дійсно, коли $x \ne 0$, то $\left(\frac{Ax}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \le M$; якщо ж $x = 0$, то нерівність очевидна. Звідси випливає, що $\| (\lambda - A)x \|^2 \ge \delta^2 \| x \|^2$, тому, як і раніше, лінійний багатовид $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ замкнений.

Аналогічно отримуємо суперечність для випадку, коли $\lambda < m$. Теорему доведено повністю.

3.8. Спектр цілком неперервного оператора. Теореми Фредгольма

Результати, описані нижче, можна застосувати до компактних операторів у банаховому просторі, але для спрощення доведень розглянемо тільки сепарабельний гільбертів простір.

Отже, нехай A – компактний оператор у сепарабельному гільбертовому просторі.

Теорема 3.17. Якщо $\lambda \ne 0$ являє собою власне число компактного оператора A, то $\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda - A) < \infty$, тобто власний підпростір із власним числом λ – скінченновимірний.

Доведення

Коли припустити, що $\dim \mathrm{Ker}(\lambda - A) = \infty$, то існує нескінченна ортонормована система $\{e_n\}$ власних векторів із власним числом λ. Тоді $e_n \to 0$ слабо, і за критерієм компактності оператора A, $Ae_n \to 0$ сильно. Але ж $\| Ae_n \| = \| \lambda e_n \| = \| \lambda \| \ne 0$, що суперечить цій збіжності. Теорему доведено

Теорема 3.18. Нехай A – компактний оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H, а $\varepsilon > 0$. Тоді існує лише скінченна кількість власних чисел λ, що відповідають умові: $| \lambda | > \varepsilon$.

Доведення

Припустимо протилежне: нехай існує послідовність власних чисел λ_n, що відповідають такій умові: $| \lambda_n | > \varepsilon$. Позначимо через x_n відповідні власні вектори. Оскільки власні числа попарно різні, то система векторів $\{x_n\}$ лінійно незалежна (згадайте положення лінійної алгебри чи перевірте це самостійно).

Застосуємо до системи $\{x_n\}$ процедуру ортогоналізації, унаслідок якої одержимо ортонормовану систему $\{e_n\}$. З лінійної незалежності системи $\{x_n\}$ випливає, що для будь-якого числа n системи $\{x_1,\ldots,x_n\}$ та $\{e_1,\ldots,e_n\}$ будуть еквівалентними (пригадайте алгоритм ортогоналізації (розділ III, § 4, п. 4.2). Звідси

$$\begin{aligned}
&e_1 = \alpha_{11}x_1;\\
&e_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2;\\
&e_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e_n = \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

і відповідно $Ae_n = A\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}x_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}\lambda_k x_k; \quad \lambda_n e_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}\lambda_n x_k.$

Вектор $\lambda_n e_n - Ae_n$ належить лінійній оболонці векторів $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$, а тому й лінійній оболонці векторів $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$. А значить,

$$\| Ae_n \| = \| \lambda_n e_n - (\lambda_n - A)e_n \| \geq | \lambda_n |.$$

Отже, $e_n \to 0$ слабо, але $Ae_n \not\to 0$ сильно. Це суперечить критерію компактності оператора A. Теорему доведено.

Лема 3.5. Нехай A – компактний оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H, тоді $\mathrm{Im}(I - A)$ замкнений у просторі H.

Доведення

Нехай y – гранична точка множини $\mathrm{Im}(I - A)$. Тоді існує послідовність $\{y_n\}$, що відповідає таким умовам: $y_n \in \mathrm{Im}(I - A)$ і $y_n \to y$, але $y_n = (I - A)x_n$. Що ж стосується послідовності $\{x_n\}$, то вона може бути обмеженою або ні.

Розглянемо обидва випадки.

1. Послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Тоді за теоремою Банаха – Алаоглу вона має слабо збіжну підпослідовність: $x_{n_k} \underset{\text{сл.}}{\to} x$. Звідси випливає, що $Ax_{n_k} \to Ax$ сильно; і відповідно підпослідовність $x_{n_k} = Ax_{n_k} + y_{n_k}$ також сильно прямує до $Ax + y$. Далі, оскільки слабка границя єдина, то $x = Ax + y$; $y = x - Ax$ і, відповідно, $y \in \mathrm{Im}(I - A)$. Лему доведено.

2. Послідовність $\{x_n\}$ необмежена. Доведемо, що шляхом відповідної корекції її можна зробити обмеженою.

Позначимо, що $L = \mathrm{Ker}(I - A)$, і замінимо вектор x_n на його ортогональну складову під час проеціювання на множину L, а саме: $x'_n = \mathrm{ort}_L x_n = x_n - \mathrm{pr}_L x_n$, тоді $(I - A)x'_n = (I - A)x_n = y_n$; і $x'_n \perp L$.

Якби послідовність $\{x'_n\}$ була необмеженою, то існувала б її підпослідовність $\{x'_{n_k}\}$, що має таку властивість: $\| x'_{n_k} \| \to \infty$ і елемент: $z_k = \dfrac{x'_{n_k}}{\| x'_{n_k} \|}$, відповідає таким умовам: $(I - A)z_k = \| x'_{n_k} \|^{-1} (I - A)x'_{n_k} \to 0$, коли $k \to \infty$ (нагадаємо, що $(I - A)x'_{n_k} \to y$); $\| z_k \| = 1$ і $z_k \perp L$. Наведені вище міркування доводять, що підпослідовність $\{z_{k_m}\}$ має сильну границю z, для якої

$$(I - A)z = 0 . \tag{*}$$

Крім того, з неперервності норми випливає, що

$$\| z \| = 1 , \tag{**}$$

а замкненість множини L (ядра неперервного відображення) дає змогу стверджувати, що

$$z \perp L . \tag{***}$$

Як бачимо, система умов (*) – (***) несумісна. Дане протиріччя доводить, що послідовність $\{x'_n\}$ обмежена й підпадає під умови випадку 1. Отже, лему доведено.

Зауваження. Коли $\lambda \neq 0$, то $\lambda - A = \lambda\left(I - \lambda^{-1} A\right)$, і тому множина $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ також замкнена.

Теорема 3.20. Нехай A – компактний оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H. Тоді $\forall\, \lambda \neq 0$: $\lambda \in \rho(A) \cup \sigma_T(A)$. Інакше кажучи, увесь спектр оператора A точковий, крім, можливо, випадку, коли $\lambda = 0$.

Доведення

Припустимо, що $\lambda \neq 0$ і $\lambda \notin \sigma_T(A)$. Тоді $\mathrm{Ker}(\lambda - A) = \{0\}$, і за лемою множина $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ є (замкненим) підпростором. Отже, $H_1 = \mathrm{Im}(\lambda - A)$; $H_2 = \mathrm{Im}(\lambda - A)^2$; …; $H_n = \mathrm{Im}(\lambda - A)^n$, також являють собою замкнені підпростори в просторі H (обміркуйте такий висновок) і при цьому: $H \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots$ Крім того, оператор ($\lambda - A$) взаємно однозначно відображує простір H_k на весь простір H_{k+1}.

Якщо для будь-якого значення n виконується умова: $H_n \neq H_{n+1}$, то існує ортонормована послідовність векторів: $e_n \in H_n \setminus H_{n+1}$ (треба брати вектор $e_n \in H_n \Theta H_{n+1}$ для всіх n). При цьому $e_n \to 0$ слабо, але сильної збіжності не має. Тоді $(\lambda - A)e_n \perp \lambda e_n$; $\| Ae_n \| = \| \lambda e_n - (\lambda - A)e_n \| \geq \| \lambda e_n \| = | \lambda |$, що суперечить критерію компактності, відповідно до якого $Ae_n \to 0$ сильно.

Цим доведено існування такого номера n, для якого справедлива рівність: $H_n = H_{n+1}$. Доведемо, що тоді буде справедливим твердження:

$H_{n-1} = H_n$. Дійсно, коли $(\lambda - A)x \in H_{n+1}$, то $x \in H_n$, оскільки рівняння: $(\lambda - A)x = f$ (відносно x), має єдиний розв'язок, а для $f \in H_{n+1}$ такий розв'язок у просторі H_n існує. Отже,

$$(x \in H_{n-1} \setminus H_n) \Rightarrow ((\lambda - A)x \in H_n \setminus H_{n+1}) \text{ і } H_{n-1} = H_n.$$

Продовжуючи цю процедуру, робимо висновок, що $H = H_1 = \mathrm{Im}(\lambda - A)$. Отже, $\lambda \in \rho(A)$. Теорему доведено.

Урешті-решт можна дійти такого висновку: якщо компактний оператор у гільбертовому просторі має ненульові точки спектра, то всі вони є власними числами. Якщо при цьому ненульових точок спектра існує нескінченна кількість, то він має граничні точки. Але єдиною граничною точкою спектра може бути тільки 0. При цьому всі власні підпростори, що відповідають ненульовим власним числам, скінченновимірні.

Розглянемо тепер у гільбертовому просторі H такий оператор: $B = I + A$, тут A – компактний оператор, і пов'яжемо з ним такі рівняння відносно x:

$$Bx = 0; \tag{3.7}$$

$$Bx = f; \tag{3.8}$$

$$B^* x = 0; \tag{3.9}$$

$$B^* x = g. \tag{3.10}$$

Розв'язки цих рівнянь мають властивості, відомі як теореми Фредгольма.

Теорема 3.21 (перша теорема Фредгольма). Рівняння (3.8) має розв'язки для тих і тільки тих функціоналів f, які ортогональні кожному розв'язку рівняння (3.9).

Доведення

З лем 3.5 та 3.4 випливає, що $\mathrm{Im}\, B \oplus \mathrm{Ker} B^* = H$, а це і є абстрактна форма твердження, яке треба довести.

Теорема 3.22 (друга теорема, або альтернатива Фредгольма). Або рівняння (3.7) має ненульовий розв'язок, або рівняння (3.8) для будь-якого елемента $f \in H$ має розв'язок, і до того ж єдиний (тобто система цих умов несумісна).

Доведення

З теореми 3.21 випливає, що або (–1) являє собою власне число оператора A, або (–1) – регулярне значення цього оператора. Отже, ми отримали абстрактну форму твердження, яке необхідно було довести.

Теорема 3.23 (третя теорема Фредгольма). Рівняння (3.7) й (3.9) мають скінченну, і до того ж однакову, кількість лінійно незалежних розв'язків.

Доведення

Оператор A^* компактний, тому $\dim \operatorname{Ker} B < \infty$; $\dim \operatorname{Ker} B^* < \infty$ [(-1) являє собою або власне число оператора $A\left(A^*\right)$, або регулярне значення]; далі доведення проходить за теоремою 3.17.

Нехай $\dim \operatorname{Ker} B \neq \dim \operatorname{Ker} B^*$. Не втрачаючи загальності (оскільки $B^{**} = B$), припустимо, що $\dim \operatorname{Ker} B = n < m = \dim \operatorname{Ker} B^*$; $\{e_1, ..., e_n\}$ – ортонормований базис простору $\operatorname{Ker} B$; $\{f_1, ..., f_m\}$ – ортонормований базис простору $\operatorname{Ker} B^*$.

Розглянемо оператор $K : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) f_k$. Він скінченновимірний ($\operatorname{Im} K \subset \operatorname{Ker} B^*$) та обмежений ($\| Kx \| \leq \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)| \leq n \cdot \| x \|$), а тому компактний. До оператора: $C = B + K = I + A + K$, можна застосувати альтернативу Фредгольма (теорему 3.22).

Оскільки $\operatorname{Im} K \subset \operatorname{Ker} B^*$, то $\operatorname{Im} K \perp \operatorname{Im} B$, і рівняння: $Cx = 0$, еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} Bx = 0 \\ Kx = 0 \end{cases}.$$

Отже, $x \in \operatorname{Ker} B$, і для всіх значень k = 0, 1, … n буде справедливою рівність: $(x, e_k) = 0$, тобто $x \perp \operatorname{Ker} B$. Звідси робимо висновок, що рівняння: $Cx = 0$, має тільки нульовий розв’язок.

Тепер, відповідно до альтернативи Фредгольма, рівняння: $Cx = f_{n+1}$, має розв’язок. Позначимо його через x_0. Тоді, з одного боку, $(Cx_0, f_{n+1}) = 1$, а з іншого:

$$(Cx_0, f_{n+1}) = (Bx_0 + Kx_0, f_{n+1}) = (Bx_0, f_{n+1}) = \left(x_0, B^* f_{n+1}\right) = 0 .$$

Суперечність випливає з припущення, що $n < m$. Теорему доведено.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення оператора, функціонала.
2. Які оператори називають лінійними? Наведіть приклади лінійних операторів.
3. Який оператор називають обмеженим.
4. Яким чином пов’язані обмеженість і неперервність оператора?
5. Дайте визначення норми оператора.
6. Сформулюйте й доведіть властивості норми оператора.

7. Яким чином визначають суму й добуток лінійних операторів?

8. Дайте визначеного оберненого та спряженого операторів.

9. Які властивості має обернений оператор? Доведіть їх.

10. Які властивості спряженого оператора? Доведіть їх.

11. Який оператор називають самоспряженим? Наведіть приклади.

12. Дайте визначення спектра й резольвенти оператора.

13. Яким чином можна визначити спектральний радіус?

14. Яким чином обчислюють спектр оператора?

15. Який оператор називають оператором Фредгольма? Вольтерра?

16. Нехай відображення $A: l_2 \to l_2$ задано такою умовою: $A:(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$. Пересвідчитися, що A – лінійний обмежений оператор і $\|A\| = 1$.

17. Нехай лінійне відображення $A: C[0;1] \to C[0;1]$, задано такою формулою: $(Ax)(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau) d\tau$. Довести, що A – обмежений оператор. Знайти його норму.

18. Нехай $X = C^1[0;1] \subset C[0;1] = Y$. Якщо похідна f існує та неперервна на відрізку $[0;1]$ (у його кінцях – однобічна), то $f \in C^1[0;1]$. Множина X являє собою лінійний багатовид у просторі Y, а тому простір X – нормований відносно індукованої норми. Оператор A задано таким чином: $Ax = \frac{dx}{dt}$. Перевірити, чи являє собою A необмежений лінійний оператор.

19. Знайти норму лінійного функціонала $\varphi: C[-1;1] \to R$, який задано таким чином: $x \mapsto \int\limits_{-1}^{1} tx(t) dt$.

20. Довести, що коли X, Y – нормовані простори, до того ж X скінченновимірний, то будь-який лінійний оператор $A: X \to Y$, є обмеженим.

21. Довести, що $l_1^* \cong l_\infty$; $l_2^* \cong l_2$ і, взагалі, коли $1 \le p < \infty$, то $l_p^* \cong l_q$, де $1/p + 1/q = 1$.

22. Нехай A, B – самоспряжені оператори; $\alpha \in R$. Доведіть, такі твердження:

а) $A + B$ – самоспряжений оператор;

б) αA – самоспряжений оператор;

в) оператор AB буде самоспряженим тоді й тільки тоді, коли $AB = BA$;

г) якщо оператор A взаємно однозначно відображує простір H на себе, тобто $\mathrm{Ker}A = \{0\}$; $\mathrm{Im}A = H$, то A^{-1} – також самоспряжений оператор.

23. Довести, що ортонормована система векторів нескінченновимірного гільбертового простору слабо прямує до 0 (тим самим буде доведено, що слабка збіжність векторів не є достатньою умовою сильної збіжності).

Вказівка: застосувати нерівність Бесселя.

24. Довести, що послідовність векторів гільбертового простору не може мати більше однієї слабкої границі, тобто, коли $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} x$ і $x_n \underset{\text{сл.}}{\to} y$, то $x = y$.

25. 1. Довести, що із сильної збіжності послідовності функціоналів випливає слабка збіжність.

26. Проаналізувати поняття слабкої збіжності послідовності функціоналів у гільбертовому просторі.

27. Нехай $A_n, A \in L(X)$; $A_n \to A$ за нормою. Довести, що послідовність $A_n \to A$ сильно.

28. $X = l_2$; $A_n : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, 0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots)$. Довести, що послідовність $A_n \to 0$ сильно, але границі за нормою в $\{A_n\}$ не існує.

29. Нехай простір X – банахів; $x_n, x \in X$; $A_n, A \in L(X)$; послідовність $x_n \to x$ сильно; $A_n \to A$ сильно. Довести, що тоді $A_n x_n \to Ax$ сильно.

30. Припустимо, що X – банахів простір; $A_n, A, B_n, B \in L(X)$; $A_n \to A$ сильно; $B_n \to B$ сильно. Довести, що $A_n B_n \to AB$ сильно.

31. Довести, що цілком неперервний оператор буде обмеженим.

32. Довести, що оператор A цілком неперервний тоді й тільки тоді, коли образ $A(B[0;1])$ одиничної кулі являє собою передкомпакт.

33. Доведіть таке твердження. Якщо образ $\mathrm{Im}\,A$ лінійного обмеженого оператора є скінченновимірним підпростором у просторі Y, то оператор A цілком неперервний.

Вказівка: Доведіть, що в скінченновимірному нормованому просторі обмежена множина є передкомпактною.

34. Доведіть, що тотожний оператор у нескінченновимірному гільбертовому просторі не є компактним.

