

Міністерство освіти і науки України  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



**М.Ш. ПЕВЗНЕР**

## **ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ**

Рекомендовано Вченою радою ДВНЗ «Національний гірничий університет»  
як навчальний посібник  
для студентів галузей знань 0507 «Електротехніка та електромеханіка»,  
0509 «Радіотехніка, радіоелектронні апарати та зв'язок»,  
0502 «Автоматика та управління»,  
0501 «Інформатика та обчислювальна техніка»,  
1701 «Інформаційна безпека».

**ДВНЗ «НГУ»  
2013**

УДК 53(075)

ББК 33.3Я73

П 23

*Рекомендовано Вченою радою ДВНЗ «Національний гірничий університет» як навчальний посібник для студентів галузей знань 0507 «Електротехніка та електромеханіка», 0509 «Радіотехніка, радіоелектронні апарати та зв'язок», 0502 «Автоматика та управління», 0501 «Інформатика та обчислювальна техніка», 1701 «Інформаційна безпека» (протокол № 7 від 06.09.2013)*

**П 23 Основи теорії відносності: навч. пос. / М.Ш. Певзнер, – М-во освіти і науки України, Держ. вищ. навч. заклад «Нац. гірн. ун-т». – Д. : ДВНЗ «НГУ», 2013. – 155 с.**

Розрахований, в першу чергу, на студентів галузей знань 0507 «Електротехніка та електромеханіка», 0509 «Радіотехніка, радіоелектронні апарати та зв'язок», 0502 «Автоматика та управління», 0501 «Інформатика та обчислювальна техніка», 1701 «Інформаційна безпека». Може також бути корисним студентам інших технічних напрямів підготовки, а також студентам фізичних та фізико-технічних спеціальностей класичних та педагогічних університетів, учителям фізики та учням ліцеїв, фізматшкіл та спеціалізованих класів фізичного профілю загальноосвітніх шкіл

Для розуміння основного змісту не вимагає математичних знань, що виходять за межі стандартної програми з курсу вищої математики для технічних ВНЗ.

Дається тлумачення основних понять релятивістської механіки – таких, як маса, релятивістська сила, релятивістський закон руху, енергія зв'язку тощо, виходячи із сучасних уявлень. Наведені приклади застосування теорії відносності до електродинаміки. Містить завдання для самостійного розв'язування.

© М.Ш. Певзнер

© ДВНЗ «НГУ», 2013

*У наше століття якір кожного генератора, що обертається, і кожного електромотора невпинно проголошує справедливість теорії відносності – треба лише вміти слухати.*

Ларрі Пейдж,  
розробник пошукової системи  
та співзасновник компанії Google

## **ПЕРЕДМОВА**

Для технічних напрямів підготовки, за якими готують фахівців ВНЗ III та IV рівнів акредитації, дисципліна «фізика» є однією з найважливіших фундаментальних, природничо-наукових дисциплін, що формує науковий світогляд сучасного фахівця, є базою для опанування інших природничо-наукових, загально-технічних і спеціальних дисциплін, що викладаються майже для всіх технічних напрямів підготовки. Добра обізнаність із матеріалом цієї дисципліни згодом дозволяє майбутнім фахівцям краще орієнтуватися у бурхливому потоці наукових відкриттів останніх часів, швидше знаходити для них технічні застосування, опанувати, якщо це потрібно, суміжні професії і, таким чином, виявлятися сьогодні більш конкурентоспроможними на ринку праці.

Сучасна фізика базується на двох фундаментальних теоріях: теорії відносності та квантовій механіці. Щодо традиційних розділів дисципліни зазначимо, що під впливом вищеозначених теорій в ідейному плані вони теж зазнали певних змін.

Даний посібник присвячується основам теорії відносності, створеної майже століття тому, які в більшості існуючих підручників та навчальних посібників досі не знайшли сучасного відображення. Це стосується, насамперед, тлумачення понять маси, енергії, енергії зв'язку, релятивістського закону руху, властивостей релятивістської сили, поняття простору подій і пов'язаному з ним поняття релятивістського інваріанту, основних понять загальної теорії відносності. Не вичерпано також повною мірою використання ідей теорії відносності під час викладання електродинаміки. Ця ситуація яскраво відображає висловлення видатного російського фізика і педагога Ю.М. Широкова: «Викладання завжди відстає від науки. Один із проявів цього відставання полягає в тому, що чим більш новим є розділ науки, тим більш зжужмлено він викладається». Ми вирішили заповнити зазначені вище прогалини під час викладання, елементів теорії відносності в дисципліні «фізика» для майбутніх фахівців технічних напрямів підготовки, виходячи з того, що теорія відносності сьогодні взагалі є не тільки базою наукового

світогляду будь-якої людини ХХІ століття, зокрема, такої, що має вищу технічну освіту, але й являється фундаментом цілої низки технічних застосувань, таких, як ядерна енергетика, зв'язок, техніка радіаційних випромінювань, релятивістська електротехніка тощо. Важливу роль відіграє вивчення теорії відносності для електричних спеціальностей, оскільки зв'язок між електричним і магнітним полями в цій теорії виявляється найбільш природно.

Беручи до уваги, що посібник розраховано на студентів молодших курсів технічних ВНЗ, автор уникає строгих міркувань і, зокрема, строгих виведень формул, обмежуючись простими прикладами та моделями. Використання підручника не передбачає наявності у читача математичних знань, які б виходили за межі звичайного курсу вищої математики для технічних спеціальностей ВНЗ III та IV рівнів акредитації. Щодо структури посібника, то він складається з чотирьох розділів. Кожний з них містить перелік навчальних цілей розділу, глосарій, контрольне завдання. Посібник містить також приклади застосувань теорії відносності до задач електродинаміки та ядерної фізики.

Посібник розраховано, в першу чергу, на студентів галузей знань «електротехніка та електромеханіка», «радіотехніка, радіоелектронні апарати та зв'язок», «автоматика та управління», «інформатика та обчислювальна техніка», «інформаційна безпека». Може також бути корисним студентам інших технічних галузей знань, а також студентам фізичних та фізико-технічних спеціальностей класичних та педагогічних університетів, учителям фізики та учням ліцеїв, фізматшкіл та спеціалізованих класів фізичного профілю загальноосвітніх шкіл.

# 1 МЕХАНІКА НЬЮТОНА-ГАЛІЛЕЯ

## Навчальна мета:

- ознайомитися з поняттям системи відліку;
- ознайомитися з межами застосування механіки Ньютона-Галілея, класичної релятивістської механіки, нерелятивістської квантової механіки;
- ознайомитися з поняттям інерціальної системи відліку та навчитися обирати таку для розв'язання конкретних задач;
- ознайомитися з фундаментальними законами механіки Ньютона-Галілея;
- одержати уявлення про механічний принцип відносності та перетворення Галілея як інструмент його математичного відображення;
- одержати уявлення про наявність у природі величин, інваріантних відносно перетворень Галілея.

## Глосарій

**Система відліку** – тіло або сукупність тіл, які в задачі, щ розглядається, вважаються нерухомими, пов'язана з цими тілами система координат та вимірювальних пристроїв для визначення просторових відстаней та проміжків часу.

**Корпускулярно-хвильова природа матерії** – властивість матеріальних об'єктів проявляти водночас корпускулярні властивості (властивості частинок) так само як хвильові властивості.

**Хвиля де Бройля** – хвиля, пов'язана із наявністю в матеріального об'єкту хвильових властивостей, яка переносить інформацію про нього.

**Співвідношення невизначеностей для координат і відповідних до них проекцій імпульсів** – співвідношення між невизначеностями координат і відповідних до них проекцій імпульсів частинки, які є наслідком наявності у частинки хвильових властивостей і які обмежують можливість для неї перебувати водночас у стані із визначеною координатою та відповідною до неї проекцією імпульсу.

**Класична нерелятивістська механіка (механіка Ньютона-Галілея)** – механіка тіл, наявністю в яких хвильових властивостей можна знехтувати та які рухаються зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла у вакуумі.

**Класична релятивістська механіка** – механіка тіл, наявністю в яких хвильових властивостей можна знехтувати та на величину швидкості руху яких ніяких обмежень не накладається.

**Квантова нерелятивістська механіка** – механіка тіл, що, враховує їхні хвильові властивості та які рухаються зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла у вакуумі.

**Механічний стан частинки в класичній механіці** – визначається одночасним заданням координат та вектора імпульсу частинки.

**Інерція** – явище, яке полягає в здатності тіл зберігати незмінною свою швидкість під час відсутності взаємодії з іншими тілами.

**Рух за інерцією** – стан спокою або прямолінійний рівномірний рух в інерціальній системі відліку.

**Інерціальна система відліку** – система відліку, в якій тіло, яке не зазнає взаємодії з іншими тілами, рухається за інерцією.

**Інертність** – здатність тіл в інерціальній системі відліку зберігати свою швидкість незмінною під час взаємодії з іншими тілами.

**Маса частинки** – міра здатності тіла зберігати незмінною свою швидкість під час взаємодії з іншими тілами.

**Імпульс частинки** – добуток маси частинки на її швидкість; імпульс системи частинок дорівнює сумі імпульсів окремих частинок (адитивність імпульсу); для системи частинок, що не взаємодіє з іншими тілами, імпульс системи частинок зберігається (закон збереження імпульсу).

**Фундаментальні закони природи** – закони, які не є наслідками інших більш загальних законів і справедливості яких впливає лише з даних експерименту.

**Закон руху, рівняння руху** – закон зміни з часом величин, які характеризують стан механічної системи.

**Симетрія, яка порушена спонтанно** – симетрія, порушення якої викликано виключно початковими умовами.

**Механічний принцип відносності** – твердження про однаковість законів руху нерелятивістської механіки у всіх інерціальних системах відліку та пов'язану з цим рівноправність всіх зазначених систем відліку.

**Перетворення Галілея** – зв'язок між координатами точки простору, в якій відбувається подія, і моментом часом її відбування в різних інерціальних системах відліку в механіці Ньютона-Галілея.

**Інваріант перетворень** – величина, яка під час застосування до неї відповідних перетворень, не зазнає змін.

**Коваріантність виразу відносно певних перетворень** – його властивість не змінювати вигляду під дією зазначених перетворень.

## **1.1 Релятивістська і квантова механіка. Механіки Ньютона-Галілея та галузь її застосування. Стан частинки в механіці Ньютона-Галілея**

Механіка вивчає найпростішу форму руху тіл (частинок). Цей рух носить відносний характер, тобто рух будь-якого об'єкту визначається відносно деякої системи відліку. Систему відліку створюють тіла, які в задачі, що розглядається, вважаються за нерухомі, система координат, пов'язана з цими тілами, а також сукупність вимірювальних пристроїв для визначення просторових відстаней та проміжків часу.

У фізиці дуже важливим є поняття *стану* фізичної системи. Зокрема, з ньютонівських часів аж до 20-их років минулого сторіччя *механічний стан* окремої частинки вважався заданим, якщо відомі її вектор імпульсу  $\vec{p}$  (визначення цього вектора див. у 1.2.3) та радіус-вектор  $\vec{r}$  (положення). Проте

в кінці зазначеного періоду виявилось, що всі матеріальні об'єкти, поряд із корпускулярними властивостями, які характеризуються можливістю одночасного визначення їхніх координат та імпульсів, мають також хвильові властивості, що підтверджується численними експериментальними фактами. Зокрема, з експерименту випливає, що з кожним матеріальним об'єктом пов'язана певна хвиля, яка називається *хвилею де Бройля* зазначеного об'єкту і яка має довжину

$$\lambda = h/p,$$

де  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка, що є однією з фундаментальних констант сучасної фізики (часто у фізиці використовується величина  $\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – так звана модифікована стала Планка),  $p$  – імпульс об'єкту. Ця хвиля не переносить енергії і тому не є переносником сигналу; її фізичний зміст полягає в тому, що вона містить інформацію про перебування об'єкту в певних точках простору у визначений момент часу.

Подвійна корпускулярно – хвильова природа матеріальних об'єктів унеможливує для них одночасне визначення координат та імпульсів і, таким чином, визначення механічного стану частинки одночасним визначенням вектора імпульсу  $\vec{p}$  та радіус-вектора  $\vec{r}$ . З формальної точки зору неможливість визначення механічного стану частинки проявляється в існуванні для її координат і відповідних до них проєкцій імпульсу співвідношень невизначеностей, які мають вигляд

$$|\Delta x| \cdot |\Delta p_x| \geq \hbar/2; |\Delta y| \cdot |\Delta p_y| \geq \hbar/2; |\Delta z| \cdot |\Delta p_z| \geq \hbar/2, \quad (1.1.1)$$

де  $|\Delta x|$ ,  $|\Delta y|$ ,  $|\Delta z|$  – невизначеності координат частинки, а  $|\Delta p_x|$ ,  $|\Delta p_y|$ ,  $|\Delta p_z|$  – невизначеності відповідних до них проєкцій імпульсу. Наведені співвідношення свідчать про вказану вище неможливість одночасного визначення координат та відповідних до них проєкцій імпульсу: чим більша невизначеність координати частинки  $|\Delta x|$ ,  $|\Delta y|$ ,  $|\Delta z|$ , тим менша невизначеність відповідної до неї проєкції імпульсу  $|\Delta p_x|$ ,  $|\Delta p_y|$ ,  $|\Delta p_z|$ .

Механіка, в якій враховується подвійна корпускулярно-хвильова природа матеріальних об'єктів називається *квантовою*. Проте, існують численні випадки, коли хвильовими властивостями частинки можна знехтувати. Зокрема, це можна робити за умови

$$\lambda \ll a, \quad (1.1.2)$$

де  $a$  – характерний розмір області, в якій рухається частинка, а  $\lambda$  – довжина її хвилі де Бройля. Механіка, в якій таке нехтування є можливим, називається *класичною*.

У межах класичної механіки можна виділити випадок руху тіл зі швидкостями, близькими до  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с (швидкість поширення електромагнітного сигналу у вакуумі, що, поряд зі сталою Планка є однією з фундаментальних констант сучасної фізики). У зазначеному випадку спостерігається низка таких закономірностей, що повільним рухам не властиві.

Механіка, яка враховує такі закономірності і при цьому нехтує наявністю у матеріальних об'єктів хвильових властивостей, називається *класичною релятивістською*.

Якщо ж класична частинка (або тіло) рухається зі швидкістю

$$v \ll c, \quad (1.1.3)$$

кажуть про *класичну нерелятивістську механіку, або механіку Ньютона – Галілея*.

Отже, механіка Ньютона-Галілея – це механіка об'єктів, що рухаються зі швидкостями  $v \ll c$ , для яких можна знехтувати наявністю в них хвильових властивостей.

Наведемо приклади, що ілюструють можливість описання тих чи інших об'єктів механікою Ньютона-Галілея. Розглянемо кульку масою  $m = 12$  г. Якщо припустити, що невизначеність її координати  $|\Delta x| \approx 10^{-10}$  м (розмір атома, оскільки говорити про меншу невизначеність координати тіла  $\Delta x$  не має сенсу), то для невизначеності проекції імпульсу  $|\Delta p_x|$  із рівностей (1.1.1) маємо

$$|\Delta p_x| \geq 0,5\hbar/|\Delta x| \approx 0,5 \cdot 10^{-24} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Тоді для невизначеності проекції швидкості  $|\Delta v_x|$  одержимо

$$|\Delta v_x| = |\Delta p_x|/m \approx 0,5 \cdot 10^{-21} \text{ м/с}.$$

Для макроскопічних тіл обидві величини  $\Delta x$  і  $\Delta v_x$  дуже малі, тому рух зазначеної кульки можна описувати класично.

Нехай електрон рухається в електронно-променевій трубці з анодною напругою  $U = 1$  кВ. У цьому випадку швидкість  $v$  електрона перед анодом визначається співвідношенням

$$eU = \frac{mv^2}{2}.$$

Вона набуває значення  $v = 6,3 \cdot 10^{-2} c$ , і співвідношення  $v \ll c$  задовольняється досить добре. З іншого боку, довжина хвилі де Бройля для цього електрона  $\lambda = 5,4 \cdot 10^{-11}$  м, і співвідношення (1.1.2) також задовольняється, якщо під  $a$  розуміти поперечні розміри пучка  $a \approx 1$  мкм і навіть ще більше. Таким чином, у цьому випадку для описання руху електрона може бути використана механіка Ньютона-Галілея.

Розглянемо тепер рух мікрочастинок. Електрон в атомі водню має швидкість  $v \approx 2 \cdot 10^6$  м/с. Щодо невизначеності його координат, то і в цьому випадку не має сенсу говорити про локалізацію частинки в області, яка є меншою за розміри атома. Тому маємо

$$\Delta v_x \geq 0,5\hbar/(m \cdot |\Delta x|) \approx 3,5 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

де  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – маса електрона. Отже,  $\Delta v_x > v$ , і казати про те, що електрон має визначену швидкість, тут неможливо. Таким чином, класичне описання в даному випадку непридатне. Воно взагалі непридатне для частинок



малої маси, які містяться в сильних полях (зокрема, локалізованих у малих об'ємах простору).

## **1.2 Інерціальні системи відліку. Маса та імпульс частинки в механіці Ньютона-Галілея. Фундаментальні закони механіки Ньютона-Галілея**

### **1.2.1 Основна задача механіки Ньютона-Галілея та інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона**

*Основною задачею динаміки Ньютона-Галілея для частинки є визначення її стану в довільний момент часу, якщо цей стан відомий в деякий момент, який звичайно приймається за початковий. Для розв'язання цієї задачі необхідно знати закон, за яким стан змінюється з часом. Цей закон називають законом (рівнянням) руху частинки; його встановлюють на базі узагальнення дослідних фактів. Зокрема, дослідним шляхом із певною точністю встановлено, що існують такі системи відліку, в яких частинка, що не зазнає зовнішньої дії, рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває в спокої, тобто імпульс частинки в цьому випадку залишається сталим. Такий рух називають рухом за інерцією, а зазначені системи відліку одержали назву інерціальних. Отже, можна сформулювати такий закон: існує, принаймні, одна система відліку, в якій тіло, що не зазнає зовнішньої дії, рухається за інерцією. Цей закон називають першим законом динаміки, або першим законом Ньютона. Отже зміст першого закону Ньютона полягає у таких двох положеннях: а) визначенні інерціальної системи відліку і б) у твердженні, що, принаймні, одна з таких систем існує в природі. Якщо деяка з систем відліку є інерціальною, то такою самою буде й будь-яка інша, яка рухається відносно першої рівномірно і прямолінійно. Зауважимо, що тіло відліку, яке пов'язане з такою системою, повинно рухатися вільно, тобто не взаємодіяти з іншими тілами, або така взаємодія має бути скомпенсована повністю. Зрозуміло, що це ідеальний випадок, який в природі не може бути реалізований буквально. Звідки випливає, що безпосередньо експериментально переконатися в існуванні такої системи неможливо. Тому твердження про її існування слід розглядати як постулат, а саму систему – як фізичну модель, якій за певних умов може відповідати реальна система.*

Продемонструємо, за яких умов може вважатися інерціальною система відліку, що пов'язана із Землею. Для цього треба, щоб Земля рухалася рівномірно й прямолінійно, чого, взагалі, як відомо, не відбувається. Порівняємо нормальне прискорення  $a_e$  точок, що належать земному екватору, під час її добового обертання, і нормальне прискорення  $a_{op}$  орбітального руху самої Землі навколо Сонця, яка розглядається як матеріальна точка, з прискоренням  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$  тіл, які рухаються під дією сили тяжіння з боку Землі, перебуваючи навколо її поверхні. Для  $a_e$  маємо

$$a_e = \omega_D^2 \cdot R_e \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2,$$

де  $\omega_{\delta} = 2\pi/T_{\delta}$ ,  $T_{\delta} \approx 8,64 \cdot 10^4$  с – період добового обертання Землі навколо власної осі,  $R_e \approx 6,4 \cdot 10^6$  м – радіус земної кулі. Для прискорення  $a_{op}$  пишемо

$$a_{op} = \omega_{op}^2 R_{op} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2,$$

де  $\omega_{op} = 2\pi/T_{op}$ ,  $T_{op} \approx 3,154 \cdot 10^7$  с – період обертання Землі навколо Сонця,  $R_{op} \approx 1,5 \cdot 10^{11}$  м – радіус земної орбіти під час обертання Землі навколо Сонця, якщо вважати її за колову. Порівнюючи тепер величини  $g$ ,  $a_e$  та  $a_{op}$ , бачимо, що умови

$$a_e \ll g, a_{op} \ll g$$

тут задовольняються з досить хорошою точністю, і тому з такою самою точністю для рухів, які відбуваються на поверхні земної кулі, з нею можна пов'язати інерційну систему відліку.

### 1.2.2 Про рівноправність станів спокою і рівномірного прямолінійного руху

Одним з наслідків першого закону Ньютона є певна рівноправність станів спокою і рівномірного прямолінійного руху. Це означає, що реалізація одного з цих станів для того самого тіла відбувається не за рахунок його взаємодії з іншими тілами, а за рахунок початкових умов, за яких воно перебувало на початку розглядання зміни стану тіла.

Кажучи про рівноправність станів спокою і рівномірного прямолінійного руху, додамо таке. Стан спокою частинки не виділяє будь-яких переважних напрямів у просторі, в якому перебуває частинка, і тому цей стан є *сферично-симетричним*. Це означає таке. Нехай для опису стану частинки обрана певна система координат із початком в точці її перебування. Під час обертання зазначеної системи координат навколо свого початку, проекції вектора швидкості частинки на осі цієї системи не змінюються (залишаються такими, що дорівнюють нулеві). У той самий час для частинки, яка рухається прямолінійно і рівномірно, такий переважний напрям у просторі, в якому перебуває частинка, існує: це – напрям вектора її швидкості. Тому тут має сенс розглядати різні системи координат, які обертаються навколо осей, а не навколо точки; зокрема, в цьому випадку залишається незмінною лише проекція вектора швидкості на вісь системи координат, напрям якої збігається з напрямом швидкості частинки (або є протилежним до нього) Тому стану частинки, яка рухається рівномірно і прямолінійно, притаманна *циліндрична симетрія*. Отже висновок про рівноправність станів спокою і рівномірного прямолінійного руху є справедливим з точністю до врахування різної симетрії зазначених станів.

Симетрія стану частинки, яка перебуває в спокої, є більш високою, ніж тієї, що здійснює рівномірний прямолінійний рух. Тому кажуть, що стан частинки, яка здійснює рівномірний прямолінійний рух, є станом з *порушеною симетрією*. Порушення симетрії, яке відбувається за рахунок початкових умов, називають *спонтанним*.

Концепція спонтанного порушення симетрії виявилася винятково плідною в різних областях сучасної фізики – таких, як фізика елементарних частинок, теорія фазових переходів, фізика конденсованого стану, зокрема, фізика твердого тіла, астрофізика та ін. Вона, зокрема, дозволяє тлумачити з єдиної точки зору такі, на перший погляд, далекі одне від одного явища, як виникнення маси у частинки і фазовий перехід, розглядаючи їх як спонтанне порушення симетрії.

### 1.2.3 Маса та імпульс частинки в механіці Ньютона-Галілея

З першого закону Ньютона відомо, що тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами, або, якщо така дія скомпенсована, перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно. Це означає, що кожне тіло прагне зберегти стан руху, доки взаємодія з іншими тілами не змусить його це зробити. Зазначену властивість тіл називають *інерцією*, при цьому різні тіла під час взаємодії між собою свій стан змінюють неоднаково. Отже, вказану властивість різні тіла проявляють у різній мірі; в цьому випадку кажуть, що зазначені тіла мають різну *інертність*. Таким чином, з'являється необхідність введення величини, яка б кількісно характеризувало міру інертності тіл. Таку величину в ньютонівській механіці називають *масою*.

Фізичний зміст введеної величини можна пояснити таким прикладом. Розглянемо абсолютно пружне центральне зіткнення двох куль (див. рис.1.1), які рухаються вздовж осі  $OX$ , перебуваючи на гладенькій поверхні.

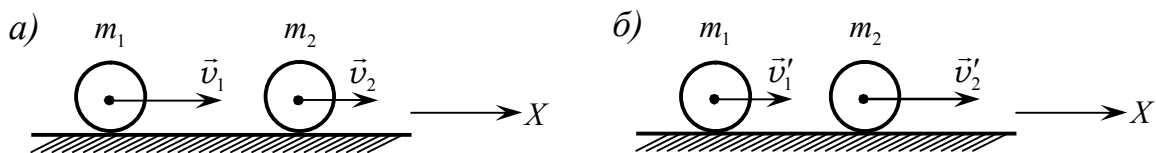


Рисунок 1.1. Визначення імпульсу:

а – рух куль до зіткнення; б – рух куль після зіткнення

Під час зіткнення зміна модулів проекцій векторів швидкостей куль визначається співвідношеннями

$$|\Delta v_{1x}| = v_{1x} - v'_{1x}, \quad |\Delta v_{2x}| = v'_{2x} - v_{2x}; \quad (1.2.1)$$

тут  $|\Delta v_{1x}|$ ,  $|\Delta v_{2x}|$  – зазначені зміни,  $v_{1x}$ ,  $v'_{1x}$  – проекції вектора швидкості першої кулі відповідно – до і після зіткнення,  $v_{2x}$ ,  $v'_{2x}$  – те ж саме для другої кулі. Чим більше міра інертності тіла, тим менше змінюється його швидкість, тобто можна записати, що

$$\frac{|\Delta v_{2x}|}{|\Delta v_{1x}|} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (1.2.2)$$

де  $m_1$ ,  $m_2$  – маси куль. Співвідношення (1.2.2) може бути використане для експериментального вимірювання маси тіла. Насправді, якщо одне з тіл у наведеному співвідношенні має відому масу (є еталоном), то, вимірюючи зміни

швидкостей  $|\Delta v_{1x}|$ ,  $|\Delta v_{2x}|$  під час зіткнення тіл, можна визначити невідому масу іншого тіла.

Відзначимо найважливіші властивості маси в механіці Ньютона-Галілея.

1. Маса тіла є *мірою його інертності* (це яскраво демонструє формула (1.2.2)).

2. Маса є *мірою кількості речовини, матерії*. Так, символ « $m$ » у рівнянні Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{M}RT$  має той самий зміст, що й у співвідношенні (1.2.2).

3. Маса складеної системи є *сумою мас її складових*, тобто ця величина є *адитивною* (від англійського – to add – додавати).

4. Маса ізольованої системи *зберігається* (не змінюється з часом).

5. Маса тіла є джерелом гравітаційного поля, пов'язаного з цим тілом.

6. Маса тіла *не змінюється під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої*; ця властивість маси та її наслідки більш детально обговорюється в 1.4.

З формул (1.2.1) та (1.2.2) випливає співвідношення

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, \quad (1.2.3)$$

з якого випливає доцільність введення динамічної характеристики стану частинки

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (1.2.4)$$

яку називають її *імпульсом*. Як можна побачити з (1.2.3), імпульс має такі властивості.

1) Імпульс системи частинок дорівнює векторній сумі імпульсів окремих частинок, з яких система складається, тобто він так само як маса має властивість адитивності. З формальної точки зору це означає, що

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

де  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  – імпульс частинки з номером « $i$ ».

2) Для певних механічних систем, зокрема, для таких, на які зовнішні сили не діють, імпульс зберігається.

### 1.2.4 Фундаментальні закони механіки Ньютона-Галілея

Фундаментальні закони механіки – це закони, які визначають закони зміни механічного стану з часом. Оскільки в класичній механіці стан частинки задається її вектором імпульсу та радіус-вектором, саме закони зміни цих величин і є фундаментальними законами цієї механіки. Фундаментальність фізичного закону, полягає в тому, що він не може бути встановлений з аналізу інших законів, які мають більш загальний характер. Фундаментальний закон формулюється на базі узагальнення великої кількості експериментальних фактів і має характер постулату. Зокрема, саме такий характер мають фундаментальні закони механіки Ньютона-Галілея.

Перший з цих законів сформульовано і проаналізовано в 1.2.1. Нижче формулюються і аналізуються інші закони.

Другий закон динаміки являє собою закон руху. Він стверджує, що швидкість, з якою імпульс частинки змінюється з часом, в інерціальній системі відліку визначається тільки взаємним розташуванням частинки і тіл, з якими вона взаємодіє, та їх відносними швидкостями. Таким чином, зміна імпульсу частинки в інерційній системі відліку пов'язана тільки із взаємодією цієї частинки з іншими тілами, тобто можна записати

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.2.5)$$

де  $\vec{F}$  – це міра взаємодії частинки з тілами, які її оточують. Цю величину називають *силою*. Під силою в рівності (1.2.5) звичайно розуміють рівнодіючу всіх сил, які діють на частинку в інерційній системі відліку. Враховуючи, що імпульс частинки  $\vec{p} = m\vec{v}$ , і, беручи до уваги, що дані досліду у випадку  $v \ll c$  свідчать про те, що імпульс частинки визначається співвідношенням (1.2.4), маємо

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.2.6)$$

де  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – прискорення частинки відносно інерціальної системи відліку.

Покажемо тепер, як за допомогою співвідношення (1.2.5) розв'язується основна задача динаміки Ньютона – Галілея. Для цього перепишемо вказане співвідношення у вигляді

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

(у наведеній рівності враховано, що в загальному випадку сила залежить від часу) та здійснимо інтегрування від початкового моменту часу  $t_0$  до деякого довільного моменту  $t$ :

$$\int_{\vec{p}(t_0)}^{\vec{p}(t)} d\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F}(t)dt. \quad (1.2.7)$$

Тут  $\vec{p}(t)$  і  $\vec{p}(t_0)$  – імпульс частинки в довільний момент часу  $t$  і в початковий момент  $t_0$  відповідно. Після здійснення інтегрування рівність (1.2.7) дає

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{F}(t)dt, \quad (1.2.8)$$

тобто рівність (1.2.8) визначає імпульс частинки в будь-який момент часу  $t$ , якщо він відомий в початковий момент  $t_0$ .

Використовуючи тепер співвідношення

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.2.9)$$

і, повторюючи всі міркування, що приводять від формули (1.2.5) до формули (1.2.8), одержуємо

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\vec{p}(t)}{m} dt. \quad (1.2.10)$$

Залежність імпульсу від часу, що використовується у співвідношенні (1.2.10), дається рівністю (1.2.8). Таким чином, рівності (1.2.8) і (1.2.10) визначають стан частинки в будь-який момент часу і являють собою розв'язок основної задачі динаміки Ньютона – Галілея.