35. Нехай лінійний оператор $A : l_2 \to l_2$, задано в такий спосіб: $A : (x_1 x_2, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$. Довести, що оператор A цілком неперервний тоді й тільки тоді, коли $\alpha_n \to 0$ за умови, що $n \to \infty$.

36. Нехай A – обмежений оператор у гільбертовому просторі H. Тоді існує послідовність обмежених скінченновимірних операторів у H, яка сильно прямує до A. Доведіть це твердження.

37. Нехай A – лінійний оператор у гільбертовому просторі H. Довести, що тоді еквівалентні три такі умови:

– для кожної сильно збіжної послідовності: $x_n \to x$, послідовність $\{Ax_n\}$ сильно прямує до Ax;

– для кожної сильно збіжної послідовності: $x_n \to x$, послідовність $\{Ax_n\}$ слабо прямує до Ax;

– для кожної слабо збіжної послідовності: $x_n \to x$, послідовність $\{Ax_n\}$ слабо прямує до Ax.

48. Нехай оператор $A \in L(H)$; H – гільбертів простір. Довести, що $(\lambda \in \sigma(A)) \Leftrightarrow (\overline{\lambda} \in \sigma(A^*))$.

49. Оператор A в просторі l_2 задано такою формулою: $A:(x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, ...)$, тут $\{\alpha_n\}$ – обмежена послідовність у просторі *C*. Знайти спектр оператора, а саме: σ_A; $\sigma_т(A)$; $\sigma_н(A)$; $\sigma_з(A)$.

50. Оператор $A: l_2 \to l_2$, задано такою формулою:

$$A:(x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, ...).$$

Визначити спектр оператора, а саме: σ_A; $\sigma_т$; $\sigma_н$; $\sigma_з$.

51. Оператор $B: l_2 \to l_2$, задано такою формулою:

$$B:(x_1, x_2, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots).$$

Визначити спектр оператора, а саме: σ_B; $\sigma_т$; $\sigma_н$; $\sigma_з$.

52. Довести, що $r(A) = \max\{|\lambda| \; | \lambda \in \sigma(A)\}$, тобто існує власне число $\lambda \in \sigma(A)$, яке відповідає такій умові: $|\lambda| = r(A)$.

53. Довести, що для компактного оператора A в нескінченновимірному гільбертовому просторі має місце твердження: $0 \in \sigma(A)$.

54. Навести приклади компактних операторів, для яких власне число $\lambda = 0$ і є точкою таких спектрів: *а*) точкового; *б*) неперервного; *в*) залишкового.

РОЗДІЛ V

МІРА, ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ, ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Визначення міри й інтеграла

1.1. Поняття міри. Простір із мірою

Нехай X – абстрактна множина; Ω – сім'я її підмножин ($\Omega \subset 2^X$). Нагадаємо, що Ω називається *алгеброю множин*, коли виконуються такі умови:

1) $A, B \in \Omega \Rightarrow A \bigcup B \in \Omega$;

2) $A \in \Omega \Rightarrow A^C = X \setminus A \in \Omega$;

3) $\varnothing, X \in \Omega$.

Ці умови гарантують, що результати операції $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ не виходять за межі Ω (тобто алгебра Ω замкнена по відношенню до зазначених операцій).

Якщо додатково відомо, що для будь-якого зліченного набору A_1, A_2, ... множин з алгебри Ω їх об'єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ також належить до Ω, то таку алгебру називають *σ-алгеброю* (сигма-алгеброю). За допомогою тотожності де Моргана робиться висновок, що $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ також належить до σ-алгебри.

Мірою називають функцію $\mu : \Omega \to R$ на алгебрі Ω, для якої виконуються такі три умови:

1) $\forall\ A \in \Omega : \mu(A) \geq 0$ (невід'ємність);

2) $\left(A, B \in \Omega;\ A \bigcap B = \varnothing\right) \Rightarrow \left(\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)\right)$ (адитивність);

3) ($A_n \to \varnothing$, тобто $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$; $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$) $\Rightarrow$ ($\mu(A_n) \to 0$) (неперервність).

Твердження 1.1. Нехай дано міру $\mu : \Omega \to R$; $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$; $A_n \bigcap A_m = \varnothing$, якщо $n \neq m$; $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \Omega$ (остання умова для σ-алгебр зайва, оскільки вона виконується автоматично), тоді $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (ця властивість міри називається *σ-адитивністю*).

Доведення

Розглянемо множини: $B_n = A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Вони мають такі властивості: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$ (перевірте це самостійно), тому $B_n \to \varnothing$ і $\mu(B_n) \to 0$.

З іншого боку, $\mu(B_n) = \mu(A) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, тому $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \to \mu(A)$.

Доведення закінчено.

Завдання 1.1. Доведіть, що умова 1 у визначенні міри разом з умовою σ-адитивності міри еквівалентні умовам 1 – 3.

Пару (X, Ω), де Ω – σ-алгебра (або просто алгебра) підмножин у просторі X, називають *вимірним простором*, а трійку (X, Ω, μ), де μ – міра, називають *простором з мірою*.

1.2. Інтеграл Лебега для простих функцій

Нехай тепер (X, Ω, μ) – простір з мірою, f – “проста” функція на просторі X, тобто така, яку можна подати у вигляді лінійної комбінації індикаторів j_{A_k} вимірних множин A_k (множин із алгебри), а саме:

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k j_{A_k}, \quad \text{тут } j_{A_k} = \begin{cases} 1, \text{коли } x \in A_k, \\ 0, \text{коли } x \notin A_k. \end{cases}$$

Для цих функцій введемо *інтеграл* за такою формулою:

$$I(f) = \int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k),$$

а для довільної множини $A \in \Omega$ уведемо інтеграл за цією множиною в такий спосіб:

$$\int_A f d\mu = \int_X \left(f \cdot j_A\right) d\mu.$$

Позначимо сукупність простих функцій через L.

Твердження 1.2. Пара (L, I) має такі властивості:

1) L – лінійний простір; $\mathbf{1} \in L$;

2) $\forall f, g \in L$: $\max(f, g) \in L$; $\min(f, g) \in L$;

3) I – лінійний функціонал на просторі L;

4) $(f \geq 0) \Rightarrow (I(f) \geq 0)$;

5) $(f_n \to 0) \Rightarrow (I(f_n) \to 0)$ – неперервність функціонала I. Тут маємо на увазі поточкову монотонну збіжність, а саме: $\forall x \in X : f_n(x) \to 0$.

Доведення

Зрозуміло, що перевірки потребує лише п’ята властивість.

Оскільки $f_n \to 0$, то існує таке число $C > 0$, що для всіх елементів $x \in X$ та номерів $n \in N$, має місце властивість: $0 \leq f_n(x) \leq C$.

Фіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і для кожного номера $n \in N$ розглянемо множину $A_n(\varepsilon) = \{x | f_n(x) > \varepsilon\}$. Зрозуміло, що $A_n(\varepsilon) \in \Omega$. Надалі будемо користуватись адитивністю інтеграла, а саме: коли $A, B \in \Omega$, $A \bigcap B = \varnothing$, то $\int\limits_{A \bigcup B} f d\mu = \int\limits_{A} f d\mu + \int\limits_{B} f d\mu$, і такою оцінкою: $\int\limits_{A} f d\mu \leq \sup\limits_{x \in A} f(x) \cdot \mu(A)$ (перевірте її самостійно).

За цих умов

$$\int\limits_{X} f_n d\mu = \int\limits_{A_n(\varepsilon)} f_n d\mu + \int\limits_{X \setminus A_n(\varepsilon)} f_n d\mu \leq C \cdot \mu(A_n(\varepsilon)) + \varepsilon \cdot \mu(X).$$

Але $A_n(\varepsilon) \to \varnothing$. Дійсно, $(f_{n+1}(x) > \varepsilon) \Rightarrow (f_n(x) > \varepsilon)$; і для будь-якого елемента $x \in X$ існує число n, що відповідає такій умові: $f_n(x) \leq \varepsilon$, тому за третьою властивістю міри $\mu(A_n(\varepsilon)) \to 0$.

Отже, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виберемо значення N з такої умови: $\forall\, n \geq N : \mu(A_n(\varepsilon)) < \varepsilon$, тоді $\int\limits_{X} f_n d\mu \leq (C + \mu(X))\, \varepsilon$. Доведення завершено.

Завдання 1.2. Доведіть, що для пари (L, I) мають місце такі властивості:

1. $(f_i \in L) \Rightarrow (|f_i| \in L;\ \max\{f_1, ..., f_n\} \in L)$;
2. $(f_1 \leq f_2) \Rightarrow (I(f_1) \leq I(f_2))$;
3. $(f_n \nearrow f;\ f, f_n \in L) \Rightarrow (I(f_n) \nearrow I(f))$.

Тепер розглянемо протилежну побудову.

Почнемо з пари (L,I), що має у своєму складі визначену на просторі X множину функцій L та функціонал $I:L\to R$. Нехай L та I задовольняють умови 1 – 5 із твердження 5.2. Побудуємо за цією парою алгебру множин Ω та міру μ на ній.

До Ω включаємо саме ті множини A, індикатори яких j_A належать до множини L. Оскільки $j_{A\bigcup B}=\max(j_A,j_B)$, то $(A;B\in\Omega)\Rightarrow(A\bigcup B\in\Omega)$. Далі, очевидно, що $j_\varnothing=0$; $j_{A^c}=\mathbf{1}-j_A$. Отже, Ω являє собою алгебру.

Міру задамо формулою $\mu(A)=I(j_A)$, тоді

$$\mu(A)\geq 0;$$

$$(A\bigcap B=\varnothing)\Rightarrow(j_{A\bigcup B}=j_A+j_B)\Rightarrow(\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)).$$

Залишилося перевірити неперервність міри.

Нехай $A_n\to\varnothing$, тоді $j_{A_n}\to 0$, а з п'ятої властивості пари (L,I) випливає, що $I(j_{A_n})\to 0$, тобто $\mu(A_n)\to 0$.

Таким чином, за парою (L,I) побудовано простір із мірою.

Розглянемо приклади пар (L,I).

Приклад 1. Нехай $X=[a;b]$, L – множина кусково-сталих функцій, тобто таких, що набувають скінченної кількості значень, кожне з яких досягається на скінченному об'єднанні числових проміжків. Вони являють собою функції такого вигляду: $\sum_{k=1}^{m}c_k j_{\langle\alpha_k,\beta_k\rangle}$. Їх розглядали в курсі математичного аналізу при побудові визначеного інтеграла.

Ці функції утворюють лінійний простір, а інтеграл задається такою формулою: $I(f)=\sum_{k=1}^{m}c_k(\beta_k-\alpha_k)$. Подібно до розглянутого вище випадку перевірки потребує лише п'ята властивість пари (L,I).

Отже, нехай $f_n\in L$; $f_n\to 0$, Z – об'єднання множин точок розриву всіх функцій f_n. Очевидно, що множина Z скінченна чи зліченна.

Фіксуємо число $\varepsilon>0$. Покриємо точки множини Z інтервалами, довжина кожного з яких становить відповідно $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\varepsilon/8$, ... (сума їхніх значень не більше ніж ε). Систему таких інтервалів позначимо через S_1. зауважимо, що для всіх $x\in[a,b]\setminus Z$ існує число: $n=n_x$, що визначене такою умовою: $0\leq f_n(x)<\varepsilon$. Ця нерівність виконується в околі точки x, який ми позначимо через U_x. Нехай S_2 – сім'я цих околів, формально її визначення можна записати в такий спосіб: $S_2=\{U_x\,|\,x\notin Z\}$. $S_1\bigcup S_2$ являє собою відкрите покриття відрізка $[a;b]$. За лемою Гейне – Бореля, із нього можна виокремити скінченне підпокриття, а саме: $\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2$ (тут $\Sigma_1\subset S_1$; $\Sigma_2\subset S_2$); $\Sigma_1=\{V_i\}$, $\Sigma_2=\{U_{x_k}\}_{k=1}^{m}$.

Нехай $N = \max\limits_{1 \le k \le m} \{n_{x_k}\}$, тоді $\forall\, x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{x_k} = U$ буде справедливою нерівність: $f_N(x) < \varepsilon$. А для кожного елемента: $x \in V = \bigcup\limits_{i} V_i$, буде правильною нерівність: $f_N(x) \le C = \max f_1$. За таких умов

$$I(f_N) \le I(f_N \cdot j_V) + I(f_N \cdot j_U) \le C \cdot \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Отже, п'яту властивість перевірено.

Завдання 1.3. Якщо до розглянутої в прикладі пари (L,I) застосувати перехід до простору з мірою (X,Ω,μ), а потім реалізувати перехід від простору до інтеграла, то знову одержимо вихідну пару (L,I). Доведіть це положення самостійно.

Приклад 2. Нехай $L = C[a;b]$; $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Знову достатньо перевірити лише п'яту властивість із твердження 5.2. Застосуємо теорему Діні, яку розглянуто в курсі математичного аналізу: з поточкової монотонної збіжності послідовності неперервних функцій до 0 випливає рівномірна збіжність, а також відоме твердження аналізу: $I(f_n) \to 0$, коли має місце рівномірна збіжність послідовності інтегровних функцій.

1.3. Схема Даніеля побудови інтеграла

Для побудови розвинутої теорії інтеграла потрібен простір з мірою (X,Ω,μ), у якому Ω є σ-алгеброю. Алгебри підмножин будуються відносно просто, зокрема алгебра числових проміжків (та їх скінченних об'єднань) на відрізку; алгебра, породжена прямокутниками на площині і т. д. Але, з одного боку, клас інтегровних функцій для розгляду на таких алгебрах недостатньо багатий, а з іншого – замкненість алгебри відносно зліченних об'єднань суттєво розширює можливості теорії інтеграла.

Кожну алгебру множин можна розширити до σ-алгебри. При цьому на нову σ-алгебру поширюється міра та зберігаються її властивості. Така процедура поширення міри була вперше запропонована французьким математиком Лебегом (1902). Дещо інший підхід у 1917 р. запропонував американський математик Даніель. Саме його схему розширення інтеграла буде розглянуто далі в цьому посібнику.

Вихідним об'єктом цієї схеми є пара (L,I), що складається із сукупності функцій на абстрактній множині X та функціоналу $I : L \to R$. Будемо вважати, що задовольняються всі умови твердження 1.2. За початковий об'єкт можна взяти простір із мірою (X,Ω_0,μ), де Ω_0 – алгебра множин, і за наведеним вище алгоритмом утворити пару (L,I).

Функцію f на множині X будемо називати *верхньою*, коли існує послідовність $\{\varphi_n\} \subset L$, яка прямує до f знизу ($\varphi_n \nearrow f$), причому вона є монотонно неспадною, а збіжність – поточковою. Доцільно також припустити, що функція f може набувати значення $+\infty$. Отже, $f : X \to (-\infty, +\infty]$. Клас верхніх функцій позначимо через L_+. Зрозуміло, що $L \subset L_+$.

Поширимо інтеграл I на верхні функції, а саме:

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n).$$

Монотонність послідовності $I(\varphi_n)$ гарантує існування (узагальненої) границі: $I(f) \in (-\infty, +\infty]$. Але виникає питання про незалежність цієї границі від вибору послідовності $\{\varphi_n\}$, а саме: якщо $\psi_m \in L$ – інша послідовність така, що $\psi_m \nearrow f$, то чи буде $\lim\limits_{m\to\infty} I(\psi_m) = \lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi_n)$.

Лема 1.1. Нехай задано послідовності φ_n, $\psi_m \in L$, причому $\varphi_n \nearrow f$, $\psi_m \nearrow g$ й $f \ge g$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi_n) \ge \lim\limits_{m\to\infty} I(\psi_m)$.

Доведення

1. Припустимо спочатку, що $g \in L$, за цієї умови $\varphi_n = \min(\varphi_n, f) \ge \min(\varphi_n, g)$. Послідовність $\{\min(\varphi_n, g)\}$ монотонно неспадна і $\min(\varphi_n; g) \nearrow g$ (перевірте це самостійно), а тому $I(\min(\varphi_n, g)) \nearrow I(g)$, а значить, $\lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi_n) \ge \lim\limits_{n\to\infty} I((\varphi_n, g)) = I(g)$.

2. Тепер припустимо, що g – довільна функція з множини L_+, тоді $f \ge \psi_m$, а значить, як було доведено на 1-му кроці, $\lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi_n) \ge I(\psi_n)$. Залишилось зробити граничний перехід, коли $m \to \infty$. Лему доведено.

Дослідимо властивості (L_+, I).

Твердження 1.3. Пара (L_+, I) характерна такими властивостями:

1. $f, g \in L_+ \Rightarrow \begin{cases} f + g \in L_+ \\ I(f+g) = I(f) + I(g). \end{cases}$

2. $\left.\begin{matrix} f \in L_+ \\ \alpha \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha f \in L_+ \\ I(\alpha f) = \alpha I(f). \end{cases}$

3. $\begin{cases} f, g \in L_+ \\ f \le g \end{cases} \Rightarrow I(f) \le I(g).$

4. $f, g \in L_+ \Rightarrow \begin{cases} \max(f,g) \in L_+ \\ \min(f,g) \in L_+. \end{cases}$

5. $\left.\begin{matrix} f_n \in L_+ \\ f_n \nearrow f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \quad f_n \in L_+ \\ I(f_n) \nearrow I(f) \end{cases}$

Доведення

1. Припустимо, що $\varphi_n, \psi_n \in L$; $\varphi_n \nearrow f$; $\psi_n \nearrow g$, тоді

$$\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g\,;\;\; I(f+g) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n + \psi_n) = \ldots = I(f) + I(g).$$

2. Аналогічно, $\alpha\varphi_n \nearrow \alpha f$ і т. д. (упевніться в цьому самостійно).

3. Цей факт доведено в лемі 5.1.

4. Достатньо довести збіжність: $\max(\varphi_n, \psi_n) \nearrow \max(f,g)$. Вона є наслідком такої властивості числових послідовностей:

$$(a_n \nearrow a\,;\; b_n \nearrow b) \Rightarrow \left(\max(a_n, b_n) \nearrow \max(a,b)\right),$$

що випливає з нерівності:

$$\max(a,b) - \max(a_n, b_n) \le (a - a_n) + (b - b_n)$$

(перевірте це самостійно).

Аналогічно, $\min(\varphi_n, \psi_n) \nearrow \min(f, g)$.

5. Нехай $\varphi_n^m \in L$; $\varphi_n^m \nearrow f_n$, $m \to \infty$. Сформуємо таку послідовність функцій: $h_n = \max\left\{\varphi_1^n, \ldots, \varphi_n^n\right\} \in L$. Послідовність $\{h_n\}$ монотонна, тобто

$$h_{n+1} \ge \max\left\{\varphi_1^{n+1}, \ldots,\; \varphi_n^{n+1}\right\} \ge \max\left\{\varphi_1^n, \ldots, \varphi_n^n\right\} = h_n.$$

Із того, що $h_n \le \max\{f_1, \ldots, f_n\} = f_n$, випливає справедливість нерівностей:

$$\varphi_i^n \le h_n \le f_n, \text{ для всіх } n \ge i. \qquad (*)$$

Переходимо в них до границі, коли $n \to \infty$:

$$f_i \le \lim_{n\to\infty} h_n \le f.$$

Тепер граничний перехід, коли $i \to \infty$ дає нерівність:

$$f \le \lim_{n\to\infty} h_n \le f.,$$

тобто $f = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$. Отже, $f \in L_+$.

Далі на основі нерівності (*) одержимо такі залежності ($i \le n$):

$$I\left(\varphi_i^n\right) \le I\left(h_n\right) \le I\left(f_n\right);$$

повторимо послідовно два граничних переходи:

1) $n \to \infty$: $I(f_i) \le \lim I(h_n) \le \lim I(f_n)$;

2) $i \to \infty$: $\lim I(f_i) \le \lim I(h_n) \le \lim I(f_n)$.

Звідси $I(f) = \lim I(h_n) = \lim I(f_n)$. Таким чином, доведення закінчено.

За аналогією до класу функцій L_+ вводиться клас функцій L_-, а саме:

$$L_- : \left(f \in L_-\right) \Leftrightarrow \left(\exists\, \varphi_n \in L : \varphi_n \searrow f\right).$$

Для $f \in L_-$ інтеграл задають такою формулою:

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I\left(\varphi_n\right).$$

Домовимося називати функцію f *інтегровною*, коли для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує пара функцій $g \in L_-$ та $h \in L_+$ які відповідають таким умовам: $g \le f \le h$ та $I(h - g) < \varepsilon$.

Клас інтегровних функцій позначимо через L_1. Із визначення інтегровної функції випливає існування та рівність таких двох чисел:

$$\sup\left\{\mathrm{I}(g) \middle|\, g \in L_-; g \le f\right\} = \inf\left\{I(h) \middle|\, h \in L_+; f \le h\right\}.$$

Це спільне значення точних меж назвемо *інтегралом функції f* [позначимо його $I(f)$]. Зауважимо, що функції $f \in L_1$ можуть набувати значень $+\infty$ і $-\infty$.

Теорема 1.1. Клас L_1 являє собою розширення сукупності L зі збереженням її властивостей, а саме:

1. L_1 – лінійний простір, причому $L \subset L_1$, а I – лінійний функціонал на L_1.

2. Якщо f_1 та f_2 функціонали з простору L_1, то функціонали $\max\{f_1, f_2\}$ і $\min\{f_1, f_2\}$ також являють собою функціонали із L_1.

$$\left(f_1, f_2 \in L_1\right) \Rightarrow \left(\max(f_1, f_2) \in L_1; \quad \min(f_1, f_2) \in L_1\right).$$

3. Якщо функціонал f задовольняє умови: $f \in L_1, f \ge 0$, то інтеграл $I\left(f\right) \ge 0$.

4. Якщо $\{f_n\}, f$ функціонали з L_1, причому $f_n \nearrow f$, то має місце збіжність і відповідних інтегралів: $I(f_n) \nearrow I(f)$ (неперервність), тобто

$$(f_n, f \in L_1; f_n \nearrow f) \Rightarrow (I(f_n) \nearrow \mathrm{I}(f)).$$

Доведення

1. Нехай $g_k \in L_-$; $h_k \in L_+$; $h_k \le f_k \le g_k$, тоді $g_1 + g_2 \in L_-$; $h_1 + h_2 \in L_+$; $g_1 + g_2 \le f_1 + f_2 \le h_1 + h_2$ і $I(h_1 + h_2 - g_1 - g_2) = I(h_1 - g_1) + I(h_2 - g_2)$.

Отже коли $I(h_k - g_k) < \varepsilon$, то $I((h_1 + h_2) - (g_1 + g_2)) < 2\varepsilon$. Цим доведено, що $(f_1, f_2 \in L_1) \Rightarrow (f_1 + f_2 \in L_1)$.

Аналогічно можна довести й те, що $(f \in L_1; \alpha \ge 0) \Rightarrow (\alpha f \in L_1)$. Для від'ємної константи α відповідні функції $g \in L_-$, $h \in L_+$ перетворюються на $\alpha h \in L_-$, $\alpha g \in L_+$ й відповідно $\alpha h \le \alpha f \le \alpha g$ і т. д. (завершіть доведення самостійно). Таким чином, L_1 являє собою підпростір у просторі всіх дійснозначних функцій на множині X.

Доведемо лінійність функціонала I, а саме:

$$I(f_1 + f_2) = \sup\{\, I(g) \mid g \le f_1 + f_2;\ g \in L_- \} \ge$$

$$\ge \sup\{\, I(g_1) + I(g_2) \mid g_1 \le f_1;\ g_2 \le f_2;\ g_1, g_2 \in L_- \} =$$

$$= \sup\{\, I(g_1) \mid g_1 \in L_-; g_1 \le f_1 \} + \sup\{\, I(g_2) \mid g_2 \in L_-;\ g_2 \le f_2 \} = I(f_1) + I(f_2).$$

Аналогічно, інший запис інтеграла $I(f)$ дає можливість одержати обернену нерівність:

$$I(f_1 + f_2) = \inf\{I(g) \mid g \ge f_1 + f_2;\ g \in L_+ \} \ge$$

$$\ge \sup\{I(g_1) + I(g_2) \mid g_1 \ge f_1;\ g_2 \ge f_2;\ g_1, g_2 \in L_+ \} =$$

$$= \sup\{\, I(g_1) \mid g_1 \in L_+; g_1 \ge f_1 \} + \sup\{\, I(g_2) \mid g_2 \in L_+;\ g_2 \ge f_2 \} = I(f_1) + I(f_2).$$

Властивість: $I(\alpha f) = \alpha I(f)$, доведіть самостійно.

2. $(f_1, f_2 \in L_1) \Rightarrow (\max(f_1, f_2) \in L_1;\ \ \min(f_1, f_2) \in L_1)$. У тих самих позначеннях

$$\max(g_1, g_2) \le \max(f_1, f_2) \le \max(h_1, h_2);$$

$$\max(h_1, h_2) - \max(g_1, g_2) \le (h_1 - g_1) + (h_2 - g_2).$$

Завершіть доведення п. 2 самостійно.

3. Якщо $h \in L_+$ і $0 \le f \le h$, то $I(h) \ge 0$. Тому $I(f) = \inf\{\mathrm{I}(h) \mid h \in L_+; f \le h\} \ge 0$.

Останнє із сформульованих у теоремі 1.1 тверджень є наслідком розглянутої нижче теореми Беппо – Леві.

Теорему доведено.

Теорема 1.2 (Беппо – Леві). Нехай $f_n \in L_1$; $f_n \nearrow f$ та існує константа $C \in R$, яка відповідає такій умові: $I(f_n) \le C$, $\forall\, n \in N$, тоді $f \in L_1$ й $I(f_n) \nearrow I(f)$.

Доведення

Побудуємо допоміжну послідовність функцій $\varphi_n \in L_1$ за таким правилом: $\varphi_1 = f_1$; $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$ коли $n \ge 2$, тоді $\varphi_n \ge 0$ $(n \ge 2)$ й $f_n = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n$.

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і для всіх значень k розглянемо функції $h_k \in L_+$, що задовольняють таку умову: $\varphi_k \le h_k$, $I(\varphi_k) \le I(h_k) \le I(\varphi_k) + \varepsilon / 2^k$,

тоді $I(f_n) = I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) \le I\left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right) \le I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) + \varepsilon = I(f_n) + \varepsilon \le C + \varepsilon$.

За твердженням 1.3 $\sum_{k=1}^{n} h_k \nearrow h \in L_+$ $(n \to \infty)$, це означає, що існує число n, яке відповідає такій умові: $I(h) - I\left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right) < \varepsilon$. При цьому $f_n \le f \le h$, а тому

$$I(h) - I(f_n) = \; = \left(I(h) - I\left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right)\right) + \left(I\left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right) - I(f_n)\right) < 2\varepsilon.$$

Коли додатково взяти для f_n функцію $g \in L_-$, яка відповідає умовам: $I(f_n) - I(g) < \varepsilon$ і $g \le f_n$, то $g \le f \le h$ і $I(h) - I(g) < 3\varepsilon$. Враховуючи довільність вибору числа $\varepsilon > 0$ робимо висновок про інтегровність функції f.

При цьому $I(f) - I(f_n) \le I(h) - I(g) < 3\varepsilon$. Та сама оцінка є правильною також для всіх значень чисел $m \ge n$. Це доводить друге твердження теореми. Таким чином, доведення закінчено.

Тепер із парою (L_1, I) можна пов'язати алгебру й міру. Нагадаємо, що $A \in \Omega$, коли $j_A \in L_1$; $\mu(A) = \mathrm{I}(j_A)$.

Твердження 1.4. Множина Ω являє собою σ-алгебру.

Доведення

Нехай $A_n \in \Omega$ $(n \in N)$; $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Тоді $B_n \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (тобто $B_1 \subset B_2 \subset ...$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), тому $j_{B_n} \nearrow j_A$ (перевірте це самостійно).

Оскільки $\forall n: I(j_{B_n}) \leq C = I(\mathbf{1})$, то за теоремою 1.1, $j_A \in L_1$, тобто $A \in \Omega$. Доведення закінчено.

Завдання

1. Доведіть, що простір з одержаною мірою має таку властивість: $\left(A \in \Omega; \quad \mu(A) = 0; \quad B \subset A\right) \Rightarrow (B \in \Omega)$, тобто має місце *повнота міри*.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Яким чином визначають алгебру та σ-алгебру множин?
2. Дайте визначення міри, вимірної множини, вимірної функції.
3. Сформулюйте й доведіть властивості міри.
4. Який простір називають вимірним? Простором з мірою?
5. Дайте визначення «простих» функцій.
6. Яким чином визначають інтеграл Лебега для простих функцій?
7. Сформулюйте й доведіть властивості інтеграла Лебега.
8. Які функцій називають інтегровними?
9. Сформулюйте й доведіть властивості інтегровних функцій.
10. Сформулюйте й доведіть теорему Беппо–Леві.
11. Доведіть, що для міри μ мають місце такі властивості:
    1. $\mu(\varnothing) = 0$;
    2. $(A \subset B) \Rightarrow \left(\mu(A) \leq \mu(B)\right)$;
    3. $(A_k \in \Omega;\ A_k \bigcap A_l = \varnothing,$ коли $k \neq l) \Rightarrow (\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k))$.

12. Нехай μ, ν – дві міри , задані на σ-алгебрі Ω; $\alpha, \beta \geq 0$. Доведіть, що за таких умов $\alpha\mu + \beta\nu$ також є мірою.

13. Припустимо, що множини A_n і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$. Доведіть, що $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

14. Нехай A_n; $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$; $A_n \searrow A$ $(A_1 \supset A_2 \supset \ldots)$, доведіть, що $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

15. Пересвідчитися, що $\left(f \in L_-\right) \Leftrightarrow \left(-f \in L_+\right)$, при цьому $\mathrm{I}(f) = -\mathrm{I}(-f)$.

16. Перевірте коректність визначення інтеграла для функцій з класу L_-.

17. Дослідіть властивості функцій класу L_-.

18. Доведіть, що $\left(f \in L_+; g \in L_-\right) \Rightarrow \left(f - g \in L_+\right)$.

19. Припустимо, що на вході в схему Данієля: $X=[0;1]$; Ω_0 – алгебра множин, породжена числовими проміжками; μ – "довжина проміжку". Множини розширеної σ-алгебри Ω називають *лебегівськими* множинами відрізка X; μ – *мірою Лебега*. Доведіть, що Ω містить усі відкриті й замкнені множини відрізка $[0;1]$.

20. Нехай $f\in L_1$. Доведіть, що $\mu\{x|f(x)=\infty\}=0$. (Нагадаємо, що в схемі Данієля припускається можливість нескінченних значень інтегровних функцій.)

§ 2. Вимірні відображення й функції

2.1. Визначення та властивості вимірних відображень

Розглянемо тепер вимірні простори (X,Ω) та $(Y,\widetilde{\Omega})$, де Ω та $\widetilde{\Omega}$ – σ-алгебри множин (тепер надалі *завжди* будемо мати справу тільки з σ-алгебрами).

Відображення $f:X\to Y$ називається *вимірним*, якщо $\forall\, A\in\widetilde{\Omega}$: $f^{-1}(A)=\{x|\ f(x)\in A\}\in\Omega$.

Припустимо, що S – довільна сім'я множин у просторі Y і розглянемо довільні σ-алгебри: $\Omega_\alpha\subset 2^Y$, які містять сім'ю S. Перетин усіх цих σ-алгебр також буде являти собою σ-алгебру (упевніться в цьому самостійно). Це найменша σ-алгебра, що містить сім'ю S. Такий перетин називається *σ-алгеброю, що породжена сім'єю* S, і позначається як $\Omega(S)$.

Твердження 2.1. Нехай $\widetilde{\Omega}=\Omega(S)$. Відображення $f:X\to Y$ буде вимірним тоді й тільки тоді, коли виконується така умова: $\forall\, A\in S: f^{-1}(A)\in\Omega$.

Доведення

Необхідність зазначеної умови очевидна. Доведемо її достатність для того, щоб відображення f було вимірним.

Розглянемо в просторі Y допоміжну сім'ю множин $\overset{\wedge}{\Omega}$, визначену такою умовою: $\left(A\in\overset{\wedge}{\Omega}\right)\Leftrightarrow\left(f^{-1}(A)\in\Omega\right)$ і перевіримо, чи являє собою сім'я $\overset{\wedge}{\Omega}$ σ-алгебру. Зокрема, коли $S\subset\overset{\wedge}{\Omega}$, то за визначенням $\Omega(S)$ вона теж є частиною $\overset{\wedge}{\Omega}$. Це й доводить висунуте положення.

Отже, нехай $A_n \in \overset{\wedge}{\Omega}$, тоді $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \Omega$. Якщо $A \in \overset{\wedge}{\Omega}$, то $f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c \in \Omega$. Таким чином, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ та A^c також належать $\overset{\wedge}{\Omega}$. Крім того, $\varnothing \in \overset{\wedge}{\Omega}$ (бо $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$). Що й потрібно було довести.

Припустимо, що X – метричний простір, а S – сім'я всіх відкритих множин в ньому. Тоді $\Omega(S)$ називається *борелівською* σ-*алгеброю* в просторі X, а її елементи – *борелівськими множинами* в X.

Борелівську σ-алгебру підмножин метричного простору X позначаємо через B_X.

Наслідок 1. Нехай X, Y – метричні простори; B_X, B_Y – відповідно борелівські σ-алгебри у просторах X та Y. Тоді неперервне відображення $f : X \to Y$, являє собою вимірне відображення.

Доведення

Повний прообраз відкритої множини в умовах неперервного відображення являє собою відкриту множину. Далі застосовуємо твердження 2.1. Тим самим доведення завершено.

Нехай (X, Ω) – вимірний простір. Вимірне відображення $f : (X, \Omega) \to (R, B_R)$ (і такий запис будемо застосовувати) називається *вимірною функцією* (на X).

Із твердження 2.1 можна зробити висновок: якщо функція $f : X \to R$ вимірна, то для будь-якої відкритої множини $A \subset R$ її прообраз $f^{-1}(A)$ належить до σ-алгебри Ω. Буде правильним і зворотне твердження, тобто

($f : X \to R$ вимірна) $\Leftrightarrow$ (для будь-якої відкритої множини $A \subset R$: $f^{-1}(A) \in \Omega$).

Але істинність такого еквівалентного визначення перевірити досить непросто.