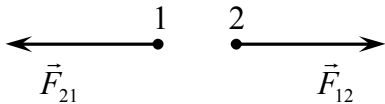


Рисунок 1.2. Третій закон Ньютона

Третій закон динаміки стверджує, що дві матеріальні точки 1 і 2 (див. рис. 1.2) взаємодіють між собою з силами  $\vec{F}_{12}$  і  $\vec{F}_{21}$ , які дорівнюють одна одній за модулем, мають протилежні напрями, лежать на одній прямій і мають однакову фізичну природу, тобто

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Цей закон справедливий лише в тому випадку, коли взаємодія відбувається під час безпосереднього контакту тіл, або, якщо вона відбувається за допомогою статичних полів. В електродинаміці для рухомих зарядів цей закон не має місця: сили взаємодії між електричними зарядами, які рухаються, не лежать на прямій, що з'єднує заряди. Ця взаємодія має запізнілий характер, у той самий час як у наведеному формулюванні закону вважається, що сили  $\vec{F}_{12}$  і  $\vec{F}_{21}$ , взяті в той самий момент часу; якщо є запізнення, це зробити неможливо. Як впливає з подальшого, в механіці Ньютона – Галілея обмежень на швидкість поширення взаємодії немає, і, таким чином, тут немає запізнілої взаємодії. Тому сукупність трьох зазначених законів утворює фундамент механіки Ньютона – Галілея.

### 1.3 Механічний принцип відносності

Повсякденний досвід свідчить про те, що в переважній кількості випадків ніякими механічними експериментами, які здійснені всередині замкненої системи тіл, пов'язаної з інерційною системою відліку, неможливо визначити, чи рухається зазначена система тіл рівномірно і прямолінійно або перебуває в спокої. Це твердження відображає суть механічного принципу відносності, або принципу відносності Галілея. Інакше кажучи, цей принцип стверджує рівноправність усіх інерційних систем відліку в механіці, оскільки неможливість виділити за допомогою механічних дослідів привілейовану систему відліку свідчить про те, що той самий механічний процес у всіх інерційних системах відліку за тих самих початкових умов відбувається цілком однаково.

Звернемо увагу на виділені зауваження «в переважній кількості випадків». Це означає, що насправді принцип відносності не зводиться до твердження щодо однаковості того самого явища в різних інерціальних системах відліку. Він лише стверджує, що закони, за якими відбувається зміна

механічного стану, для всіх інерціальних систем відліку однакові. Простежимо зв'язок між даним формулюванням, і тим, що наведено на початку параграфу.

Закон, за яким відбувається зміна стану, дається диференціальними рівняннями (1.2.5), (1.2.9); як випливає з (1.2.8) та (1.2.10), для визначення стану в будь-який момент часу необхідно знати  $\vec{r}(t_0)$  і  $\vec{p}(t_0)$ , що відносяться до початкового стану. Початкові стани в системах  $K$  і  $K'$  можуть виявитися різними, що призведе до різниці частинних розв'язків рівнянь (1.2.5), (1.2.9) в штрихованій та нештрихованій системах відліку і, таким чином, до неоднаковості протікання процесів у різних інерціальних системах відліку.

Проілюструємо сказане прикладом. Нехай з полиці вагона, що рухається рівномірно, падає предмет. Відносно вагону початкові координати та проекції початкової швидкості цього предмету такі:  $x'(t=0) = y'(t=0) = 0$ ;  $v'_x(t=0) = v'_y(t=0) = 0$  (вісь  $oX'$  паралельна до площини полотна залізниці, а вісь  $oY'$  напрямлена донизу). Відносно ж залізничного полотна початкові координати предмету можна вважати такими самими, а проекції початкової швидкості –  $v_x(t=0) = V$ ,  $v_y(t=0) = 0$  ( $V$  – швидкість вагону відносно полотна залізниці). Тоді, користуючись визначенням імпульсу (1.2.4), маємо

$$\begin{aligned} p'_x(0) &= p'_y(0) = 0, \\ p'_x(t) &= 0, p'_y(t) = mgt. \\ p_x(0) &= p_x(t) = mV, \\ p_y(0) &= 0, p_y(t) = mgt. \end{aligned}$$

Підставляючи тепер ці вирази до рівності (1.2.10) для штрихованої так само як для нештрихованої систем і використовуючи наведені вище початкові умови, одержуємо:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0, y'(t) = \frac{gt^2}{2}, \\ x(t) &= Vt, y(t) = \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

З наведених співвідношень бачимо, що в системі  $K'$ , яка пов'язана з рухомим вагоном, координата  $x'$  предмета стала, він рухається лише вздовж осі  $oY'$ , тобто його рух прямолінійний. Щодо руху відносно системи  $K$ , пов'язаної з полотном залізниці, то тут змінюється координата  $x$  так само, як і координата  $y$ . Співвідношення (1.3.1) є параметричним рівнянням параболи. Отже, в той самий час, коли рух предмета відносно вагона відбувається вздовж прямої лінії, рух того самого предмету відносно залізничного полотна відбувається вздовж параболи. Проте, ці рухи були б однакові для двох систем відліку, відносно яких предмет мав би однакові початкові швидкості.

## 1.4 Перетворення Галілея. Поняття про інваріанти перетворень Галілея. Перетворення Галілея і механічний принцип відносності

### 1.4.1 Перетворення Галілея

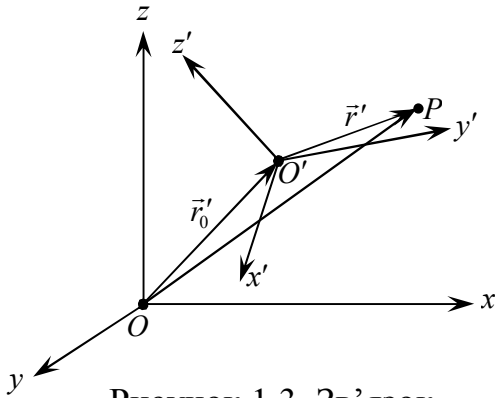


Рисунок 1.3. Зв'язок між координатами в нерухомих системах відліку

Механічному принципу відносності можна надати більш точне формулювання, якщо встановити зв'язок між координатами тієї самої точки  $P$  у двох інерціальних системах відліку –  $K$  і  $K'$ . Тут необхідно розрізняти два випадки.

У першому випадку системи нерухомі одна відносно іншої (див. рис. 1.3). Координати точки  $P$  у  $K$  і  $K'$  у цьому випадку пов'язані між собою співвідношеннями

$$\begin{aligned}x' &= x'_0 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\y' &= y'_0 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\z' &= z'_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

Тут прийняті такі позначення:  $x'_0, y'_0, z'_0$  – координати початку координат системи  $K'$  (точки  $O'$ ) в системі  $K$ ,  $x', y', z'$  – координати точки  $P$  в системі  $K'$ ,  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  – косинуси кутів між осями  $X$  і  $X', Y$  і  $X', Z$  і  $X'$ ; далі  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$  – косинуси кутів між осями  $X$  і  $Y', Y$  і  $Y', Z$  і  $Y'$ , а  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$  – косинуси кутів між осями  $X$  і  $Z', Y$  і  $Z', Z$  і  $Z'$ . На рис. 3 вектор  $\vec{r}$  має проєкції  $x, y, z$ , вектор  $\vec{r}'$  – відповідно  $x', y', z'$ , а вектор  $\vec{r}'_0$  – проєкції  $x'_0, y'_0, z'_0$ .

У другому випадку система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  зі сталою швидкістю  $\vec{V}$ , і, якщо в початковий момент часу точки  $O$  і  $O'$  збігаються, то  $\vec{r}'_0 = \vec{V}t$ , тобто маємо

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (1.4.2)$$

Виникає питання: яким годинником – чи тим, що пов'язаний із системою  $K$  або із системою  $K'$ , – вимірюється час  $t$  у формулі (1.4.2). У механіці Ньютона-Галілея вважається, що

$$t' = t, \quad (1.4.3)$$

тобто робиться твердження про абсолютний характер часу. Крім того, робиться також неявне припущення про абсолютність довжин. Насправді, співвідношення (1.4.2) було б очевидним, якщо б вектори  $\vec{r}, \vec{r}'$  і  $\vec{r}'_0$  були задані в тій самій системі відліку; проте, це не має місця через визначення цих величин.

Сукупність співвідношень (1.4.1) – (1.4.3) називається *перетвореннями Галілея*. Для зручності часто розглядають окремий випадок перетворень, коли в початковий момент часу осі систем  $K$  і  $K'$  та їхні початки  $O$  і  $O'$  збігаються, а



рух однієї з них відносно другої відбувається вздовж осі  $X$ . Для цього випадку співвідношення (1.4.2), (1.4.3) можуть бути записані в проекціях таким чином:

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

Ці перетворення ілюструються рисунком 1.4. За допомоги перетворень Галілея механічному принципу відносності можна надати математичного формулювання. Для цього, передусім, розглянемо, як поведуть себе під час перетворень Галілея різні величини, що надходять до формули (1.2.6), яке можна розглядати як закон руху в механіці Ньютона-Галілея. Зазначимо, що співвідношення (1.4.1) носить чисто геометричний характер і не має відношення до зміни з часом величин, що характеризують стан частинки. Тому в подальшому, коли це не буде зазначено спеціально, під перетворенням Галілея будемо розуміти саме сукупність співвідношень (1.4.2) – (1.4.4).

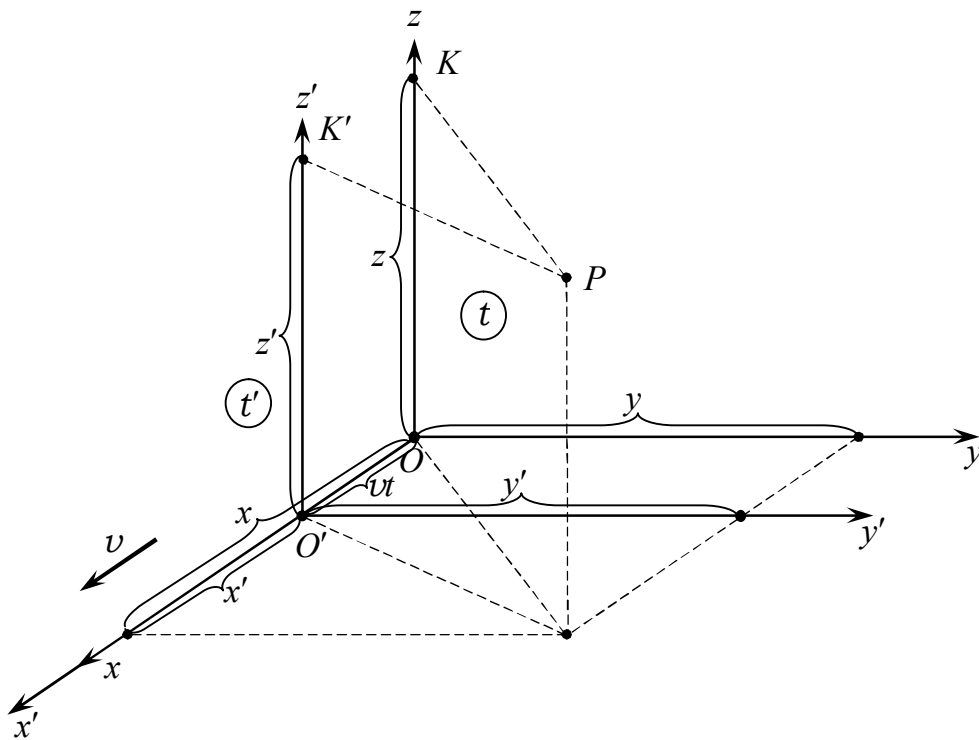


Рисунок 1.4. Зв'язок між координатами точки в різних інерціальних системах відліку, якщо одна з них рухається відносно іншої зі швидкістю  $v$  вздовж осі  $oX$

### 1.4.2 Додавання швидкостей в механіці Ньютона – Галілея

Здійснюючи диференціювання рівності (1.4.2) за часом та беручи до уваги співвідношення (1.4.3), одержимо

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (1.4.5)$$

або

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1.4.6)$$

де  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$  – швидкість частинки відносно системи  $K'$ ,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – її швидкість відносно системи  $K$ . Одержане співвідношення називається *законом додавання швидкостей в механіці Ньютона-Галілея*. Незважаючи на те, що співвідношення (1.4.5), (1.4.6) тут одержані для інерціальних систем відліку ( $\vec{V} = \text{const}$ ), вони справедливі для довільного закону залежності швидкостей від часу за умов  $V \ll c$ ;  $v, v' \ll c$ .

### 1.4.3 Інваріанти перетворень Галілея

Для того, щоб надати механічному принципу відносності точного формулювання, передусім, розглянемо, як поводять себе під час перетворень Галілея різні величини, що надходять до співвідношення (1.2.6), яке для частинки є однією з форм запису закону руху в механіці Ньютона-Галілея, та саме це співвідношення. З цією метою введемо поняття про *інваріанти перетворень Галілея*. Інваріантами тих чи інших перетворень називають величини, які під час зазначених перетворень не змінюють своїх значень. З фізичної точки зору інваріанти перетворень Галілея – це такі величини, які в усіх інерціальних системах відліку мають те ж значення.

Якщо певна рівність  $A = B$  під час відповідних перетворень не змінює свого вигляду, кажуть, що ця рівність є *коваріантною* відносно зазначених перетворень. Коваріантність виразу відносно деяких перетворень означає, що під дією цих перетворень обидві частини рівності  $A = B$  перетворюються за однаковими законами. Зокрема, коваріантність зазначеного виразу означає неможливість ситуації, за якою  $A$  виявляється проекцією вектора, а  $B$  – скаляром, оскільки під час перетворень, що описуються співвідношеннями (1.4.1), проекції вектора перетворюються за наведеними співвідношеннями, в той самий час як скаляр залишається незмінним. Проте, в переважній кількості випадків терміном «коваріантність» не користуються і замість нього використовують термін «інваріантність», що й буде зроблено нами далі протягом усього посібника за винятком окремих випадків, про що буде зазначено окремо.

Перейдемо тепер до вивчення перетворень Галілея і наведемо приклади інваріантів зазначених перетворень.

### 1.4.3.1 Проміжок часу (тривалість події)

Нехай подія в системі відліку  $K$  почалася в момент часу  $t_1$ , а скінчилася – в момент  $t_2$ , тобто її тривалість у системі відліку  $K$  дорівнює

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

З точки зору спостерігача, пов'язаного з системою  $K'$ , тривалість цієї самої події дорівнює

$$\Delta t = t'_2 - t'_1,$$

де  $t'_2$  і  $t'_1$  – моменти початку та завершення події, яка розглядається, в системі  $K'$ . Із співвідношення (1.4.3) випливає, що

$$\Delta t = \Delta t', \quad (1.4.7)$$

тобто тривалість події являється інваріантом перетворень Галілея.

### 1.4.3.2 Відстань між точками у просторі

Нехай  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  – радіус – вектори точок 1 і 2 в системі  $K$ , а  $\vec{r}'_1$  і  $\vec{r}'_2$  – в  $K'$  відповідно. Тоді відстань між цими точками в системі  $K$

$$\Delta r = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Якщо радіус - вектор точки 1  $\vec{r}'_1$  визначений у момент часу  $t'_1$ , а радіус - вектор точки 2  $\vec{r}'_2$  – у момент часу  $t'_2$ , то з урахуванням співвідношення (1.4.3) маємо

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \Delta \vec{r} - \vec{V}(t'_2 - t'_1), \quad (1.4.8)$$

де  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

Для того, щоб  $|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|$  можна було тлумачити як відстань між точками в системі  $K'$ , необхідно, щоб координати зазначених точок були виміряні одночасно спостерігачем, який зв'язаний з цією системою відліку, тобто, щоб задовольнялося співвідношення

$$t'_2 = t'_1 \quad (1.4.9)$$

(зазначимо, що в механіці Ньютона-Галілея поняття одночасності подій має абсолютний характер, і тому, якщо події одночасні в системі  $K$ , то вони одночасні також і в системі  $K'$  (більш детальне обговорення питання про одночасність подій в механіці Ньютона-Галілея і в класичній релятивістській механіці див. у 2.6)). Зі сказаного вище та із співвідношень (1.4.8), (1.4.9) випливає, що

$$\Delta \vec{r}' = \Delta \vec{r},$$

тобто відносний радіус-вектор і відстань між точками також є інваріантом перетворень Галілея.

### 1.4.3.3 Вектор відносної швидкості

Розглянемо співвідношення (1.4.5), для частинок 1 і 2:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}$$

після чого визначаємо відносну швидкість частинок  $\vec{u}$ :

$$\vec{u} = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Таким чином, вектор відносної швидкості є інваріантом перетворень Галілея.

### 1.4.3.4 Вектор прискорення

Здійснюючи диференціювання співвідношення (1.4.5) за часом і використовуючи (1.4.3), одержимо

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \quad (1.4.10)$$

Таким чином, вектор прискорення також є інваріантом перетворень Галілея.

Інваріанти перетворень Галілея, розглянуті вище, мають кінематичний характер. Існують також динамічні інваріанти цих перетворень. Розглянемо їх.

### 1.4.3.5 Маса частинки

Інваріантний характер маси частинки відображає той експериментальний факт, що маса частинки не залежить від її швидкості, тобто

$$m' = m. \quad (1.4.11)$$

### 1.4.3.6 Сила взаємодії між частинками

У ньютонівській механіці розглядаються сили пружності (залежать від відстані між частинками), сили тяжіння (залежать від відстані між частинками) і сили тертя, які залежать від відносної швидкості. Таким чином, сили взаємодії між частинками залежать від інваріантів перетворень Галілея, і тому вони самі також є інваріанти цих перетворень, тобто

$$\vec{F}' = \vec{F}. \quad (1.4.12)$$

### 1.4.3.7 Закони руху механіки Ньютона-Галілея

Зі співвідношень (1.4.10) – (1.4.12) випливає, що має місце рівність

$$m'\vec{a}' = \vec{F}', \quad (1.4.13)$$

яка є закон руху в системі  $K'$ . Порівнюючи (1.4.13) і (1.2.6), бачимо, що цей закон має такий самий вигляд, як у нештрихованій системі відліку  $K$ . Таким чином, закони руху механіки Ньютона-Галілея інваріантні відносно перетворень Галілея. Це твердження й є точним формулюванням механічного принципу відносності, про який мова йшла на початку параграфа.

Знову звернемо увагу на те, що насправді принцип відносності не містить тверджень щодо однаковості того самого явища в різних інерціальних системах відліку. Він лише стверджує, що *закони, за якими відбувається зміна механічного стану, для всіх інерціальних систем відліку однакові.*

Закон, за яким відбувається зміна стану, дається диференціальним рівнянням (1.2.5); для визначення стану в будь-який момент часу необхідно знати  $\vec{r}(t_0)$  і  $\vec{p}(t_0)$ , що відносяться до початкового стану. Початкові стани в системах  $K$  і  $K'$  можуть виявитися різними, що призведе до різниці частинних розв'язків рівняння (1.2.5) в штрихованій та нештрихованій системах відліку і, таким чином, до неоднаковості протікання процесів у різних інерціальних системах відліку, як це продемонстровано в кінці попереднього параграфу.

### Контрольне завдання до першого розділу

1.1 Проаналізувати, яку кількість систем відліку можна зв'язати з одним тілом відліку: а) одну; б) три; в) кількість систем відліку збігається з кількістю осей симетрії тіла відліку; г) нескінченну.

1.2. Проаналізувати, яку кількість систем відліку можна зв'язати з фіксованою точкою на заданому тілі відліку: а) одну; б) три; в) нескінченну; г) кількість систем відліку збігається з кількістю осей симетрії тіла відліку.

1.3. Проаналізувати, яку кількість систем координат можна зв'язати з одним тілом відліку: а) одну; б) нескінченну; в) кількість систем координат збігається з кількістю осей симетрії тіла відліку; г) три.

1.4. Проаналізувати, яку кількість систем координат можна зв'язати з фіксованою точкою на заданому тілі відліку: а) одну; б) три; в) нескінченну; г) кількість систем координат збігається з кількістю осей симетрії тіла відліку.

1.5. Чи може бути застосована механіка Ньютона-Галілея до опису руху таких об'єктів: а) нуклон всередині атомного ядра (для лінійних розмірів ядра взяти значення  $R = 4 \cdot 10^{-15}$  м, маса нуклона  $M = 1,7 \cdot 10^{-27}$  кг; б) штучний супутник Землі з масою  $m = 10^3$  кг, який рухається вздовж навколоземної орбіти (радіус орбіти  $R = 6,4 \cdot 10^6$  м); в) пучок іонів літію з кінетичною енергією  $E = 2,5$  МеВ. Для маси іона взяти  $M = 5,0 \cdot 10^{-27}$  кг.

1.6. Проаналізувати поняття інерціальної системи відліку: а) це – система, в якій будь-яке тіло перебуває в стані спокою; б) це – система, в якій всі тіла в той самий момент часу рухаються з однаковою швидкістю; в) це – система, в якій всі тіла в той самий момент часу рухаються з однаковим прискоренням; г) це – система, в якій тіла, що не взаємодіють з іншими тілами, рухаються рівномірно із прямолінійно або перебувають у спокої.

1.7. Проаналізувати, яке із зазначених нижче тіл може бути обране в якості тіла відліку для інерціальної системи відліку: а) тіло, що вільно падає; б) потяг, який рухається рівномірно; в) ланцюгова карусель; г) потяг, який наближується до залізничної станції.

1.8. Визначаючи прискорення точок земної кулі, які перебувають на широті екватора, внаслідок її добового обертання, дослідити, чи можна вважати інерціальною систему відліку, що пов'язана з Землею, для тіла, яке вільно падає, та для такого, яке рухається з прискоренням  $a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$  відносно Землі: а) для першого тіла – можна, для другого – ні; б) можна для обох тіл; в) для другого тіла – можна, для першого – ні; г) для обох тіл не можна.

1.9. Дослідити, скільки інерціальних систем відліку є в природі: а) нескінченна кількість: кожна система відліку, яка рухається відносно певної інерціальної системи рівномірно і прямолінійно, також є інерціальна; б) така система одна – та, що пов'язана з Землею; в) таких систем дві – та, що пов'язана з Сонцем, і та, що пов'язана з Землею; г) таких систем три – та, що пов'язана з Сонцем, та, що пов'язана з Землею, і та, що пов'язана з центром нашої Галактики.

1.10. Тіло рухається з прискоренням  $a = 10^{-3} \text{ м/с}^2$ . Вважаючи, що Сонце обертається навколо центра Галактики по колу радіуса  $R = 3 \cdot 10^{20} \text{ м}$ , дослідити, яка із зазначених систем відліку для цього тіла може вважатися інерціальною: а) система, яка пов'язана з Землею; б) система, яка пов'язана з Сонцем; в) система, яка пов'язана з центром нашої Галактики; г) жодна із зазначених систем не є інерціальною.

1.11. Проаналізувати поняття «маса тіла» в динаміці Ньютона-Галілея: а) це поняття характеризує тільки кількість речовини в тілі; б) це поняття характеризує тільки здатність тіла до взаємодії з іншими тілами; в) це поняття характеризує тільки міру інертності тіла; г) усім тілам притаманні ознаки, вказані в пунктах а) – в).

1.12. Проаналізувати поняття «інертність тіла»: а) це поняття характеризує здатність тіла до збереження незмінним вектора швидкості; б) це поняття характеризує здатність тіла до збереження незмінним вектора прискорення; в) це поняття характеризує здатність тіла до збереження незмінним модуля вектора швидкості; г) це поняття характеризує здатність тіла до збереження модуля прискорення.

1.13. Проаналізувати, який з наведених формальних виглядів другого закону Ньютона є найзагальніший:

$$\text{а) } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \text{ б) } \vec{F} = m\vec{a}; \text{ в) } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \text{ г) } \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

1.14. Іноді можна зустріти твердження, що перший закон Ньютона є наслідком другого. Проаналізувати справедливість цього твердження: а) так, це твердження справедливе, бо формально з другого закону випливає  $a = 0$ , якщо  $F = 0$ ; б) ні, це твердження не має місця: перший закон містить визначення інерціальної системи відліку, а другий закон має місце тільки в такій системі; в) це твердження є справедливим лише в інерціальній системі відліку; г) ні, це твердження не є справедливим, оскільки між першим і другим законами динаміки ніякого зв'язку немає.

1.15. Проаналізувати, яке походження мають закони Ньютона і який статус вони мають у механіці: а) це – фундаментальні закони, які є наслідком узагальнення великої кількості дослідних фактів; б) це – фундаментальні закони, справедливність яких є певною гіпотезою; в) це – закони, які не є фундаментальні, бо їх справедливність є наслідком інших, фундаментальних, законів; г) вірної відповіді немає.

1.16. Проаналізувати, якою додатковою інформацією, крім рівняння руху, слід володіти, щоб за допомогою цього рівняння можна було б розв'язати основну задачу механіки: а) знати імпульс і координати частинки в початковий момент часу; б) знати початкове значення сили; в) знати початкову швидкість частинки; г) знати початкове положення частинки.

1.17. У чому полягає механічний принцип відносності?

1.18. Як формулюється механічний принцип відносності в термінах перетворень Галілея?

1.19. Проаналізувати, які із зазначених нижче величин є інваріантами перетворень Галілея: а) координати частинки; б) просторова відстань між двома точками; в) проекції вектора швидкості частинки; г) тривалість події.

1.20. Проаналізувати, чи може той самий механічний процес протікати різним способом у різних інерціальних системах відліку: а) ні, це заборонено принципом відносності; б) може, саме в цьому полягає механічний принцип відносності; в) може, якщо початкові умови процесу в різних системах відліку неоднакові; г) може, таке протікання не пов'язане з механічним принципом відносності і не забороняється останнім.

1.21. У чому полягає закон додавання швидкостей в механіці Ньютона - Галілея?

1.22. Спостерігач вивчає рух частинки у двох інерціальних системах відліку, причому прискорення, яке він вимірює в системі  $K$ , дорівнює  $\vec{a}$ , а в системі  $K'$  –  $\vec{a}'$ . Проаналізувати, яке з наведених співвідношень для прискорень частинки має місце: а)  $\vec{a}' = 0$ ; б)  $\vec{a}' = \vec{a}$ ; в)  $|\vec{a}'| < |\vec{a}|$ ; г)  $|\vec{a}'| > |\vec{a}|$ .

## 2 ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ. РЕЛЯТИВІСТСЬКА КІНЕМАТИКА

### Навчальна мета:

- ознайомитися з експериментальним обґрунтуванням спеціального принципу відносності;
- вивчити постулати спеціальної теорії відносності та вміти застосовувати їх для розв'язання конкретних фізичних задач;
- одержати уявлення про відносний характер одночасності подій у природі, вміти тлумачити цей факт з погляду механіки Ньютона-Галілея та СТВ;
- ознайомитися з перетвореннями Лоренца для координат і моментів часу як інструментом для математичного відображення спеціального принципу відносності, навчитися застосовувати їх для розв'язання конкретних фізичних задач;
- ознайомитися з кінематичними наслідками перетворень Лоренца, навчитися користуватися ними під час розв'язання конкретних фізичних задач;
- ознайомитися з інваріантами перетворень Лоренца, навчитися використовувати їх під час розв'язання конкретних фізичних задач;
- одержати уявлення про чотиривимірний характер фізичного простору подій, навчитися користуватися цими уявленнями під час розв'язання конкретних фізичних задач.

### Глосарій

**Рівняння Максвелла** – рівняння руху в електродинаміці.

**Світовий ефір** – гіпотетичне середовище, з яким пов'язувалося існування привілейованої інерціальної системи відліку.

**Інтерференція хвиль** – явище підсилення в одних і ослаблення в інших точках простору амплітуди результуючої хвилі, одержаної при накладанні двох (або більше) хвиль, яке супроводжується перерозподілом інтенсивності хвиль у різних точках простору.

**Аберація світла** – явище, яке полягає у зміні напрямку поширення світла під час переходу від однієї системи відліку до іншої.

**Спеціальний принцип відносності**, або принцип відносності Ейнштейна, – твердження про однаковість законів фізики у всіх інерціальних системах відліку та пов'язану з цим рівноправність всіх зазначених систем відліку; він є узагальненням механічного принципу відносності на фізичні закони.

**Постулат сталості швидкості світла** – твердження про незалежність швидкості поширення електромагнітного випромінювання (світлового сигналу) у вакуумі від напрямку його поширення і швидкості руху джерела світла і сталість його у всіх інерціальних системах відліку.

**Однорідність простору** – властивість простору, пов'язана з відсутністю в ньому привілейованих точок.

**Однорідність часу** – властивість часу, пов'язана з відсутністю привілейованих моментів часу на осі часу.



**Перетворення Лоренца** – зв'язок між координатами точки простору, в якій відбувається подія, і моментом часом її відбування в різних інерціальних системах відліку в релятивістській механіці.

**Релятивістська кінематика** – кінематика як розділ механіки, в якому кінематичні величини під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої зазнають перетворень Лоренца.

**Релятивістський інваріант** – величина, яка не зазнає змін під дією перетворень Лоренца.

**Інтервал між подіями** – релятивістський інваріантна величина, яка узагальнює поняття відстані між точками простору на випадок чотиривимірного простору подій

**Власний час об'єкту** – час, виміряний в системі відліку, пов'язаній з даним об'єктом.

**Просторовоподібний інтервал** – інтервал, для якого відстань між точками простору, в яких відбуваються події, більша за відстань, яку долає світловий сигнал за час, що ці події розділяє.

**Часоподібний інтервал** – інтервал, для якого відстань між точками простору, в яких відбуваються події, менша за відстань, яку долає світловий сигнал за час, що ці події розділяє.

**Світлоподібний інтервал** – інтервал, для якого відстань між точками простору, в яких відбуваються події, дорівнює відстані, яку долає світловий сигнал за час, що ці події розділяє.

**Чотиривимірний простір** – уявлюваний простір чотирьох вимірювань, в якому роль четвертої координати відіграє час.

**Чотиривимірний вектор** – сукупність чотирьох величин у чотиривимірному просторі, яка під час лоренцових перетворень змінюється за тими самими законами, що й просторові проекції радіус-вектора та моменти часу.

**Ефект Доплера** – зміна частоти електромагнітного випромінювання під час руху спостерігача в порівнянні з випадком, коли спостерігач нерухомий.

**Світловий конус** – множина всіх точок, для яких інтервал, що відокремлює їх від даної події, що відбувається у вершині світлового конусу, є світлоподібний (тобто дорівнює нулеві).

**Метрика простору** – функція координат, яка описує властивості простору, зокрема, визначає відстань між точками простору.

**Евклідов простір** – простір  $N$  вимірювань, в якому квадрат відстані між точками визначається як сума квадратів різностей координат зазначених точок.

**Псевдоевклідов простір** – простір  $N$  вимірювань, в якому квадрат відстані між точками визначається як сума квадратів різностей координат зазначених точок, в якій деякі доданки мають від'ємні знаки.