Нагадаємо, що кожна відкрита множина U на дійсній прямій R являє собою об'єднання не більш ніж лічильної кількості числових інтервалів (див. розд. 2, теорема 2.6).

Оскільки $f^{-1}\left(\bigcup V_x\right) = \bigcup f^{-1}(V_x)$, то для перевірки вимірності відображення f достатньо дослідити, чи належать до алгебри Ω всі множини типу $f^{-1}\left((\alpha, \beta)\right)$.

Існує можливість спростити перевірку вимірності відображення f. Для цього зауважимо, що $(\alpha, \beta) = (\alpha; +\infty) \setminus [\beta; +\infty) = (\alpha; +\infty) \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\beta - 1/n; +\infty)$.

Використання відомих властивостей повного прообразу обмежує таку перевірку дослідженням множин типу $f^{-1}\big((a,+\infty)\big)$.

Таким чином, маємо еквівалентне визначення вимірної функції, а саме:

функція $f: X \to R$, називається *вимірною*, якщо $\forall a \in R$ множина $\{x | f(x) > a\} \in \Omega$, тобто $\forall a \in R$ множина $\{x | f(x) > a\}$ є вимірною.

Опишемо деякі властивості вимірних відображень і функцій.

1. Якщо відображення $f:(X,\Omega_1) \to (Y,\Omega_2)$ та $g:(Y,\Omega_2) \to (Z,\Omega_3)$ – вимірні, то їх композиція: $g \circ f$, також буде вимірним відображенням.

Доведення

$$(A \in \Omega_3) \Rightarrow \left((g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \Omega_1\right).$$

2. Нехай (X,Ω) – вимірний простір й $A \in \Omega$. Підмножини множини A, які у свою чергу самі є елементами Ω, утворюють σ-алгебру в множині A (позначимо її Ω_A), тоді якщо функція $f: X \to R$ вимірна, то функція $f|_A : A \to R$ також буде вимірною, тобто

$$(f: X \to R - \text{вимірна}) \Rightarrow (f|_A : A \to R - \text{вимірна}).$$

Доведення

$$\left(f|_A\right)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A.$$

3. Припустимо, що $f: X \to R$. Тоді описані нижче 5 умов будуть еквівалентними:

а) f – вимірна;

б) $\forall\, c \in R : \{x | f(x) > c\} \in \Omega$;

в) $\forall\, c \in R : \{x | f(x) \geq c\} \in \Omega$;

г) $\forall\, c \in R : \{x | f(x) < c\} \in \Omega$;

д) $\forall\, c \in R : \{x | f(x) \leq c\} \in \Omega$.

Доведення

Те, що *а ~ б*, вже було доведено вище (твердження 2.1). Далі, $\{x | f(x) > c\} = X \setminus \{x | f(x) \leq c\}$, тому *б ~ д*. Аналогічно можна довести, що *в ~ г*. Залишилося перевірити, наприклад, що *б ~ в*.

Це твердження є наслідком таких двох рівностей:

$$\{x | f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | f(x) \geq c + 1/n\} \text{ і } \{x | f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x | f(x) > c - 1/n\}.$$

Таким чином, еквівалентність умов 1 – 5 доведено.

4. Якщо $f : X \to R$ – вимірна функція, а $\lambda \in R$, то λf та $|\, f \,|$ також будуть вимірними функціями.

Доведення

Розглянемо неперервні функції: $g, h : R \to R$, які визначено таким чином: $g(t) = \lambda t$; $h(t) = |\, t \,|$. За наслідком 1 твердження 2.1, функції g та h є вимірними на числовій прямій *R*, але $\lambda f = g \circ f$ і $|\, f \,| = h \circ f$. Враховуючи першу властивість вимірних функцій отримуємо потрібний результат.

5. Нехай $f, g : X \to R$ – вимірні функції, а $h : R^2 \to R$, – неперервне відображення. Тоді функція: $F(x) = h\big(f(x), g(x)\big)$, буде вимірною на просторі *X*.

Доведення

Достатньо довести, що відображення $g : X \to R^2$, побудоване за таким правилом: $x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$, тут $x \in R$ й $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \in R^2$, являє собою вимірне відображення (відносно борелівської σ-алгебри в R^2), тоді $F = h \circ q$, і залишиться тільки використати першу властивість вимірних відображень. Але борелівська σ-алгебра в просторі R^2 породжена прямокутниками такого вигляду: $\Delta = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ (для кожної точки відкритої множини візьміть прямокутний окіл з раціональними координатами вершин). При цьому $q^{-1}(\Delta) = f\big((\alpha, \beta)\big) \cap g\big((\gamma, \delta)\big)$. Що й потрібно було довести.

6. Якщо функції $f, g : X \to R$ – вимірні, то й функції $f + g$, $f - g$, fg та $\frac{f}{g}$ також будуть вимірними.

Доведення

Застосуємо п'яту властивість, використавши такі функції:

$$(t; s) \mapsto t + s;$$
$$(t; s) \mapsto t - s;$$
$$(t; s) \mapsto ts;$$
$$(t; s) \mapsto t / s.$$

Зауважимо, що при розгляді частки $\frac{f}{g}$ знаменник може набувати нульового значення, що потребує такого уточнення: $A = \{x \,|\, g(x) \neq 0\} \in \Omega$, і при цьому функція $\frac{f}{g}\Big|_A$ належить до вимірних на множині *A* (див. другу властивість). Доведення завершено.

7. Припустимо, що функції $f, g : X \to R$ – вимірні, тоді функції $\max(f, g)$ та $\min(f, g)$ також будуть вимірними.

Доведення

$$\max(f,\ g) = (1/2)(f + g + |f - g|);$$

$$\min(f, g) = (1/2)(f + g - + |f - g|).$$

Наслідок: якщо функції $f_1, ..., f_n$ – вимірні, то функції $\max(f_1, ..., f_n)$ та $\min(f_1, ..., f_n)$ також вимірні.

8. Нехай функції f_n вимірні на просторі X і $f_n \nearrow f$, тоді їх границя f також буде вимірною функцією.

Доведення

$$\{x \,|\, f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \,|\, f_n(x) > c\}.$$

9. Якщо функції f_n – вимірні, то $\sup\limits_n \{f_n\}$ також являє собою вимірну функцію.

Доведення

Очевидно, що $f_1 \le \max\{f_1, f_2\} \le \max\{f_1, f_2, f_3\} \le ...$, а тому

$$\sup_n \{f_n\} = \lim_{n \to \infty} \max\{f_1,\ ...,\ f_n\}.$$

Доведення закінчено, але зауважимо, що тут має місце неточність, а саме: або треба припустити, що $\sup\{f_n\}$ може набувати значення $+\infty$, або розглядати таку множину: $A = \left\{ x \,\middle|\, \sup\limits_n \{f_n(x)\} < +\infty \right\}$. При цьому множина A вимірна, оскільки $A = \bigcup\limits_m \{x \,|\, \sup\{f_n(x)\} \le m\} = \bigcup\limits_m \bigcap\limits_n \{x \,|\, f_n(x) \le m\}$.

Додатково зазначимо, що аналогічні міркування також можна застосувати до функції $\inf\{f_n\}$. Отже, буде правильним твердження: $\inf\limits_n \{f_n\} = \lim\limits_n \min\{f_1, \dots f_n\}$.

10. Якщо функції f_n – вимірні, то $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n$ також буде вимірною функцією.

Доведення

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \inf_n \left\{ \sup_{m \ge n} f_m \right\}.$$

Те саме стосується і функції $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n$.

11. Якщо функції f_n – вимірні, то множина: $A = \left\{ x \middle| \text{існує } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \right\} \in \Omega$ і функція: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, буде на ній вимірною.

Доведення

Множина: $A = \left\{ x \middle| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) = 0 \right\}$, являє собою множину рівня вимірної функції: $f = \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n \right)\Big|_A$. Отже, зазначена властивість має місце.

2.2. Збіжність послідовностей вимірних функцій. Зв'язок між вимірними та інтегровними функціями

Нехай на просторі з мірою (X, Ω) задано послідовність вимірних функцій $f,\ f_1, f_2, \ldots$. З аналізу відомі два варіанти визначення збіжності послідовності f_n до функції f: поточкова й рівномірна. Уведемо три нових варіанти збіжності та дослідимо зв'язки між ними.

Послідовність функцій $\{f_n\}$ прямує до f *майже всюди*, якщо $\mu\{x |\ f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$. Ця збіжність позначається у такий спосіб: $f_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f$.

Надалі вислів про те, що певна властивість виконується *"майже для всіх* елементів $x \in X$" будемо трактувати таким чином: множина тих точок x, для яких згадана властивість не виконується, має нульову міру.

Послідовність функцій $\{f_n\}$ *прямує до* f *за мірою*, якщо $\forall\, \varepsilon > 0$: $\mu\left\{x \middle| |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \to 0$, $n \to \infty$, що позначається таким чином: $f_n \underset{\mu}{\to} f$.

Послідовність функцій $\{f_n\}$ *прямує до* f *майже рівномірно*, якщо $\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, A_\delta \in \Omega : \mu(A_\delta) < \delta;\ f_n \underset{X \setminus A_\delta}{\rightrightarrows} f$.

Іншими словами, шляхом вилучення множини як завгодно малої міри досягається рівномірна збіжність. Майже рівномірну збіжність позначають таким чином: $f_n \underset{\text{м.р.}}{\to} f$.

Теорема 2.1. Якщо послідовність функцій $\{f_n\}$ прямує до функції f майже всюди, то вона прямує до цієї функції і за мірою, тобто

$$\left(f_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f \right) \Rightarrow \left(f_n \underset{\mu}{\to} f \right).$$

Доведення

Зафіксуємо число $\varepsilon > 0$ і визначимо послідовність множин: $A_n(\varepsilon) = \left\{x \middle| \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$. Необхідно довести, що $\mu\left(A_n(\varepsilon)\right) \to 0$.

Послідовність множин: $B_n(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k \geq n} A_k(\varepsilon)$, буде монотонно спадною, і тому $\mu\left(B_n(\varepsilon)\right) \to \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)\right)$ (доведіть це самостійно). Але з того, що $\left(x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)\right)$ випливає, що для всякого числа n знайдеться число $k \geq n$, яке відповідає такій умові: $\left|f_k(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon$. А відтак $\forall x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$: $f_n(x) \not\to f(x)$, але множина всіх таких "поганих" точок, згідно з вихідною умовою, має міру 0, тому $\mu\left(B_n(\varepsilon)\right) \to 0$, в той же час $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$, отже, й $\mu\left(A_n(\varepsilon)\right) \to 0$.

Теорему доведено.

Протилежне твердження буде неправильним, про що свідчить наведений нижче контрприклад.

Нехай $X = [0; 1]$; послідовність функцій f_n задамо такими формулами: коли $n \in \{1; 2; ..., 10\}$, то

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in [(n-1)/10; n/10)), \\ 0, x \notin [(n-1)/10; n/10)); \end{cases}$$

якщо $n \in \{11; 12; ..., 110\}$, то

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in [(n-11)/100; (n-10)/100), \\ 0, x \notin [(n-11)/100; (n-10)/100) \end{cases}$$

і т. д. (побудуйте графіки цих функцій).

Вочевидь $f_n \xrightarrow[\mu]{} 0$, оскільки для будь-якого числа $\varepsilon \in (0; 1)$ визначена вище послідовність мір $\mu\left(A_n(\varepsilon)\right)$ складається з чисел $\underbrace{1/10, 1/10, ... 1/10}_{10}$; $\underbrace{1/100, 1/100 ... 1/100}_{100}$; … . Однак для всіх елементів $x \in (0;1]$ послідовність значень функцій $f_n(x)$ буде розбіжною.

З а в д а н н я. Довести, що в позначеннях розглянутого вище контрприкладу послідовність функцій $f_1; f_{11}; f_{111}, ...$ прямує до 0 майже всюди.

Т е о р е м а 2.2. З кожної послідовності функцій $\{f_n\}$, що прямує за мірою до функції f, можна вибрати підпослідовність $\left\{f_{n_k}\right\}$, яка прямує до f майже всюди.

Доведення

Для будь-якого числа $k \in N$ виберемо номер n_k з такої умови: $\mu\left(A_{n_k}(1/k)\right) < 1/2^k$. Доведемо, що $f_{n_k} \underset{\text{м.в.}}{\to} f$.

Нехай $Y = \left\{x \mid \exists\, m, \forall\, k \geq m : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| < 1/k \right\}$, тоді $f_{n_k}(x) \to f(x)$ на множині Y. Залишилося довести, що $\mu\left(Y^c\right) = 0$.

Оскільки $Y = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k \geq m} \left(A_{n_k}(1/k)\right)^c$, то $Y^c = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq m} A_{n_k}(1/k)$.

Із визначення міри випливає, що

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq m} A_{n_k}(1/k)\right) \leq \sum_{k \geq m} \mu\left(A_{n_k}(1/k)\right) < \sum_{k \geq m} 1/2^k = 1/2^{m-1}.$$

Множини: $B_m(1/k) = \bigcup\limits_{k \geq m} A_{n_k}(1/k)$ утворюють спадну послідовність, тому

$\mu\left(Y^c\right) = \lim\limits_{m \to \infty} \mu\left(B_m(1/k)\right) = 0$. Теорему доведено

Теорема 2.3. Якщо послідовність функцій $\{f_n\}$ прямує до функції f майже рівномірно, то вона прямує до цієї функції і майже всюди, тобто

$$\left(f_n \underset{\text{м.р.}}{\to} f\right) \Rightarrow \left(f_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f\right).$$

Доведення

Зауважимо, що $\forall\, m \in N$ існує множина Y_m, яка відповідає таким умовам: $\mu(Y_m) < 1/m$ і $f_n \underset{Y_m^c}{\rightrightarrows} f$, тому $f_n(x) \to f(x)$ у кожній точці $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Y_m^c$.

Доповненням $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Y_m^c$ буде множина: $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m$, причому для будь-якого значення k $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m \subset Y_k$, а тому і для будь-якого значення k міра $\mu\left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m\right) < 1/k$, тобто дорівнює 0. Теорему доведено.

Теорема 2.4 (Єгорова). Нехай E – множина скінченної міри і послідовність вимірних функцій $\{f_n\}$ прямує майже всюди на E до функції f, тоді для всякого числа: $\delta > 0$, існує вимірна множина $Y_\delta \subset E$, яка відповідає таким умовам:

1. $\mu(Y_\delta) > \mu(E) - \delta$.

2. На множині Y_δ послідовність функцій $\{f_n\}$ прямує до функції f рівномірно, тобто

$$\left(f_n \xrightarrow[\text{м.в.}]{} f\right) \Rightarrow \left(f_n \xrightarrow[\text{м.р.}]{} f\right).$$

Доведення

Як і в доведенні теореми 2.1, задамо число $\varepsilon > 0$ і побудуємо множини $A_n(\varepsilon)$ і $B_n(\varepsilon)$. Доведено, що $\mu(B_n(\varepsilon)) \to 0$. Тоді для кожного числа $\delta > 0$ існує послідовність множин $B_{n_k}(1/k)$, міра яких $\mu\left(B_{n_k}(1/k)\right) < \delta / 2^k$. Множина: $Y_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}(1/k)$, має малу міру, а саме:

$$\mu(Y_\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_{n_k}(1/k)\right) < \delta.$$

Залишилося довести, що $f_n \underset{Y_\delta^c}{\rightrightarrows} f$. Розглянемо множину

$$Y_\delta^c \,.\, Y_\delta^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(B_{n_k}(1/k)\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m \ge n_k} \left(A_m(1/k)\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \,|\, \forall\, m \ge n_k : |f_m(x) - f(x)| < 1/k\}.$$

Отже, на множині Y_δ^c виконується така умова:

$$\forall\, k\, \exists\, n_k : \forall\, m \ge n_k ;\ \forall\, x \in Y_\delta^c : \ |f_m(x) - f(x)| < 1/k.$$

А це й означає рівномірну збіжність послідовності $\{f_n\}$ до функції f на множині Y_δ^c. Теорему доведено.

Таким чином, на просторі з мірою (X, Ω, μ), що утворений за схемою Даніеля, визначено як інтегровні, так і вимірні функції. Дослідимо співвідношення між цими класами функцій.

Твердження 2.2. Кожна інтегровна функція є вимірною.

Доведення

Нехай $c \in R$. Розглянемо таку множину: $A_c = \{x \mid f(x) > c\}$. Треба довести, що $A_c \in \Omega$, тобто $j_{A_c} \in L_1$.

Функція $g = f - \min(f, c) \in L_1$; очевидно, що $g(x) > 0$ на множині A_c і $g(x) = 0$ поза нею. Послідовність функцій: $h_n = \min(ng; 1) \in L_1$, успадковує цю властивість. Крім того, $\forall\, x \in A_c$: $h_n(x) \nearrow 1$, тому $h_n \nearrow j_{A_c}$ і $I(h_n) \le \mu(X)$. Залишилося застосувати теорему 2.2. і тим самим твердження буде доведено.

Обернене твердження, узагалі кажучи, неправильне. Контрприкладом буде функція: $f(x)=1/x$, яка є вимірною, але не інтегровною на відрізку $[0;1]$.

Твердження 2.3. Кожна вимірна й обмежена функція є інтегровною.