**Світова лінія частинки** – траєкторія частинки в чотиривимірному евклідовому просторі.

**Простір Мінковського** чотиривимірний псевдоевклідов простір з дійсним часом.

**Діаграма Мінковського** – світова лінія частинки в просторі Мінковського.

## 2.1 Принцип відносності в електродинаміці та його експериментальне обґрунтування. Постулати спеціальної теорії відносності

Протягом XIX сторіччя розвивалася нова галузь фізики – електродинаміка, яка з єдиної точки зору описує електричні, магнітні та оптичні явища. Були сформульовані рівняння Максвелла, які в електродинаміці відіграють роль законів руху. У зв'язку з цим виникає питання про додержання принципу відносності в електродинаміці. З наявності цього принципу в механіці так само слід очікувати його додержання в електродинаміці, оскільки

в природі немає явищ, які б мали суто механічний характер. Так, сили пружності і тертя, з якими оперує механіка, мають електромагнітне походження, і це наводить на думку, що інваріантність законів механіки відносно перетворень Галілея повинна призводити до інваріантності рівнянь Максвелла відносно цих самих перетворень.

З іншого погляду, електромагнітні сили відрізняються від своїх макроскопічних проявів у механіці в таких відношеннях:

1) вони можуть залежати не від відносних, а від абсолютних швидкостей;

2) для них має місце запізніла дія, що призводить до порушення III закону динаміки. У зв'язку з цим важливим є безпосереднє дослідження додержання принципу відносності в електродинаміці. Передусім зазначимо, що рівняння Максвелла не є інваріантні відносно перетворень Галілея, в чому легко переконатися, помітивши, що обчислена за допомогою цих рівнянь швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі виявляється незалежною від вибору системи відліку. Це суперечить закону додавання швидкостей (4.5), (4.6), який розглядається як наслідок перетворень Галілея. Таким чином, можна зробити висновок, що в електродинаміці, на відміну від механіки, принцип відносності порушується. Це означає, що серед усіх інерціальних систем відліку має існувати привілейована. Ця система пов'язувалась із особливою речовиною – *світовим ефіром*, якому надавалася ціла низка незвичайних властивостей: він має проникати крізь усі тіла, не зазнаючи опору (кажучи сучасною мовою, мати властивість надплинності), не мати маси і тому не зазнавати гравітаційного притягання і деякими іншими.

Для обґрунтування висновку про відсутність принципу відносності в електродинаміці були використані результати експериментів, які були поставлені раніше з іншою метою. Одним з найпереконливіших тут є дослід Майкельсона (1881 р.) та вдосконалений пізніше Майкельсоном і Морлі (1887 р.). Цей дослід мав на меті знайти рух Землі відносно гіпотетичного ефіру. Принципова схема установки, яка була використана в досліді Майкельсона, наведена на рисунку 2.1.

З позначень на цьому рисунку, що вимагають пояснень, S – джерело світла, P – напівпрозора пластинка, площина якої створює з лінією SA кут, що

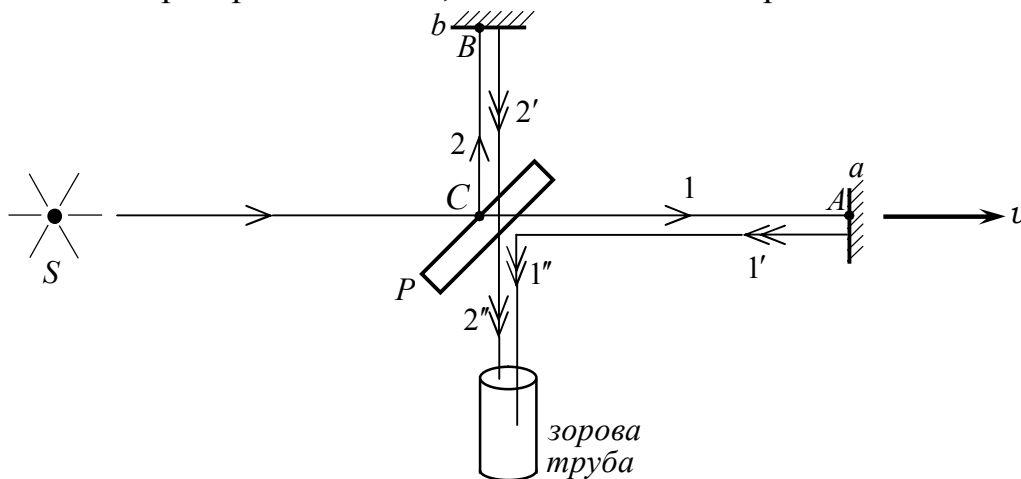


Рисунок 2.1. Принципова схема досліді Майкельсона-Морлі

дорівнює  $45^\circ$ ,  $V$  – швидкість руху Землі відносно Сонця. Вважаючи Сонце нерухомим, вказану швидкість можна розглядатися як швидкість Землі відносно гіпотетичного ефіру.

В установці, що описується, промінь світла від джерела  $S$  падає на скляну покриту сріблом напівпрозору пластинку  $P$  і поділяється на два промені: один з них (промінь 1) проходить крізь пластинку і падає на дзеркало  $A$ , другий (промінь 2) відбивається від пластинки і падає на дзеркало  $B$ .

Після відбиття від відповідних дзеркал промінь 2' проходить через пластину без відбиття (2''), а промінь 1' виникає під час відбиття променя 1' від пластини. Оскільки хвилі, що відповідають променям 1'' і 2'', належать до того самого пучка, розщепленого за допомогою пластинки  $P$  в просторі на два пучка, їх можна вважати хвилями, які випущені когерентними джерелами світла. Це означає, що тут можна спостерігати інтерференцію зазначених хвиль.

Нехай плечі установки однакові, тобто  $CA = CB = l$ . Розрахуємо час, який світло витрачає на проходження відстаней  $CA$  і  $CB$  перед попаданням відповідних променів до зорової труби. Швидкість променя 1 відносно дзеркала  $a$  дорівнює  $c - V$ , а променя 1', відповідно,  $c + V$ , тобто час  $t_1$  проходження світлом плеча  $CA$  туди і зворотно дорівнює

$$t_1 = t_{CA} + t_{AC} = \frac{l}{c - V} + \frac{l}{c + V} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - V^2/c^2} \quad (2.1.1)$$

Щодо відстані  $CB$ , помітимо, що тут світло проходить відстань  $l$  відносно джерела, яке в той самий час проходить відстань  $Vt_{CB}$  відносно ефіру, тому повне переміщення променя відносно ефіру визначається співвідношенням  $c^2 t_{CB}^2 = l^2 + V^2 t_{CB}^2$  (див. рис. 2.1). Враховуючи, що  $t_{CB} = t_{BC}$ , для часу  $t_2$  проходження світлом плеча  $CB$  в обидві боки маємо:

$$t_2 = 2t_{CB} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \quad (2.1.2)$$

Отже, часи  $t_1$  і  $t_2$  розрізняються. Це призводить до виникнення у хвиль, що відповідають променям 1'' і 2'', різниці ходи  $\Delta$  і, таким чином, до виникнення інтерференційної картини у фокальній площині труби. Із (2.1.1) і (2.1.2) бачимо, що в системі відліку, пов'язаною із Землею, ця різниця дорівнює

$$\Delta = c(t_2 - t_1) = 2l \left( \frac{1}{1 - V^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right). \quad (2.1.3)$$

Під час повороту установки на  $90^\circ$  навколо осі, яка проходить через точку  $c$  перпендикулярно до ліній  $SA$  і  $SB$ , промені 1'' і 2'' поміняються місцями, внаслідок чого різниця ходи між ними зміниться і тому Із (2.1) і (2.2) маємо

$$\Delta' = c(t_1 - t_2) = 2l \left( \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{1}{1 - V^2/c^2} \right). \quad (2.1.4)$$

Швидкість орбітального руху Землі  $V = 3 \cdot 10^4$  м/с, тому  $V^2/c^2 = 10^{-8}$ , і цю величину можна вважати малою. Розкладаючи праві частини формул (2.1.3) і (2.1.4) до ряду Маклорена за зазначеною величиною і обмежуючись членами другого порядку за  $V^2/c^2$ , одержимо

$$\Delta = l \cdot \frac{V^2}{c^2}$$

$$\Delta' = -l \cdot \frac{V^2}{c^2}$$
(2.1.5)

Якщо під час інтерференції випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda$  на фіксованому поділку шкали зорової труби спочатку спостерігається максимум порядку  $m$ , тобто,  $\Delta = m\lambda$ , то після повороту установки  $\Delta' = (m + \delta m)\lambda$ , і інтерференційна картина має зазнати зміщення на  $\delta m = |\Delta' - \Delta|/\lambda$  смуг. Використовуючи формули (2.5), для вказаного зміщення матимемо

$$\delta m = 2 \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{V^2}{c^2}.$$

У першому з дослідів Майкельсона і Морлі довжина плеча установки була  $l = 11$  м, довжина хвилі  $\lambda = 589$  нм, тобто очікуване зміщення інтерференційної картини становило 0,4 смуги. Точність дослідів дозволяє вимірити зміщення до 0,01 смуги.

Результати досліду дали для величини  $\delta m$  максимальне значення 0,02 смуги, а середнє – набагато менше, ніж 0,01. Подальші модифікації досліду показали, що зміщення смуг менші за 0,0005 ширини однієї смуги. Це дає підставу для таких висновків:

а) ефір існує, але він повністю захоплюється тілами, які рухаються в ньому (зокрема, в досліді Майкельсона - Морлі – Землею); отже швидкість тіл, які рухаються в ефірі, відносно нього дорівнює нулеві;

б) ефіру не існує.

Крім того, вказані досліди показали, що швидкість поширення електромагнітних хвиль (світла) у вакуумі у всіх інерціальних системах відліку однакова і не залежить від руху джерела і спостерігача.

Подальший аналіз для вибору з альтернативи а) та б) дають результати досліду Фізо, схема якого зображена на рисунку. 2.2. Тут, так само як у досліді Майкельсона – Морлі, світло від джерела S падає на напівпрозору пластинку Р. Далі промінь (перший), який показано на рисунку суцільною лінією, падає на пластинку Р і відбивається від неї. Потім він відбивається від дзеркал А, В, С, D, після чого знову відбивається від пластинки Р і потрапляє до зорової труби.

Промінь, зображений на рис. 2.2 пунктирною лінією (другий), проходячи крізь пластинку Р, зазнає заломлення, після чого він відбивається від дзеркал D, С, В і А і потрапляє до зорової труби після заломлення на межах пластинки Р. Так само, як у досліді Майкельсона – Морлі, у фокальній площині зорової труби можна спостерігати інтерференційні смуги.

Якщо проводити дослід спочатку з водою, яка перебуває в спокої, а потім – з рухомою, вважаючи, що ефір повністю захопився рухомим середовищем, то у випадку рухомої води слід очікувати зміщення інтерференційних смуг у порівнянні з поширенням світла у воді, яка перебуває в стані спокою. Розрахуємо величину очікуваного зміщення.

Рухома вода захоплює ефір, тому швидкість першого променя відносно Землі буде

$$v_1 = c/n + V, \quad (2.1.6)$$

а другого

$$v_2 = c/n - V, \quad (2.1.7)$$

де  $n$  – показник заломлення води,  $V$  – швидкість руху води відносно Землі. Очікуване зміщення інтерференційної картини визначається різницею ходи променів

$$\Delta = c(t_2 - t_1); \quad (2.1.8)$$

тут  $t_1$  і  $t_2$  – час проходження світлом верхньої та нижньої труби відповідно (див. рис. 2.2). Використовуючи (2.1.6) і (2.1.7), для  $t_1$  і  $t_2$  одержуємо

$$t_1 = \frac{2l}{v_1} = \frac{2l}{c/n + V}, \quad (2.1.9)$$

$$t_2 = \frac{2l}{v_2} = \frac{2l}{c/n - V}.$$

Таким чином, із співвідношень (2.8), (2.9) маємо

$$\Delta = \frac{2l}{v_2} - \frac{2l}{v_1} = \frac{4lVcn^2}{c^2 - (nV)^2} \quad (2.1.10)$$

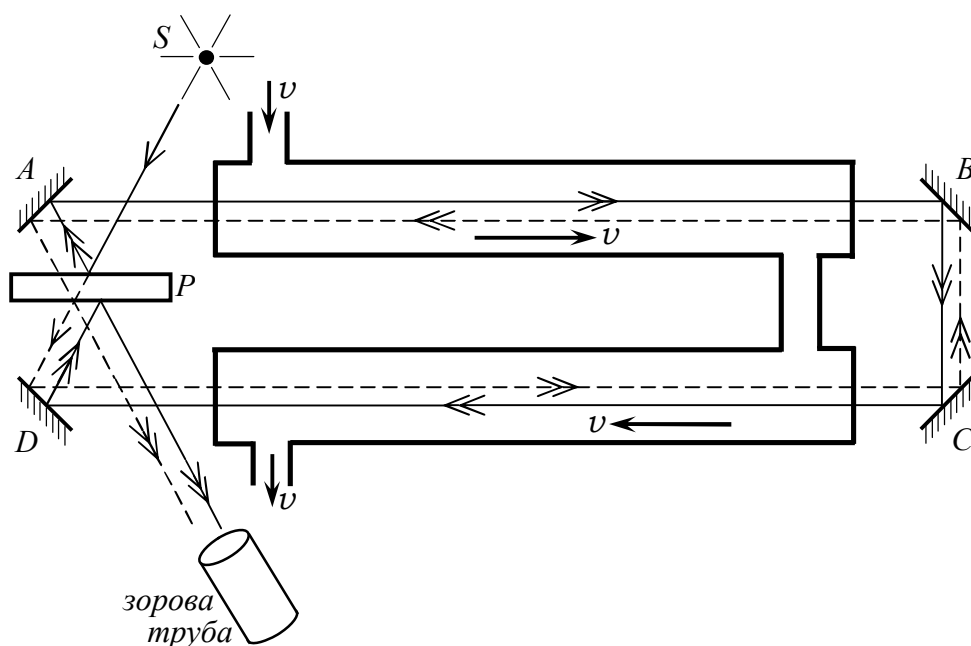


Рисунок 2.2. Принципова схема досліду Фізо

Враховуючи, що  $c^2 \gg V^2 n^2$ , пишемо

$$\Delta = \frac{4lVn^2}{c}.$$

Для зміщення інтерференційної картини наведене співвідношення дає

$$\delta m = \frac{\Delta}{\lambda} = 4 \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{Vn^2}{c}. \quad (2.1.11)$$

У досліді Фізо відомі величини мали такі значення:  $l = 1,5$  м,  $V = 7$  м/с,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м, і зміщення інтерференційної картини, розраховане за формулою (2.1.11), мало відбутися на  $\delta m = 0,5$  смуги. Насправді виявилось зміщення на  $\delta m = 0,2$  смуги. Таким чином, припущення про те, що ефір повністю захоплюється тілами, які в ньому рухаються, повинно бути відкинуто. Збіг очікуваного та знайденого в досліді результатів міг мати місце, якщо замість формул (2.1.6), (2.1.7) прийняти

$$v_{1,2} = \frac{c}{n} \pm \chi V, \quad (2.1.12)$$

де  $\chi = 1 - 1/n^2$ . Це свідчить про те, що вихідне припущення про повне захоплення ефіру тілами, які рухаються в ньому, не є вірне, що відображається у відміні від одиниці величини  $\chi$ , яка є коефіцієнтом захоплення ефіру.

Отже, дослід Фізо показує, що рухомі тіла частково захоплюють ефір, у той самий час, коли дослід Майкельсона – Морлі свідчить про його повне захоплення.

Між тим, якщо не відмовлятися від існування ефіру, слід зазначити, що існують експериментальні факти, які не можна пояснити повним захопленням ефіру рухомими тілами, так само як відсутністю такого захоплення. До них відноситься дослід зі спостереженням аберації світла, яка полягає у зміні напрямку поширення світла під час переходу від однієї системи відліку до іншої. Так, як свідчить дослід, якщо спостерігати світло від віддаленої зірки, яке потрапляє до телескопа, що перебуває на Землі, вісь телескопа треба нахилити на кут  $\alpha = 20,5''$  (див. рис. 2.3) відносно вертикалі. Це, в свою чергу, означає, що ефір не захоплюється рухомими тілами: Якби таке захоплення мало місце, світлові промені переміщувалися би разом з рухомих ефіром у телескопі, і переміщення телескопу здійснювати було б не треба. Якщо виходити з гіпотези нерухомого (тобто такого, що не захоплюється) ефіру, то можна навести таке пояснення явища, яке тут описується. За час  $t$ , протягом якого Земля проходить відстань  $Vt$  відносно нерухомого ефіру, світло проходить відносно нього відстань  $ct$ , тобто

$$\sin \alpha = \frac{Vt}{ct} = \frac{V}{c} \quad (2.1.13)$$

(див. рис. 2.3). Оскільки  $V = 3 \cdot 10^4$  м/с, маємо  $V/c = 10^{-4}$ . Враховуючи малість кута  $\alpha$ , вважатимемо, що  $\sin \alpha \approx \alpha$ , внаслідок чого одержимо  $\alpha = 10^{-4}$ ; це в

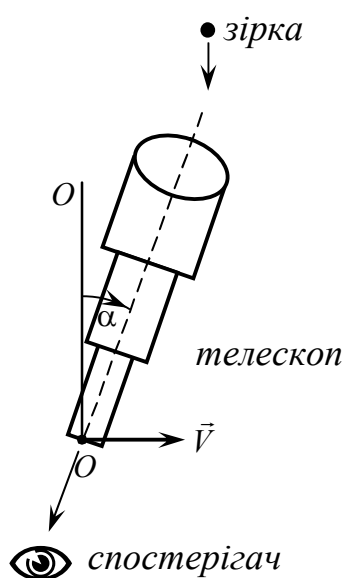


Рисунок 2.3. До пояснення явища аберації світла

захоплення  $\chi = 1 - 1/n^2$  ( $n$  – показник заломлення середовища);

3) спостереження аберації світла, яке приходить до Землі від віддалених зірок, показує, що, якщо ефір існує, він не захоплюється тілами, які в ньому рухаються, тобто. в цьому випадку  $\chi = 1$ .

Таким чином, всі зазначені експерименти неможливо пояснити з єдиної точки зору, яка полягає у твердженні про існування нерухомого ефіру як привілейованої системи відліку, тобто прийняти висновок б), який впливає з досліду Майкельсона-Морлі.

А. Ейнштейном (1905 г.) був проведений ретельний аналіз експериментів з виявлення руху тіл відносно ефіру за допомогою оптичних спостережень, який привів його до повної відмови від уявлень про систему відліку, що пов'язана з нерухомим ефіром, як про привілейовану систему відліку, та про незалежність швидкості поширення світлового сигналу у вакуумі від напрямку його поширення та руху джерела світла. Ці висновки можуть бути сформульовані у вигляді тверджень, які називаються постулатами теорії відносності.

Перший постулат. *Усі фізичні процеси в усіх інерціальних системах відліку за тих самих початкових умов протікають цілком однаково.*

Другий постулат. *Швидкість поширення електромагнітного випромінювання (світлового сигналу) у вакуумі не залежить від напрямку його поширення і швидкості руху джерела світла і є сталою у всіх інерціальних системах відліку.*

Перший постулат, який називається *спеціальним принципом відносності*, або *принципом відносності Ейнштейна*, узагальнює механічний принцип відносності з механічних на всі фізичні процеси. Другий постулат називають постулатом *сталості швидкості світла*.

Після того, як указані постулати було сформульовано, з удосконаленням виміральної техніки їхня експериментальна перевірка продовжувалась. Ця

градусній мірі дає  $\alpha \approx 20,5''$ , тобто має місце добре узгодження теорії з експериментом. Таким чином, для коефіцієнта захоплення ефіру в даному випадку одержане значення  $\chi = 1$ , що знаходиться у протиріччі з результатами дослідів Майкельсона-Морлі так само як і досліду Фізо.

Підсумуємо результати експериментальних досліджень ефіру та спробам виявити рух тіл відносно нього:

1) дослід Майкельсона-Морлі виявив, що, якщо ефір існує, він повністю захоплюється тілами, які в ньому рухаються, тобто в цьому досліді  $\chi = 0$ ;

2) з досліду Фізо випливає, що, якщо ефір існує, він захоплюється тілами, які в ньому рухаються, лише частково з коефіцієнтом

перевірка підтверджує зазначені постулати. Разом з тим, проблеми, на які зараз наштовхується фізика високих енергій, вимагають більш ретельної експериментальної перевірки постулатів спеціальної теорії відносності з точністю, яка сьогодні ще не досягнута.

## 2.2 Аналіз поняття одночасності подій в кінематиці Ньютона-Галілея та в релятивістській кінематиці

На перший погляд принцип відносності Ейнштейна та постулат сталості швидкості світла суперечать один одному. Насправді, розглянемо два тіла відліку, з пов'язаними з ними інерціальними системами координат  $K$  і  $K'$ , осі яких в початковий момент часу збігаються, а потім – починають рухатися одна відносно другої зі сталою швидкістю  $V$ . Нехай у початковий момент часу  $t$  в точці  $O$  (початок координат нештрихованої системи) відбувся світловий спалах. Тоді в момент часу  $t$  для спостерігача, пов'язаного із системою  $K$ , цей спалах сягне точок, які належать поверхні сфери  $Q$  радіуса  $r = ct$ , центр якої міститься в точці  $O$ . Оскільки швидкість світла від швидкості руху джерела не залежить (постулат сталості швидкості світла), для спостерігача в системі  $K'$  цей спалах сягне точок сферичної поверхні  $Q'$  з таким самим радіусом  $r = ct$  та центром у точці  $O'$ . Таким чином, точки, яких сягає той самий світловий спалах, належать сферичній поверхні, яка водночас має центри в точках  $O$  і  $O'$ , що неможливо.

Парадокс полягає в тому, що нами не визначено поняття одночасності подій. Глибокий фізичний аналіз цього поняття, зроблений А. Ейнштейном, довів, що інтуїтивних уявлень тут недостатньо, і поняття одночасності подій, зокрема, таких, що відбуваються в різних точках простору, вимагає строгого фізичного визначення. Нагадаємо, що насправді подія характеризується координатами точки, в якій вона відбувається, і моментом часу. Момент часу, в якій подія відбувається, встановлюється за показанням годинника, якій міститься в точці, де подія відбувається. Таким чином, вводиться так званий *місцевий, або локальний, час*. Виникає питання, чи можна ввести єдиний час для фіксованої системи відліку, оскільки без цього використання системи відліку для визначення просторово-часових співвідношень втрачає зміст. Для того, щоб це було можливо, треба, якимось способом узгодити показання годинників, які містяться у різних точках простору. Таке узгодження називається *синхронізацією* годинників.

Синхронізацію годинників можна здійснити різними способами. Тут буде описано найпростіший з них, запропонований А. Ейнштейном. Помістимо у точки простору  $A$  і  $B$  (див. рис. 2.4) годинники, які показують місцевий час  $t_A$  і  $t_B$ . а в точку  $C$ , що розділяє відрізок  $AB$  навпіл, – джерело світла. Нехай в точці  $C$  відбувся світловий спалах, який досягає точок  $A$  і  $B$ . У момент часу, коли це досягнення відбувається, поставимо стрілки годинників в однакове положення, і тоді скажімо, що здійснено синхронізацію годинників у точках  $A$  і  $B$ . У такий



самий спосіб можна здійснити синхронізацію годинників, що перебувають у будь-якій парі точок, що дозволяє ввести єдиний час для всієї системи відліку.

Наявність єдиного часу для системи відліку, введеного за допомогою синхронізації годинників, дозволяє дати визначення поняттю одночасності подій, які відбуваються в різних точках простору. *Кажуть, що події, які відбуваються в різних точках простору, є одночасними, якщо синхронізовані годинники, які розміщені в зазначених точках, показують однаковий час настання цих подій.*

З визначення поняття одночасності подій випливає відносний характер цього поняття. Для пояснення звернемося до прикладу, зображеного на рисунку 2.4, і нехай тут прилади, що розташовані в точках А і В, з погляду

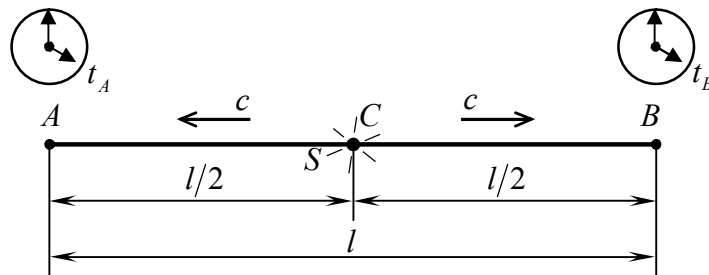


Рисунок 2.4. Синхронізація годинників за А. Ейнштейном

спостерігача, нерухомого відносно точок А і В (система  $K$ ) фіксують одночасний прихід спалаху до зазначених точок. Виникає питання, чи буде цей прихід одночасним для спостерігача, який наближається до однієї з точок (для визначеності – до точки В) зі сталою швидкістю  $V$ ; тоді від іншої точки – він віддалятиметься з такою самою швидкістю. Таким чином, для рухомого спостерігача шляхи, які пройдені світлових спалахом до точок А і В, виявляються неоднаковими. Для того, щоб ці шляхи були пройдені за рівні проміжки часу, необхідно, щоб спалах поширювався з необмеженою швидкістю. Саме таку можливість передбачає закон додавання швидкостей в механіці Ньютон-Галілея (формула (4.6)). Але сукупність експериментальних даних, висновок з яких узагальнено у вигляді другого постулату теорії відносності свідчить про те, що швидкість світла цьому закону не підлягає і залишається сталою для обох спостерігачів. Звідки випливає, що події, які полягають у тому, що світловий спалах досягає точок А і В, для нерухомого спостерігача виявляються одночасними, тоді як для рухомого – ні. Таким чином, поняття одночасності подій в механіці Ньютон-Галілея виявляється абсолютним і таким, що базується на передбаченні існування у природі сигналів, які поширюються з необмеженою швидкістю. Щодо релятивістської кінематики, то вона виходить з дослідного факту сталості швидкості світла, з якого випливає відносний характер поняття одночасності подій.

Відносність поняття одночасності подій дозволяє вирішити суперечність, яка здається, у прикладі, наведеному на початку даного параграфу. Насправді, в системі  $K$  світловий спалах досягає водночас точок поверхні  $Q$ , але в системі  $K'$  ці події не є одночасними. З іншого боку, для системи  $K'$  одночасними є

події, які полягають у досягненні спалахом точок поверхні  $Q'$  і не є одночасними події, пов'язані з досягненням спалахом точок поверхні  $Q$ .

### 2.3 Перетворення Лоренца для координат і моментів часу

Як зазначено в 1.4.3, рівняння руху механіки Ньютона – Галілея інваріантні відносно перетворень Галілея, і ця інваріантність є математичним відображенням наявності в цій механіці принципу відносності. Разом з тим, як впливає зі сказаного в 2.1, рівняння руху електромагнітного поля (рівняння Максвелла). таких властивостей не мають. Оскільки дослід свідчить про наявність в електродинаміці принципу відносності, слід відшукати такі перетворення координат та часу, які залишають інваріантними електродинамічні рівняння руху. Ці перетворення називають *перетвореннями Лоренца*. Вони можуть бути одержані, якщо використати постулати спеціальної теорії відносності, а також властивості однорідності простору та часу та принцип відповідності. Розглянемо зазначені вимоги більш детально.

1) У просторі та часі не повинно бути виділених точок, тобто простір та час *однорідні*. Ця вимога, зокрема, означає, що лінійні розміри об'єкта і тривалість події в тій самій системі відліку визначаються різницею відповідних координат і проміжків часу; вони не залежать від самих координат і моментів часу. Ця вимога звужує клас перетворень, які розглядаються, до лінійних, тому що зазначена властивість притаманна тільки лінійній функції;

2) за умови  $V \ll c$  формули перетворень мають переходити у формули перетворень Галілея (1.4.2) – (1.4.4), оскільки в цьому разі справедлива ньютонівська механіка; інакше кажучи, повинен виконуватися *принцип відповідності* під час переходу від спеціальної теорії відносності до механіки Ньютона – Галілея.

Перетворення Лоренца мають найпростіший вигляд у тому випадку, коли відповідні осі декартових координат нерухомої ( $K$ ) і рухомої ( $K'$ ) інерціальних систем відліку паралельні одна одній, а система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  зі швидкістю  $V$  вздовж осі  $OX$  (див. рис. 1.4). Крім того, припускається, що в початковий момент часу початки відліку обох систем відліку (точки  $O$  і  $O'$ ) збігаються. З рисунку 1.4 бачимо, що  $y' = y$ ,  $z' = z$ . Для визначення перетворення  $x$  і  $t$  скористуємося припущенням про лінійність функцій, які здійснюють ці перетворення. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t, \\ t' &= \gamma x + \delta t, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  і  $\delta$  – сталі (тобто не залежні від  $x$  і  $t$ ) величини, які підлягають визначенню.

Початок координат системи  $K'$  в цій системі завжди задовольняє умові  $x' = 0$ . Тому, застосовуючи першу з формул (2.3.1), маємо

$$\alpha x + \beta t = 0. \quad (2.3.2)$$

Відносно системи  $K$  ця система рухається зі швидкістю  $V = x/t$ , тоді рівність (2.32) дає  $\alpha V + \beta = 0$ , звідки,

$$\beta = -\alpha V.$$

Таким чином, перше з співвідношень (2.3.1) набуває вигляду

$$x' = \alpha(x - Vt). \quad (2.3.3)$$

Користуючись рівноправністю систем відліку  $K$  і  $K'$ , запишемо зворотне перетворення для координати  $x$ :

$$x = \alpha(x' + Vt'). \quad (2.3.4)$$

Розв'язуючи (2.3.4) відносно  $t'$  і використовуючи співвідношення (2.3.3), одержуємо

$$\gamma = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha V}; \quad \delta = \alpha. \quad (2.3.5)$$

Таким чином, сталі  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  визначаються через величину  $\alpha$ . Для визначення останньої використовується постулат сталості швидкості світла.