Доведення

За умовою $f(X)\subset[c,d)$. Розіб’ємо напівінтервал $[c,d)$ на m інтервалів однакової довжини: $c=c_0<c_1<\ldots<c_m=d$, і розглянемо таку функцію:

$$f_m(x)=c_k\text{, коли } x\in[c_k,c_{k+1}).$$

Вона є лінійною комбінацією індикаторів вимірних множин:

$$f_m=\sum_{k=0}^{m-1}c_k j_{A_k}\text{, де } A_k=f^{-1}([c_k,\ c_{k+1})),$$

тому $f_m\in L_1$. Крім того, $f_{2^n}\rightrightarrows f$ (перевірте це самостійно) і $I(f_m)\leq d\cdot\mu(X)$. Тепер можна застосувати теорему 2.2. Отже, твердження доведено.

Лема 2.1 (нерівність Чебишова). Нехай $f\geq 0$; $f\in L_1$; $c>0$. Тоді

$$\mu\{x\,|\,x\in X,f(x)\geq c\}\leq(1/c)\int\limits_X f\,d\mu.$$

Доведення

Уведемо позначення: $A=\{x\mid x\in X,f(x)\geq c\}$, тоді

$$I(f)=\int\limits_A f\,d\mu+\int\limits_{X\setminus A}fd\mu\geq\int\limits_A f\,d\mu\geq c\cdot\mu(A).$$

Твердження доведено.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення вимірного відображення.
2. Які σ-алгебри називають борелевськими?
3. Які функції називають вимірними?
4. Сформулюйте й доведіть властивості вимірних відображень та функцій.
5. Дайте визначення різних типів збіжності послідовності функцій: майже всюди, за мірою, рівномірної, майже рівномірної.
6. Який зв’язок існує між переліченими типами збіжності?
7. Яким чином співвідносяться між собою класи вимірних та інтегровних функцій? Доведіть це співвідношення.
8. Доведіть нерівність Чебишова.
9. Сформулюйте й доведіть теорему Лебега про граничний перехід.

10. Дано: (X,Ω,μ) – простір з мірою, утворений за схемою Даніеля; функція f вимірна; $f \underset{\text{м.в.}}{=} g$. Доведіть, що тоді функція g вимірна.

11. Нехай $f_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f$; $g_n \underset{\text{м.в}}{\to} g$. Доведіть, що $f_n + g_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f + g$; $f_n g_n \underset{\text{м.в.}}{\to} fg$.

12. Припустимо, що $f_n \underset{\mu}{\to} f$; $g_n \underset{\mu}{\to} g$. Доведіть, що $f_n + g_n \underset{\mu}{\to} f + g$; $f_n g_n \underset{\mu}{\to} fg$.

13. Доведіть, що коли функції f_n вимірні й $f_n \underset{\text{м.в.}}{\to} f$, тоді функція f також буде вимірною. (Визначення збіжності майже всюди формально не потребує вимірності функцій).

14. Довести, що $\left(\|f\|_p = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0$ майже всюди).

15. Припустимо, що f – вимірна функція, доведіть що тоді буде правильним таке твердження: $(f \in L_1) \Leftrightarrow (|f| \in L_1)$.

16. Нехай $f \in L_1$, а функція g обмежена й вимірна. Довести, що $fg \in L_1$.

§ 3. Простори вимірних функцій

3.1. Нормований простір L_1. Повнота простору L_1

Уведемо норму на лінійному просторі L_1 за такою формулою:

$$\|f\| = \int_X |f| \, d\mu .$$

Для цього визначення виконуються всі властивості норми, крім однієї, а саме: $\left(\int_X |f| \, d\mu = 0\right) \not\Rightarrow (f = 0)$.

Твердження 3.1. Нехай $f \in L_1$, тоді $\left(\int_X |f| \, d\mu = 0\right) \Leftrightarrow \left(f \underset{\text{м.в}}{=} 0\right)$.

Доведення

Нехай спочатку $\int_X |f| \, d\mu = 0$, тоді за нерівністю Чебишова $\forall n \in N : \mu\{x \mid |f(x)| \geq 1/n\} = 0$, але $\{x | f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \geq 1/n\}$.

Навпаки, припустимо, що $f \underset{\text{м.в.}}{=} 0$. Якби функція f була обмеженою (тобто $|f| \leq C$), то мала б місце така рівність:

$$\int\limits_X |f|d\mu = \int\limits_{\{x|f(x)\neq 0\}} |f|d\mu + \int\limits_{\{x|f(x)=0\}} |f|d\mu \leq C\cdot 0 + 0\cdot\mu(X) = 0 .$$

Оскільки $f_n = \min(|f|;n)$, $|f_n| \nearrow |f|$, то за теоремою Беппо – Леві звідси випливає, що $I(f_n) = 0$. Твердження доведено.

Задамо на просторі L_1 таке відношення: $f \sim g$, якщо $f \underset{\text{м.в.}}{=} g$. Воно являє собою відношення еквівалентності (перевірте це самостійно). При цьому $(f \sim g) \Rightarrow (I(|f|) = I(|g|))$ (для доведення останньої рівності використайте таке співвідношення: $\big||f| - |g|\big| \leq |f - g|$).

Усі функції $f \sim 0$ утворюють підпростір у просторі L_1 (в алгебраїчному сенсі), тому на фактормножині: $L_1/\sim$ існує структура лінійного простору (а саме: $[f] + [g] = [f + g]$; $\lambda[f] = [\lambda f]$). Норму в цьому просторі можна ввести такою формулою: $\| [f] \| = \int\limits_X |f| d\mu$.

У теорії інтеграла було прийнято таку *домовленість:* називати елементи цього нормованого простору просто функціями, сам нормований простір позначати символом L_1. Іншими словами, прийнято *ототожнювати інтегровні функції, які збігаються одна з одною майже всюди.*

Теорема 3.1. Нормований простір L_1 повний.

Доведення

Нехай $\{f_n\}$ – фундаментальна послідовність у просторі L_1. Виберемо підпослідовність $\{f_{n_k}\}$ з умови, що $\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\| < 1/2^k$ (обміркуйте самостійно таку можливість). Далі буде доведено збіжність $\{f_{n_k}\}$, а тому й збіжність вихідної послідовності $\{f_n\}$ (за лемою до теореми Кантора, див. розд. 2, § 2, п. 2.4).

Розглянемо нові функції:

$$g_k = f_{n_k} - \sum_{j=k}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right| \quad \text{і} \quad h_k = f_{n_k} + \sum_{j=k}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right| .$$

$$g_{k+1} - g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k} + \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| \geq 0 ,$$

тому $g_k \nearrow f_{n_k}$. Аналогічно можна довести, що $h_k \searrow f_{n_k}$.

Зауважимо, що тут маємо на увазі узагальнену збіжність послідовностей і рядів, тобто допускаються нескінченні границі.

При цьому $g_k \leq f_{n_k} \leq h_k$ і $h_k - g_k = 2\sum_{j=k}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right|$. Оскільки частинні суми ряду $\sum_{j=k}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right|$ мають інтеграли, що не перевищують $1/2^{k-1}$, то за теоремою Леві сума цього ряду є інтегровною функцією. Тож, функції g_k, $h_k \in L_1$. Крім того, для всіх значень i, j буде справедливою така нерівність: $g_i \le h_j$. Дійсно, коли $i < j$, то $g_i \le g_j \le h_j$, а якщо $i > j$, то $g_i \le h_i \le h_j$.

Звідси $I(g_k) \le I(h_1)$, і за тією самою теоремою $g_k \nearrow f \in L_1$. При цьому $g_k \le f \le h_k$ для всіх значень індекса k. Звідси маємо, що $\left| f_{n_k} - f \right| \le h_k - g_k$, тобто $\left\| f_{n_k} - f \right\| \le 2/2^{k-1} = 1/2^{k-2}$, а це означає, що $f_{n_k} \to f$.

Теорему доведено.

3.2. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега. Теорема Лебега про граничний перехід

Нехай тепер (X, Ω) – довільний вимірний простір; а функція $w : \Omega \to R$, задовольняє всі умови міри, крім невід’ємності (тобто адитивність і неперервність або, коротше, σ-адитивність). Таку функцію множин будемо називати *зарядом*.

Заряд w називається *абсолютно неперервним відносно міри* μ, якщо $w(A) = 0$ для всякої вимірної множини *A*, що задовольняє умову: $\mu(A) = 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\mu(A) < \delta) \Rightarrow (|w(A)| < \varepsilon)$.

Абсолютна неперервність заряду w відносно міри μ позначається таким чином: $w \prec \mu$.

Теорема 3.2. Нехай μ, w – дві міри на просторі (X, Ω). Тоді $w \prec \mu$ в тому й тільки в тому разі, якщо виконується така умова:

$$(A \in \Omega; \mu(A) = 0) \Rightarrow (w(A) = 0).$$

Доведення

Необхідність цієї умови очевидна: якщо $w \prec \mu$ і $\mu(A) = 0$, то для кожного числа $\varepsilon > 0$ міра $\mu(A) < \delta = \delta(\varepsilon)$, а тому для всякого $\varepsilon > 0$ міра $w(A) < \varepsilon$.

Достатність умови доведемо від протилежного.

Припустимо існування такого “поганого” числа $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого числа $\delta > 0$ знайдеться множина $A \in \Omega$, міра якої $\mu(A) < \delta$, але міра $w(A) \ge \varepsilon_0$. Візьмемо множину A_n із зазначеною властивістю для числа $\delta_n = 1/2^n$. Нехай $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, тоді $\mu(A_n) < 1/2^n$; $\mu(B_n) < 1/2^{n-1}$, але $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ Отже, для множини: $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, буде справедливою рівність: $\mu(B) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$.

З іншого боку, $w(B_n) \geq w(A_n) \geq \varepsilon_0$, $w(B) = \lim w(B_n) \geq \varepsilon_0$, тобто для множини B не виконується умова теореми. Таким чином має місце протиріччя, а значить, теорему доведено.

Припустимо тепер, що $f \in L_1 = L_1(X, \mu)$ (цим позначенням виділено міру, яка пов'язана з простором інтегровних функцій).

Твердження 3.2. Функція $w\colon \Omega \ni A \mapsto \int\limits_A f\, d\mu \in R$ є зарядом.

Доведення

Нехай $f_+ = \max(f; 0)$, $f_- = \max(-f; 0)$, тоді $f_+, f_- \in L_1$, $f_+, f_- \geq 0$, а $f = f_+ - f_-$. Якщо ми доведемо справедливість твердження для функцій f_+ та f_-, то воно буде правильним і для їхньої різниці (упевніться в цьому самостійно). Отже, не порушуючи загальності, можна вважати, що $f \geq 0$.

Адитивність функції w доведено. Перевіримо її неперервність.

Припустимо, що послідовність множин $A_n \searrow \varnothing$, тоді $j_{A_n} \searrow 0$, $f \cdot j_{A_n} \searrow 0$; $w(A_n) = \int\limits_{A_n} f\, d\mu = I(f \cdot j_{A_n}) \searrow 0$ (враховуючи неперервність інтеграла). Теорему доведено.

Теорема 3.3. Припустимо, що $f \in L_1(X, \mu)$; $w\colon \Omega \ni A \mapsto \int\limits_A f\, d\mu \in R$, тоді $w \prec \mu$.

Доведення

Враховуючи, той факт, що для абсолютно неперервних відносно міри μ зарядів w_1 та w_2 буде справедливим твердження: $\alpha w_1 + \beta w_2 \prec \mu$ (перевірте цей факт самостійно), та розкладання: $f = f_+ - f_-$, можна зробити висновок, що достатньо розглянути лише випадок, коли $f \geq 0$.

За допомогою теореми 3.3. можна перевірити лише умову: $(\mu(A) = 0) \Rightarrow (w(A) = 0)$. Вона простіша, ніж подана у визначенні абсолютно неперервного заряду.

Якщо $\mu(A) = 0$, то $f \cdot j_A \underset{\text{м.в.}}{=} 0$, а тому $w(A) = I(f \cdot j_A) = 0$ (твердження 3.1). Теорему доведено.

Обернене твердження також правильне.

Теорема 3.4. (Радона – Никодима). Нехай (X, Ω, μ) – простір, що має міру; $w\colon \Omega \to R$ – заряд і $w \prec \mu$. Тоді існує така функція: $f \in L_1(X, \mu)$, що відповідає умові:

$$w(A) = \int\limits_A f\, d\mu,$$

стосовно будь-якої вимірної множини A ($A \in \Omega$) і ця функція єдина з точністю до μ-еквівалентності.

Така функція f називається *щільністю заряду w відносно міри μ*, або його похідною і позначається : $f = \frac{dw}{d\mu}$.

Збіжність за нормою в просторі L_1 прийнято називати *збіжністю в середньому*. Отже, $\left(f_n \underset{\text{сер.}}{\rightarrow} f \right) \Leftrightarrow \left(\int\limits_X |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \right)$.

Дослідимо зв'язок цього поняття з іншими типами збіжностей вимірних (зокрема інтегровних) функцій.

Твердження 3.3. Нехай $f_n, \ f \in L_1$, $f_n \underset{\text{сер.}}{\rightarrow} f$, тоді $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$.

Доведення

За нерівністю Чебишова для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ справедлива така умова:

$$\mu\left\{ x \middle| |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \leq 1/\varepsilon \int\limits_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Твердження доведено.

Теорема 3.5 (Лебега про граничний перехід). Дано $f_n \in L_1$. Функція f вимірна і послідовність $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$. Припустимо, що існує така функція $g \in L_1$, що майже всюди у вимірній множині X виконується нерівність: $|f_n(x)| \leq g(x)$, тоді: *а*) $f \in L_1$; *б*) $f_n \underset{\text{сер.}}{\rightarrow} f$; *в*) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu$.

Зауваження. Прийняту в теоремі умову: $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$, можна замінити на іншу, а саме: $f_n \underset{\text{м.в.}}{\rightarrow} f$ (див. теорему 3.1). Але в цьому разі вимірність функції f буде просто наслідком такої збіжності.

Лема 3.1. Якщо функція f вимірна, функція g інтегровна і майже всюди виконується нерівність: $|f(x)| \leq g(x)$, то функція f інтегровна.

Доведення

Як було показано вище, не втрачаючи загальності можна вважати, що нерівність $|f(x)| \leq g(x)$ виконується для всіх елементів $x \in X$.

Розкладання $f = f_+ - f_-$ [тут $f_+ = \max(f;\ 0)$, а $f_- = \max(-f;\ 0)$] й нерівності: $0 \leq f_+ \leq |f|$; $0 \leq f_- \leq |f|$, дають змогу обмежитися випадком, коли функції f невід'ємні.

Послідовність функцій: $f_n = \min(f;\ n)$, складено з вимірних обмежених, а тому інтегровних функцій; $f_n \nearrow f$ та $I(f_n) \leq I(g)$, тому за теоремою Леві $f \in L_1$.

Доведення теореми 3.5

Відповідно до теореми 3.2 із послідовності $\{f_n\}$, яка прямує до функції f за мірою, можна виділити підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, яка прямує до f майже всюди ($f_{n_k} \underset{\text{м.в.}}{\to} f$), отже, майже всюди буде справедливою нерівність: $|f(x)| \le g(x)$. Тому за лемою 3.1 функція $f \in L_1$. Далі, з нерівності: $\left| \int\limits_X f_n \, d\mu - \int\limits_X f \, d\mu \right| \le \int\limits_X |f_n - f| \, d\mu$, виходить, що з твердження *б* теореми випливає твердження *в*, а це означає, що достатньо довести твердження *б*.

Нехай $|f_n - f| = \varphi_n$, тоді $0 \le \varphi_n \le 2g$. Доведемо, що $\int\limits_X \varphi_n \, d\mu \to 0$.

Уведемо таке позначення: $A_n(\varepsilon) = \{x \,|\, \varphi_n(x) \ge \varepsilon\} \in \Omega$ для довільного числа $\varepsilon > 0$, тоді

$$\int\limits_X \varphi_n \, d\mu = \int\limits_{A_n(\varepsilon)} \varphi_n \, d\mu + \int\limits_{A_n^c(\varepsilon)} \varphi_n \, d\mu \le 2 \int\limits_{A_n(\varepsilon)} g \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X).$$

Зауважимо, що для всякого $\delta > 0$ спочатку вибираємо таке число $\varepsilon > 0$, котре забезпечує виконання нерівності: $\varepsilon \cdot \mu(X) < \delta$, а потім таке число $\sigma > 0$, що задовольняє нерівність: $(\mu(A) < \sigma) \Rightarrow \left(2\int\limits_A g \, d\mu < \delta \right)$. Це можливо на основі теореми 3.3. Потім вибираємо значення N, яке забезпечує виконання умови: $\mu(A_n(\varepsilon)) < \sigma$ для всіх чисел $n \ge N$ (нагадуємо, що $\varphi_n \underset{\mu}{\to} 0$). Робимо висновок, що $\int\limits_X \varphi_n \, d\mu < 2\delta$ для всіх значень $n \ge N$. Теорему доведено.

3.3. Простір $L_p(X, \mu)$

Візьмемо число $p > 1$. Вимірну функцію f називають *функцією класу* $L_p = L_p(X, \mu)$, коли $|f|^p \in L_1$.

Якщо $f, g \in L_p$, то функція $f + g$ вимірна, а

$$|f + g|^p \le (|f| + |g|)^p \le (2\max(|f|, |g|))^p \le 2^p \left(|f|^p + |g|^p \right) \in L_1.$$

З огляду на це, враховуючи повноту простору L_1 (лема 3.1), $|f + g|^p \in L_1$ і $f + g \in L_p$.

Очевидно також, що $(\alpha \in R; f \in L_p) \Rightarrow (\alpha f \in L_p)$.

Отже, функції класу L_p утворюють лінійний простір.

Якщо числа p, q задовольняють такі умови: $p > 1$, $q > 1$ й $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то, як було доведено раніше, для невід'ємних чисел a та b буде виконуватися нерівність: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Отже, для функцій f і g буде справедливою нерівність: $| fg | \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$. Це означає, що коли функція $f \in L_p$ а $g \in L_q$, то їхній добуток fg належить класу L_1, тобто являє собою вимірну функцію (це відповідає лемі 3.1), тобто $\left(f \in L_p;\ g \in L_q\right) \Rightarrow \left(fg \in L_1\right)$.

Коли припустити, що функція $g \equiv 1$, то отримуємо такий наслідок: $L_p \subset L_1$.

Твердження 3.4 (нерівність Гельдера). Нехай $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тоді для функцій $f \in L_p$, $g \in L_q$ виконується така нерівність:

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{1/q} .$$

Доведення

Візьмемо такі функції:

$$a = \frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}} \qquad \text{та} \qquad b = \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}},$$

і проінтегруємо функціональну нерівність: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, таким чином:

$$\int_X ab \, d\mu = \frac{\int_X |fg| \, d\mu}{\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Доведення завершено.

Твердження 3.5 (нерівність Мінковського).

Якщо функції $f,\ g \in L_p$, то буде справедливою така нерівність:

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Доведення

Візьмемо допоміжне число: $q = \dfrac{p}{(p-1)}$ (воно виходить з умови: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$), тоді $\left(h \in L_p \right) \Rightarrow \left(|h|^{p-1} \in L_q \right)$.

Запишемо тривіальну нерівність: $|f+g|^p \le \left(|f+g| \right)^{p-1} \left(|f| + |g| \right)$. За твердженням 3.3

$$\int_X |f+q|^p d\mu \le \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \cdot \left(\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right).$$

Помножимо обидві частини нерівності на $\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{-1/q}$.

Твердження доведено.

Останнє твердження дає можливість задати на просторі L_p норму за такою формулою:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Визначена таким чином норма задовольняє нерівність трикутника, але для неї не виконується перша аксіома норми, а саме: $\left(\|f\|_p = 0 \right) \not\Rightarrow \left(f \equiv 0 \right)$, тому, як і у випадку з простором L_1, приходимо до необхідності здійснити факторизацію простору L_p.

Як і раніше, елементи фактор-простору $L_p/\sim$ будемо називати просто функціями.

У просторі L_2 крім того можна задати скалярний добуток за такою формулою:

$$\left(f,\ g \right) = \int_X f \cdot g \, d\mu,$$

тут враховано, що $(p=2) \Rightarrow (q=2)$, а тому $(f,\ g \in L_2) \Rightarrow (fg \in L_1)$.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення просторів L_1, L_2, L_{p}.
2. Яким чином можна визначити норму в цих просторах?
3. Які властивості мають простори L_1? L_p?
4. Доведіть повноту простору L_1.
5. Дайте визначення заряду.
6. Який заряд називають абсолютно неперервним відносно міри μ.
7. Сформулюйте й доведіть умову абсолютної неперервності заряду.
8. Наведіть приклади зарядів.
9. Сформулюйте й доведіть теорему Радона – Никодима.
10. Що називають щільністю заряду відносно міри μ?
11. Дайте визначення збіжності вимірних функцій у середньому.
12. Який зв’язок існує між збіжністю в середньому та іншими типами збіжності?
13. Сформулюйте й доведіть теорему Лебега про граничний перехід.
14. Сформулюйте й доведіть співвідношення між вимірними та інтегровними функціями.
15. Доведіть нерівності Гельдера та Мінковського.
16. Розглянемо на просторі з мірою (X, Ω, μ) дві функції: $f_1(x) = 1/x$; $f_2(x) = 1/\sqrt{x}$. Доведіть, що $f_1 \notin L_1$; $f_2 \in L_2$.
17. Пересвідчитися, що відношення еквівалентності: $(f \sim g) \Leftrightarrow \left(f \underset{\text{м.в.}}{=} g \right)$ дає змогу коректно задати норму $\| \cdot \|_p$ на фактор-просторі $L_p / \sim$.
18. Перевірити всі аксіоми скалярного добутку в просторі L_2.
19. Чи не можна за аналогією характеризувати простори L_p, коли $p < 1$?
20. Задамо множину L_∞ істотно обмежених функцій такою умовою:

$$(f \in L_\infty) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(\exists C : \mu \left\{ x \,\middle|\, |f(x)| > c \right\} = 0\right).$$

Доведіть, що L_∞ є нормованим лінійним простором, норму в якому задано таким чином: $\|f\|_\infty = \inf\left\{ C \,\middle|\, \mu\{x \,|\, |f(x)| > c\} = 0 \right\}$.

21. Доведіть, що коли $1 \le p < q$, то $L_q \subset L_p$.
22. Доведіть, що $(f \in L_1) \Leftrightarrow (|f| \in L_1)$, коли f – вимірна функція.
23. Нехай $f \in L_1$, а функція g обмежена й вимірна. Доведіть, що $fg \in L_1$.

РОЗДІЛ VI

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР’Є

§ 1. Умови збіжності ряду Фур'є

Розглянемо простір $L^2[-\pi,\pi]$ функцій, підсумовуваних із квадратом на відрізку [–π; π]. Він являє собою повний, нескінченновимірний евклідів простір, тобто гільбертів простір. Функції

$$1, \cos nx, \sin nx, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

утворюють у ньому повну ортогональну систему, тому для будь-якої функції $f \in L^2[-\pi,\pi]$ ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.2}$$

у якому

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \tag{1.3}$$

прямує до функції f у середньому квадратичному, тобто в метриці простору $L^2[-\pi,\pi]$.

Встановимо умови, достатні для збіжності тригонометричного ряду в даній точці. Для цього зробимо спочатку певні зауваження.

По-перше, замість функцій, заданих на відрізку [–π; π], ми можемо говорити про періодичні функції з періодом 2π на всій прямій.

По-друге, функції, які створюють тригонометричну систему, обмежені, тому формули (1.3), що визначають коефіцієнти Фур'є в цій системі, мають сенс для будь-якої підсумовуваної функції (а не тільки для функцій із підсумовуваним квадратом). Отже, кожній функції $f \in L_1[-\pi,\pi]$ відповідає сукупність її коефіцієнтів Фур'є та її ряд Фур'є, тобто

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Розглянемо тепер питання збіжності цього ряду в даній точці x до значення функції f у цій точці. Задамо, що

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.4}$$

Перетворимо спочатку часткову суму $S_n(x)$, підставивши у формулу (1.4) замість коефіцієнтів a_k та b_k, їх інтегральні вирази (1.3). Позначивши змінну інтегрування через *t*, ми отримуємо, що

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx\right)\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\}dt.$$

Скористаємося тепер відомою формулою:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}, \tag{1.5}$$

і робимо висновок, що

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt. \tag{1.6}$$

Таке подання суми $S_n(x)$ називається *інтегралом Діріхле.*

Зробимо таку заміну змінних: $t - x = z$, враховуючи, що під інтегралом (1.6) міститься періодична функція, періодом якої 2π, ми можемо зберегти межі інтегрування. За таких умов

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz.$$

При цьому функція:

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}},$$

називається *ядром Діріхле.* Очевидно, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)dz = 1.$$

Використовуючи цю рівність, запишемо різницю $S_n(x)-f(x)$ в такому вигляді:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+z)-f(x)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz. \tag{1.7}$$

Таким чином, ми замість питання про збіжність послідовності сум $S_n(x)$ до функції $f(x)$ можемо розглянути питання про збіжність до нуля інтеграла (1.7).

Для дослідження цього інтеграла скористаємость лемою.

Лема 1.1. Якщо функція φ підсумовувана на відрізку $[a;b]$, то

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx=0.$$

Доведення

Якщо φ – неперервно диференційована функція, то за допомогою інтегрування за частинами отримуємо такий результат:

$$\int_a^b \varphi(x)\sin pxdx=-\varphi(x)\frac{\cos px}{p}\Bigg|_a^b+\int_a^b \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}dx\to 0, \tag{1.8}$$

коли $p\to\infty$.

Нехай тепер φ – довільна пісумовувана функція на відрізку $[a; b]$. Оскільки множина неперервно диференційованих функцій всюди щільна в просторі $L_1[a; b]$, для всякого числа $\varepsilon>0$ знайдеться неперервно диференційована функція φ_ε, яка задовольняє таку нерівність:

$$\int_a^b |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Далі можемо записати, що

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx\right|\le\left|\int_a^b[\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\sin px\,dx\right|+\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\,dx\right|.$$

У цій нерівності перший доданок праворуч менший за $\frac{\varepsilon}{2}$, згідно з виразом (1.9), а другий прямує до нуля, коли $p\to\infty$, відповідно до умови (1.8).

Лему доведено.

Доведемо тепер достатню ознаку збіжності ряду Фур'є.

Теорема 1.1. Якщо f – підсумовна функція і для фіксованої точки x та деякого числа $\delta > 0$ інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \tag{1.10}$$

існує, то часткові суми S_n ряду Фур’є функції f прямують у цій точці x до $f(x)$.

Доведення

Перепишемо інтеграл (1.7) у такому вигляді:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \sin\frac{2n+1}{2} z \, dz. \tag{1.11}$$

Якщо функція

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z}$$

інтегрована (за z) у межах від $-\delta$ до δ, то вона буде інтегрованою і на всьому відрізку [–π; π], оскільки $f \in L_1[-\pi, \pi]$. Але тоді інтегрованою буде і така функція:

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

За цих умов до інтеграла (1.11) можна застосувати лему 1.1 і ми робимо висновок, що цей інтеграл прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

Збіжність інтеграла (1.10) називається *умовою Діні.* Її, зокрема виконано, якщо в даній точці функція f неперервна і має скінченну похідну, або хоча б праву та ліву похідні.

Зауважимо, що умову Діні можна замінити іншими умовами, але просто відкинути її в теоремі 1.1 не можна, оскільки навіть серед неперервних існують функції, ряд Фур’є яких буває розбіжним у деяких точках.

§ 2. Інтеграл Фур'є

У попередньому параграфі було встановлено умови, за яких періодичну функцію можна розкласти у збіжний ряд Фур’є. Розглянемо тепер можливість такого розкладання для неперіодичних функцій. Зокрема, покажемо, що при виконанні деяких додаткових умов таке подання можливе, але вже не за допомогою ряду, а у вигляді так званого *інтеграла Фур'є.*

Формулою Фур'є назвемо таку рівність:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (2.1)$$

Позначивши, що

$$a_{\lambda}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt; \qquad b_{\lambda}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t dt, \qquad (2.2)$$

цю рівність можна переписати у вигляді, аналогічному ряду Фур'є, а саме:

$$f(x)=\int_{a}^{b}(a_{\lambda}\cos\lambda x+b_{\lambda}\sin\lambda x)d\lambda. \qquad (2.3)$$

Теорема 2.1. Якщо функція f абсолютно інтегровна на всій прямій і в точці x задовольняє умову Діні, то буде справедливою така рівність:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (2.4)$$

Доведення

Уведемо таке позначення:

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (2.5)$$

Необхідно показати, що $\lim\limits_{A\to\infty}I(A)$ існує і дорівнює $f(x)$. Оскільки функція f абсолютно інтегрована, то внутрішній інтеграл у рівності (2.5) збігається, а подвійний збігається абсолютно. Використовуючи теорему Фубіні, змінимо порядок інтегрування. Таким чином,

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{0}^{A}f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x)}{(t-x)}dt.$$

Виконавши заміну змінних: $t-x=z$, зведемо цей інтеграл до такого вигляду:

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+z)\frac{\sin Az}{z}dz. \qquad (2.6)$$

Скориставшись такою відомою рівністю:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Az}{z}dz=1,\quad A>0,$$

можемо записати різницю $I(A)-f(x)$ в такому вигляді:

$$I(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz. \tag{2.7}$$

Подамо розміщений праворуч інтеграл як суму трьох доданків, а саме:

$$I(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz+\frac{1}{\pi}\int_{|z|\geq N}\frac{f(x+z)}{z}\sin Az\,dz-$$

$$-\frac{f(x)}{\pi}\int_{|z|\geq N}\frac{\sin Az}{z}dz.$$

У цьому рівнянні другий та третій інтеграл праворуч є збіжними, а тому кожен з них може бути меншим за $\frac{\varepsilon}{3}$, якщо число N взято досить великим. Перший доданок праворуч (за умови фіксованого значення N) прямує до нуля, коли $A\to\infty$ (згідно з лемою 1.1 та за умовою Діні). Таким чином, робимо висновок, що

$$\lim_{A\to\infty}(I(A)-f(x))=0,$$

а це й необхідно було довести.

Теорему доведено.

Зауважимо, що формулу Фур'є (2.1) можна записати в комплексному вигляді, тобто

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\lambda(t-x)}dt.$$

Ця рівність називається комплексною формулою Фур'є.

§ 3. Перетворення Фур'є, властивості й застосування

3.1. Перетворення Фур'є й формула обернення

Інтегральну формулу Фур'є можна розчленувати на дві рівності. Позначимо, що

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \tag{3.1}$$

тоді

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{3.2}$$

Зауважимо, що формула (3.1) має сенс для будь-якої абсолютно інтегрованої функції *f*. За її допомогою кожну функцію $f\in L_1(-\infty,\infty)$ ми зіставляємо з певною функцією *g*, заданою на всій числовій прямій. Функція *g* називається *перетворенням Фур'є* вихідної функції *f*. Формула (3.2), що виражає функцію *f* через її перетворення Фур'є, називається *формулою обернення* для перетворення Фур'є. Варто звернути увагу на подібність між формулами (3.1) і (3.2). Друга з них відрізняється від першої лише знаком у показнику й множником $1/(2\pi)$ перед інтегралом. Можна було б досягти тут ще більшої симетрії, визначивши функцію *g* за такою формулою:

$$g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{3.1'}$$

Тоді формула обернення набула б такого вигляду:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{3.2'}$$

Іншими словами, розбіжність залишилася б тільки в знаку показника експоненти.

Однак при всій їхній зовнішній подібності формули (3.1) і (3.2), власне кажучи, різні: у першій з них інтеграл існує в звичайному сенсі, оскільки $f\in L_1(-\infty,\infty)$, а в другій – лише в сенсі головного значення. Крім того, рівність (3.1) – це визначення функції *g*, а в рівності (3.2), що являє собою інший запис інтегральної формули Фур'є, міститься твердження, що інтеграл праворуч дорівнює вихідній функції *f*. Для забезпечення цієї рівності для функції *f* необхідно задати, крім інтегрованості, ще додаткові умови, скажімо, умову Діні.

Зауваження. Ми визначили перетворення Фур'є *g* для всякої функції $f\in L_1(-\infty,\infty)$ та показали, що функція *f*, яка задовольняє умову Діні в кожній точці, може бути подана за допомогою формули обернення через своє перетворення Фур'є g. Цей факт аналогічний тому, що має місце для рядів Фур'є. Дійсно, коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Їх визначено для всякої функції $f \in L_1[-\pi;\pi]$, однак збіжність ряду Фур'є $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ (він відіграє тут роль формули обернення) можна гарантувати лише за певних додаткових умов (це може бути умова Діні). Разом з тим, для перетворення Фур'є (як і для ряду), має місце така властивість:

якщо для функції $f \in L_1(-\infty;\infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \equiv 0,$$

то $f(x) = 0$ майже всюди.

Дійсно, з написаної вище рівності випливає, по-перше, що для всіх дійсних чисел t і λ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0.$$

Тепер уведемо такі позначення:

$$\varphi(x) = \int_{0}^{\xi} f(x+t)dt,$$

де ξ – довільне фіксоване дійсне число. Застосовуючи теорему Фубіні й беручи до уваги умову, задану для функції f, бачимо, що функція φ [вона так само, як і f, належить простору $L_1(-\infty,\infty)$] задовольняє ту саму умову, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx = 0$$

при всіх дійсних значеннях числа λ.

Але, як легко упевнитись, функція φ абсолютно неперервна на кожному скінченному відрізку, отже, майже всюди має скінченну похідну. Зокрема, вона майже всюди задовольняє умову Діні. Таким чином, згідно з теоремою 2.1 § 2 вона майже всюди дорівнює 0, оскільки її перетворення Фур'є являє собою тотожний 0. Разом з тим функція φ неперервна, отже, $\varphi(x) \equiv 0$. Із цього випливає, зокрема, що при всіх дійсних значеннях числа ξ

$$\int_{0}^{\xi} f(t)dt = 0,$$

а тому $f(x) = 0$ майже всюди.

Розглянемо тепер деякі приклади.