Нехай світловий сигнал, випущений в момент часу  $t = 0$  в додатному напрямі осі  $oX$  в точці  $O$ , в момент часу  $t$  досягне точки з координатою  $x$ . Тоді

$$x = ct. \quad (2.3.6)$$

Початки координат систем  $K$  і  $K'$  у початковий момент часу збігаються, тому координата тієї самої точки, але виміряна спостерігачем, пов'язаним із системою  $K'$ , дорівнює

$$x' = ct'. \quad (2.3.7)$$

Перемножуючи окремо ліві і праві частини рівностей (2.3.6) і (2.3.7), а також (2.3.3) і (2.3.4), пишемо

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.3.8)$$

Вірний вибір знаку у формулі (2.3.8) диктується принципом відповідності (див. пункт 2) на початку параграфу), тобто знак «-» слід відкинути. Отже, шукані перетворення Лоренца мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Ці перетворення, як і очікувалося, за умови  $V \ll c$  переходять у перетворення Галілея (1.4.4) якщо відносний рух систем відліку та взаємне положення координатних осей такі, як зображено на рисунку 1.4. Для того, щоб записати

зворотні перетворення, в рівностях слід змінити на зворотний знак перед швидкістю  $V$  у формулах (2.3.9), тобто

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\y &= y', z = z', \\t &= \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

З формул (2.3.9), (2.3.10) випливають такі важливі наслідки:

1) граничний характер швидкості поширення світлового сигналу у вакуумі; за  $V > c$  вказані формули втрачають зміст, бо координати і моменти часу, які є дійсними в одній з інерціальних систем відліку, перетворюються на уявні в іншій системі, що з фізичної точки зору є беззмістовним. Прямі експерименти свідчать про те, що зі збільшенням швидкості частинок (яку можна розглядати як швидкість передачі сигналу) остання асимптотично прямує до  $c$  знизу, тому вказаний наслідок з перетворень Лоренца можна вважати підтвердженим експериментально;

2) різний характер перетворення часу в механіці Ньютона – Галілея і теорії відносності. Для розуміння природи цієї різниці слід дослідити процес вимірювання часу, що вперше було зроблено А. Ейнштейном у 1905 р. Немає ніяких проблем, коли треба визначити момент часу настання події, якщо годинник міститься поблизу точки, в якій відбувається подія (поняття «поблизу» означає, що момент настання події може бути встановлений спостерігачем безпосередньо). Але, якщо місце, в якому відбувається подія, та місце перебування годинників розділені в просторі, момент настання події, взагалі, не може бути встановлений таким простим шляхом. З суті, справа тут полягає в тому, що під час такого встановлення ми спираємося на поняття одночасності подій. Насправді, оскільки твердження про те, що подія відбулася у визначений момент часу, означає, по суті, твердження про одночасність двох подій – тієї, що безпосередньо вивчається, і другої, яка полягає в тому, що стрілки годинника приймають конфігурацію, яка відповідає моменту здійснення зазначеної події. У попередньому параграфі було показано, що з постулатів спеціальної теорії відносності випливає відносний характер поняття одночасності подій, що й знаходить своє висвітлення в перетворенні часу під дією лоренцових перетворень (2.3.9).

Вирази (2.3.9) можна узагальнити на випадок, коли відносна швидкість систем відліку створює довільний кут з осями координат. Вводячи поздовжню

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{V})}{V^2} \cdot \vec{V} \quad \text{та} \quad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{V})}{V^2} \cdot \vec{V}$$

які є паралельними та перпендикулярними до вектора швидкості  $\vec{V}$  відповідно, і помічаючи, що для зображеного на рисунку 1.4 розташування систем

координат, можна записати  $x' = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{V}$ ,  $x = \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{V}$ , а  $y'$ ,  $y$ ,  $z'$ ,  $z$  – відповідні проекції векторів  $\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \vec{V}/V^2) \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{V}/V^2) \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{r}'_{\parallel} = \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{V})}{V^2} \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})}{V^2} \cdot \vec{V}$ . Тоді узагальнення першого із співвідношень (2.3.9) має вигляд

$$x' = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{V} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}/V - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

або

$$\vec{r}'_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V}/V^2 - \vec{V}t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.3.11)$$

Друге та третє із співвідношень (2.3.9), (2.3.10) показують, що складові радіуса-вектора, які є перпендикулярними до вектора швидкості  $\vec{V}$ , під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої не змінюються. Тому для цих складових пишемо

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad (2.3.12)$$

Беручи до уваги, що для будь-якого вектора  $\vec{a}$  має місце рівність  $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ , з рівностей (2.11) та (2.12) остаточно одержимо

$$\vec{r}' = \vec{r} - \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{V^2} \right) \cdot \vec{V} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}/V^2 - \vec{V}t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (2.3.13)$$

$$t' = \frac{t - (\vec{r} \cdot \vec{V})/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Легко бачити, що у випадку  $V \ll c$  співвідношення (2.3.13) переходять у співвідношення (1.4.2), (1.4.3). Додамо також, що для одержання найважливіших фізичних наслідків, що впливають із перетворень Лоренца, в переважній більшості випадків достатньо використати найпростішу форму цих перетворень (2.3.9), (2.3.10).

## 2.4 Основи релятивістської кінематики. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца

Розглянемо тепер деякі кінематичні наслідки перетворень Лоренца.

### 2.4.1 Скорочення довжин

Назвемо довжиною стрижня, що рухається, в певній системі відліку відстань між точками, які відповідають кінцям стрижня, обмірювану одночасно в цій системі відліку. Нехай стрижень перебуває в спокої відносно системи  $K'$  і лежить на осі  $OX'$  (див. рис. 2.5). Тоді різниця координат його кінців  $\Delta x'$  в

системі  $K'$  дорівнюватиме  $l_0$ . Використовуючи перетворення (2.3.9), одержуємо  $x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ,  $x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$  (тут  $x_1$  і  $x_2$  – координати початку

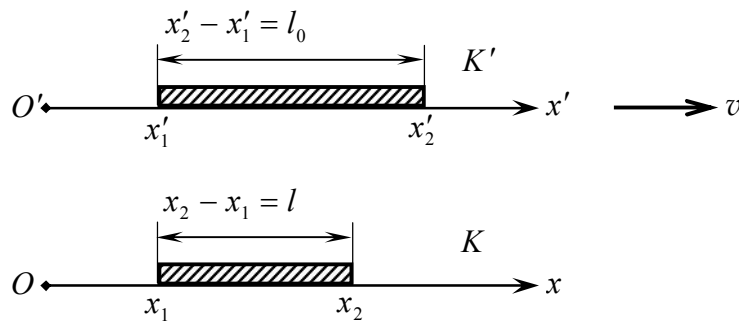


Рисунок 2.5. Релятивістське скорочення довжин

та кінця стрижня в системі  $K$ , а  $t_1$  і  $t_2$  – моменти часу вимірювання цих координат спостерігачем у зазначеній системі).

Для довжини стрижня в системі відліку, відносно якої він перебуває в спокої (системі  $K'$ ), маємо:

$$l_0 = \Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.4.1)$$

Для того, щоб різниця  $x_2 - x_1 = \Delta x = l$  являла собою довжину стрижня, який рухається, необхідно, щоб координати  $x_1$  і  $x_2$  були виміряні одночасно в системі  $K$ , тобто необхідно, щоб задовольнялась умова  $t_2 = t_1$ . Тоді  $x_2 - x_1 = \Delta x = l$  – довжина стрижня, який рухається, і з (2.4.1) одержуємо

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2.4.2)$$

Зі співвідношень (2.3.9) можна побачити, що довжина стрижня, який розміщено перпендикулярно до осі  $oX$ , не змінюється. Таким чином, поздовжні розміри тіла, яке рухається, в порівнянні з розмірами нерухомого тіла скорочуються в  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$  разів.

У свій час Фіцджеральд і Лоренц висунули гіпотезу про те, що таке скорочення насправді має місце. Цим можна пояснити відсутність зміщення інтерференційних смуг у досліді Майкельсона – Морлі. Дійсно, плече інтерферометра  $cb$  є перпендикулярним до напрямку руху, тому його довжина залишається незмінною. Щодо плеча  $ca$ , то воно є паралельним до цього напрямку, і тому для спостерігача, який пов'язаний з установкою, згідно формули (2.4.1) слід замість довжини плеча  $l$  підставити  $l\sqrt{1 - V^2/c^2}$ , тоді перетворюються на нуль різниці (2.1.5). У цьому випадку зміщення смуг не передбачається, воно також не спостерігається й у досліді.

Таким чином, теорія відносності пояснює негативний результат досліді Майкельсона – Морлі. На відміну від гіпотези Фіцджеральда – Лоренца,

пояснення, що дає теорія відносності, є наслідком загальних положень теорії, а не таких, які спеціально висунуті для пояснення результатів конкретного досліду.

### 2.4.2 Сповільнення ходи годинників

Нехай у певній точці простору відбулася подія, яка тривала деякий проміжок часу і  $x_1$  – координата  $x$  точки в системі  $K$ , в якій подія почалась, а  $x_2$  – координата точки в тій самій системі, в якій подія скінчилась; тоді зв'язок між моментами часу початку і кінця події в зазначених системах відліку  $K$  і  $K'$  (рухомої відносно зазначених точок) дається останнім із співвідношень (2.3.9)

$$t'_1 = \frac{t_1 - x_1 V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}},$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - x_2 V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}.$$

Тривалість події в системі  $K$  є  $\Delta t = t_2 - t_1$ , а в системі  $K'$  –  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ , тобто,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V(x_2 - x_1) / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}.$$

Якщо подія відбувається в тій самій точці, нерухомій відносно системи  $K$ , маємо  $x_2 = x_1$ , що остаточно дає

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (2.4.3)$$

Отже, з виразу (2.4.3) випливає, що годинник, який рухається, показує більшу тривалість події, тобто йде повільніше. Зазначений ефект називається сповільненням ходи годинника, який рухається. Висновок про наявність такого ефекту знаходить пряме експериментальне підтвердження. Так, під час дослідження космічних променів було встановлено, що в їх складі є нестабільні частинки – мюони, маса яких приблизно в 200 разів перевищує масу електрона. Середній час життя мюона  $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  с. Якщо врахувати, що мюони рухаються зі швидкістю, близькою до швидкості світла, можна знайти шлях, який проходить частинка за цей час:  $l_0 \approx c\tau_0 = 600$  м. Проте є незрозумілим, як ці частинки потрапляють до шарів атмосфери, близьких до земної поверхні, бо вони утворюються у верхніх шарах атмосфери (на висотах близько 10 км). Суперечність легко усувається, якщо врахувати, що час  $\tau_0$  відноситься до мюона, який перебуває в спокої. Щодо земного спостерігача, то для нього час життя мюона  $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$ , де  $V$  – швидкість мюона відносно Землі. Таким чином, шлях, пройдений частинкою відносно земного спостерігача, є

$$l = \frac{c\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \text{ тобто зазначений ефект можна розглядати як}$$

скорочення довжини. Насправді, тут  $l_0 \approx c\tau$  – відстань, що пройдена мюоном до розпаду, яка виміряна спостерігачем, що перебуває в спокої відносно частинки, а  $l$  – відстань, яка виміряна земним спостерігачем. Для останнього  $l \gg l_0$ , що й спостерігається у досліді.

*Таким чином, розміри тіл та тривалість подій, на відміну від механіки Ньютона – Галілея, у спеціальній теорії відносності не мають абсолютного характеру і є відносними поняттями. Абсолютний характер ці величини мають лише в системі відліку, відносно якої тіло або годинник перебуває в спокої. В цій системі довжина тіла є максимальною, а тривалість події – мінімальною.*

Зазначимо, що відносність довжин і часових проміжків не позначається під час руху макроскопічних тіл, оскільки ці тіла рухаються зі швидкістю  $V \ll c$ . Насправді, якщо предмет рухається зі швидкістю  $V = 10^6$  м/с, то спостерігач, який перебуває в спокої відносно лабораторії, знайде зменшення довжини предмета лише в  $\frac{l}{l_0} = 1,000005$  разів. З низки причин, проте, ця

відносність має вирішальне значення в електродинаміці, дозволяючи тлумачити природу магнітного поля та встановити взаємозв'язок між електричним і магнітним полями.

### 2.4.3 Релятивістський закон додавання швидкостей

Очевидно, що закон додавання швидкостей (1.4.5), (1.4.6) не задовольняє постулат сталості швидкості світла: його було одержано за допомогою перетворень Галілея, і тому зараз є необхідність в одержанні релятивістського закону додавання швидкостей. Для цього використаємо перетворення Лоренца, які є узагальненням перетворень Галілея на випадок довільних швидкостей.

Розглянемо перше з рівностей (2.3.9) і здійснимо його диференціювання за  $t'$ . Маємо

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx/dt' - V \cdot dt/dt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (2.4.4)$$

Похідна  $dx/dt'$  не має змісту швидкості, проте, якщо її представити у вигляді  $\frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = v_x \cdot \frac{dt}{dt'}$ , з (2.4.4) можна одержати

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \cdot \frac{dt}{dt'}. \quad (2.4.5)$$

Для обчислення похідної  $\frac{dt}{dt'}$  використаємо перетворення Лоренца для часу (останнє з перетворень (2.3.9)), що дає



$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - v_x V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (2.4.6)$$

Визначаючи звідси  $\frac{dt}{dt'}$  і здійснюючи відповідну підстановку до (2.4.5), запишемо

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2}. \quad (2.4.7)$$

Якщо рівність (2.4.7) обернути і виразити швидкість  $v_x$  через  $v'_x$ , одержимо

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V / c^2}. \quad (2.4.8)$$

Зазначимо, що в релятивістському випадку перетворюються не тільки поздовжні у відношенні до  $V$  компоненти швидкості об'єкту, але й поперечні. Це є наслідком перетворень Лоренца для часу. Для одержання законів перетворення відповідних проекцій у перетвореннях Лоренца (2.3.9) використаємо відповідні вирази для перетворень координат  $y$  і  $z$ :

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}, \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Виражаючи проекції швидкості  $v_y$ ,  $v_z$  через  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  і використовуючи рівність (2.4.6), одержимо:

$$\begin{aligned} v_y &= v'_y \cdot \frac{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 + v_x V / c^2}, \\ v_z &= v'_z \cdot \frac{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 + v_x V / c^2}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Формули (2.4.8) і (2.4.10) являють собою релятивістський закон додавання швидкостей. Для випадку, який зображено на рис. 1.4, вони узагальнюють закон додавання швидкостей в механіці Ньютона – Галілея (1.4.5), (1.4.6) і переходять у нього, якщо  $V \ll c$ ,  $v \ll c$ .

Так само, як у випадку перетворень Лоренца для координат і моментів часу, співвідношення (2.4.8), (2.4.10) можна узагальнити на випадки довільних кутів, які можуть утворювати з осями координат швидкість  $\vec{v}$  частинки і швидкість  $\vec{V}$  однієї з інерціальних систем відліку відносно іншої. Для цього скористаємося першим із співвідношень (2.3.13), внаслідок чого одержимо

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \left( \vec{v} - \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{V^2} \right) \cdot \vec{V} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} / V^2 - \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \right) \cdot \frac{dt}{dt'}. \quad (2.4.11)$$

Друге із співвідношень (2.1.13) дає

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (2.4.12)$$

Комбінуючи формули (2.4.11) та (2.4.12), маємо

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp}, \quad (2.4.13)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{\parallel} &= \frac{(\vec{v} \cdot \vec{V}) / V^2 - 1}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2} \cdot \vec{V} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - \vec{V}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2}, \\ \vec{v}'_{\perp} &= \frac{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2} \cdot \left( \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{V} / V^2) \cdot \vec{V} \right) = \frac{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2} \cdot \vec{v}_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Наведені вирази являють собою паралельну та перпендикулярну до вектора  $\vec{V}$  складові вектора  $\vec{v}'$  відповідно, а  $\vec{v}_{\parallel}$ ,  $\vec{v}_{\perp}$  – такі самі складові вектора  $\vec{v}$ . Користуючись формулами (2.4.14) можна отримати закон перетворення модуля швидкості

$$v' = c \cdot \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2 / c^2)(1 - V^2 / c^2)}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{V} / c^2)^2}}. \quad (2.4.15)$$

Якщо треба здійснити зворотне перетворення (тобто виразити  $\vec{v}$  через  $\vec{v}'$ ) у виразах (2.4.14), (2.4.15) достатньо змінити знак на зворотний перед вектором  $\vec{V}$ .

З наведеного співвідношення бачимо, що, коли  $v' = c$ , то  $v = c$  також, тобто швидкість світла у вакуумі відносно будь-якої інерціальної системи відліку зберігає стале значення, що відповідає постулату сталості швидкості світла.

Співвідношення (2.4.8) пояснюють результати досліду Фізо. Насправді, в цьому досліді швидкість течії води  $V = 7$  м/с,  $v'_x = c/n$ , тому  $v'_x V / c^2 = V / nc = 1,75 \cdot 10^{-8} \ll 1$ . Тому, розкладаючи праву частину виразу (2.4.8) до ряду за вказаною малою величиною і нехтуючи членами, які її містять, у випадку, коли швидкості світла і води мають однаковий напрям, пишемо

$$v_x = \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) V. \quad (2.4.16)$$

Якщо ці напрями протилежні, маємо

$$v_x = \frac{c}{n} - \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) V. \quad (2.4.17)$$

Наведені вирази пояснюють зміщення інтерференційної картини, яке спостерігається в досліді Фізо (див. формули (2.1.11), (2.1.12)).

Покажемо, що й явище астрономічної аберації світла має природне пояснення в теорії відносності, якщо скористатися співвідношеннями (2.4.10). Тут під штрихованою системою ( $K'$ ) розуміють систему відліку, пов'язану із Землею, яка рухається, а нештрихована ( $K$ ) – із Сонцем, яке вважається нерухомим. Вважатимемо також, що швидкість орбітального руху Землі напрямлена вздовж осей  $oX$ ,  $oX'$ , її обертанням навколо власної осі нехтуємо. Щодо осей  $oY$ ,  $oY'$ , то вважаємо, що вони паралельні одна одній і є перпендикулярними до швидкості орбітального руху Землі.

Під час використання співвідношень (2.4.10) в даному випадку  $v_x = 0$ ,  $v_y = c$ ,  $v_z = 0$ ,  $v'_x = -V$ ,  $v'_y = -c\sqrt{1 - V^2/c^2}$ ,  $v'_z = 0$ , звідки одержуємо

$$\sin \alpha' = \frac{|v'_x|}{c} = \frac{V}{c},$$

що добре узгоджується з експериментально підтвердженим результатом (2.1.13).

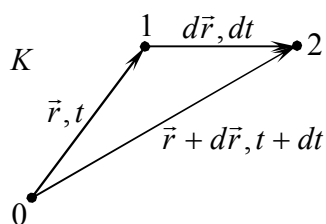
Застосування релятивістського закону додавання швидкостей (2.4.8), (2.4.10), як правило, є суттєвим, якщо швидкості об'єктів наближуються до  $c$ . Така ситуація має місце, наприклад, у прискорювачах. Проте, виявляється, що релятивістські поправки суттєві також в електродинаміці (так само як і інші кінематичні ефекти, які було розглянуто вище). Цікаво, що ці поправки є суттєві, незважаючи на вкрай мале значення швидкості упорядкованого руху носіїв струму в провідниках, до якого застосовується закон додавання швидкостей.

## 2.5 Кінематичні інваріанти перетворень Лоренца. Поняття про чотиривимірний простір подій

Якщо повернутися до вивчення кінематичних інваріантів перетворень Галілея (1.4.3), зазначимо, що вказані величини не зберігають інваріантного характеру відносно перетворень Лоренца (2.4). У зв'язку з цим виникає питання щодо знаходження величин, які би зберігали інваріантний характер відносно цих перетворень. Тут розглядаються тільки кінематичні інваріанти; динамічний випадок розглядається трохи пізніше.

### 2.5.1 Швидкість світла у вакуумі $c$

Це є найпростіший інваріант перетворень Лоренца. Інваріантний характер цієї величини впливає з постулату сталості швидкості світла; в цьому можна



переконатися безпосередньо за допомогою формули (2.4.15).

### 2.5.2 Інтервал між двома подіями

Нехай з точки зору спостерігача, пов'язаного із системою  $K$ , в точці 1 (див. рис. 2.6) з радіус-вектором  $\vec{r}$  у момент часу  $t$  відбулася деяка подія,

Рисунок 2.6. До поняття інтервалу між подіями

а в точці 2 з радіус-вектором  $\vec{r} + d\vec{r}$  у момент часу  $t + dt$  – інша. Величина, що визначається як

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2}, \quad (2.5.1)$$

називається *інтервалом* між цими подіями. Передусім, доведемо, що інтервал між подіями має інваріантний характер, тобто, що

$$ds' = ds, \quad (2.5.2)$$

де  $ds'$  – інтервал між цими самими подіями, але в системі  $K'$ . Припустимо, що обидві точки лежать на осях  $oX$ ,  $oX'$ . Для першої події перетворення Лоренца мають вигляд (2.3.9); тоді для другої можна записати

$$\begin{aligned} x' + dx' &= \frac{x + dx - V(t + dt)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' &= y, z' = z, \\ t' + dt' &= \frac{t + dt - V(x + dx)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} dx' &= x' + dx' - x' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ dy' &= dy = 0, dz' = dz = 0, \\ dt' &= t' + dt' - t' = \frac{dt - Vdx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Урахуємо, що

$$\begin{aligned} d\vec{r}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ d\vec{r}'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Підставляючи далі співвідношення (2.5.3) до другої з рівностей (2.5.4) та використовуючи визначення інтервалу (2.5.1), одержуємо рівність (2.5.2). Використовуючи співвідношення (2.3.13), можна довести, що рівність (2.5.2) залишається справедливою для інтервалів будь-якої величини, для довільного розміщення точок 1 та 2 у просторі і довільного розташування координатних систем однієї відносно іншої, а також відносно напрямку швидкості їхнього відносного руху. Розглянемо скінченний інтервал

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2}, \quad (2.5.5),$$

де  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Знак підкорінного виразу тут не є визначений, тому слід розрізняти випадки  $\Delta s^2 > 0$ ,  $\Delta s^2 < 0$ , а також  $\Delta s^2 = 0$ .

а) Випадок  $\Delta s^2 > 0$ . Такий інтервал називається *часоподібним*. За час, що розділяє події, які відокремлені одна від другої часоподібним інтервалом, світловий сигнал проходить відстань більшу за відстань між точками, в яких ці

події відбуваються. Тому зазначені події можуть бути пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком.

b) Випадок  $\Delta s^2 < 0$ . Такий інтервал називають *просторовоподібним*. Відстань між точками, в яких відбуваються події, що розділені зазначеним інтервалом, настільки велика, а проміжки часу між подіями настільки малі, що світловий сигнал не встигає пройти цю відстань за вказаний час. Тому події, розділені просторовоподібним інтервалом, не можуть бути пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком.

c) Випадок  $\Delta s^2 = 0$ . Такий інтервал називають *світлоподібним*. Він розділяє події, одна з яких полягає у випусканні світлового сигналу в одній точці простору в деякий момент часу і прийомі його у визначений момент часу в іншій точці.

Для того, щоб проілюструвати сказане, розглянемо формулу (2.5.5) за тих самих припущень, що були зроблені раніше, (зокрема, що точки простору, в яких відбуваються події, лежать на осі  $OX$ ); тоді

$$\Delta t' = \frac{\Delta t \left( 1 - \frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \Delta t} \right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Якщо задовольняється умова  $c \Delta t > \Delta x$  (тобто інтервал між подіями часоподібний), знак  $\Delta t'$  збігається зі знаком  $\Delta t$  завжди (оскільки  $V < c$ ), тобто для спостерігача, пов'язаного з системою  $K'$ , порядок слідування подій не змінюється у порівнянні з порядком їхнього слідування в системі  $K$ , і тому перша з них може розглядатися як причина другого, а друга – як наслідок першого. Якщо задовольняється умова  $c \Delta t < \Delta x$  (просторовоподібний інтервал), знак  $\Delta t'$  і порядок слідування подій в системі  $K'$  визначається швидкістю  $V$  руху цієї системи відліку. Існують такі системи, в яких знаки  $\Delta t'$  і  $\Delta t$  збігаються, але існують і такі, в яких ці знаки протилежні. В останньому випадку порядок подій в системі  $K'$  у порівнянні із порядком у системі  $K$  зворотний, і тому подія, що відбулася в системі  $K$  раніше, не може розглядатися як причина другої події.

Наведемо такий приклад. Ігноруючи відносний рух Землі і Сонця, припустимо, що в деякий момент часу на Сонці відбувся спалах, а через  $\Delta t = 10\text{с}$  після цього на Землі відбувся землетрус. Середній радіус земної орбіти  $r = \Delta x = 1,5 \cdot 10^{11}\text{м}$ , тобто у нашому випадку  $c \Delta t = 3 \cdot 10^{10}\text{м}$ , і умова  $c \Delta t < \Delta x$  задовольняється; інтервал, який розділяє зазначені події, є просторовоподібний. Тому в системі відліку, що рухається відносно Землі і Сонця зі швидкістю  $V > c \frac{c \Delta t}{\Delta x} = 0,2c$ , порядок зазначених подій представляється у зворотному вигляді.

Оскільки інтервал між подіями є інваріант перетворень Лоренца, то якщо він є часоподібний в одній системі відліку, він є таким і в інших інерціальних системах. Це ж саме стосується й просторовоподібних інтервалів. Оскільки події, пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком, розділені

часоподібним інтервалом, це означає, що, якщо причинно – наслідковий зв’язок між двома подіями має місце в деякій інерціальній системі відліку, то такий зв’язок між цими подіями буде мати місце в будь-якій інерціальній системі відліку. Інакше кажучи, твердження про наявність причинно – наслідкового зв’язку між подіями, який встановлено в певній інерціальній системі відліку, має абсолютний характер.

### 2.5.3 Власний час

Введемо величину

$$d\tau = \frac{ds}{c}, \quad (2.5.6)$$

яка є відношенням інваріантних величин і тому сама є інваріантом лоренцовських перетворень. Ця величина називається *власним часом* об’єкту. Для з’ясування фізичного змісту цієї величини запишемо вираз (2.5.1) для інтервалу між двома близькими подіями у вигляді

$$ds = c dt \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2}, \quad (2.5.7)$$

де  $dt$  – проміжок часу між подіями, виміряний годинником, що є нерухомий відносно лабораторії,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  – швидкість об’єкту відносно цієї лабораторії.

Тому, якщо  $\vec{v} = 0$ , то  $d\tau = \frac{ds}{c}$  – проміжок часу між подіями, виміряний за допомогою годинника, відносно якого об’єкт перебуває в спокої. Це й є власний час об’єкту.

Використовуючи співвідношення (2.5.6) і (2.5.7), наведемо зв’язок між власним часом  $d\tau$  і часом, який вимірюється в лабораторній системі відліку (лабораторним часом):

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \cdot dt. \quad (2.5.8)$$

Порівнюючи (2.5.8) і (2.4.3.), бачимо, що  $\Delta t$  у формулі (2.4.3) саме й є власний час об’єкта. Зазначимо, що під час визначення часових ознак об’єктів указують саме їхній власний час внаслідок інваріантного характеру цієї величини. Насправді, в таблицях елементарних частинок як час життя частинки наводять її власний час.

### 2.5.4 Чотиривимірні вектори

Інваріантному характеру інтервалу між подіями можна надати більш прозоре тлумачення, якщо ввести нове позначення координат:  $x \rightarrow x_1$ ,  $y \rightarrow x_2$ ,

$z \rightarrow x_3$ , а для часу ввести позначення  $t = \frac{x_4}{ic}$ , де  $i = \sqrt{-1}$ . Тоді квадрат інтервалу можна записати у вигляді

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2). \quad (2.5.9)$$

Наведений вираз можна тлумачити як узятий зі зворотним знаком квадрат відстані між двома точками в уявному чотиривимірному просторі. Цьому простору можна надати такого змісту. Кожна подія характеризується просторовими координатами точки, в якій вона відбувається, так само як моментом часу, тобто координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Отже, зазначений чотиривимірний простір може розглядатися як простір подій, тоді  $ds^2$  – це квадрат відстані між точками в цьому просторі зі зворотним знаком. Відповідна величина в тривимірному просторі (відстань між точками) не змінюється під час обертання системи координат навколо її початку; зміни зазнають лише проекції вектора  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ( $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  – радіус-вектори відповідних точок тривимірного простору). У зв'язку з цим покажемо, що перетворення (2.3.9) можна розглядати як перетворення проекцій чотиривимірного радіус-вектора в просторі подій під час обертання системи координат навколо її початку в цьому просторі. Використовуючи зазначені вище позначення для координат чотиривимірного простору, перетворення Лоренца (2.3.9) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} x_1 + i \frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} x_4, \\ x'_2 &= x_2, \quad x'_3 = x_3, \\ x'_4 &= -i \frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} x_4. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

З поняттям багатовимірного простору ми зустрічаємося вже під час спроби геометричного тлумачення розв'язків системи  $n$  рівнянь з  $n$  невідомими. Якщо  $n=2$ , розв'язок системи з геометричної точки зору витлумачують як координати точки на площині; якщо  $n=3$  – це координати точки в просторі. Якщо ж  $n>3$ , розв'язок системи витлумачується як координати точки в просторі  $n$  вимірювань. Коли мова йде про чотиривимірний простір подій у спеціальній теорії відносності, істотно, що таке формальне тлумачення тут відображає взаємозв'язок простору та часу, який, в свою чергу, відображається формулами (2.3.9) або (2.5.10). Проте, з фізичної точки зору слід пам'ятати, що в цьому просторі просторові і часові відстані вимірюються різними устроями: просторові – твердими масштабами, лінійками, а часові – годинниками.

Якщо формально ввести уявний кут повороту за допомогою співвідношень\*

$$\cos i\phi = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \sin i\phi = i \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

то перетворенням (2.5.9) для координат  $x_1$  і  $x_4$  можна надати вигляду

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos i\phi + x_4 \sin i\phi, \\ x'_4 &= -x_1 \sin i\phi + x_4 \cos i\phi, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

що збігається з формулами перетворення проєкцій радіус-вектора під час обертання осей координат у площині (див. додаток А, формула (\*)). Отже, перетворення (2.3.9) пов'язане з обертанням системи  $K'$  відносно системи  $K$  в площині  $(x_1, x_4)$ , а сукупність величин, яка в процесі перетворень Лоренца перетворюється за законом (2.5.11), – можна розглядати як *проєкції чотиривимірного радіус-вектора*. Зазначимо також, що перетворення (2.5.11) мають місце для проєкцій будь-якого чотиривимірного вектора, а не тільки радіус-вектора.

Підкреслимо також, що обертання в площинах  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_2, x_3)$  за умови  $V \ll c$  переходять у перетворення Галілея (1.4.1), які не містять часу.

Таким чином, постулати теорії відносності приводять до концепції чотиривимірного простору подій, чотиривимірних векторів, які мають просторові і часові складові. Ця концепція широко використовується в різних уживаннях спеціальної теорії відносності, зокрема, в електродинаміці, дозволяючи спростити одержання низки результатів і встановити взаємозв'язки між деякими величинами, які, не є очевидними. Зокрема, у межах такої концепції зовсім природно виглядає зв'язок між електричним і магнітним полями і саме поняття електромагнітного поля як єдиного виду матерії.

Концепцію чотиривимірного простору подій для спеціальної теорії відносності вперше висунув німецький математик Герман Мінковський, який вчив А. Ейнштейна в Цюрихському політехнікумі. У своїй доповіді на з'їзді німецьких природознавців та лікарів 21 вересня 1908 року він казав: **«Уявлення про простір та час, які я збираюся розвинути перед вами, виростили на ґрунті експериментальної фізики. У цьому полягає їхня сила. Вони призведуть до радикальних наслідків. Відтепер простір сам по собі так само як час сам по собі повністю уходять до царства тіней, і лише союз обох цих понять зберігає самостійне існування»**.

---

\* Тригонометричні функції комплексного кута формально вводяться за допомогою формул Ейлера:  $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ ,  $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ , які є узагальненням відповідних формул для дійсного аргументу. Якщо  $z = i\phi$  (тобто є суто уявним числом), маємо  $\sin i\phi = i(e^\phi - e^{-\phi})/2$ ,  $\cos i\phi = (e^\phi + e^{-\phi})/2$ .



Зазначимо, що тлумачення перетворень Лоренца як обертання в площині, що містить одну просторову та часову координату (зокрема, в площині  $(x_1, x_4)$ ) дозволяє дати прості пояснення розглянутих вище кінематичних ефектів теорії відносності. Розглянемо тут два приклади таких пояснень.

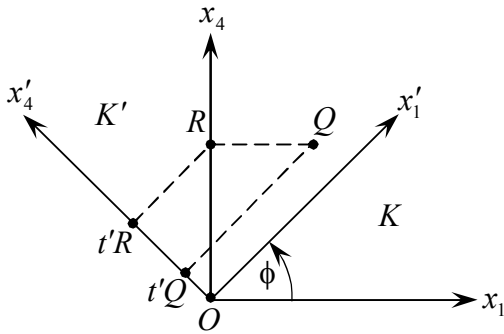


Рисунок 2.7. До поняття одночасності подій в різних системах відліку, що відбуваються в точках  $R$  та  $Q$ .

а) Відносність поняття одночасності подій в різних системах відліку (див. рис. 2.7). На рисунку кут обертання  $\phi$  позначено дійсним. Бачимо, що події, які відбуваються у просторово-часових точках  $Q$  і  $R$  і які є одночасними в нештрихованій системі відліку, в штрихованій вже не є одночасними.

б) Релятивістський закон додавання швидкостей. Розглянемо деяку систему відліку  $K$ , яка перебуває в спокої та відносно якої зі швидкістю  $v_1$  рухається інша система  $K'$ , при чому рух останньої відбувається так, як це зображено на рисунку 2.8. З геометричної точки зору, як впливає з формул

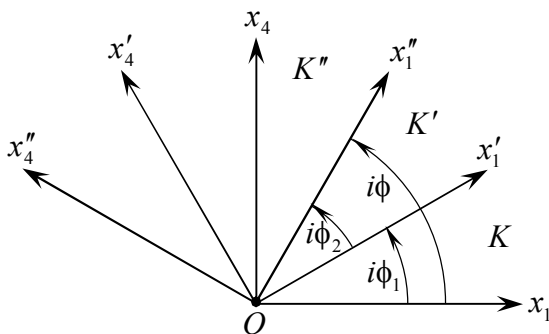


Рисунок 2.8. Геометричне тлумачення релятивістського закону додавання швидкостей (2.4.8)

(2.5.11), зазначений рух можна розглядати як обертання системи  $K'$  на уявний кут  $i\phi_1$  у площині  $(x_1, x_4)$ . Нехай тепер відносно системи  $K'$  зі швидкістю  $V$  таким самим способом рухається інша інерціальна система  $K''$ , рух якої відносно системи  $K'$  також можна розглядати як відповідний обертання на уявний кут  $i\phi_2$  (див. рис. 2.8). Тоді рух системи  $K''$  відносно системи  $K$  можна розглядати як відповідне обертання на уявний кут  $i\phi = i(\phi_1 + \phi_2)$ .

З останнього співвідношення легко визначити швидкість  $v$  руху системи  $K''$  відносно  $K$ . Насправді, незважаючи на уявність кута, з формули (2.5.11) маємо  $\operatorname{tgi}\phi_1 = i(v_1/c)$ ,  $\operatorname{tgi}\phi_2 = i(V/c)$ ,  $\operatorname{tgi}\phi = i(v/c)$ , звідки, користуючись формулою для тангенса суми кутів, одержуємо  $v = \frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2}$ , що збігається з формулою (2.4.8).

## 2.5.5 Вектор чотиривимірної швидкості та чотиривимірного прискорення як приклади чотиривимірних векторів

Вектор чотиривимірної швидкості (вектор 4-швидкості) є природним узагальненням відповідного нерелятивістського тривимірного вектора швидкості. Просторові компоненти вектора 4-швидкості визначаються співвідношенням

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \quad (2.5.12)$$

де  $d\vec{r}$  – звичайний (тривимірний) вектор переміщення об'єкту,  $d\tau$  – його власний час.

На можливість наведеного вище визначення вектора  $\vec{u}$  наводять такі міркування. У нерелятивістській механіці (механіці Ньютона - Галілея) швидкість визначається за допомогою співвідношення  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , де  $\Delta t$  – проміжок часу, протягом якого радіус-вектор частинки змінюється на  $\Delta \vec{r}$ . Під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої складові радіус-вектора частинки зазнають перетворень Галілея, тобто перетворюється як складові тривимірного вектора. Проміжок часу  $\Delta t$ , за яким у наведеній формулі відбувається диференціювання, у ньютонівській механіці є інваріант перетворень Галілея (формула (1.4.7)), і тому диференціювання радіус-вектора за часом для відповідної похідної призводить до величини, яка під час перетворень Галілея змінюється за тими самими законами. Тому під час переходу до релятивістського випадку природно перейти від диференціювання радіус-вектора за інваріантом перетворень Галілея до диференціювання за лоренцовим інваріантом, що й здійснюється у формулі (2.5.12). Якщо в цій формулі перейти до лабораторної системи відліку, пов'язаної з нерухомим спостерігачем, використовуючи співвідношення (2.5.8), одержимо

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}/dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (2.5.13)$$

де  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  – звичайний вектор тривимірної швидкості відносно лабораторної системи відліку. Для проекції  $u_4$  маємо

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = i \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = iu_0. \quad (2.5.14)$$

Так само можна визначити вектор чотиривимірного прискорення.

Як можна бачити з (2.5.13), (2.5.14), квадрат модуля вектора 4-швидкості є релятивістські інваріантна величина:

$$\vec{u}^2 + u_4^2 = \vec{u}^2 - u_0^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} (v^2 - c^2) = -c^2. \quad (2.5.15)$$

Квадрат модуля зазначеного вектора виявляється не тільки релятивістські інваріантною величиною, але й є фундаментальною константою. Так само

можна визначити чотиривимірний вектор прискорення  $\vec{w}$  з просторовими складовими

$$\vec{w} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2.5.16)$$

і часовою

$$w_4 = \frac{du_4}{d\tau} = i \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.5.17)$$

Не становитиме труднощів перекоонатися, що чотиривимірні вектори швидкості та прискорення є ортогональними один до одного. Насправді, здійснюючи диференціювання рівності (2.5.15) за власним часом і враховуючи, що її права частина є константою, маємо

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{d\tau} + u_4 \cdot \frac{du_4}{d\tau} = \vec{u} \cdot \vec{w} + u_4 \cdot w_4 = 0, \quad (2.5.18)$$

тобто скалярний добуток векторів  $(\vec{w}, w_4)$  та  $(\vec{v}, v_4)$  дорівнює нулеві.

### 2.5.6 Скалярний добуток чотиривимірних векторів; ефект Доплера

Скалярний добуток  $(ab)$  чотиривимірних векторів  $a(\vec{a}, a_4)$  та  $b(\vec{b}, b_4)$  визначається як сума добутків його проєкцій, тобто

$$(ab) = \vec{a} \cdot \vec{b} + a_4 b_4, \quad (a'b') = \vec{a}' \cdot \vec{b}' + a'_4 b'_4. \quad (2.5.19)$$

Для спрощення вважатимемо, що відносно розташування систем відліку  $K$  і  $K'$  та їхній відносний рух такі самі, як зображені на рисунку (1.4). Тоді у відповідності з перетвореннями (2.3.9) можна записати

$$a'_2 = a_2, \quad a'_3 = a_3; \quad b'_2 = b_2, \quad b'_3 = b_3. \quad (2.5.20)$$

Відомо, що перетворення Лоренца для чотиривимірних векторів  $a$  і  $b$  зводиться до зміни проєкцій цих векторів під час обертання системи координат (див (2.5.10)) (тут розглядається обертання в площині  $(x_1, x_4)$ ), звідки пишемо

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \cos i\phi + a_4 \sin i\phi, & b'_1 &= b_1 \cos i\phi + b_4 \sin i\phi, \\ a'_4 &= -a_1 \sin i\phi + a_4 \cos i\phi, & b'_4 &= -b_1 \sin i\phi + b_4 \cos i\phi. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Підставляючи рівності (2.5.20), (2.5.21) до співвідношення (2.5.19), маємо остаточно

$$(ab) = (a'b'). \quad (2.5.22)$$

Як окремий випадок тут можна навести квадрат довжини чотиривимірного вектора, тобто  $(a \cdot a) = (a' \cdot a')$ , зокрема, співвідношення (2.5.15). Також як окремий випадок з рівності (2.5.22) впливає інваріантний характер взаємної ортогональності чотиривимірних векторів: якщо в деякій інерціальній системі відліку два чотиривимірні вектори є ортогональними один до одного, ця ортогональність зберігається для них у будь-якій іншій інерціальній системі відліку; зокрема це твердження має місце для чотиривимірних векторів швидкості  $(\vec{u}, u_4)$  та прискорення  $(\vec{w}, w_4)$ .

Також само як окремий приклад скалярного добутку чотиривимірних векторів можна навести фазу плоскої світлової хвилі у вакуумі  $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$  ( $\vec{k}$  – світловий вектор зазначеної хвилі). Позначаючи  $t = x_4/(ic)$ ,  $\omega = ck_4/i$ , одержуємо

$$\varphi = -(k_4 \cdot x_4 + \vec{k} \cdot \vec{r}) = -(kx),$$

де  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ . З одержаної формули випливає, що під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої спостерігається зміна частоти хвилі, а також зміна напрямку її поширення. У першому випадку кажуть про *ефект Доплера*, а в другому – про *аберацію світла*. Тут ми лише коротко торкнемося першого з цих явищ.

З інваріантності добутку  $(kx)$  випливає, що  $(kx) = (k'x')$ , або

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}'. \quad (2.5.23)$$

Підставляючи співвідношення (2.3.10) до рівності (2.5.23) і вважаючи, що система  $K'$  рухається вздовж осі  $OX$ , пишемо:

$$\omega \frac{t' + x'_1 \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_3 - \frac{k_1(x' + Vt')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega' t' - k'_2 \cdot x'_2 - k'_3 \cdot x'_3 - k'_1 \cdot x'_1.$$

Прирівнюючи в наведеній рівності коефіцієнти при  $t'$  і проєкціях радіус-вектора, маємо

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega - k_1 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ k'_2 &= k_2, k'_3 = k_3, \\ k'_1 &= \frac{k_1 - \omega \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Тут перша з формул описує явище Доплера, а остання – аберацію світла.

Розглянемо явище Доплера детальніше. Нехай світло поширюється вздовж осі  $OX$ , тоді  $k_1 = \omega/c$ , і з першої з формул (2.5.24) бачимо, що

$\omega' = (\omega(1 - (V/c)))/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ , тобто

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\sqrt{(1 - (V/c))}}{\sqrt{(1 + (V/c))}}.$$

Зміну частоти в цьому випадку називають *поздовжнім ефектом Доплера*. Якщо задовольняється умова  $V/c \ll 1$ , зберігаючи члени першого порядку за  $V/c$ , одержуємо

$$\omega' = \omega \cdot (1 - (V/c)).$$

Таким чином, у випадку поздовжнього ефекту Доплера, якщо швидкість руху спостерігача відносно джерела світла є значно меншою за швидкість світла, зміщення частоти світла в порівнянні з випадком, коли зазначений відносний рух відсутній, є пропорційним до відношення  $V/c$  в першому

степені. Тут ми спостерігаємо повну аналогію з акустичним ефектом Доплера, коли відповідне зміщення частоти є пропорційним до відношення швидкості джерела звуку відносно спостерігача до фазової швидкості поширення звуку в середовищі.

Розглянемо тепер випадок, коли світло поширюється перпендикулярно до осі  $oX$ . Тут зручніше користуватися оберненою першою формулою (2.3.10), коли спостереження здійснюється в системі  $K'$ . Тоді, вважаючи, що  $k'_1 = 0$ , можна записати

$$\omega' = \omega \cdot \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Здійснюючи розкладання до ряду за степенями  $V/c$  і зберігаючи при цьому головні члени за вказаним параметром, маємо

$$\omega' = \omega \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} (V/c)^2 \right).$$

Тут ми спостерігаємо зміщення частоти, яке є пропорційним до  $(V/c)^2$  і для якого ніяких нерелятивістських аналогів не існує. Цей ефект має суто релятивістське походження. Він називається *поперечним ефектом Доплера*. Зазначений ефект є наслідком релятивістського сповільнення ходу годинників, що рухаються. Він уперше спостерігався в дослідах Айвса і Стілуела в 1938 році. Ці досліди вважаються першими, в яких було експериментально доведено релятивістське сповільнення часу.

### 2.5.7 Чотиривимірний об'єм

Нехай подія полягає в тому, що частинка протягом певного часу  $\Delta t$  перебуває в об'ємі  $\Delta V = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$ . Назвемо величину  $\Delta V_4 = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \cdot \Delta x_4$ , де  $\Delta x_4 = ic\Delta t$ , *чотиривимірним об'ємом*, і покажемо, що ця величина є інваріантом перетворень Лоренца, тобто є релятивістським інваріантом. Для цього розглянемо зазначену подію в системі відліку  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $V$  відносно тривимірного об'єму  $\Delta V$ , що обраний як прямий прямокутний паралелепіпед зі сторонами  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  в нерухомій системі  $K$ , зображеній на рисунку 1.4.

Якщо рух системи відбувається так, як показано на рисунку, то в системі  $K'$  довжини сторін  $\Delta x_2$  і  $\Delta x_3$  у порівнянні з їхніми довжинами в системі  $K$  не зміняться, тобто буде  $\Delta x'_2 = \Delta x_2, \Delta x'_3 = \Delta x_3$  (див. зауваження, зроблені після формули (2.4.2)). Щодо сторони  $\Delta x_1$ , то вона в цій системі скорочується згідно з формулою (2.4.2), тобто  $\Delta x'_1 = \Delta x_1 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Час перебування частинки в об'ємі, що розглядається, в системі  $K'$  визначається співвідношенням (2.4.3), тобто  $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Отже

$$\begin{aligned}\Delta V'_4 &= \Delta x'_1 \cdot \Delta x'_2 \cdot \Delta x'_3 \cdot \Delta x'_4 = \Delta x_1 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \cdot ic \Delta t / \sqrt{1 - V^2/c^2} = \\ &= \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \cdot \Delta x_4 = \Delta V_4,\end{aligned}$$

або

$$\Delta V'_4 = \Delta V_4.$$

Таким чином, на простому прикладі продемонстровано, що чотиривимірний об'єм являє собою релятивістський інваріант.

## 2.6 Поняття про світловий конус. Світові лінії і діаграми Мінковського

У даному параграфі йдеться про специфічні поняття, які не мають нерелятивістських аналогів і сприяють більш глибокому розумінню читачем релятивістської кінематики.

### 2.6.1 Поняття про світловий конус

Розглянемо подію, яка відбулася в точці з просторовими координатами  $x_1, x_2, x_3$  в момент часу  $t$ . Як було зазначено у попередньому параграфі, цей факт можна інтерпретувати як подію, що відбулася в точці чотиривимірного простору з координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ . Квадрат відстані цієї точки від початку координат

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (2.6.1)$$

є узятий із зворотним знаком квадрат інтервалу між двома подіями (див. 2.5.4.), одна з яких відбулася в точці, що міститься на початку координат чотиривимірного простору, а інша – в зазначеній точці. Якщо для часу перейти до дійсної змінної  $t = x_4/ic$ , співвідношення (2.6.1) матиме вигляд

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2. \quad (2.6.2)$$

Конкретизуємо тепер події, що розглядаються, і нехай перша з них полягає в тому, що джерело світла, яке міститься на початку координат, випускає світлову хвилю, а друга – в тому, ця хвиля виявилася в точці з координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ . Інтервал між цими подіями  $s = 0$ , тобто він є світлоподібний (2.5.2, п.с)). Тоді маємо

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0^2.$$

З тривимірного погляду наведене співвідношення є рівняння *сферичної поверхні*, радіус якої зростає зі швидкістю світла. Щодо чотиривимірної точки зору, то тут ми маємо *поверхню прямого колового конуса з віссю  $t$  в якості осі симетрії* (на рисунку 2.9 зображений переріз цієї поверхні площиною  $x_2 = x_3 = 0$ ). Частину чотиривимірного простору, обмежену зазначеною поверхнею, називають *світловим конусом*. Кут нахилу твірної цього конуса до осей координат складає  $45^\circ$ .

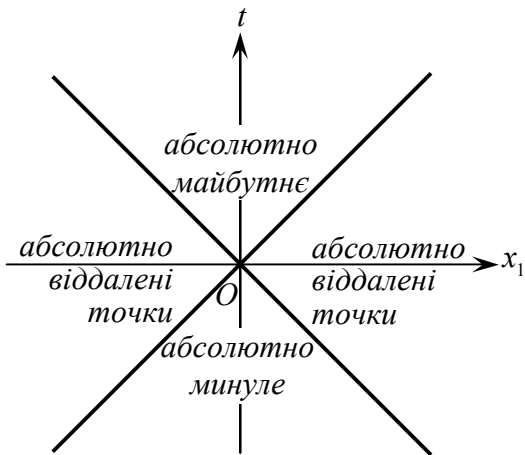


Рисунок 2.9. До визначення світлового конуса

Насправді, як можна бачити з рисунку, тут ми маємо два конуси. Точкам простору, які належать до верхнього конуса, відповідають значення  $t > 0$ ; ці точки утворюють множину, яка має назву *області абсолютно майбутнього*. У той самий час точки, що належать до нижнього конуса ( $t < 0$ ), утворюють *область абсолютно минулого*.

Пояснимо наведені визначення. Якщо взяти будь-яку точку, яка належить до зазначених конусів, побачимо, що вона задовольняє умову  $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < (ct)^2$ .

Інакше кажучи, *подія, яка відбувається в точці, що перебуває всередині світлового конуса, відокремлена від такої, що відбувається на початку координат, часоподібним інтервалом* (див. 2.5.2, п. 2а). Якщо  $t > 0$ , кожна подія, що відбувається в точці, яка належить до області абсолютно майбутнього, має місце після події, що відбувається на початку координат. Те ж саме можна казати про випадок  $t < 0$  з тією різницею, що тут події, які відбуваються в точках, що належать до області абсолютно минулого, настають *до подій на початку координат*. Нагадаємо також (2.5.2), що для подій, розділених часоподібним інтервалом, знак  $t$  є релятивістським інваріантом. Інакше кажучи, якщо спостерігач в деякій системі відліку бачить події, що відбуваються на початку координат і у визначеній точці верхнього конуса в певній послідовності, він буде спостерігати ці події в тій самій послідовності в будь-якій системі відліку, яка рухається відносно першої рівномірно та прямолінійно. Це ж саме стосується й точок, які належать до нижнього конуса. Саме тому твердження про послідовність подій, що відбуваються в точках, які належать до світлового конуса, мають абсолютний характер.

Розглянемо тепер точки чотиривимірного простору, які містяться поза світловим конусом. Інтервал між подіями, що відбуваються на початку координат і в будь-якій точці, яка міститься поза світловим конусом, є просторовоподібний, тобто для нього  $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > (ct)^2$ . Не існує такої інерціальної системи відліку, в якій ці події відбувалися би в тій самій точці простору. Тому ці точки утворюють множину, яка називається *абсолютно віддаленими точками*. Щодо послідовності подій, в даному випадку вона не є визначеною і залежить від вибору системи відліку.

## 2.6.2 Деякі додаткові відомості про геометрію чотиривимірного простору подій

Чотиривимірний простір подій є окремим випадком загального математичного поняття простору, яке визначається як множина об'єктів, між

якими встановлені відношення, схожі за своєю структурою із звичайними просторовими співвідношеннями типу околу, відстані та ін. Однією із важливіших співвідношень, за якими простір відносять до того чи іншого типу, є таке, за яким у даному просторі обчислюється відстань між двома об'єктами. Так, відомо, що у звичайному випадку відстань між двома точками ми обчислюємо за формулою  $\Delta s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , (якщо одна з них перебуває на початку координат). Інакше кажучи, квадрат зазначеної відстані тут визначається як *сума квадратів різниць координат точок*, між якими визначається відстань, або в загальному випадку  $\Delta s^2 = \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2$  (тут  $N$  –

розмірність простору). Про вираз, який визначає зазначену відстань, кажуть, що він визначає *метрику* простору. Простір, в якому метрика визначається сумою квадратів різниць координат точок, між якими визначається відстань, називають *евклідовим*, а його метрику – *евклідовою*.

Для тієї ж самої множини точок метрику можна ввести різними способами, і тоді ми одержуємо різні простори. Так, у чотиривимірному просторі подій спеціальної теорії відносності квадрат відстані між подіями можна визначити за допомогою співвідношення (2.6.1); тоді цей простір матиме характер евклідового. У цьому випадку *співвідношення (2.6.1) визначає множину точок чотиривимірного евклідова простору, віддалених від початку координат на відстань  $s$ . Цією множиною є чотиривимірна сфера*.

З іншого боку, цей квадрат можна також визначити за допомогою співвідношення (2.6.2). У цьому випадку в сумі квадратів є від'ємний доданок. Простір, в якому квадрат відстані між точками визначається як сума квадратів різниць координат точок, між якими визначається відстань, і при цьому деякі з доданків виявляються від'ємними, називається *псевдоевклідовим*, тобто він майже евклідовий; цей простір схожий з евклідовим, але не повністю тотожний останньому за своїми властивостями. Так, у псевдоевклідовому випадку *співвідношення (2.6.2) визначає поверхню двопорожнинного гіперboloїда обертання, відстань до будь-якої точки якого від початку координат є фіксованою*. Розглядаючи переріз цього гіперboloїда площиною  $x_2 = x_3 = 0$ , одержуємо рівняння гіперболи  $x_1^2 - \tau^2 = s^2$ , яка є тепер множиною точок рівновіддалених від початку координат (нагадуємо з метою запобігання непорозумінню, що відстань тут обчислюється з урахуванням псевдоевклідового характеру простору, тобто за допомогою рівняння гіперболи). У наступному пункті ми ознайомимося з деякими наслідками псевдоевклідового характеру чотиривимірного простору подій спеціальної теорії відносності.

### 2.6.3 Світові лінії і діаграми Мінковського

У чотиривимірному просторі подій точка називається *світовою точкою*. Рух будь-якого об'єкту в цьому просторі відбувається вздовж лінії, яка називається *світовою лінією*. Наведемо приклади світових ліній. Так, для



частинки, яка перебуває в спокої, світовою лінією є пряма, яка є паралельною до осі  $t$ . Частинці, яка рухається рівномірно і прямолінійно, відповідає пряма світова лінія. Усі світові лінії, що проходять через початок координат, лежать усередині світлового конуса.

Під час перетворення Лоренца координат зазнають перетворень лише поздовжні по відношенню до вектора відносної швидкості величини (див. співвідношення (2.3.9), (2.3.13)). Тому, обираючи в якості додатного напрямку осі  $oX$  напрям цієї швидкості, можна розглядати рух частинки в площині змінних  $x_1, \tau = ct$  (не плутати змінну  $\tau$  із власним часом частинки!). Світова лінія частинки на такій площині називається *діаграмою Мінковського*. На діаграмі Мінковського вісь  $\tau$  є світова лінія частинки, що перебуває в спокої на початку координат; осі  $oX$  ( $x_1$ ) відповідає множина подій, які відбуваються одночасно в точках, що належать зазначеній осі. Світовою лінією точки, що рухається рівномірно зліва направо вздовж осі  $oX$ , є пряма лінія, рівняння якої  $x_1 = (v/c) \cdot \tau$  (див. рис. 2.10, а)); рівняння світової лінії світлового сигналу,

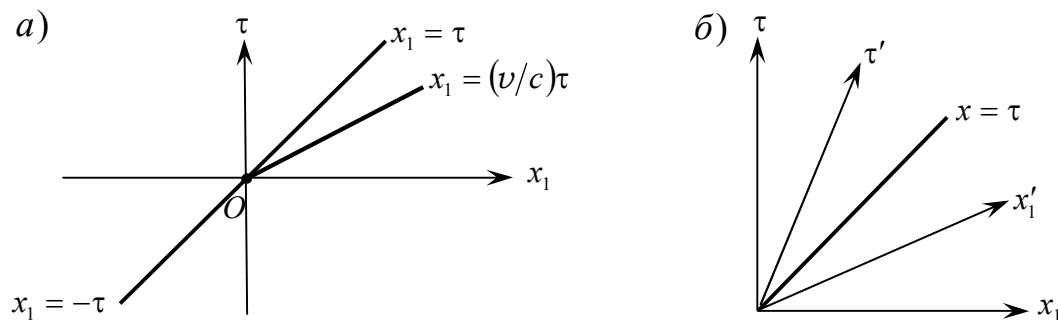


Рисунок 2.10. Діаграми Мінковського

який в момент часу  $\tau = 0$  вийшов із початку координат і далі поширюється в додатному напрямку осі  $oX$ , має вигляд  $x_1 = \tau$ , у від'ємному –  $x_1 = -\tau$ . Ці лінії є бісектрисами координатних кутів і утворюють з осями координат кути  $45^\circ$ . У свою чергу, зазначені бісектриси є перерізами світлового конуса площиною  $x_2 = x_3 = 0$  в чотиривимірному просторі.

Розглянемо тепер, як відображається на діаграмі Мінковського рівномірний рух початку координат системи  $K'$  вздовж додатного напрямку осі  $oX$  системи  $K$ . Як можна побачити з першого з виразів (2.3.9), для зазначеної точки в будь-який момент часу має задовольнятися співвідношення  $x'_1 = 0$ . Тому, як впливає з (2.3.9), світова лінія цієї точки є пряма, яка має нахил  $\theta$  до лінії  $\tau$  (див. рис. 2.10, б)); рівняння цієї лінії має вигляд  $x_1 = \beta \tau$ , де  $\beta = \text{tg}\theta = V/c$ . Точкам цієї прямої відповідає сукупність подій, які відбуваються на початку координат системи  $K'$  в будь-які моменти часу. Ця лінія відповідає осі часу в системі  $K'$ .

Щодо осі  $oX'$ , то всім точкам цієї осі відповідають значення часу  $\tau' = 0$ . Звідси, використовуючи останнє із співвідношень (2.3.9), визначаємо рівняння цієї осі на діаграмі Мінковського. Це дає  $\tau = \beta x_1$ , де коефіцієнт  $\beta$  також визначається рівністю  $\beta = \text{tg}\theta = V/c$ , але  $\theta$  виявляється кутом нахилу осі  $oX'$  до

осі  $oX$  (див. рис. 2.10, б)). Отже, бачимо, що на діаграмі Мінковського кут між осями в системі  $K'$  не є прямим. Цей факт впливає з того, що внаслідок інваріантного характеру швидкості світла положення світової лінії світлового сигналу на діаграмі Мінковського залишається незмінним під час будь-яких обертів координатних осей. Крім того, з формальної точки зору, він є наслідком псевдоевклідова характеру чотиривимірного простору подій спеціальної теорії відносності.

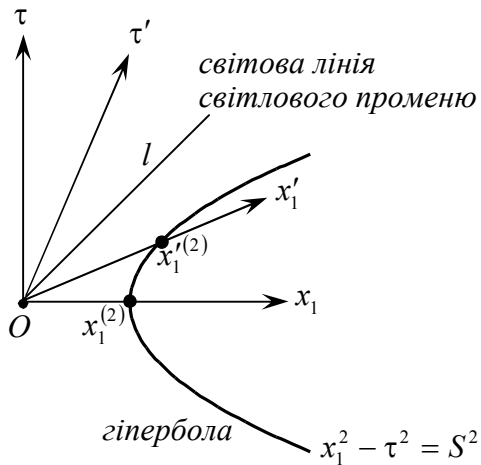


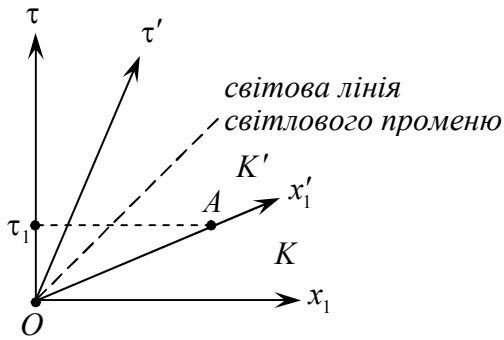
Рисунок 2.11. Пояснення скорочення поздовжніх розмірів тіла за допомогою діаграми Мінковського

З інваріантності інтервалу випливає, що  $x_1^2 - \tau^2 = x_1'^2 - \tau'^2 = s^2$ , тобто, якщо  $\tau = 0, x_1 = \pm s$ . У нашому випадку це означає, що  $s = l_0$ , тобто кінець стрижня з координатою  $x_1 = l_0$  лежить на перетинанні осі  $oX$  з гіперболою  $x_1^2 - \tau^2 = l_0^2$  (див. рис. 2.11). З точки зору спостерігача, пов'язаного із системою  $K'$ , положенню кінців даного стрижня, взятих одночасно в момент часу  $\tau' = 0$ , відповідають точки  $x_1^{(1)} = 0$  (початок координат) і  $x_1^{(2)} = l$ , які належать осі  $oX'$ . Зазначена вісь перетинає гіперболу в точці  $x_1^{(2)} = l$ , таким чином, бачимо, що  $l < l_0$ , тобто для спостерігача, який рухається відносно жорсткого стрижня, довжина останнього скорочується у порівнянні з тією, яку фіксує спостерігач, нерухомий відносно зазначеного стрижню.

Цікаво зазначити, що цей самий результат можна одержати, розглядаючи чотиривимірний простір подій спеціальної теорії відносності як евклідовий. Ми пропонуємо розглянути це питання читачеві самостійно.

Далі покажемо, як за допомогою діаграми Мінковського можна наочно продемонструвати відносність поняття одночасності подій. На рисунку 2.12 для спостерігача, нерухомого відносно системи  $K$ , подія, що відбулася на початку координат, передуює події, яка відбулася в точці  $A$ . Щодо спостерігача, пов'язаного з системою  $K'$ , зазначимо, що, оскільки ця точка міститься на осі  $oX'$ , подія, яка відбувається в зазначеній точці, є одночасною з усіма подіями, які відбуваються в будь-якій точці цієї осі, в тому числі й на початку координат.