1. Нехай $f(x)=e^{-\gamma|x|}$ ($\gamma>0$). Знайдемо перетворення Фур'є цієї функції, а саме:

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\gamma|x|}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\gamma|x|}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx=2\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\gamma x}\cos\lambda x dx.$$

За допомогою двоступеневого інтегрування за частинами знаходимо, що

$$g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

2. Нехай функцію f задано таким чином:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{коли} |x|>a,\\ 0, \text{коли} |x|<a,\end{cases}$$

тоді

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Зауважимо, що функція g тут не належить простору $L_1(-\infty,\infty)$.

3. Задамо, що $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$, тоді

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{dx}{x^2+a^2}. \tag{3.3}$$

Цей інтеграл найпростіше обчислити за допомогою теорії лишків. Нехай спочатку $\lambda>0$. Доповнивши дійсну вісь, за якою береться інтеграл (3.3), півколом нескінченно великого радіуса, що розташоване в нижній півплощині (тобто в тій, де експонента $e^{-i\lambda x}$ прямує до нуля), побачимо, що інтеграл (3.3) дорівнює сумі лишків підінтегральної функції в нижній півплощині, яку помножено на ($-2\pi i$). У нижній півплощині функція $\dfrac{e^{-i\lambda x}}{x^2+a^2}$ має один полюс першого порядку в точці: $x=-ai$. Лишок у цій точці обчислюється за відомою формулою: якщо $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ й функція: $\varphi(a)\neq 0$, має в точці: $z=a$, нуль першого порядку, то лишок функції f в точці a дорівнює $\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. Отже, в нашому випадку одержуємо, такий результат:

$$g(\lambda) = -2\pi i \frac{e^{-a\lambda}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-a\lambda}, \text{ коли } \lambda > 0.$$

Тоді, коли $\lambda < 0$, за аналогічними міркуваннями (але при розгляді тільки верхньої півплощини замість нижньої)

$$g(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{a\lambda}.$$

Таким чином, перетворення Фур'є для вихідної функції остаточно набуває такого вигляду:

$$g(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}, \ -\infty < \lambda < \infty.$$

Втім, такий результат можна одержати відразу з формули обернення, використовуючи приклад 1 і теорему 2.1 § 2.

4. Припустимо, що $f(x) = e^{-ax^2}$, тоді за формулою (3.1)

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx. \tag{3.4}$$

Тут під інтегралом міститься аналітична функція, яка не має особливостей у скінченній частині площини й прямує до нуля вздовж кожної прямої, паралельної дійсній осі. У зв'язку з цим, відповідно до теореми Коші інтеграл (3.4) не змінить свого значення, якщо його взяти не за дійсною віссю, а вздовж будь-якої прямої: $z = x + iy$ ($y = const$), що паралельна цій осі. Таким чином,

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\lambda(x+iy)} dx = e^{ay^2 + \lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - 2aixy - i\lambda x} dx = e^{ay^2 + \lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix(2ay + \lambda)} dx.$$

Виберемо тепер сталe значення змінної y так, щоб у показнику підінтегральної експоненти зникла уявна частина, а саме: $y = -\lambda/(2a)$, тоді

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Зокрема, коли взяти, що $a = 1/2$, то ми одержимо такий результат:

$$f(x) = e^{-x^2/2},\ g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\lambda^2/2},$$

тобто функція $e^{-x^2/2}$ переводиться перетворенням Фур'є сама в себе (з точністю до сталого множника).

3.2. Основні властивості перетворення Фур'є

На основі формули (3.1), яка описує перетворення Фур'є, можна вивести ряд його властивостей. Розглянемо їх. Для скорочення запису будемо перетворення Фур'є функції f позначати символом $F[f]$. Інакше кажучи, F – це лінійний оператор, заданий на просторі $L_1(-\infty,\infty)$ і такий, що ставить у відповідність кожній функції із цього простору її перетворення Фур'є.

1. Якщо послідовність $\{f_n\}$ функцій із простору $L_1(-\infty,\infty)$ є збіжною в метриці цього простору, то послідовність їхніх перетворень Фур'є, $g_n = F[f_n]$, буде збіжною рівномірно на всій прямій.

Це твердження відразу випливає з очевидної оцінки, за якою

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)| dx\,.$$

2. Перетворення Фур'є g абсолютно інтегрованої функції f являє собою обмежену неперервну функцію, що прямує до нуля, якщо $|\lambda| \to \infty$.

Дійсно, обмеженість функції: $g = F[f]$, відразу видно з огляду на таку оцінку:

$$|g(\lambda)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx\,.$$

Далі, якщо f – характеристична функція інтервалу (a; b), то для неї

$$g(\lambda) = \int_{b}^{a} e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}\,.$$

Ця функція неперервна й прямує до нуля, якщо $|\lambda| \to \infty$. Оскільки операція F переходу від функції f до g лінійна, то звідси випливає, що перетворення Фур'є будь-якої східчастої функції (тобто лінійної комбінації індикаторів інтервалів) є також неперервною функцією, що прямує до нуля, коли $\lambda \to \pm\infty$. Нарешті, східчасті функції всюди щільні в просторі $L_1(-\infty,\infty)$, тому якщо $f \in L_1$, то існує послідовність $\{f_n\}$ східчастих функцій, яка прямує до f в просторі $L_1(-\infty,\infty)$. Тоді з урахуванням першої властивості послідовність функцій: $g_n = F[f_n]$, прямує рівномірно на всій прямій до функції: $g = F[f]$. Відтак гранична функція g також неперервна й прямує до нуля, коли $|\lambda| \to \infty$.

3. Якщо функція f абсолютно неперервна на кожному скінченному інтервалі й $f' \in L_1(-\infty,\infty)$, то має місце така рівність:

$$F[f'] = iF[f] \, .$$

Таким чином, диференціюванню функції (при зазначених вище умовах) відповідає добуток її перетворення Фур'є та числа $i\lambda$.

Дійсно, абсолютно неперервна на кожному скінченному інтервалі функція може бути записана у такому вигляді:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

З абсолютної інтегрованості функції f' випливає, що вираз, який стоїть праворуч, має границю, коли $x \to \infty$ й коли $x \to -\infty$. Така границя може бути тільки нулем, оскільки інакше функція f' не була б інтегрованою на всій прямій. З огляду на це, після інтегрування частинами перетворення Фур'є набуває такого вигляду:

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\,|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f](\lambda),$$

а це й потрібно було довести.

Якщо функція f така, що її похідні $f^{(k-1)}$ абсолютно неперервні на кожному інтервалі й f , …, $f^{(k)} \in L_1(-\infty,\infty)$, то з огляду на такі самі міркування

$$F\left[f^{(k)}\right] = (i\lambda)^k F[f]. \tag{3.5}$$

4. Дослідимо зв'язок між ступенем гладкості функції й швидкістю спадання на нескінченності її перетворення Фур'є.

Поділивши рівність (3.5) на $(i\lambda)^k$ й згадавши, що перетворення Фур'є завжди прямує до нуля на нескінченності (друга властивість), робимо висновок, що коли $f^{(k)}$ абсолютно інтегрована, то

$$|F[f]| = \frac{\left|F\left[f^k\right]\right|}{\left|\lambda^k\right|} \to 0.$$

Іншими словами, в цих умовах $F[f]$ спадає на нескінченності швидше, ніж величина $\frac{1}{|\lambda|^k}$. Отже, чим більше похідних, які належать простору L_1, має функція f, тим швидше спадає на нескінченності її перетворення Фур'є.

5. Якщо друга похідна f'' функції f існує й належить простору $L_1(-\infty, \infty)$, то її перетворення Фур’є $F[f]$ буде абсолютно інтегрованою функцією.

Дійсно, при зазначених умовах $F[f]$ обмежена й спадає на нескінченності швидше, ніж величина $\frac{1}{\lambda^2}$. Чим зумовлено її інтегровність.

Вище (властивість 4) ми показали, що чим більше похідних має функція f, тим швидше спадає на нескінченності її перетворення Фур'є. Справедливим виявляється також двоїсте твердження, а саме: чим швидше спадає функція f, тим більш гладким буде її перетворення Фур'є. Точніше кажучи, справедливою буде наступна властивість.

6. Нехай функції $f(x)$ та $xf(x)$ абсолютно інтегровані, тоді функція: $g = F[f]$, диференційовна, причому

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]. \tag{3.6}$$

Дійсно, продиференціювавши інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

який визначає функцію g, за параметром λ, одержимо інший інтеграл:

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

який [з огляду на інтегровність функції $xf(x)$] збігається рівномірно за λ. Отже, похідна функції g існує, а також має місце рівність (3.6).

Якщо функція f така, що функції $f(x)$, $xf(x)$, …, $x^p f(x)$ абсолютно інтегровані, то, використовуючи аналогічні міркування, робимо висновок, що й функція g має похідні до p-го порядку включно, причому

$$g^{(k)}(\lambda) = F\left[(ix)^k f(x)\right],\ k = 0, 1, \ldots, p \ldots$$

7. У припущенні ще швидшого спадання функції f на нескінченності, функція g буде ще більш гладкою функцією. А з того, що $x^p f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ для всіх значень p, випливає нескінченна диференційованість функції g. Припустимо тепер, що $e^{\delta|x|} f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, для деякого числа $\delta > 0$. Тоді $g(\lambda)$ поширюється з дійсної осі λ в смугу на площині: $\xi = \lambda + i\mu$, як аналітична функція комплексного змінного, причому ширина цієї смуги тим більша, чим більше число δ. У всякому разі можна стверджувати, що g буде аналітичною функцією, коли $|\mu| < \delta$. Дійсно, інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

вочевидь буде збіжним, коли $|\mu| = \delta$ й буде визначати неперервну функцію, яка збігається з перетворенням Фур'є функції f на дійсній осі. Той факт, що ця функція диференційована, коли $|\mu| < \delta$, у сенсі теорії аналітичних функцій, можна довести так само, як і шосту властивість.

3.3. Повнота функцій Эрміта й Лагера

Використовуючи міркування, викладені в попередньому абзаці, можна показати, що коли вимірна функція f майже всюди на інтервалі $(a; b)$, де $-\infty \le a < b \le \infty$, відмінна від 0 та задовольняє таку умову: $|f(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$, де $\delta > 0$, то система функцій $\{x^n f(x)\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ буде повною в просторі $L_2(a; b)$.

Звідси, зокрема, буде випливати, що функції Эрміта утворюють повну систему в просторі $L_2(-\infty, \infty)$, а функції Лагерра – у просторі $L_2(0, \infty)$ (див. наприклад [4], п. 7, § 3 гл. VII).

Доведемо сформульоване твердження про повноту. Припустимо, що система $\{x^n f(x)\}$ не повна. Тоді згідно з теоремою Хана – Банаха знайдеться ненульова функція $h \in L_2(-\infty, \infty)$, що буде відповідати таким умовам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) h(x) dx = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Тут було використано теорему про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі; якщо розглядається комплексний простір $L_2(a; b)$, то замість $h(x)$ слід писати $\overline{h(x)}$.) Ясно, що $fh \in L_1(a, b)$, більше того, $e^{\delta_1|x|} fh \in L_1(a, b)$ для всіх чисел $\delta_1 < \delta$. Надалі зручно вважати, що функції $f(x)$ й $h(x)$ визначено на всій прямій, поширюючи їх, в разі необхідності, за межі інтервала (a; b) нулем.

Нехай g – перетворення Фур'є функції fh, тобто

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)e^{-i\lambda x}dx .$$

Із сказаного вище випливає, що функція g поширюється як аналітична в смугу: $|\mathrm{Im}\,\xi|<\delta$. З іншого боку, з огляду на шосту властивість, усі похідні цієї функції будуть дорівнювати 0, коли $\lambda=0$. Таким чином, $g(\lambda)\equiv 0$. Враховуючи властивість єдиності, доведену у пункті 3.1, отримуємо, що $f(x)h(x)=0$ майже всюди, а тому $h(x)=0$ майже всюди, оскільки функція $f(x)$ майже всюди відмінна від 0. Але це суперечить нашому припущенню про те, що h – ненульова функція.

Це протиріччя й доводить повноту системи $\{x^n f(x)\}$.

3.4. Перетворення Фур'є швидко спадних нескінченно диференційовних функцій

Беручи до уваги той факт, що при переході від функції f до її перетворення Фур'є g властивості гладкості функції й спадання її на нескінченності обмінюються ролями, легко виявити природні класи функцій, які за допомогою перетворення Фур'є переводяться самі в себе.

Нехай S_∞ – сукупність нескінченно диференційовних функцій на прямій, для кожної з яких існує набір сталих C_{pq} (ці сталі залежать від самої функції f і чисел p, q), що відповідають такій умові:

$$\left|x^p f^{(q)}(x)\right|<C_{pq}. \tag{3.7}$$

Покажемо, що коли $f\in S_\infty$, то й $g=F[f]\in S_\infty$. Насамперед, нерівність (3.7) зумовлює абсолютну інтегровність кожної з функцій $x^p f^{(q)}(x)$. Дійсно, оскільки ця нерівність виконується для всіх значень p і q, то

$$\left|x^p f^{(q)}(x)\right|\le\frac{C_{p+2q}}{x^2},$$

тобто функція $x^p f^{(q)}(x)$ спадає не повільніше, ніж $\frac{1}{x^2}$. Звідси у свою чергу випливає, що функція $F[f]$ має похідні всіх порядків. Нарешті, згідно з п. 3.2, враховуючи сумованість функцій: $f^{(q)}(x)(g=1,2,...)$, робимо висновок, що перетворення Фур’є: $g=F[f]$, спадає на нескінченності швидше, ніж $\frac{1}{\lambda^q}$.

Розглянемо тепер функції:

$$f^*(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}dx=(-i)^q F\left[\left(x^p f(x)\right)^q\right].$$

Кожна з них, як і перетворення Фур'є інтегрованої функції, обмежена деякою сталою D_{pq}. Таким чином, якщо $f\in S_\infty$, то й $g=F[f]\in S_\infty$. І навпаки, коли $g\in S_\infty$, за доведеним вище твердженням, функція:

$$f^*(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}dx,$$

входить у клас S_∞. Задамо, що $f(x)=\frac{1}{2\pi}f^*(-x)$, тоді $f\in S_\infty$. У той же час, використовуючи формулу обернення, можемо записати, що

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

тобто функція g являє собою перетворення Фур'є функції $f\in S_\infty$. Отже, перетворення Фур'є переводить клас S_∞ у себе . Зрозуміло, що це відображення взаємно однозначне.

3.5. Перетворення Фур'є й згортка функцій

Нехай f_1 та f_2 – інтегровані на всій прямій функції. Їх згорткою називають функцію, визначену за таким правилом:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi.$$

Функція $f(x)$ є визначеною майже для всіх x і інтегрованою. Дійсно, подвійний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi dx$$

існує, оскільки існує інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f_1(\xi)f_2(\eta)\right|d\xi x\eta$$

(див. зауваження до теореми Фубіні, [4], с. 364). Отже, існує також інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi .$$

Згортку функцій f_1 та f_2 записують у такий спосіб: $f_1 * f_2$.

Обчислимо перетворення Фур'є згортки двох функцій із простору L_1. Після застосування теореми Фубіні та з урахуванням того, що $x-\xi=\eta$, перетворення набуває такого вигляду:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi\right\}e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx\right\}d\xi =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}e^{-i\lambda\xi}d\eta\right\}d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi ,$$

тобто

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1]F[f_2].$$

Отже, перетворення Фур'є замінює операцію згортки більш простою – множенням функцій. Цей факт відіграє важливу роль у багатьох застосуваннях перетворення Фур'є.

3.6. Застосування перетворення Фур'є до розв’язування рівняння теплопровідності

Застосування перетворення Фур'є до розв’язування диференціальних рівнянь базується на тому (див. п. 3.3), що воно переводить операцію диференціювання в операцію множення на незалежну змінну. Отже, якщо в нас є лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами, тобто

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = \varphi(x), \tag{3.8}$$

то перетворення Фур'є переводить його в алгебраїчне рівняння такого вигляду:

$$(i\lambda)^n z + a_1(i\lambda)^{n-1} z + \ldots + a_{n-1}i\lambda z + a_n z = \psi(\lambda), \tag{3.9}$$

у якому $z = F[y]$ й $\psi = F[\varphi]$.

Однак для звичайних диференціальних рівнянь цей прийом не відкриває жодних істотно нових перспектив, оскільки розв'язування лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами й без того не викликає великих труднощів. Крім того, перехід від рівняння (3.8) до (3.9) можливий, якщо невідома функція: $y = y(x)$, інтегрована на всій прямій, а коли розв'язують лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами це, взагалі-то, не має місця.

Більш істотним є застосування перетворення Фур'є до розв'язування рівнянь із частинними похідними, що дозволяє, за певних умов, звести його до розв'язування звичайного диференціального рівняння. Покажемо використання цього прийому на прикладі розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності, а саме, будемо шукати розв'язок такого рівняння:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial u} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.10}$$

коли $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, за такою початковою умовою:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Фізичний зміст цієї задачі полягає у визначенні температури нескінченного теплопровідного стрижня в будь-який момент часу ($t > 0$), якщо в початковий момент ($t = 0$), його температура в кожній точці x дорівнює $u_0(x)$.