Отже, у такий спосіб продемонстрована відносність поняття одночасності подій у спеціальній теорії відносності.



$t_1 = \frac{\tau_1}{c}$  – момент часу відбування події за годинником спостерігача в системі  $K$ ; подія, що відбулася в точці  $O$ , передре події в точці  $A$ ;

$t'_1 = 0$  – момент часу відбування тієї самої події за годинником спостерігача в системі  $K'$ ; події в точках  $O$  і  $A$  одночасні.

Рисунок 2.12. Пояснення відносності поняття одночасності подій за допомогою діаграм Мінковського

### Контрольне завдання до другого розділу

2.1. Проаналізувати, чи має місце принцип відносності в електродинаміці: а) має тільки для сталих полів; б) має; в) ні, не має; г) для відповіді на питання сьогодні не вистачає дослідних даних.

2.2. Які обставини спонукали дослідників піддати сумніву наявність принципу відносності в електродинаміці?

2.3. У чому полягає принципова різниця у швидкості поширення світлового сигналу у вакуумі від швидкості поширення пружних хвиль і якими експериментальними фактами ця різниця підтверджується?

2.4. Проаналізувати, який зв'язок існує між перетвореннями Лоренца і Галілея: а) не існує ніякого зв'язку; б) ці перетворення тотожні; в) перетворення Галілея переходять у перетворення Лоренца, якщо  $V \rightarrow c$ ; г) перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея, якщо  $V \ll c$ .

2.5. Які фундаментальні твердження лежать в основі спеціальної теорії відносності? Наведіть відомі вам експериментальні факти, на які ці твердження спираються.

2.6. Як формулюється принцип відносності Ейнштейна в термінах перетворень Лоренца?

2.7. Проаналізувати наведені твердження та вказати вірні: а) перетворення Лоренца залишають незмінними рівняння електродинаміки; б) перетворення Лоренца залишають незмінними рівняння механіки Ньютона - Галілея; в) перетворення Лоренца є граничним випадком перетворень Галілея, якщо  $V \rightarrow c$ ; г) перетворення Галілея є граничним випадком перетворень Лоренца, якщо  $V \ll c$ .

2.8. Проаналізувати, чи є одночасність подій абсолютною в релятивістському випадку і механіці Ньютона-Галілея: а) в релятивістському випадку – так, в механіці Ньютона-Галілея – ні; б) в механіці Ньютона – Галілея – так, в релятивістському випадку – ні; в) в механіці Ньютона – Галілея так само як і в релятивістському випадку є абсолютною; г) в механіці Ньютона-Галілея так само як і в релятивістському випадку не є абсолютною.

2.9. Пояснити з точки зору релятивістської кінематики результати дослідів Майкельсона-Морлі.

2.10. Пояснити з точки зору релятивістської кінематики результати досліду Фізо.

2.11. Пояснити з точки зору релятивістської кінематики явище аберації зірок.

2.12. Чи змінюються поперечні розміри тіл під час переходу від системи відліку, в якій тіло перебуває в спокої, до рухомої системи відліку?

2.13. На паралельних осях координат двох інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної зі швидкістю  $V$ , містяться стрижні однакової довжини  $l_0$ . Які висновки має зробити спостерігач, пов'язаний з кожною системою, щодо довжини стрижнів?

2.14. Є дві інерціальні системи відліку, які рухаються одна відносно одної зі швидкістю  $V$  вздовж однієї з осей координат. З кожною з цих систем пов'язаний годинник, і в кожній з них містяться нестабільні ядра, які перебувають у спокої. Спостерігач, пов'язаний з кожною системою, встановив, що середній час життя нестабільного ядра в його системі відліку дорівнює  $\tau_0$ . Який висновок на підставі своїх вимірювань повинен зробити цей спостерігач відносно часу життя ядра, пов'язаного з рухомою системою?

2.15. З якою швидкістю повинен рухатися предмет відносно деякої інерціальної системи відліку, щоб його поздовжній розмір скоротився на 1% порівняно з його розміром у системі, в якій він перебуває в спокої?

2.16. З якою швидкістю повинен рухатися годинник, щоб тривалість події, яка ним виміряна, була би на 1% більша за ту, яку показує годинник у системі відліку, в якій він перебуває в спокої?

2.17. Дві частинки рухаються назустріч одна до одної зі швидкістю  $v = 0,9c$  відносно нерухомої системи відліку. Чому дорівнює відносна швидкість цих частинок? З якою швидкістю частинки наближуються одна до одної? Чи пов'язані зазначені швидкості між собою та як одержаний результат узгоджується з твердженням про граничний характер швидкості світла?

2.18. Чи існує різниця у перетворенні поперечних у відношенні до напрямку швидкості відносного руху систем відліку проєкцій швидкості в механіці Ньютона – Галілея та спеціальній теорії відносності, і, якщо існує, то в чому вона полягає?

2.19. Дві частинки зі швидкостями  $v_1 = 0,2c$  і  $v_2 = 0,3c$  рухаються відносно нерухомої лабораторії. Чому дорівнює швидкість кожної з частинок у системі відліку, пов'язаній з іншою частинкою, якщо частинки рухаються вздовж однієї прямої назустріч одна одній? Якщо частинки віддаляються одна від одної? Якщо частинки рухаються під прямим кутом одна до другої?

2.20. Чи існують такі інерціальні системи відліку, в яких події, які розділені просторовоподібним інтервалом, відбувалися б в одній точці, але в різні моменти часу?

2.21. Чи існують такі інерціальні системи відліку, в яких події, які розділені часоподібним інтервалом, відбувалися б в одній точці, але в різні моменти часу?

2.22. Чи існують такі інерціальні системи відліку, в яких події, які розділені просторовоподібним інтервалом, відбувалися б у той самий момент часу, але в різних точках простору?

2.23. Чи існують такі інерціальні системи відліку, в яких події, які розділені часоподібним інтервалом, відбувалися б у той самий момент часу, але в різних точках простору?

2.24. Проаналізувати наведені нижче твердження та вказати вірно: а) швидкість світла  $c$  є скаляром у чотиривимірному просторі подій; б) швидкість світла  $c$  є скаляром у звичайному тривимірному просторі; в) швидкість світла  $c$  є вектором у чотиривимірному просторі подій; г) швидкість світла  $c$  є вектором у звичайному тривимірному просторі.

2.25. У таблицях елементарних частинок наводять час їхнього життя, якщо ці частинки нестабільні. Яке відношення має цей час до власного часу частинок?

2.26. Проаналізувати, яке з наведених співвідношень для лабораторного часу  $\Delta t$  (тобто часу в рухомій відносно об'єкту системі відліку) і власного часу  $\Delta \tau$  об'єкту має місце: а)  $\Delta t > \Delta \tau$ ; б)  $\Delta t < \Delta \tau$ ; в)  $\Delta t \ll \Delta \tau$ ; г)  $\Delta t = \Delta \tau$ .

2.27. Що нового в існуючі інтуїтивні уявлення про час та простір дає введення чотиривимірних векторів?

2.28. Чи існує така система відліку, в якій проекція  $u_4$  чотиривимірного вектора швидкості об'єкту дорівнює нулеві?

2.29. Чи існує така система відліку, в якій всі просторові проекції  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  чотиривимірного вектора швидкості об'єкту дорівнюють нулеві?

2.30. Запропонуйте спосіб дослідження поздовжнього ефекту Доплера, під час якого можна спостерігати відносне зміщення частоти світла, пропорційне до величини  $(V/c)^2$ .

2.31. Які інваріанти перетворень Лоренца Вам відомі? Наведіть приклади таких величин і доведіть їхню інваріантність.

2.32. В якій частині чотиривимірного простору відносно світлового конуса лежить область абсолютно минулого? Яку область називають областю абсолютно майбутнього?

2.33. Як на діаграмі Мінковського виглядає світова лінія частинки, що перебуває в спокої? Частинки, яка рухається рівномірно зліва вздовж осі  $OX$ ? Як на цій діаграмі виглядає світова лінія світлового променю?

2.34. Навести наочне тлумачення ефекту скорочення поздовжніх розмірів рухомого стрижня, виходячи з припущення про евклідовий характер простору подій у спеціальній теорії відносності.

## 3 ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ДИНАМІКИ

### Навчальна мета:

- ознайомитися з основами релятивістської динаміки;
- оволодіти узагальненнями понять маси та імпульсу на релятивістський випадок;
- одержати уяву про обмежений зміст релятивістського закону руху, навчитися користуватися ним для розв'язання конкретних задач у галузі його застосування;
- ознайомитися з поняттям енергії частинки в релятивістській механіці, проявом власної енергії об'єкта як релятивістського ефекту, навчитися користуватися поняттям власної енергії для розв'язання конкретних задач;
- оволодіти поняттям кінетичної енергії релятивістської частинки, вміти робити граничний перехід до нерелятивістської механіки, навчитися користуватися поняттям кінетичної енергії релятивістської частинки для розв'язання конкретних задач;
- ознайомитися з особливостями зв'язаного стану в релятивістській механіці, поняттями енергії зв'язку та дефектом маси релятивістської системи, навчитися користуватися цими поняттями для розв'язання конкретних задач;
- ознайомитися з релятивістськи інваріантним співвідношенням між енергією, імпульсом та масою релятивістською частинки, мати уяву про його тлумачення як співвідношення між проекціями чотиривимірного вектора, навчитися користуватися цим співвідношенням для розв'язання конкретних задач;
- ознайомитися з особливостями поняття сили в релятивістській динаміці та лоренцових перетворень її проекцій;
- ознайомитися з поняттям моменту імпульсу та особливостями введення поняття центра інерції в релятивістській динаміці;
- навчитися застосовувати закони збереження енергії та імпульсу під час дослідження зіткнень релятивістських частинок, зокрема, ядерних реакцій.

### Глосарій

**Сила Мінковського** – фізична величина, яка визначається похідною релятивістського імпульсу за власним часом.

**Вектор енергії – імпульсу релятивістської частинки** – чотиривимірний вектор, просторові проекції якого збігаються з проекціями релятивістського тривимірного імпульсу частинки, а часова проекція пов'язана з її повною енергією.

**Система центра інерції** – система відліку, в якій повний релятивістський імпульс системи частинок дорівнює нулеві.

**Власна енергія релятивістського об'єкта** – енергія об'єкта, який перебуває в спокої.

**Кінетична енергія релятивістського об'єкта** – узагальнення кінетичної енергії об'єкта в механіці Ньютона-Галілея на релятивістський випадок.

**Повна енергія релятивістського об'єкта** – сума кінетичної і власної енергії вільного релятивістського об'єкта.

**Зв'язаний стан частинки в зовнішньому полі** – стан, якому відповідає перебування частинки на скінченній відстані від джерела.

**Зв'язаний стан системи частинок** – стан, якому відповідає перебування частинок на скінченній відстані однієї від одної.

**Енергія зв'язку релятивістської системи** – визначається роботою, яку треба виконати, для того, щоб віддалити об'єкти системи на нескінченну відстані один від одного; дорівнює різниці між сумарною енергією спокою вільних об'єктів і енергією зв'язаної системи.

**Дефект маси** – різниця між сумарною масою вільних об'єктів, з яких складається система, і масою зв'язаної системи.

**Момент імпульсу частинки відносно точки** – векторний добуток її радіус-вектора відносно зазначеної точки на вектор імпульсу.

**Спін частинки** – внутрішня ступінь вільності частинки, яка у випадку нерелятивістської границі збігається з моментом імпульсу частинки відносно власної осі.

**Інтеграл руху** – фізична величина яка не залежить від часу.

**Адитивні інтеграли руху** – фізичні величини, які не залежать від часу і такі, що для системи частинок дорівнюють сумі відповідних величин для кожної частинки.

**Комптонівська довжина хвилі** – величина, яка пов'язана з максимальним значенням лінійних розмірів області локалізації частинки в просторі внаслідок наявності для неї квантового-механічного співвідношення для координат та імпульсів.

**Ефект Комптона** – розсіювання фотонів зі зміною частоти.

**Ефект (випромінювання) Вавілова – Черенкова** – випускання електромагнітного випромінювання середовищем, в якому рівномірно рухається частинка зі швидкістю, більшою за фазову швидкість поширення світла в цьому середовищі.

**Екзотермічна ядерна реакція** – ядерна реакція, під час протікання якої енергія виділяється.

**Ендотермічна ядерна реакція** – ядерна реакція, яка протікає з поглинанням енергії.

**Поріг ядерної реакції** – мінімальна кінетична енергія частинки в лабораторній системі відліку для того, щоб протікання даної ендотермічної реакції було можливим.

**Енергія ядерної реакції** – енергія, яка виділяється (або поглинається) під час протікання ядерної реакції; дорівнює різниці кінетичної енергії частинок, які є продуктами реакції, і вихідних частинок (або власної енергії вихідних частинок і продуктів реакції).

**Ланцюгова реакція поділу атомних ядер** – послідовність ядерних реакцій, кожна з яких є наслідком дії частинки (нейтрона), що з'явилася в якості продукту реакції на її попередній стадії.

**Енергія активації ядра** – різниця між енергіями зв'язку складеного ядра в незбудженому і такого збудженого стану, з якого починається поділ ядра (мінімальна енергія збудження ядра, за якою стає можливим процес його поділу).

**Прискорювач на зустрічних пучках (колайдер)** – прискорювальний пристрій, в якому частинка, що налітає, і така, що є мішенню, рухаються одна назустріч одній і зіткнення частинок відбувається в системі їхнього центра інерції.

### **3.1 Маса та імпульс в релятивістській механіці. Релятивістське рівняння руху**

Прикметник “*релятивістський*”, яким ми вже користувалися раніше, означає такий, що правильно описує поведження об'єкту, який має довільну швидкість (розуміється, меншу за  $c$ ). Всі релятивістські закони інваріантні відносно перетворень Лоренца; зокрема, такими є рівняння Максвелла, що є законами руху в електродинаміці, як це вже було зазначено раніше.

Інший стан речей у механіці Ньютона – Галілея. Закони цієї механіки виявляються неінваріантними відносно перетворень Лоренца; це означає, що зазначена механіка непридатна для описання швидких рухів. У зв'язку з цим виникає питання про створення такої механіки, рівняння руху якої були б, так само як рівняння Максвелла для електромагнітного поля, інваріантні відносно перетворень Лоренца. Така механіка називається релятивістською (на відміну від нерелятивістської — ньютонівської, або механіки Ньютона - Галілея).

Зазначимо, що в релятивістській механіці так само, як у ньютонівській, має місце закон інерції. Цей закон не спирається на будь-які обмеження швидкості. Третій закон у релятивістській динаміці не має місця, оскільки його формулювання неявно припускає наявність сигналів, які поширюються з нескінченною швидкістю. Таким чином, задача зводиться лише до зміни закону руху (1.2.5).

Рівняння (або закон) руху в релятивістській механіці мають бути інваріантними відносно перетворень Лоренца (нагадуємо, що вимога такої інваріантності є математичним формулюванням спеціального принципу відносності). У свою чергу, це вимагає, щоб ліва і права частина рівностей, за допомогою яких цей закон виражається, під дією зазначених перетворень змінювалися б за однаковими правилами, внаслідок чого в будь-якій системі відліку ці закони матимуть однаковий вигляд.

#### **3.1.1 Маса релятивістської частинки та її імпульс**

Для встановлення релятивістського закону руху необхідно насамперед узагальнити поняття вектора імпульсу, яке було введено в нерелятивістській



механіці для характеристики стану частинки. Для цього, замінимо у виразі (1.2.5) ньютонівський імпульс  $\vec{p}$  на величину, яка називають *релятивістським імпульсом*  $\vec{p}_{\text{рел}}$  або *імпульсом релятивістської частинки*. Ця величина визначається співвідношенням

$$\vec{p}_{\text{рел}} = m\vec{u} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (3.1.1)$$

тут  $m$  — маса частинки.

Про властивості маси в релятивістській механіці та імпульсу  $\vec{p}_{\text{рел}}$  слід сказати таке:

а) у той час, коли маса у ньютонівській механіці є інваріантом перетворень Галілея, маса в релятивістській механіці є інваріантом перетворень Лоренца, тобто вона є *релятивістським інваріантом*.

б) у релятивістському випадку маса системи частинок *не задовольняє принцип адитивності*, тобто не є сумою мас складових системи;

с) так само як у нерелятивістському наближенні, у релятивістському випадку маса вільних частинок *задовольняє закону збереження*;

д) у релятивістському випадку маса частинки *не є єдиним джерелом поля тяжіння*, яке ця частинка створює, і тому її не можна вважати єдиною характеристикою гравітаційних властивостей частинки;

е) маса релятивістської частинки *не є мірою її інертності*; далі ми проілюструємо це на конкретному прикладі і пояснимо, з чим це пов'язано (див. 3.1.3));

ф) якщо швидкість задовольняє умову  $v \ll c$ , вираз для імпульсу  $\vec{p}_{\text{рел}}$  переходить у вираз для ньютонівського:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Введений за допомогою співвідношення (3.1.1) релятивістський імпульс є тривимірною складовою чотиривимірного вектора, оскільки він визначається як добуток інваріанту перетворень Лоренца – маси частинки – на тривимірну складову чотиривимірного вектора  $\vec{u}$ . Не складатиме труднощів за аналогією з виразом (3.1.1), використовуючи співвідношення (2.5.13), визначити четверту (часову) складову зазначеного вектора. Маємо для неї

$$p_{\text{рел}4} = m u_4 = i \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.1.2)$$

Фізичний зміст цієї величини детально аналізується в 3.3.1.

### 3.1.2 Релятивістський закон руху

Виходячи з таких самих міркувань, що були наведені в 1., узагальнимо ньютонівський закон руху (1.2.5) в такий спосіб:

$$\frac{d\vec{p}_{rel}}{d\tau} = \vec{f}, \quad (3.1.3)$$

де диференціювання відбувається за власним часом об'єкту, а  $\vec{f}$  – вектор, який називають *силою Мінковського*. Співвідношення (3.1.3) й є релятивістським рівнянням руху. Оскільки власний час є релятивістськи інваріантна величина, а  $\vec{p}_{rel}$  – тривимірна складова чотиривимірного вектора (чотиривимірний скаляр), сила Мінковського  $\vec{f}$  так само є тривимірною складовою певного чотиривимірного вектора. Отже, обидві частини рівності (3.1.3) під дією перетворень Лоренца змінюються за однаковими законами, а це, як було зазначено вище, означає, що релятивістське рівняння руху узгоджується із спеціальним принципом відносності.

Закон зміни часової складової вектора чотиривимірного імпульсу  $p_{rel4}$  має вигляд

$$\frac{dp_{rel4}}{d\tau} = f_4, \quad (3.1.4)$$

де  $f_4$  – часова складова сили Мінковського, яка визначатиметься нижче. Зазначимо також, що, використовуюючи поняття чотиривимірного вектора прискорення, який визначається співвідношеннями (2.5.15), (2.15.16), релятивістські рівняння руху можна записати у вигляді

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = m\vec{w} = \vec{f}, \quad (3.1.5)(11.5)$$

$$m \frac{du_4}{d\tau} = mw_4 = f_4.$$

Пов'яжемо силу Мінковського  $\vec{f}$  зі звичайною тривимірною силою  $\vec{F}$ . Для цього візьмемо до уваги, що власний час  $d\tau$  пов'язаний із лабораторним часом  $dt$  співвідношенням (2.5.8). Тоді маємо

$$\frac{d\vec{p}_{rel}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.1.6)$$

де

$$\vec{F} = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \cdot \vec{f} \quad (3.1.7)$$

є звичайна тривимірна сила, що діє на об'єкт. Отже, співвідношення (3.1.4) визначає зв'язок між тривимірною складовою чотиривимірного вектора сили Мінковського  $\vec{f}$  і тривимірним вектором звичайної сили  $\vec{F}$ , який *не є складовою жодного чотиривимірного вектора*. У справедливості останнього твердження можна переконатися, помічаючи, що в лівій частині співвідношення (3.1.4) під дією перетворень Лоренца чисельник

перетворюється як просторова складова чотиривимірного вектора, а знаменник – як часова, тобто весь дріб не перетворюється як просторова складова чотиривимірного вектора.

Для визначення часової складової сили Мінковського  $f_4$  зручно навести такі міркування. Перше з рівнянь (3.1.5) скалярно помножимо на вектор  $\vec{u}$ , а друге – на  $u_4$ . Після додавань одержаних рівностей маємо

$$m(\vec{u} \cdot \vec{w} + u_4 \cdot w_4) = \vec{u} \cdot \vec{f} + u_4 \cdot f_4.$$

З рівності (2.5.17) випливає,

$$\vec{u} \cdot \vec{f} + u_4 \cdot f_4 = 0, \quad (3.1.8)$$

тобто вектори чотиривимірного прискорення і сили Мінковського є ортогональними один до одного. З іншого боку, співвідношення (3.1.8) дозволяє визначити часову складову сили Мінковського:

$$f_4 = -(\vec{u} \cdot \vec{f} / u_4). \quad (3.1.9)$$

За допомогою співвідношень (3.1.7), (3.1.9) та (2.5.12), (2.5.13) для складових  $\vec{u}$ ,  $u_4$  одержуємо повний вектор цієї сили:

$$f \left( \vec{f} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}, f_4 = i \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right). \quad (3.1.10)$$

За умовою  $v/c \ll 1$   $f_4 \rightarrow 0$ ,  $\vec{f} \rightarrow \vec{F}$ , і сила Мінковського стає тривимірним вектором. Така сама ситуація має місце й у випадку, коли  $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ , тобто, якщо сила  $\vec{F}$  гіроскопічна.

Зазначимо, що закон руху (3.1.2) (або (3.1.3)) має нелінійний (за  $\vec{v}$ ) характер. Ця нелінійність пов'язана з релятивістським законом додавання швидкостей та існуванням граничної швидкості поширення сигналу

У подальшому індекс “*рел*” біля імпульсу будемо опускати, щоб уникнути зайвого ускладнення позначень.

### 3.1.3 Додаткові зауваження щодо властивостей маси в релятивістській механіці

Підстановка виразу для імпульсу (3.1.1) до рівності (3.1.3) дає

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{(1 - \vec{v}^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m\vec{v} \cdot ((\vec{v} \cdot \vec{a})/c^2)}{(1 - \vec{v}^2/c^2)^{3/2}}, \quad (3.1.11)$$

де  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – вектор тривимірного прискорення частинки. З наведеного співвідношення бачимо, що, на відміну від ньютонівського випадку, в релятивістській механіці тривимірні вектори сили і прискорення не є колінеарними.

Рівність (3.1.11) можна також перетворити у такий спосіб. Помножуючи її скалярно на  $\vec{v}$ , одержимо

$$(\vec{a} \cdot \vec{v}) = \left( (\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot (1 - \vec{v}^2/c^2)^{3/2} / m \right). \quad (3.1.12)$$

Після підстановки співвідношення (3.1.12) до (3.1.11) маємо

$$\vec{F} - (\vec{v} / c^2) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{F}) = \frac{m}{(1 - \vec{v}^2 / c^2)^{1/2}} \cdot \vec{a}, \quad (3.1.13)$$

звідки одержуємо таке:

якщо  $\vec{F} \parallel \vec{v}$  –

$$\vec{F} = \frac{m}{(1 - \vec{v}^2 / c^2)^{3/2}} \cdot \vec{a}; \quad (3.1.14)$$

якщо  $\vec{F} \perp \vec{v}$  –

$$\vec{F} = \frac{m}{(1 - \vec{v}^2 / c^2)^{1/2}} \cdot \vec{a}. \quad (3.1.15)$$

Таким чином, відношення сили, що діє на частинку, до прискорення, яке вона надає частинці і яке в ньютонівській механіці відіграє роль міри інертності частинки, в релятивістському випадку залежить від взаємної орієнтації сили і швидкості і тому не може претендувати на таку саму роль. Тільки у випадку  $v \ll c$ , коли нехтування членами  $\vec{v}^2 / c^2$  виявляється законним, вирази (3.1.14) і (3.1.15) збігаються, і тлумачення маси частинки як міри її інертності стає припустимим.

### **3.1.4 Деякі додаткові зауваження щодо вектора сили в релятивістській механіці та релятивістського закону руху**

#### **3.1.4.1 Додаткові відомості про вектор сили і релятивістський закон руху в релятивістській механіці**

У ньютонівському випадку сила визначається миттєвим розташуванням тіл, що взаємодіють, та миттєвим значенням їхніх відносних швидкостей; проте таке тлумачення правих частин співвідношень (3.1.3) – (3.1.6) є несумісним з другим постулатом спеціальної теорії відносності, який заперечує поширення сигналів з довільною необмеженою швидкістю. З формальної точки зору це означає, що вираз для сили  $\vec{F}$  в ньютонівській механіці, являючи собою функцію координат і відносних швидкостей, не завжди може бути представлений в такому вигляді, щоб сила  $f$ , визначена співвідношенням (3.1.10), утворювала чотиривимірний вектор. Тому для вирішення конкретних задач релятивістської динаміки рівняння руху використовуються в обмеженій кількості випадків. Зокрема, це має місце під час розгляду зіткнень релятивістських частинок, під час розв'язання задач про стан частинки в зовнішньому полі тощо.

#### **3.1.4.2 Релятивістська форма закону руху в механіці**

Покажемо, що рівнянню руху (3.1.3) можна відразу надати релятивістські інваріантного вигляду і знайдемо найбільш загальний вираз для релятивістської

сили. Остання задача також розв'язується нами в 3.8 за допомогою лоренцевих перетворень для вектора сили.

Виходимо з вимоги до 4-вектора прискорення, яка виражається формулою (2.5.17). Це означає, що цей вектор має бути ортогональним до 4-вектора швидкості. Зазначена умова виконується автоматично, якщо рівняння руху (3.1.3) узагальнити в такий спосіб:

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \sum_{k=1}^4 f_{ik} u_k; \quad (3.1.16)$$

тут функції  $f_{ik}$  пов'язані з силою, що діє на частинку. Характер цього зв'язку буде встановлено нижче.

Помножуючи тепер скалярно рівність (3.1.16) на 4-вектор  $u_i$ , одержуємо

$$m \cdot \sum_{i=1}^4 u_i \cdot \frac{du_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_{ik} \cdot u_i u_k.$$

Рівність (2.5.17) вимагає, щоб задовольнялося співвідношення

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_{ik} \cdot u_i u_k = 0, \quad (3.1.17)$$

у справедливості якого можна переконатися в такий спосіб. Представимо праву частину рівності (3.1.17) у вигляді

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_{ik} \cdot u_i u_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (f_{ik} + f_{ki}) \cdot u_i u_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (f_{ik} - f_{ki}) \cdot u_i u_k \quad (3.1.18)$$

(такого вигляду вищеозначеній рівності можна надати, оскільки  $u_i \cdot u_k = u_k \cdot u_i$ ).

З виразу (3.1.18) можна бачити, що для перетворення на нуль першої суми достатньо, щоб перетворювався на нуль множник у дужках, тобто функції  $f_{ik}$  задовольняли умовам антисиметрії за індексами

$$f_{ik} = -f_{ki}. \quad (3.1.19)$$

Для дослідження другої суми запишемо в ній окремий доданок у вигляді

$$(f_{ik} - f_{ki}) \cdot u_i \cdot u_k = u_i (f_{ik} \cdot u_k) - u_k (f_{ki} \cdot u_i).$$

Підставляючи тепер наведений вираз під знак суми співвідношення (3.1.18), маємо

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (f_{ik} - f_{ki}) \cdot u_i \cdot u_k = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 u_i (f_{ik} \cdot u_k) - \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 u_k (f_{ki} \cdot u_i) \quad (3.1.20)$$

(під час написання останнього виразу була використана симетрія  $u_i \cdot u_k = u_k \cdot u_i$ ). Нарешті, змінюючи порядок підсумовування в другій сумі виразу (3.1.20), який не є суттєвим, одержуємо

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (f_{ik} - f_{ki}) \cdot u_i \cdot u_k = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 u_i (f_{ik} \cdot u_k) - \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 u_i (f_{ik} \cdot u_k) = 0.$$

Отже, достатність антисиметрії за індексами функцій  $f_{ik}$  для виконання рівності (3.1.17) доведена повністю. Це твердження буде використано нами у подальшому розгляді.

### 3.1.4.3 Структура вектора сили в релятивістській механіці. Залежність сили від швидкості

Встановимо тепер зв'язок функцій  $f_{ik}$  із силою, що діє на частинку, про який йшлося вище. Для цього розглянемо спочатку рівняння руху (3.1.16) для просторових проєкцій прискорення ( $i = 1, 2, 3$ ), для яких пишемо

$$\begin{aligned} m \frac{du_1}{d\tau} &= f_{14} \cdot u_4 + f_{12} \cdot u_2 + f_{13} \cdot u_3, \\ m \frac{du_2}{d\tau} &= f_{24} \cdot u_4 + f_{21} \cdot u_1 + f_{23} \cdot u_3, \\ m \frac{du_3}{d\tau} &= f_{34} \cdot u_4 + f_{31} \cdot u_1 + f_{32} \cdot u_2. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Введемо вектори  $\vec{P}(P_1, P_2, P_3)$  та  $\vec{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$  у такий спосіб:

$$\begin{aligned} P_k &= icf_{k4} = -icf_{4k}; \\ Q_1 &= f_{23} = -f_{32}, \quad Q_2 = f_{13} = -f_{31}, \quad Q_3 = f_{12} = -f_{21}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Тоді рівностям (3.1.21) можна надати вигляду

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (\vec{P} + \vec{v} \times \vec{Q}).$$

Тут у правій частині стоїть вираз для сили Мінковського, від якого за допомогою співвідношення (3.1.7) можна перейти до звичайної тривимірної сили в релятивістському випадку. Тоді маємо

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{P} + \vec{v} \times \vec{Q}).$$

Отже, для релятивістської сили одержуємо вираз

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{v} \times \vec{Q}, \quad (3.1.23)$$

який складається з принципово різних складових: одна з них ( $\vec{F}_1 = \vec{P}$ ) за своїм характером не відрізняється від звичайної нерелятивістської сили, а друга ( $\vec{F}_2 = \vec{v} \times \vec{Q}$ ) є силою принципово іншого характеру: вона не має нерелятивістського аналогу і залежить від вектора швидкості частинки, залишаючись завжди перпендикулярним до нього. Наявність цієї складової являє собою специфічний релятивістський ефект, наслідки якого детально обговорюються в 3.8.