Припустивши, що $u_0(x)$, $u_0'(x)$ і $u_0''(x)$ належать простору $L_1(-\infty, \infty)$, будемо шукати розв'язок поставленої задачі в класі функцій $u(x,t)$, які задовольняють такі умови:

1) функції $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ абсолютно інтегровані на всій осі x при будь-якому фіксованому значенні $t \geq 0$;

2) функція $u_t(x, t)$ має в кожному скінченному інтервалі $0 \leq t \leq T$ інтегровану мажоранту $f(x)$ (яка не залежить від t), тобто

$$|u_t(x, t)| \leq f(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

Виконаємо в рівнянні (3.10) перетворення Фур'є за змінною x. При цьому перетворення правої частини рівняння приводить до такого виразу:

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\lambda^2 v(\lambda, t), \text{ де } v(\lambda, t) = F[u_{xx}(x, t)],$$

а ліворуч, з огляду на другу умову

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = v_t(\lambda, t).$$

Таким чином, перетворення Фур'є переводить рівняння (3.10) у звичайне диференціальне рівняння такого вигляду:

$$v_t(\lambda, t) = \lambda^2 v(\lambda, t).$$

Маємо тепер знайти його розв'язок, який за умови, що $t = 0$, перетворюється на функцію:

$$v_0(\lambda) = F[v_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Таким розв'язком буде функція:

$$v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t} v_0.$$

Тепер для того, щоб одержати розв'язок нашої початкової задачі, залишається знайти ту функцію $u(x, t)$, перетворенням Фур'є якої слугує функція $v(\lambda, t)$. Використовуючи приклад 4 п. 3.1, отримуємо такий результат:

$$e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}\right],$$

тому

$$v(\lambda, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}\right] \times F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \times u_0(x)\right],$$

тобто

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\xi^2}{4t}} u_0(x - \xi) d\xi.$$

Цей вираз являє собою так званий інтеграл Пуассона для розв'язування рівняння теплопровідності.

3.7. Перетворення Фур'є функцій кількох змінних

Перетворення Фур'є, яке було розглянуто нами в застосуванні до функцій однієї змінної, легко переноситься на функції кількох змінних.

Нехай $f(x_1, ..., x_n)$ – функція, інтегрована на всьому n-вимірному просторі R^n. Її *перетворенням Фур'є* називається функція $g(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, яку визначено в такий спосіб:

$$g(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) e^{-i(x_1\lambda_1 + ...x_n\lambda_n)} dx_1 ... dx_n.$$

Цей n-кратний інтеграл існує, оскільки функція $f(x_1, ..., x_n)$ інтегрована, а за теоремою Фубіні його можна записати у вигляді такого повторного інтеграла:

$$g(\lambda_1,...,\lambda_b)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x_1,...,x_n)e^{-ix_1\lambda_1}dx_1\right\}\times e^{-ix_2\lambda_2}dx_2...\right\}e^{-ix_n\lambda_n}dx_n\,. \quad (3.11)$$

Інакше кажучи, можна перейти від функції n змінних до її перетворення Фур'є, послідовно виконуючи перетворення за кожною із змінних окремо (у будь-якому порядку). Здійснюючи послідовно кожну з n операцій у правій частині рівності (3.11), одержимо таку формулу:

$$f(x_1,...,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda_1,...,\lambda_n)\times e^{ix_n\lambda_n}d\lambda_n\right\}e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}d\lambda_{n-1}...\right\}e^{ix_1\lambda_1}d\lambda_1\,.$$

Її можна переписати у вигляді n-кратного інтеграла функції $f(x_1, ..., x_n)$, тобто

$$f(x_1,...,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda_1,...,\lambda_n)e^{i(x_1\lambda_1+...+x_n\lambda_n)}d\lambda_1...d\lambda_n\,. \quad (3.12)$$

Разом із тим, оскільки функція $g(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, взагалі-то, не обов'язково буде підсумовуваною на всьому просторі R^n, потрібно вказати, у якому сенсі варто розуміти цей інтеграл і умови, визначені для функції $f(x_1, ..., x_n)$, за яких вона може бути подана у вигляді інтеграла (3.12).

Одну з можливих відповідей на ці питання дає подане нижче положення.

Теорема 3.1. Нехай функція $f(x_1, ..., x_n)$ інтегрована на всьому просторі R^n і задовольняє такі умови:

$$|f(x_1+t_1,x_2,...,x_n)-f(x_1,...,x_n)|\le C|t_1|^a,$$

$$|f(x_1,x_2+t_2,...,x_n)-f(x_1,...,x_n)|\le C(x_1)|t_2|^a \quad (3.13)$$

. . . .

$$|f(x_1,...,x_n+t_n)-f(x_1,...,x_n)|\le C(x_1,...,x_{n-1})|t_n|^a,$$

тут $0\le a\le 1,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}C(x_1)dx_1<\infty,\quad \dots\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}C(x_1,...,x_{n-1})dx_1...dx_{n-1}<\infty\,.$

Тоді формула обернення (3.12) справедлива, якщо інтеграл у ній розуміти таким чином:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N_1\to\infty}\int\limits_{-N_1}^{N_1}\left\{...\lim_{N_{n-1}\to\infty}\int\limits_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}}\left\{\lim_{N_n\to\infty}\int\limits_{-N_n}^{N_n}g(\lambda_1,...,\lambda_n)e^{ix_n\lambda_n}d\lambda_n\right\}e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}d\lambda_{n-1}...\right\}e^{ix_1\lambda_1}d\lambda_1.$$

Дійсно, оскільки функція $f(x_1, ..., x_n)$ підсумовувана в просторі R^n, то згідно з теоремою Фубіні вона підсумовуваною за x_1 при майже всіх значеннях елементів x_2, … x_n. Отже, існує така функція:

$$f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) e^{-ix_1\lambda_1} dx_1 .$$

З огляду на умови (3.13) робимо висновок, що $f(x_1, ..., x_n)$ як функція від x_1 задовольняє умову теореми 2.1, § 2 цього розділу; тому $f(x_1, ..., x_n)$ можна виразити через f_1 за формулою обернення, а саме:

$$f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) e^{-ix_1\lambda_1} dx_1 .$$

Далі, коли ми задамо, що

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2, x_3, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n) e^{-ix_2\lambda_2} dx_2 ,$$

то з умов (3.13) випливає справедливість для функції f_1 формули обернення, і

$$f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, ..., x_n) e^{ix_2\lambda_2} d\lambda_2 ,$$

тобто

$$f(x_1, ..., x_n) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, ..., x_n) e^{ix_2\lambda_2} d\lambda_2 \right\} e^{ix_1\lambda_1} d\lambda_1 .$$

Визначивши аналогічно функцію $f_3(\lambda_1, \lambda_2, ..., x_n)$ і т. д., ми й прийдемо до формули (3.12).

Перетворення Фур'є функцій декількох змінних широко використовується в теорії рівнянь із частинними похідними. Розглянемо, наприклад, таке рівняння:

$$\frac{\partial \upsilon}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.14}$$

яке описує процес поширення тепла на площині.

Нехай у момент часу: $t = 0$, температуру задано таким чином:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

Якщо задати для шуканого розв’язку рівняння (3.14) умови, аналогічні тим, які визначені в п. 3.6, то можна зробити в ньому перетворення Фур'є за змінними *x* та *y*, унаслідок чого одержимо звичайне рівняння:

$$\frac{\partial \upsilon}{dt} = -\left(\lambda^2 + \sigma^2\right)\upsilon, \tag{3.15}$$

тут

$$\upsilon(t,\lambda,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x,y)e^{-i(\lambda x+\sigma y)}dxdy.$$

Розв’язавши рівняння (3.15), можна потім знайти розв’язок вихідного рівняння (3.14) за допомогою формули обернення.

Питання й завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте й доведіть достатню умову збіжності ряду Фур’є. Які для цього необхідно зробити припущення?
2. У чому полягає сенс умови Діні? Чи можливо її замінити іншими умовами при дослідженні збіжності ряду Фур’є?
3. Яким чином визначають перетворення Фур’є?
4. Запишіть формулу обернення.
5. Наведіть приклади застосування перетворення Фур’є.
6. Сформулюйте й доведіть основні властивості перетворення Фур’є.
7. Доведіть, що перетворення Фур'є g абсолютно інтегрованої функції f рівномірно неперервне на всій прямій.
8. Нехай *B* – простір рівномірно неперервних на прямій функцій, що прямують до нуля на нескінченності. Показати, що перетворення Фур'є F являє собою оператор, що діє з простору $L_1(-\infty,\infty)$ у простір *B*, його норма дорівнює 1, і при цьому виконано таку умову: $\operatorname{Ker} F = 0$.
9. Нехай S_∞ – сукупність нескінченно диференційовних функцій на прямій, для кожної з яких існує набір сталих C_{pq} (ці сталі залежать від самої функції f і чисел *p*, *q*) які відповідають такій умові: $\left|x^p f^{(q)}(x)\right| < C_{pq}$. Припустимо, що $f \in S_\infty$ і $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)dx = 0$ для всіх значень $p \geq 0$. Чи випливає звідси, що $f(x) \equiv 0$?

Основні позначення, використані в тексті посібника

Символи і позначення	Назва	Зміст	Приклад використання	Як читати
$\forall$	Квантор загальності	Для будь-якого, для кожного	$\forall x, P(x)$	Для всіх значень x виконується твердження (умова) $P(x)$
$\exists$	Квантор існування	Існує	$\exists x, P(x)$	Існує таке значення x , для якого виконується твердження (умова) $P(x)$
$\subset$	Включення	Включення, являє собою підмножину	$A \subset B$	Множина A є підмножиною множини B
$\in$	Належність	Належність	$x \subset B$	Елемент x належить множині B
$\notin$	Неприналежність	Не належить	$x \notin B$	Елемент x не належить множині B
$\Leftrightarrow$	Рівносильність	Рівносильність двох тверджень	$A \Leftrightarrow B$	Вислів A правильний тоді і тільки тоді коли справедливим є вислів B
$\Rightarrow$	Імплікація, наслідування	Якщо ..., то...	$A \Rightarrow B$	Якщо вислів A правильний, то справедливим буде і вислів B
sup	Супремум	Точна верхня межа	$\sup A$, $\sup\limits_{x \in B} f(x)$	Точна верхня межа (супремум) множини A. Точна верхня межа (супремум) функції $f(x)$, коли x належить множині B

Символи і позначення	Назва	Зміст	Приклад використання	Як читати
inf	Інфінум	Точна нижня межа	$\inf A$, $\inf\limits_{x \in B} f(x)$	Точна нижня межа (інфінум) множини A. Точна нижня межа (інфінум) функції $f(x)$, коли x належить множині B
$B(x,r)$		Відкрита куля з центром в точці x та з радіусом r	$B(0;1)$	Відкрита куля з центром в точці 0 та радіусом 1
$B[x,r]$		Замкнена куля з центром в точці x та з радіусом r	$B[0;1]$	Замкнена куля з центром в точці 0 та з радіусом 1
O_x, $O(x)$		Окіл елемента	$O(x)$	Окіл елемента x
O_A, $O(A)$		Окіл множини	O_A	Окіл множини A
$\{x_n\}$		Послідовність	$\{x_n\}$	Послідовність x_n
$\\| \\ \\|$	Норма	Норма елемента	$\\|x\\|$	Норма елемента x
$\rho(x,y)$		Відстань між елементами x і y		
$x_n \to x$		Збіжність послідовності	$x_n \to x$	Послідовність x_n прямує до елемента x
$f : X \to Y$	Функція (відображення)	Областю визначення цієї функції є множина X, а областю значень множина Y	$f : X \to Y$	Функція f відображає множину X на множину Y
$x \mapsto y$	Відображення	Образом елемента x є елемент y	$x \mapsto y$	Елементу x поставлено у відповідність елемент y
$f_n \underset{\mu}{\to} f$		Збіжність послідовності за мірою μ	$f_n \underset{\mu}{\to} f$	Послідовність f_n прямує до елемента f за мірою μ

Символи і позначення	Назва	Зміст	Приклад використання	Як читати
$f_n \underset{Y_\delta^c}{\rightrightarrows} f$		Рівномірна збіжність послідовності	$f_n \underset{Y_\delta^c}{\rightrightarrows} f$	Послідовність f_n прямує до елемента f рівномірно
$\searrow$	Збіжність послідовності зверху	Збіжність послідовності зверху	$f_n \searrow f$	Послідовність f_n прямує до елемента f зверху
$\nearrow$	Збіжність послідовності знизу	Збіжність послідовності знизу	$f_n \nearrow f$,	Послідовність f_n прямує до елемента f знизу
(X,τ)		Топологічний простір, визначений на множині X за допомогою топології τ	(X,τ)	Топологічний простір, визначений на множині X за допомогою топології τ
(X,ρ)		Метричний простір на множині X із метрикою ρ	(X,ρ)	Метричний простір на множині X із метрикою ρ
$\{\ \}$		Множина, елементами якої є	$\{a,b,c\}$	Множина, що складається з елементів a, b, c
$\{\ \|\ \}$		Множина елементів, для яких справедливим є твердження	$\{x\,\|P(x)\}$	Множина елементів x для яких справедливим є твердження $P(x)$
$\{\ :\ \}$		Множина елементів, які задовольняють умову	$\{x:P(x)\}$	Множина елементів x які задовольняють умову $P(x)$
$[A]$, $\overline{A}$		Замикання множини A		
A^C		Доповнення множини A, $A^C = X \setminus A$		

Позначення й характеристики основних просторів

Назва	Метрика	Норма
1. Простір ізольованих точок	$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{если } x=y,\\ 1, \text{если } x\neq y,\end{cases}$	
2. R^1 – простір дійсних чисел	$\rho(x,y)=\lvert x-y\rvert$	$\lVert x\rVert=\lvert x\rvert$
3. R_1^n	$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert$
4. R_∞^n	$\rho(x,y)=\max_{i=1,2,\ldots n}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\max_{i=1,2,\ldots n}\lvert x_i\rvert$
5. R_2^n – n-вимірний арифметичний евклідів простір	$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$
6. R_p^n	$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\lVert x\rVert=\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$
7. l_1 – простір абсолютно підсумовних послідовновностей, $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert<\infty$	$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert$
8. l_2 – простір послідовностей, підсумовуваних із квадратом, $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty$	$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2}$
9. l_p – простір послідовностей, для яких $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p<\infty$	$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i-y_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\lVert x\rVert=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$
10. m – простір обмежених послідовностей	$\rho(x,y)=\sup_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\sup_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i\rvert$
11. c – простір збіжних послідовностей	$\rho(x,y)=\sup_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\sup_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i\rvert$

Назва	Метрика	Норма
12. c_0 – простір послідовностей, що прямують до 0	$\rho(x,y)=\sup\limits_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\lVert x\rVert=\sup\limits_{i=1,2,\ldots}\lvert x_i\rvert$
13. $C[a;b]$ – простір функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}\lvert x(t)-y(t)\rvert$	$\lVert x\rVert=\max\limits_{t\in[a,b]}\lvert x(t)\rvert$
14. $C^2[a;b]$ – простір функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$ з квадратичною метрикою	$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2d}$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\int\limits_a^b x(t)^2\,dt}$
15. $L[a;b]$ – простір вимірних на відрізку $[a;b]$ функцій	$\rho(x,y)=\int\limits_a^b\lvert x(t)-y(t)\rvert dt$	$\lVert x\rVert=\int\limits_a^b\lvert x(t)\rvert dt$
16. $L^2[a;b]$ – простір функцій, вимірних із квадратом на відрізку $[a;b]$	$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2}$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\int\limits_a^b x(t)^2\,dt}$

Основна література

1. Бурбаки, Н. Топологические векторные пространства [Текст] / Н. Бурбаки. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 410 с.
2. Городецкий, В.В. Методы решения задач по функциональному анализу [Текст] / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К. : Вища шк., 1990. – 479 с.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 741 с.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1972. – 624 с.
5. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ [Текст] / Р. Рокафеллар – М. : Мир, 1973. – 472 с.
6. Функціональний та опуклий аналіз. Методичні рекомендації до виконання контрольних і практичних робіт для студентів напрямів підготовки 6.050101 Комп'ютерні науки, 6.040303 Системний аналіз [Текст] / С.А. Ус. – Д. : Національний гірничий університет, 2010. – 61 с.

Додаткова література

1. Березанский, Ю.М. Функциональный анализ: Курс лекций [Текст] / Ю.М. Березанский , Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К. : Вища шк., 1990. – 600 с.
2. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Специальный курс [Текст] / Г.Е. Шилов – М. : Физматгиз, 1960. – 388 с.
3. Треногин, В.А. Функциональный анализ [Текст] / В.А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
4. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа [Текст] / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
5. Рид, М. Методы современной математической физики. – Т. 1: Функциональный анализ [Текст] / М. Рид, Б. Саймон. – М. : Мир, 1977. – 360 с.
6. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа. [Текст] / Л.А. Люстерник , В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
7. Иосида, К. Функциональный анализ [Текст] / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
8. Рудин, У. Функциональный анализ [Текст] / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 448 с.
9. Уфнаровский, В.А. Математический аквариум [Текст] / В.А. Уфнаровский. – Кишинев : Штиинца, 1987, – 216 с.
10. Лейхтвейс, К. Выпуклые множества [Текст] / К. Лейхтвейс, – М. : Наука, 1985. – 336 с.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Ус Світлана Альбертівна

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 16.10.2013. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 13,8.
Обл.-вид. арк.17,0. Тираж 100 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
в ДВНЗ «Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса,19.