Нарешті, для повноти картини розглянемо рівняння (3.1.16) для четвертої (часової) проєкції вектора 4-швидкості. Пишемо

$$m \frac{du_4}{d\tau} = \sum_{k=1}^3 f_{4k} u_k.$$

Використовуючи рівність (2.5.13), а також перше з співвідношень (3.1.22), одержуємо

$$\frac{d}{d\tau} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{P} \cdot \vec{u}. \quad (3.1.24)$$

У 3.3 буде показано, що вираз, який стоїть під знаком похідної у формулі (3.1.24), є повна енергія релятивістської частинки  $E$ . Тому за допомогою формул (2.5.8), (2.5.13) від виразу (3.1.24) легко перейти до співвідношення

$$\frac{dE}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v}, \quad (3.1.25)$$

яке являє собою одну з форм запису закону збереження енергії: ліворуч міститься приріст енергії частинки за одиницю часу, а праворуч – потужність зовнішньої сили, яка на це витрачається. Зазначимо, що при цьому складова сили, яка є перпендикулярною до швидкості частинки, не здійснює роботи.

### 3.2 Виведення виразу для релятивістського імпульсу

У попередньому параграфі були розглянуті деякі навідні міркування щодо вибору виразу для релятивістського імпульсу у вигляді (3.1.1). Проте, важливо одержати цей вираз безпосередньо, виходячи із більш переконливих міркувань. Зокрема, це можна зробити, виходячи із закону збереження імпульсу.

Стан руху частинки характеризується єдиним вектором – тривимірною швидкістю  $\vec{v}$ , і тому тривимірною складовою вектора релятивістського імпульсу має бути спрямованою вздовж цього вектора. З іншого боку, для нерелятивістської границі  $((v/c) \ll 1)$  має дотримуватися принцип відповідності, тобто вираз (3.1.1) для релятивістського імпульсу у випадку  $(v/c) \ll 1$  має перейти у відповідний вираз для ньютонівського (1.2.4). Тому з розмірних міркувань шукатимемо тривимірну складову вектора релятивістського імпульсу у вигляді

$$\vec{p} = mf(m, (v/c)) \cdot \vec{v}, \quad (3.2.1)$$

де функція  $f(m, (v/c))$  є безрозмірною та задовольняє умову

$$f(m, (\vec{v}/c) \rightarrow 0) = f(m, 0) = 1.$$

Виходимо із спрощеної моделі, розглядаючи абсолютно пружне зіткнення двох частинок однакової маси  $m$ , які рухаються вздовж однієї прямої назустріч одна одній і в системі відліку, в якій сумарний імпульс частинок дорівнює нулеві, до зіткнення мають однакові за модулем швидкості з проекціями (див. рис. 3.1)

$$v_{1x} = a, v_{1y} = b, v_{2x} = -a, v_{2y} = -b. \quad (3.2.2)$$

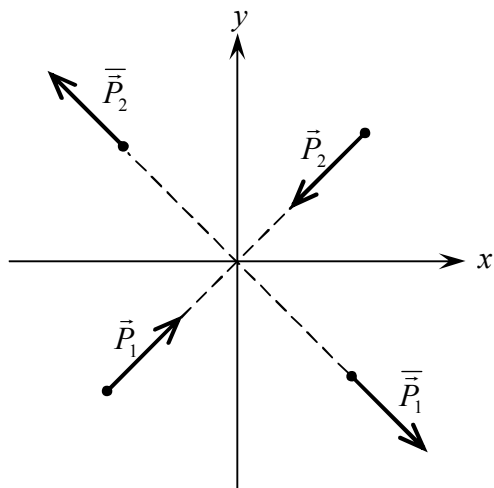


Рисунок 3.1. До виведення виразу для релятивістського імпульсу

У подальшому цю систему розглядатимемо як систему  $K$ . Після зіткнення частинок проекції їхніх швидкостей змінюються у такий спосіб:

$$\bar{v}_{1x} = a, \bar{v}_{1y} = -b, \bar{v}_{2x} = -a, \bar{v}_{2y} = b, (3.2.3)$$

де риска над символом означає значення швидкості після зіткнення.

Перейдемо тепер до іншої системи відліку  $K'$ , яка рухається відносно системи  $K$  зі сталою швидкістю  $V = v_{1x} = a$ . У цій системі для проекцій швидкостей після зіткнення у відповідності із релятивістським законом їхнього додавання (2.4.8), (2.4.10) пишемо

$$\begin{aligned} v'_{1x} &= \frac{v_{1x} - V}{1 - v_{1x} \cdot V/c^2} = 0; v'_{1y} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_{1x} \cdot V/c^2} = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}}; \\ v'_{2x} &= \frac{v_{2x} - V}{1 - v_{2x} \cdot V/c^2} = -\frac{2a}{1 + a^2/c^2}; \\ v'_{2y} &= \frac{b \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_{2x} \cdot V/c^2} = -\frac{b \cdot \sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 + a^2/c^2}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Таким самим способом визначаємо швидкості частинок після зіткнення, що дає

$$\bar{v}'_{1x} = 0; \bar{v}'_{1y} = -\frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}}; \bar{v}'_{2x} = -\frac{2a}{1 + a^2/c^2}; \bar{v}'_{2y} = b \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 + a^2/c^2}. \quad (3.2.5)$$

Зазначимо, що вирази для проекцій  $v'_{1y}, \bar{v}'_{1y}, v'_{2y}, \bar{v}'_{2y}$ , наведені у рівностях (3.2.4), (3.2.5), мають дуже просте тлумачення. В системі  $K'$  маємо  $v'_{1y} = dy'/d\tau$  ( $d\tau$  – проміжок власного часу частинки). Оскільки поперечні до руху системи відліку проекції радіус-вектора не перетворюються (див.(2.3.9), (2.3.13)), і враховуючи, що  $d\tau = \sqrt{1 - a^2/c^2} \cdot dt$ , пишемо  $v'_{1y} = \frac{dy/dt}{\sqrt{1 - a^2/c^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}}$ .

Такі самі міркування можна навести щодо проекцій  $v'_{2y}, \bar{v}'_{2y}$ . Отже, наведені вирази є наслідками релятивістського ефекту скорочення часу.

Наведемо модулі векторів швидкостей частинок в обох системах відліку до та після зіткнення. Маємо:



$$v_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \bar{v}_1; v_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \bar{v}_2;$$

$$v'_1 = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}} = \bar{v}'_1; v'_2 = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2 \cdot (1 - a^2/c^2)}}{1 + a^2/c^2} = \bar{v}'_2. \quad (3.2.6)$$

Використаємо закон збереження імпульсу. Для системи  $K'$  до зіткнення пишемо:

$$p'_x = p'_{1x} + p'_{2x} = m \cdot f(m, v'_1) \cdot v'_{1x} + m \cdot f(m, v'_2) \cdot v'_{2x} =$$

$$= -\frac{2a}{1 + a^2/c^2} \cdot m \cdot f(m, v'_2) \cdot v'_{2x}; \quad (3.2.7)$$

$$p'_y = p'_{1y} + p'_{2y} = m \cdot f(m, v'_1) \cdot v'_{1y} + m \cdot f(m, v'_2) \cdot v'_{2y}.$$

Після зіткнення маємо:

$$\bar{p}'_x = \bar{p}'_{1x} + \bar{p}'_{2x} = -\frac{2a}{1 + a^2/c^2} m \cdot f(m, \bar{v}'_2) \cdot \bar{v}'_{2x};$$

$$\bar{p}'_y = \bar{p}'_{1y} + \bar{p}'_{2y} = m \cdot f(m, \bar{v}'_1) \cdot \bar{v}'_{1y} + m \cdot f(m, \bar{v}'_2) \cdot \bar{v}'_{2y} =$$

$$= -\frac{mb}{\sqrt{1 - a^2/c^2}} \cdot f(m, \bar{v}'_1) \cdot \bar{v}'_{1y} +$$

$$+ \frac{mb}{1 + a^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - a^2/c^2} \cdot f(m, \bar{v}'_2) \cdot \bar{v}'_{2y}. \quad (3.2.8)$$

У відповідності з останнім співвідношенням у (3.2.6) рівність  $p'_x = \bar{p}'_x$  задовольняється тотожно. З других рівностей (3.2.7) та (3.2.8) випливає, що  $p'_y = -\bar{p}'_y$ . З іншого боку, закон збереження імпульсу вимагає, щоб мала місце рівність  $p'_y = \bar{p}'_y$ , тобто вимагає додержання рівності  $p'_y = \bar{p}'_y = 0$ , яку й використаємо для досягнення поставленої мети. Так, з рівності  $p'_y = 0$  одержимо

$$f(m, v'_1) = \frac{1 - a^2/c^2}{1 + a^2/c^2} \cdot f(m, v'_2).$$

В останньому виразі перейдемо до границі  $b \rightarrow 0$ ; тоді, як випливає з рівностей (3.2.6),  $v'_1 = 0, v'_2 = \frac{2a}{1 + a^2/c^2}$ . Підставляючи тепер одержані вирази для швидкостей до формули (3.2.9), надамо останній вигляду

$$f(m, 0) = \frac{1 - a^2/c^2}{1 + a^2/c^2} \cdot f\left(m, \frac{2a}{1 + a^2/c^2}\right). \quad (3.2.9)$$

Наведене співвідношення є функціональне рівняння для функції  $f(m, v)$ . У правій частині цього співвідношення в аргументі функції впізнаємо швидкість  $v'_2$ . Виразимо через цю швидкість величину  $a$ . Тоді пишемо

$$a = \frac{c^2}{v'_2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - v'^2_2 / c^2} \right), \quad (3.2.10)$$

або

$$\frac{1 - a^2 / c^2}{1 + a^2 / c^2} = \sqrt{1 - v'^2_2 / c^2}. \quad (3.2.11)$$

У виразі (3.2.10) обираємо знак «-», оскільки в іншому випадку одержуємо  $a > c$ , що суперечить граничному характеру швидкості світла. Таким чином, використовуючи рівності (3.2.9) – (3.2.11), маємо

$$f(m, v'_2) = \frac{f(m, 0)}{\sqrt{1 - v'^2_2 / c^2}}. \quad (3.2.12)$$

Після підстановки рівності (3.2.12) до співвідношення (3.2.1) і розглядаючи швидкість  $v'_2$  як швидкість відносно довільної системи відліку, пишемо

$$\vec{p} = m \cdot f(m, v) \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{f(m, 0)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \cdot \vec{v}.$$

Функцію  $f(m, 0)$  можна визначити за допомогою принципу відповідності: під час переходу  $v \rightarrow 0$  вираз для релятивістського імпульсу має перейти у вираз для ньютонівського, тобто у рівність  $\vec{p} = m\vec{v}$ , після чого остаточно одержимо співвідношення

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

яке збігається з виразом (3.1.1).

### 3.3 Енергія в релятивістській механіці. Кінетична енергія релятивістської частинки. Власна енергія матеріального об'єкту як прояв його релятивістських властивостей

#### 3.3.1 Вектор енергії – імпульсу релятивістської частинки, її власна, повна та кінетична енергія

Повернемося до формули (2.5.14) для квадрата модуля вектора 4-швидкості і помножимо його на  $m^2$ , внаслідок чого одержуємо:

$$m^2 \vec{u}^2 + m^2 u_4^2 = -m^2 c^2. \quad (3.3.1)$$

У лівій частині рівності (3.3.1) перший доданок є квадрат модулю тривимірною релятивістського імпульсу  $\vec{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$  (див. вираз (3.1.1)), а в правій – релятивістські інваріантна величина. Отже, другий доданок у формулі (3.3.1)

$p_4^2 = m^2 u_4^2$  є квадрат четвертої (або, як кажуть, часової) проекції чотиривимірнього вектора імпульсу.

Розглянемо останню більш детально. Для цього перейдемо до дійсних величин  $p_4 = ip_0, u_4 = iu_0$ ; тоді з формули (2.5.13) можна побачити, що

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.3.2)$$

Як будь-яка проекція імпульсу, ця величина має розмірність енергії, поділеної на швидкість, тому можна записати рівність

$$p_0 = \frac{E}{c}, \quad (3.3.3)$$

де  $E$  – величина, яка має зміст енергії частинки, фізичний зміст якої ще належить усвідомити. Для цього, по-перше, скористаємося явним виразом для зазначеної величини

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.3.4)$$

По-друге, відшукаємо її нерелятивістську границю. Для цього, розкладаючи праву частину виразу (3.3.4) до степеневого ряду за  $v^2/c^2$  і обмежуючись членом першого порядку за  $v^2/c^2$ , визначаємо

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right),$$

або з наведеною точністю

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad (3.3.5)$$

Таким чином, бачимо, що введена величина  $E$  в нерелятивістському випадку з точністю до адитивного доданку  $mc^2$  переходить у вираз для кінетичної енергії частинки. У цьому випадку енергія вільної частинки визначається з точністю до довільної сталої, тому що в досліді вимірюється не абсолютне значення енергії, а її зміна, і тому в нерелятивістському випадку цей доданок звичайно опускають.

Інша справа в релятивістському випадку. Тут вимога, щоб енергія була пов'язана з часовою проекцією імпульсу співвідношенням (3.3.3), однозначно визначає енергію частинки виразом (3.3.4) і не дозволяє у співвідношенні (3.3.5) опустити перший доданок, надаючи йому певного фізичного змісту. А саме, цей доданок являє собою енергію

$$E_0 = mc^2, \quad (3.3.6)$$

яку має частинка, перебуваючи в спокої. Енергію, яка визначається співвідношенням (3.3.6), називають *власною енергією* об'єкту, або його *енергією спокою*. *Передбачення у тіла, яке перебуває у спокої, енергії, яка є пропорційною до його маси, є одним із найважливіших наслідків СТВ*. Таким чином, енергія вільної частинки складається з власної енергії та кінетичної,

тобто  $E = E_0 + T$ . Ця енергія називається *повною енергією частинки*. Саме повна енергія частинки входить до виразу (3.3.3), який пов'язує її з часовою проекцією вектора імпульсу. Для кінетичної енергії можна тоді записати  $T = E - E_0$  або

$$T = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (3.3.7)$$

Таким чином, ми дійшли таких висновків. Імпульс та повна енергія релятивістської частинки утворюють єдиний чотиривимірний вектор, який називають вектором енергії-імпульсу частинки. З чотиривимірного характеру цього вектора випливає наявність у частинки нового, специфічного для релятивістського випадку, виду енергії – енергії спокою.

Довжина зазначеного вектора визначається співвідношенням (3.3.1) або

$$\vec{p}^2 + p_4^2 = \vec{p}^2 - E^2/c^2 = -m^2c^2. \quad (3.3.8)$$

З останнього співвідношення одержуємо зв'язок між повною енергією релятивістської частинки та її імпульсом

$$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}. \quad (3.3.9)$$

З приводу наведеної формули зазначимо таке. Насправді під час розв'язку рівняння (3.3.8) відносно  $E$  ми одержуємо два корені – додатний та від'ємний. Але, доки ми залишаємося в межах класичної фізики, від'ємний корінь можна відкинути. Не вдаючись до аналізу проблем, які тут виникають, зазначимо лише, що наявність коренів різних знаків тут має далекосяжні наслідки, зокрема, вона відображає факт наявності в природі як звичайних частинок, так і їхніх антиподів – античастинок.

З'ясуємо тепер, чому в нерелятивістському випадку власна енергія відіграє роль довільної сталої, а в релятивістському – це величина, яка має зміст енергії, яка вимірюється на досліді. Справа полягає в тому, що в нерелятивістському випадку маємо

$$\frac{T}{mc^2} \ll 1, \quad (3.3.10)$$

тобто в процесі взаємодії нерелятивістських об'єктів їхня власна енергія в інші види енергії не перетворюється. Оскільки в нерелятивістському випадку для кінетичної енергії можна скористатися другим доданком формули (3.3.5), легко побачити, що умова (3.3.10) еквівалентна умові  $v \ll c$ . Таким чином, у *нерелятивістському випадку аналогом власної енергії є довільна стала у виразі для кінетичної енергії, яка під час протікання механічних процесів не змінюється. Щодо релятивістського випадку, то в ньому можливі процеси з перетворенням власної енергії в інші види енергії, тому тут вона перестав відігравати роль формального фактора, пов'язаного з початком відліку енергії. Приклади, які більш переконливо пояснюють зміст цієї величини, наведені в 3.7.*

### 3.3.2 Деякі співвідношення для енергії релятивістської частинки та зауваження щодо маси системи частинок

Використання співвідношень (3.1.1) та (3.3.4) дає

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (3.3.11)$$

Порівнюючи це співвідношення з (1.2.4), бачимо, що саме величину  $E/c^2$  тут слід розглядати як міру інертності тіла. Зокрема, якщо швидкість частинки  $v = c$  (фотон, нейтрино (певною мірою), глюон), маємо

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{n}, \quad (3.3.12)$$

де  $\vec{n}$  — одиничний вектор напрямку руху частинки. Як можна побачити з формули (3.3.12), частинці, яка рухається зі швидкістю  $c$ , відповідає маса  $m = 0$ , тобто для такої частинки не існує системи відліку, відносно якої вона перебувала б у спокої. Отже співвідношення (3.3.11) придатне для визначення імпульсу частинки у всьому інтервалу швидкостей: при  $v \ll c$  воно переходить у ньютонівський імпульс  $\vec{p} = m\vec{v}$  (див. 1.2.4), а при  $v = c$  — переходить у вираз (3.3.12).

Звернемося тепер до вивчення властивості маси системи релятивістських частинок, виходячи при цьому із співвідношення (3.3.8) як ключового. Відомо, що енергія та імпульс для системи частинок є адитивними величинами, тобто для системи, що складається з  $N$  частинок, імпульс  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ , а енергія —

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (\vec{p}_i \text{ та } E_i \text{ — імпульс та енергія } i\text{-тої частинки відповідно}).$$

Підставляючи зазначені величини до рівності (3.1.8), для маси системи частинок одержуємо

$$m^2 = \frac{1}{c^2} \left( \left( \sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - c^2 \left( \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right)^2 \right). \quad (3.3.13)$$

Отже, бачимо, що за фіксованої повної енергії для даної сукупності частинок її маса залежить від імпульсу.

Наведене твердження легко проілюструвати на прикладі системи фотонів, кожен з яких є безмасовою частинкою. Якщо система містить  $N$  фотонів з паралельними імпульсами, модулі яких дорівнюють один одному, для енергії та імпульсу системи, використовуючи співвідношення (3.3.12), пишемо  $\vec{p} = N\vec{p}_1$ ,  $E = NE_1 = cNp_1$  ( $\vec{p}_1$  і  $E_1$  — імпульс та енергія кожного з фотонів). Підставляючи ці вирази до (3.3.13), маємо

$$m = 0, \quad (3.3.14)$$

тобто наведена система фотонів є безмасовою. Цій системі відповідає плоска монохроматична макроскопічна електромагнітна хвиля із хвильовим вектором  $\vec{k} = \vec{p}_1/\hbar$  і циклічною частотою  $\omega = E_1/\hbar$ . Якщо кількість фотонів у системі

парна і  $N/2$  з них мають імпульси з модулями, що дорівнюють один одному і спрямовані в один бік, а решта – у протилежний, для повного імпульсу системи фотонів одержимо  $\vec{p} = 0$ . У цьому випадку повна енергія системи  $E = NE_1 = cNp_1$  – така сама, що й у попередньому випадку, але маса системи ненульова і, як випливає з (3.3.13),

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{NE_1}{c^2}. \quad (3.3.15)$$

З макроскопічної точки зору такій системі фотонів відповідає стояча хвиля, створена під час суперпозиції падаючої хвилі із хвильовим вектором  $\vec{k} = \vec{p}_1/\hbar$  із відбитою хвилею з таким самим хвильовим вектором, але спрямованим у протилежний бік. Співвідношення (3.3.15) буде справедливим також для сукупності фотонів у замкненій порожнині, якщо для цієї сукупності  $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = 0$ .

Взагалі, можна казати, що рівності (3.3.13) – (3.3.15) демонструють неадитивність маси в релятивістському випадку і залежність маси системи частинок від кутів між векторами їхніх імпульсів.

Цікаво зазначити такий факт. В обох випадках системи фотонів мають однакові енергії, але маси цих систем різні: в першому з них маса навіть дорівнює нулеві. З цього випливає, що міркування щодо зв'язку між масою та енергією носять несиметричний характер: якщо є маса, то обов'язково є й енергія; зворотне ж твердження не завжди буде вірним; наявність енергії не означає обов'язкової появи маси. Проте, якщо сумарний імпульс системи частинок дорівнює нулеві, як можна побачити з (3.3.13), маса системи частинок є пропорційною до енергії системи. Як приклад такої пропорційності розглянемо зміну внутрішньої енергії залізної кулі під час підвищення її температури на  $\Delta T = 200$  К, якщо остання як ціле перебуває в спокої. Внутрішня енергія  $E$  кулі під час нагрівання зростає на  $\Delta E = c_V m \Delta T$  ( $c_V = 450$  Дж/(кг·К) – питома теплоємність заліза,  $m$  – маса кулі). З формули (3.3.13) бачимо, що це зростання дорівнює  $\Delta m \cdot c^2$ . Таким чином, під час нагрівання маса кулі збільшується на  $\Delta m = \Delta E/c^2 = c_V m \Delta T/c^2$ , а відносне збільшення маси складає  $\Delta m/m = \Delta E/(mc^2) = c_V \Delta T/c^2 = 10^{-12}$ , тобто це буде незначна величина. Цікаво також навести приклад збільшення маси тіла під час фазового переходу першого роду, коли останній відбувається за сталим об'ємом; у цьому випадку він супроводжується зростанням внутрішньої енергії  $\Delta U$ , яке дорівнює енергії фазового переходу  $qm$ , де  $q$  – питома енергія переходу, а  $m$  – маса речовини, яка зазнає перехід. Тоді для збільшення власної енергії речовини пишемо

$$qm = \Delta E = \Delta m \cdot c^2. \quad (3.3.16)$$

З формули (3.3.16) для відносного збільшення маси системи частинок маємо  $\Delta m/m = q/c^2$ . Для перетворення льоду на воду  $q = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, і тому  $\Delta m/m = q/c^2 = 3,7 \cdot 10^{-12}$ , або в процентах  $(\Delta m/m) \cdot 100\% = 3,7 \cdot 10^{-10}\%$ .

### 3.3.3 Безпосередній розрахунок повної енергії релятивістської частинки

Виходимо в релятивістській механіці із звичайного визначення роботи сили:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad (3.3.17)$$

Підставляючи вираз для сили з формули (3.1.6.) до (3.3.17), одержуємо

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \vec{v} d\vec{p} \quad (3.3.18)$$

Праву частину рівності (3.3.18) перепишемо у вигляді

$$\vec{v} d\vec{p} = d(\vec{p}\vec{v}) - \vec{p} d\vec{v} = d(\vec{p}\vec{v}) - m \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

або

$$\vec{v} d\vec{p} = md \left( \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) - (1/2)m \frac{dv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.3.19)$$

Використовуючи тепер (3.3.18), (3.3.19), одержуємо

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{p} = \frac{mv_2^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{mv_1^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} - (1/2)m \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

або

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{p} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = E_2 - E_1. \quad (3.3.20)$$

Таким чином, бачимо, що робота сили витрачається тут на зростання величини, яка визначена співвідношенням (3.3.4), і яка є повною енергією релятивістської частинки.

### 3.3.4 Приклад перетворення енергії спокою частинки в інші види енергії: розпад вільного нейтрона

Вільний нейтрон (тобто такий, що не входить до складу ядра), є нестабільною частинкою: час його життя  $\tau = 886\text{с}$  і внаслідок  $\beta$ -розпаду він перетворюється на протон з вильотом електрона і електронного антинейтрино за схемою  $n \rightarrow p + e + \tilde{\nu}_e$ . Розрахуємо енергетичний баланс наведеної реакції. Беручи до уваги, що маса нейтрона  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$  кг, протона –  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$  кг, електрона –  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, а нейтрино є безмасовою частинкою, а також що нейтрон, який зазнає перетворення, перебуває в спокої, маємо

$$m_n c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 + T, \quad (3.3.21)$$

де  $T$  – сумарна кінетична енергія продуктів реакції, утворених внаслідок розпаду нейтрона. Для останньої величини розрахунок з використанням формули (3.3.21) дає  $T = 2,62 \cdot 10^{-13}$  Дж. Звичайні механічні одиниці енергії в атомній та ядерній фізиці, а також у фізиці високих енергій виявляються незручними, і тому тут використовують одиницю – електронвольт (еВ) та її похідні (кеВ), (МеВ) та ін., при цьому  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж. Таким чином, у нашому випадку  $T = 1,64\text{МеВ}$ , що складає  $(T/m_n c^2) \cdot 100\% = 0,17\%$  від енергії спокою нейтрона. Така енергія більш, ніж утричі перевищує енергію спокою електрона і фіксується в експерименті досить надійно.

### 3.4 Релятивістська частинка у зовнішньому потенціальному полі. Зв'язаний стан у релятивістській механіці. Енергія зв'язку релятивістської системи

#### 3.4.1 Релятивістська частинка у зовнішньому потенціальному полі

Розглянемо тепер окремий випадок, коли сила  $\vec{F}$ , що діє на частинку, є потенціальною, тобто, коли частинка перебуває у зовнішньому потенціальному полі. У цьому випадку  $\vec{F} = -\text{grad}U$ , де  $U$  – потенціальна енергія частинки у зовнішньому полі. Зазначимо, що поняття потенціальної енергії тут можна ввести несуперечливим способом, так само, як і для нерелятивістської частинки, оскільки стан джерела поля тут передбачається фіксованим, і тому потенціальна енергія частинки залежить тільки від її координат. Таким чином, співвідношення (3.3.17) перепишемо у вигляді

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\text{grad}U \cdot d\vec{r} = -dU. \quad (3.4.1)$$

Отже, робота потенціальної сили виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії частинки. Інтегрування співвідношення (3.4.1) дає

$$A = U_1 - U_2. \quad (3.4.2)$$

Порівнюючи співвідношення (3.4.2) зі співвідношенням (3.3.20), бачимо, що у випадку, який розглядається, має місце рівність  $E_2 - E_1 = U_1 - U_2$ , тобто тут зберігається величина

$$W = E + U, \quad (3.4.3)$$

яка є релятивістським аналогом повної механічної енергії нерелятивістської частинки у зовнішньому потенціальному полі.

#### 3.4.2. Умова створення зв'язаного стану

Нехай частинка перебуває в потенціальному полі (природа поля неістотна), в якому на неї діють з боку джерела сили притягання, і при цьому потенціальна енергія частинки в цьому полі нормована так, що

$$U(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.4.4)$$

Для частинки у випадку, що розглядається, можливі траєкторії, під час руху вздовж яких вона як віддаляється від джерела на нескінченність (інфінітний рух) так само й траєкторії, під час руху вздовж яких вона



залишається на скінченній відстані від джерела (фінітний рух). Про другий випадок кажуть, що частинка перебуває у зв'язаному стані.

Установимо умову, за якій релятивістська частинка, що міститься в зовнішньому потенціальному полі із властивостями, описаними вище, перебуває у зв'язаному стані. Такий стан означає неможливість для частинки досягти точок простору, які перебувають на відстані  $r \rightarrow \infty$  від джерела і які задовольняють умову (3.4.4). З математичної точки зору це проявляється у наявності для імпульсу частинки у цих точках формальної нерівності  $\vec{p}^2 < 0$ . Беручи до уваги умову (3.4.4) та використовуючи співвідношення (3.3.9), (3.4.3), одержуємо

$$W < mc^2, \quad (3.4.5)$$

що й буде шуканою умовою. Останній можна надати вигляду, придатного для більш наочного фізичного тлумачення та для подальшого використання. Для цього скористуємося співвідношеннями (3.4.3), (3.4.5), а також візьмемо до уваги співвідношення  $E = T + mc^2$  (див. 3.3.7). Тоді одержимо

$$(E - mc^2) + U < 0,$$

або

$$T + U < 0. \quad (3.4.6)$$

Отже, для того, щоб релятивістська частинка у зовнішньому потенціальному полі перебувала у зв'язаному стані, необхідно, щоб сума її кінетичної та потенціальної енергії в цьому полі була від'ємною.

### 3.4.3 Енергія зв'язку релятивістської системи

Тепер розглянемо випадок такої системи частинок, які взаємодіють між собою, і при цьому положення жодної з частинок у процесі взаємодії не залишається фіксованим. У нерелятивістському випадку кажуть, що ця система характеризується *потенціальною енергією взаємодії частинок*  $U_{\text{вз}}$ , яка залежить від координат усіх частинок у фіксований момент часу (припускається, що сили взаємодії між частинками мають потенціальний характер). Під час переходу до релятивістського випадку зауважимо, що пряме використання поняття потенціальної енергії взаємодії частинок тут не має сенсу, оскільки для нерелятивістських частинок їхні координати, від яких залежить  $U_{\text{вз}}$ , беруться в той самий момент часу, тобто припускається, що взаємодія між частинками здійснюється миттєво. Проте в релятивістському випадку треба взяти до уваги, що час переносу взаємодії між частинками є скінченний, і тому, якщо  $U_{\text{вз}}$  залежить від положення  $\vec{r}(t)$  однієї з частинок у час  $t$ , то для іншої частинки цьому положенню відповідає положення  $\vec{r}_1(t_1)$  в час  $t_1$ , де  $t = t_1 - |\vec{r} - \vec{r}_1|/v_{\text{вз}}$ , а  $v_{\text{вз}}$  – швидкість поширення взаємодії між частинками. Тому в подальших міркуваннях для релятивістського випадку буде фігурувати не потенціальна енергія взаємодії частинок  $U_{\text{вз}}$ , а величина  $\tilde{U}_{\text{вз}}$ , яка є релятивістським аналогом потенціальної енергії взаємодії частинок і, не маючи строгого фізичного змісту, носить допоміжний характер і усувається з

кінцевих результатів. Зазначимо, що за умови  $v/v_{\text{є3}} \ll 1$  ( $v$  – швидкість руху частинки), функція  $\tilde{U}_{\text{є3}}$  з належною точністю збігається з потенціальною енергією взаємодії частинок  $U_{\text{є3}}$ .

Розглянемо систему з  $N$  частинок, взаємодія між якими здійснюється силами довільної природи, у системі відліку, в якій її центр інерції перебуває в спокої (про центр інерції в релятивістській механіці більш детально дивись у 3.5.4, при цьому всі частинки перебувають на скінченній відстані одна від одній (система частинок перебуває у зв'язаному стані)). Маса цієї системи  $M$  визначається співвідношенням (3.3.13), тоді її власна енергія  $Mc^2$  і вона є повною енергією системи. З іншого боку, енергія системи складається із сумарної власної енергії частинок  $\sum_{i=1}^N m_i c^2$ , їхньої сумарної кінетичної енергії

$\sum_{i=1}^N T_i$  та величини  $\tilde{U}_{\text{є3}}$ , тобто

$$Mc^2 = \sum_{i=1}^N m_i c^2 + \sum_{i=1}^N T_i + \tilde{U}_{\text{є3}}. \quad (3.4.7)$$

Суму двох останніх доданків у цій рівності позначимо як  $-E_{\text{є3}}$  і назвемо додатну величину  $E_{\text{є3}}$  енергією зв'язку системи частинок (як впливає з нерівності (3.4.6), зазначена сума є від'ємною). Тоді

$$-E_{\text{є3}} = \sum_{i=1}^N T_i + \tilde{U}_{\text{є3}}. \quad (3.4.8)$$

Використовуючи рівності (3.4.7), (3.4.8), можна записати

$$Mc^2 = \sum_{i=1}^N m_i c^2 - E_{\text{є3}}. \quad (3.4.9)$$

Беручи до уваги, що  $E_{\text{є3}} > 0$ , з рівності (3.4.9) бачимо, що

$$M < \sum_{i=1}^N m_i, \quad (3.4.10)$$

тобто маса зв'язаної системи релятивістських частинок є меншою за суму мас частинок, з яких ця система складається. Таким чином, ми позбавилися введеної раніше величини  $\tilde{U}_{\text{є3}}$ , якій не можна надати чіткого фізичного змісту, вводячи для характеристики зв'язаної системи релятивістських частинок величину  $E_{\text{є3}}$ , яка виражається через маси  $M$  та  $\sum_{i=1}^N m_i$ , що безпосередньо вимірюються в досліді, а також у термінах співвідношення між цими масами (нерівність (3.4.10)) сформулювали умову, за якої система релятивістських частинок утворює зв'язаний стан.

Із співвідношення (3.4.9) впливає можливість дати інше визначення енергії зв'язку системи релятивістських частинок. Насправді, для того, щоб одержати із складного об'єкту сукупність вільних частинок, зовнішні сили

повинні виконати роботу  $A$ , яка витрачається на подолання зв'язку частинок об'єкту між собою, тобто

$$A = \sum_{i=1}^N m_i c^2 - M c^2 = E_{зв}. \quad (3.4.11)$$

Нерівність (3.4.10) наочно демонструє неадитивність маси в релятивістській механіці. За її допомоги можна ввести величину

$$\Delta M = \sum_{i=1}^N m_i - M, \quad (3.4.12)$$

яка називається *дефектом маси системи частинок*. Як впливає із співвідношень (3.4.9), (3.4.11), (3.4.12) енергія зв'язку і дефект маси пов'язані співвідношенням

$$\Delta M = \frac{E_{зв}}{c^2}, \quad (3.4.13)$$

звідки бачимо, що дефект маси системи частинок є *пропорційним до енергії зв'язку*. Цей факт нижче демонструється на конкретних прикладах.

а) *Дефект маси атома водню*. Вважатимемо, що електрон у цьому атомі рухається з нерелятивістською швидкістю  $v_e$ , а протон перебуває в спокої. Крім того, співвідношення  $m_e \ll m_p$  ( $m_e$  – маса електрона,  $m_p$  – маса протона) дозволяє вважати, що центр інерції атома збігається з положенням протона і перебуває в спокої. Тоді закон збереження енергії дає

$$M_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 + T_e + U_{ез}, \quad (3.4.14)$$

де  $M_H$  – маса атома,  $T_e$  – кінетична енергія електрона,  $U_{ез}$  – потенціальна енергія взаємодії електрона і протона, яку, внаслідок того, що протон вважається таким, що перебуває в спокої, можна розглядати просто як потенціальну енергію електрона у зовнішньому полі. Для двох останніх доданків маємо  $T_e = m_e v_e^2 / 2$ ,  $U_{ез} = -e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$ , де зміст позначень такий:  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл – числове значення зарядів електрона і протона,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала,  $r$  – відстань від електрона до протона в ядрі атома.

Візьмемо далі до уваги, що кулонівська сила, яка діє на електрон з боку протона, надає йому нормальне прискорення, тобто,  $e^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2) = m_e v_e^2 / r$ . Використовуючи останнє співвідношення, а також наведені вище вирази для  $T_e$  і  $U_{ез}$ , разом із рівністю (3.4.14), маємо

$$M_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.4.15)$$

Для визначення відстані  $r$  скористаємося борівською теорією атома водню, яка, незважаючи на свою недосконалість, дає вірні вирази для рівнів енергії атома водню. Згідно з цією теорією, момент імпульсу електрона  $L = m_e v_e r$  може набувати тільки таких значень, які визначаються рівністю  $m_e v_e r = n\hbar$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$  – цілі числа, а  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка. Використання

наведеної рівності разом із другим законом Ньютона (1.2.6) для можливих значень відстані  $r$  дає  $r = n^2 r_0$ , де  $r_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e^2}$  – так званий перший борівський радіус. Далі розглядається тільки випадок  $n = 1$ , який відповідає найнижчому (основному) енергетичному стану атома. Тоді з (3.4.15) одержуємо

$$M_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2, \quad (3.4.16)$$

де  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 7,297 \cdot 10^{-3}$  – величина, яку називають електромагнітною сталою тонкої структури.

З виразу (3.4.16) негайно відшукуємо дефект маси, який нас цікавить. Для нього маємо

$$\Delta M = m_p + m_e - M_H = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e. \quad (3.4.17)$$

Якщо для маси електрона використати значення  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг, зі співвідношення (3.4.17) одержимо

$$\Delta M = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e = 2,43 \cdot 10^{-35} \text{ кг}. \quad (3.4.18)$$

Якщо для маси нейтрального атома водню прийняти значення  $M_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, то, використовуючи (3.4.18), в процентному відношенні маємо

$$\frac{\Delta M}{M_H} \cdot 100\% = 1,45 \cdot 10^{-6}\%. \quad (3.4.19)$$

З такою точністю сьогодні маси вимірити неможливо, і тому в розглянутому вище випадку різниця мас, яка визначається рівністю (3.4.19), не є суттєвою.

б) *Дефект маси дейтрона (ядра атома дейтерію)*. Дейтрон складається з двох частинок – протона та нейтрона. За аналогією з попереднім прикладом та використовуючи формулу (3.4.13), можна записати

$$\Delta M = m_p + m_n - M_D = \frac{E_{зв}}{c^2}, \quad (3.4.20)$$

де  $m_p$ ,  $m_n$  – маси відповідно протона і нейтрона,  $M_D$  – маса дейтрона,  $E_{зв}$  – його енергія зв'язку. Використовуючи значення мас частинок  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$  кг,  $M_D = 3,344 \cdot 10^{-27}$  кг, з формули (3.4.20) одержуємо

$$\Delta M = 4 \cdot 10^{-30} \text{ кг}.$$

Порівнюючи цю величину з відповідною для атома водню, бачимо, що остання більша на 5 порядків за дефект маси атома водню. У процентному відношенні для дейтрона маємо

$$\frac{\Delta M}{M_D} \cdot 100\% = 0,12\%.$$

Таке значення дефекту маси значно перебільшує сучасну точність вимірювань і надійно фіксується у досліді. Зазначимо, що таке саме значення для дефекту маси дейтрона можна одержати, розраховуючи його за допомогою формули (3.4.13), використовуючи значення енергії зв'язку  $E_{зв} = 3,552 \cdot 10^{-13}$  Дж.

Наведемо також приклади розрахунків дефекту масу для інших ядер. Так для ядра ізотопу водню  ${}^3\text{H}$  – тритію з масою  $M_T = 5,00827 \cdot 10^{-27}$  кг та енергією зв'язку  $E_{зв} = 13,2 \cdot 10^{-13}$  Дж маємо

$$\Delta M = m_p + 2m_n - M_T = \frac{E_{зв}}{c^2} = 1,47 \cdot 10^{-29} \text{ кг},$$

або

$$\frac{\Delta M}{M_T} \cdot 100\% = 0,29\%.$$

Для  $\alpha$  – частинки (ядра атома гелію  ${}^4\text{He}$ ) при  $M_{{}^4\text{He}} = 6,645 \cdot 10^{-27}$  кг і  $E_{зв} = 4,53 \cdot 10^{-13}$  Дж таке ж саме обчислення дає

$$\Delta M = 2m_p + 2m_n - M_{{}^4\text{He}} = \frac{E_{зв}}{c^2} = 5,03 \cdot 10^{-29} \text{ кг},$$

$$\frac{\Delta M}{M_{{}^4\text{He}}} \cdot 100\% = 0,75\%;$$

для ядра легкого гелію  ${}^3\text{He}$  при  $M_{{}^3\text{He}} = 5,00824 \cdot 10^{-27}$  кг і  $E_{зв} = 12,34886 \cdot 10^{-13}$  Дж одержуємо

$$\Delta M = 2m_p + m_n - M_{{}^3\text{He}} = \frac{E_{зв}}{c^2} = 1,3721 \cdot 10^{-29} \text{ кг},$$

$$\frac{\Delta M}{M_{{}^3\text{He}}} \cdot 100\% = 0,27\%.$$

Підкреслимо, що така велика різниця у дефектах мас для атомних і ядерних систем обумовлена великою різницею в них енергій зв'язку. Ця обставина стає особливо наочною, якщо виразити енергії зв'язку для цих систем в електрон-вольтах. Так для атома водню  $E_{зв} = 13,65$  еВ; для дейтрона  $E_{зв} = 2,23$  МеВ; для ядра тритію (тритона)  $E_{зв} = 8,25$  МеВ; для  $\alpha$  – частинки  $E_{зв} = 28,3$  МеВ; для ядра гелію  ${}^3\text{He}$   $E_{зв} = 7,72$  МеВ.

### 3.5 Перетворення Лоренца для енергії та імпульсу релятивістської частинки

Як було показано раніше (див. 3.3.1), енергія та імпульс вільної частинки створюють чотиривимірний вектор (насправді цей вектор утворюють величини  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$  та  $p_4 = iE/c$ ). Тому під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої вони повинні перетворюватися за законами перетворення проєкцій чотиривимірного вектора. Встановимо ці закони для окремого випадку відносного руху систем координат, зображеного на рисунку 1.4. Є різні можливості для встановлення цих законів: а) використання аналогії між проєкціями чотиривимірного радіус-вектора і проєкціями чотиривимірного імпульсу; б) використання релятивістського закону додавання швидкостей у вигляді (2.4.6), (2.4.7), (2.4.10), (2.4.14); в) безпосереднє визначення формул перетворень, виходячи з визначення вектора імпульсу релятивістської частинки (3.1.1), використовуючи перетворення Лоренца (2.39). Ми скористаємося тут першими двома можливостями, пропонуючи читачеві розглянути можливість в) самостійно.

#### 3.5.1 Використання аналогії між проєкціями чотиривимірного радіус-вектора і проєкціями чотиривимірного імпульсу

Отже, виходимо з того, що проєкції вектора  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$  під час переходу від системи  $K$  до системи  $K'$  перетворюються так само, як проєкції радіус-вектора  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ , а проєкція  $p_4$  — так, як проєкція  $x_4$ . Тоді за аналогією із співвідношенням (2.5.10), пишемо:

$$\begin{aligned} p'_1 &= p_1 \cos i\phi + p_4 \sin i\phi, \\ p'_4 &= -p_1 \sin i\phi + p_4 \cos i\phi, \\ p'_2 &= p_2, p'_3 = p_3. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Використовуючи співвідношення (2.5.9) та (3.5.1), одержуємо остаточно:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{p_1 - (V/c^2) \cdot E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ E' &= \frac{E - Vp_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ p'_2 &= p_2, p'_3 = p_3. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

#### 3.5.2 Використання релятивістського закону додавання швидкостей

Знову розглядаємо окремих випадок відносного руху систем координат, зображений на рисунку 1.4, причому напрям руху частинки може бути довільним. Будемо виходити з визначення вектора імпульсу (3.1.1) та повної енергії частинки (3.3.4). У наведених визначеннях під швидкістю частинки  $\vec{v}$

тут розуміють її швидкість відносно системи  $K$ . Для переходу до системи  $K'$  пишемо

$$\vec{p}' = \frac{m\vec{v}'}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}}, E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}}, \quad (3.5.3)$$

де  $v'$  – швидкість частинки відносно системи  $K'$ . Для обчислення модуля цієї швидкості та її проєкцій скористуємося формулами (2.4.8), (2.4.10). Це дає

$$\begin{aligned} \frac{v'_1}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}} &= \frac{v_1 - V}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} \cdot \sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ \frac{v'_2}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}} &= \frac{v_2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \quad \frac{v'_3}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}} = \frac{v_3}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}'^2/c^2}} &= \frac{1 - v_1 V/c^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} \cdot \sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Підставляючи співвідношення (3.5.4) до рівностей (3.5.3) та користуючись співвідношеннями (3.1.1) та (3.3.4), маємо формули (3.5.2), що й вирішує задачу. За допомогою одержаних формул безпосередньо можна перевірити, що довжина чотиривимірного вектора енергії – імпульсу частинки  $p(p_1, p_2, p_3, p_4 = iE/c)$  під час перетворень, що розглядаються, залишається незмінною.

### 3.5.3 Граничний перехід до ньютонівської механіки

Важливо підкреслити, що формули (3.5.2) містять саме повну енергію частинки, включаючи енергію спокою, а не тільки кінетичну енергію. Цей факт є суттєвим під час переходу до нерелятивістської границі, тобто до випадку  $V \ll c$ . Доведемо це прямим розрахунком. Для випадку, що розглядається, в наведених формулах здійснимо розвинення правих частин до степеневого ряду за величиною  $(V/c)^2$ , зберігаючи головні члени розкладань:

$$p_1 = mv_1, \quad p_2 = mv_2, \quad p_3 = mv_3, \quad E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V}{c}\right)^2.$$

Підставляючи ці вирази до формули (3.5.2), одержуємо

$$\begin{aligned} p'_1 &= mv_1 - mV, \quad p'_2 = mv_2, \quad p'_3 = mv_3, \\ E' &= \frac{1}{2}mv^2 - mvV + \frac{1}{2}mV^2, \end{aligned} \quad (15.5)$$

що збігається з перетвореннями наведених величин у нерелятивістському випадку.

Не становитиме труднощів узагальнення співвідношення (3.5.2) на

випадає, коли вектор  $\vec{V}$  має довільний напрям відносно координатних осей. У цьому випадку маємо

$$\vec{p}'_{\parallel} = \frac{\vec{p}_{\parallel} - E \cdot \vec{V} / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad (3.5.5)$$

$$\vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp}.$$

де  $\vec{p}'_{\parallel}, \vec{p}_{\parallel}$  – поздовжні, а  $\vec{p}'_{\perp}, \vec{p}_{\perp}$  – поперечні до вектора відносної швидкості  $\vec{V}$  систем відліку складові відповідних векторів. Отже, бачимо, що під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої поздовжні та поперечні до вектора відносної швидкості  $\vec{V}$  систем відліку складові тривимірного вектора імпульсу матеріального об'єкту перетворюються не в однаковий спосіб: у той час, як поздовжні складові перетворюються у відповідності з першою з формул (3.5.5), поперечні складові залишаються незмінними. Ця обставина має далекосяжні наслідки, зокрема, в електродинаміці.

### 3.5.4 Про систему центра інерції сукупності релятивістських частинок

У механіці Ньютона-Галілея радіус-вектор центра інерції системи частинок визначається співвідношенням

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (3.5.6)$$

де  $m_i$  і  $\vec{r}_i$  – маса і радіус-вектор  $i$ -тої частинки відповідно. Система відліку, в якій центр інерції системи частинок перебуває в спокої, називається *системою центра інерції (СЦІ)*. У цій системі відліку повний імпульс сукупності частинок дорівнює нулеві.

У релятивістській механіці ввести поняття центра інерції виявляється неможливим насамперед внаслідок того, що вектор швидкості такої точки не може бути представлений як повна похідна за часом. Між тим, тут можна ввести таку систему відліку, відносно якої повний імпульс сукупності частинок дорівнюватиме нулеві. За аналогією з механікою Ньютона - Галілея цю систему також називають системою центра інерції. Задачу, про яку йдеться, можна розв'язати двома способами: а) за допомогою перетворень Лоренца для енергії та імпульсу, б) безпосередньо використовуючи визначення імпульсу частинки (3.1.1).

а) Розглянемо систему частинок, відносно якої зі сталою швидкістю  $V$  відносно осі  $OX$  рухається система  $K'$ . Тоді імпульс і енергія кожної частинки будуть перетворюватися за законами (3.5.2) (або (3.5.5)). Запишемо відповідні закони перетворення проекції імпульсу на вісь  $OX$  для кожної з частинок (вважатимемо для спрощення, що інші проекції імпульсу в системі  $K$  дорівнюють нулеві; тоді, як випливає з (3.5.2), вони дорівнюють нулеві також і в системі  $K'$ ):



$$p_1'^{(1)} = \frac{p_1^{(1)} - (V/c^2) \cdot E^{(1)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, p_1'^{(2)} = \frac{p_1^{(2)} - (V/c^2) \cdot E^{(2)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \dots$$

$$p_1'^{(i)} = \frac{p_1^{(i)} - (V/c^2) \cdot E^{(i)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \dots, p_1'^{(N)} = \frac{p_1^{(N)} - (V/c^2) \cdot E^{(N)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$
(3.5.7)

де в дужках позначений номер частинки. Користуючись далі адитивністю енергії та імпульсу, підсумуємо ліві і праві частини рівностей (3.5.7) окремо, внаслідок чого одержимо

$$P_1' = \frac{P_1 - (V/c^2) \cdot E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$
(3.5.8)

де  $P_1' = p_1'^{(1)} + p_1'^{(2)} + \dots + p_1'^{(N)}$  – проекція на вісь  $oX$  повного імпульсу сукупності частинок у системі  $K'$ ,  $P_1 = p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \dots + p_1^{(N)}$  – така ж сама сума в системі  $K$ ,  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$  – повна енергія системи частинок у системі  $K$ .

З рівності (3.5.8) бачимо, що існує така система відліку, в якій повна проекція  $P_1' = 0$ . Така система відліку рухається відносно системи  $K$  зі швидкістю

$$V = c^2 \frac{P_1}{E};$$
(3.5.9)

вона й є система центра інерції.

б) Застосуємо до кожної з частинок системи формулу (3.1.1) і скористуємося властивостями адитивності імпульсу та енергії. Це дає

$$\vec{V} = c^2 \frac{\vec{P}}{E},$$
(3.5.10)

де  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$  – вектор повного імпульсу сукупності частинок,  $\vec{V}$  – вектор швидкості певної точки, яка й є аналогом нерелятивістського центра інерції. Формули (3.5.9) та (3.5.10) відіграють важливу роль під час аналізу зіткнень релятивістських частинок, зокрема, ядерних реакцій.

Наприкінці зазначимо, що для замкненої системи частинок, які не взаємодіють між собою, і в релятивістському випадку можна ввести поняття центра інерції системи, яке ще в більшій мірі нагадує його нерелятивістський аналог. Для цього перепишемо формулу (3.5.10), використовуючи вираз (3.3.11), у вигляді

$$\vec{V} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^{i=N} \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} E_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} E_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} E_i},$$
(3.5.11)

де  $E_i$  і  $\vec{v}_i$  — повна енергія і швидкість  $i$ -тої частинки. Введемо тепер вектор  $\vec{R}$ , який визначається співвідношенням  $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$  і радіус-вектори окремих частинок  $\vec{r}_i$ . Тоді одержуємо

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^N E_i} \quad (3.5.12)$$

Оскільки припускається, що частинки не взаємодіють між собою (система замкнена), всі  $E_i$  не залежать від часу. Таким чином, повна енергія системи частинок  $E = \sum_{i=1}^N E_i$  також не залежить від часу, тобто можна записати:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N E_i \cdot \vec{r}_i}{E}. \quad (3.5.13)$$

Якщо здійснити інтегрування (3.5.13), одержимо:

$$\vec{R} - \vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \cdot \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N E_i \cdot \vec{r}_{0i}}{E}, \quad (3.5.14) \quad (15.15)$$

де  $\vec{r}_{0i}$  - початковий радіус-вектор  $i$ -тої частинки. Отже, рух замкненої системи з повною енергією  $E$  та імпульсом  $\vec{P}$  відповідає рівномірний рух матеріальної точки з радіус-вектором

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \cdot \vec{r}_i}{E} \quad (3.5.15)$$

зі швидкістю  $\vec{V}$ , що визначається формулою (3.5.11). Якщо задовольняються умови  $v_i \ll c$ , то  $E_i$  переходять у  $m_i c^2$ , а  $E$  — у  $\sum_{i=1}^N m_i c^2 = m c^2$  ( $m$  — маса

системи частинок), а формула (3.5.15) переходить у нерелятивістський вираз (3.5.6). На цьому аналогія між радіус-вектором  $\vec{r}_c$ , що визначається співвідношенням (3.5.6), і вектором  $\vec{R}$  вичерпується. Радіус-вектор  $\vec{r}_c$  визначається для довільної системи частинок і є фіксованою точкою для довільної системи відліку. Радіус-вектор, що визначається співвідношенням (3.5.15), як було зазначено вище, визначений лише для замкненої системи частинок, які не взаємодіють між собою. Крім того, три його проєкції не є проєкціями чотиривимірного вектора, і тому під час перетворень Лоренца не

перетворюються як координати деякої точки. Отже, в різних системах відліку цей вектор визначає різні точки простору.

### 3.6 Про момент імпульсу в релятивістській механіці

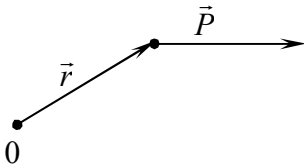


Рисунок 3.2. До визначення вектора моменту імпульсу частинки відносно точки в механіці Ньютона-Галілея

У механіці Ньютона-Галілея момент імпульсу частинки  $\vec{L}$  відносно точки  $O$  (див. рис. 3.2) визначається співвідношенням

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (3.6.1)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор частинки відносно зазначеної точки, а  $\vec{p}$  – вектор імпульсу частинки, яка в цій точці перебуває. Момент імпульсу системи частинок є сумою відповідних моментів окремих частинок. Якщо проєкції радіус-вектора частинки на осі координат позначати не через  $x, y, z$ , а відповідно – як  $x_1, x_2, x_3$ , і так само позначати проєкції імпульсу, то рівність (3.6.1) можна переписати у вигляді трьох скалярних рівностей

$$L_i^{(kl)} = x_k p_l - x_l p_k. \quad (3.6.2)$$

Зміст символів у (3.6.2) такий: трійка  $i, k, l$  приймає значення  $i = 1, k = 2, l = 3; i = 2, k = 3, l = 1; i = 3, k = 1, l = 2$ . Порядок індексів обрано таким, щоб послідовність  $i, k, l \rightarrow 1, 2, 3$  відтворювалася парною кількістю перестановок чисел. Символ  $(kl)$  означає, що проєкція вектора відповідає обертанню у відповідній площині. Так, запис  $L_1^{(23)}$  означає, що це проєкція вектора на вісь  $x_1$  під час обертання в площині  $x_2, x_3$  від осі  $x_2$  до осі  $x_3$ . Розгляд обертання частинки саме у площині, а не навколо осі, викликаний необхідністю узагальненням поняття моменту імпульсу на релятивістський випадок, в якому обертання навколо осі ввести неможливо.

Здійснимо тепер зазначене узагальнення. З цією метою будемо розглядати радіус-вектор частинки та її вектор імпульсу як не тривимірні, а чотиривимірні вектори. Тоді визначення (3.6.2) дає 6 рівностей, де перші 3 збігаються з наведеними вище, а інші – визначаються співвідношеннями

$$L_i^{(4i)} = x_4 p_i - x_i p_4. \quad (3.6.3)$$

Таким чином рівність (3.6.3) визначає вектор

$$\vec{L}_0 = \frac{\vec{L}_4}{ic} = \left( t\vec{p} - \frac{E}{c^2} \vec{r} \right). \quad (3.6.4)$$

Щодо векторів  $\vec{L}, \vec{L}_0$  зазначимо таке.

1) Для замкнених систем обидва вектори зберігаються, при цьому вектор  $\vec{L}_0$  визначає швидкість точки, яка є релятивістським узагальненням центра інерції системи частинок (дивись кінець попереднього параграфа).

2) Вектор  $\vec{L}_0$ , визначений рівністю (3.6.4), лежить у площині векторів

$\vec{p}, \vec{r}$ , а вектор  $\vec{L}$  – у площині, перпендикулярній до останньої. Таким чином, скалярний добуток векторів  $\vec{L} \cdot \vec{L}_0 = 0$ , тобто ці вектори є взаємно ортогональними.

3) Величина  $\vec{L}^2 - c^2 \vec{L}_0^2$  є релятивістським інваріантом.

4) Під час лоренцевих перетворень останніх зазнають лише поздовжні у відношенні до вектора швидкості системи відліку проекції вектора  $\vec{L}$ ; щодо вектора  $\vec{L}_0$ , то перетворень зазнають усі проекції.

Замість двох дійсних векторів  $\vec{L}$  та  $\vec{L}_0$  можна ввести єдиний комплексний вектор

$$\vec{N} = \vec{L} + i\vec{L}_0. \quad (3.6.5)$$

Квадрат дійсної частини вектора  $\vec{N}$ , визначеного співвідношенням (3.6.5), у відповідності з 3) – є лоренцевим інваріантом, а уявної – у відповідності з 2) – дорівнює нулеві.

Для механіки Ньютона – Галілея момент імпульсу системи частинок (зокрема, твердого тіла) є сумою моменту орбітального руху і власного моменту, який є моментом імпульсу системи частинок під час відсутності руху тіла як цілого. Прикладом руху такої системи частинок є добове обертання Землі навколо осі, обертання дзиги та ін. У релятивістській фізиці, як відомо, поняття твердого тіла не існує, оскільки в такому тілі світловий сигнал повинен був би поширюватися миттєво, що суперечить скінченному характеру швидкості світла. З іншого боку, певні експериментальні факти (зокрема, такі, як досліди Штерна і Герлаха, структура атомних спектрів тощо) свідчать про наявність у електрона додаткового ступеня вільності, який в нерелятивістській квантовій теорії може тлумачитися як проекція власного моменту імпульсу на певну вісь (зокрема, на напрям магнітного поля). Цей додатковий ступінь вільності називають *спіном* частинки. Проте це тлумачення має обмежений зміст. Щоб переконатися в цьому, розглянемо обертання електрона навколо певної осі (осі  $z$ ) з нерелятивістської точки зору, роблячи при цьому різні припущення щодо розподілу електричного заряду вздовж нього. Виходимо з того, модуль моменту імпульсу електрона відносно осі  $z$  –  $|L_z| = I\omega$ , де  $I$  – момент інерції, а  $\omega$  – кутова швидкість обертання навколо цієї осі. Згідно з експериментальними даними модуль зазначеного моменту імпульсу для електрона дорівнюватиме  $\hbar/2$ , тобто

$$I\omega = \hbar/2, \quad (3.6.6)$$

де  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка. Крім того вважатимемо, що електрон є кулею з масою  $m$  і зарядом  $r$ . Розглядаючи випадки рівномірного розподілу заряду електрона вздовж його поверхні та по об'єму, бачимо, що для нього  $I = \alpha \cdot mr^2$ , де  $\alpha = 2/3 \approx 0,67$  – для розподілу заряду вздовж поверхні і  $\alpha = 0,4$  – у випадку розподілу по об'єму, якщо вважати, що розподіл маси збігається з розподілом заряду. З наведених даних випливає, що різні припущення про розподіл заряду усередині електрона мало впливають на величину кутової

швидкості його власного обертання. Тому оберемо для оцінки  $\alpha \approx 0,5$ . Більш суттєвим є вибір величини, яка претендує на роль радіуса електрона. Тут є дві величини: а) електричний радіус електрона, який визначається

співвідношенням  $r_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2}$  ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд електрона,

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала); б) комптонівська довжина хвилі (визначена у 3.7.1). Визначимо тепер відповідні кутові швидкості та лінійні швидкості елементів частинки, які лежать на її екваторі. З виразу (3.6.6), враховуючи сказане вище, пишемо:

$$\omega = \frac{\hbar}{2\alpha mr^2} \approx \frac{\hbar}{mr^2}. \quad (3.6.7)$$

Для відповідної лінійної швидкості з рівностей (3.6.6), (3.6.7) одержуємо

$$v = \omega r \approx \frac{\hbar}{mr}. \quad (3.6.8)$$

Для величини  $r$  у випадку а) маємо  $r = 1,42 \cdot 10^{-15}$  м, якщо заряд розподілений вздовж поверхні, і  $r = 1,69 \cdot 10^{-15}$  м, якщо він розподілений по об'єму. Оскільки різниця зазначених величин невелика, вважатимемо надалі  $r \approx 1,5 \cdot 10^{-15}$  м. Підставляючи до виразу (3.6.8) значення маси електрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, значення  $\hbar$  та  $r$ , для шуканої швидкості маємо  $v \approx 7,72 \cdot 10^{10}$  м/с, що перевищує швидкість світла у вакуумі. Якщо в якості радіуса частинки обрати її комптонівську довжину хвилі  $r \approx 2,4 \cdot 10^{-12}$  м (випадок б), розподіл заряду в частинці не має значення), матимемо  $v \approx 0,48 \cdot 10^8$  м/с, що також має порядок швидкості світла у вакуумі. Таким чином, бачимо, що наявність у квантової частинки спіну це суто релятивістський ефект, а тлумачення спіну як власного моменту імпульсу в нерелятивістському випадку має обмежений зміст.

У релятивістській квантовій фізиці під спіном частинки розуміють момент імпульсу частинки в системі відліку, в якій її імпульс дорівнює нулеві, тобто в системі спокою частинки. Зазначимо, що з класичного нерелятивістського визначення моменту імпульсу (3.6.1) випливає, що при  $\vec{p} = 0$  ненульових значень моменту імпульсу не існує. Таким чином, між квантовим і класичним визначенням моменту імпульсу існує принципова різниця.

Слід підкреслити особливості моменту імпульсу частинок з нульовою масою. Оскільки для таких частинок не існує системи спокою, для них неможливо розділити поняття орбітального моменту імпульсу і спіну. Але наявність деякого внутрішнього ступеня вільності у цих частинок має певний прояв навіть на макроскопічному рівні. Зокрема, це проявляється в наявності в електромагнітній хвилі такої характеристики як поляризація. У свою чергу, з формальної точки зору це проявляється у векторному характері електромагнітного поля.

### 3.7 Релятивістські закони збереження. Зіткнення і розпад релятивістських частинок

Під час розгляду основної задачі динаміки важливу роль відіграють *інтеграли руху*. Інформація про них дозволяє глибше проникнути в суть фізичної задачі, здійснити класифікацію станів тощо. Найважливішу роль тут відіграють *адитивні інтеграли руху*, тобто такі, які для системи частинок є сумою відповідних величин для кожної з них. У механіці Ньютона – Галілея відомо 7 таких інтегралів (енергія, 3 компоненти вектора імпульсу і 3 компоненти вектора моменту імпульсу). *Наявність цих інтегралів пов'язана з певними властивостями симетрії простору та часу*. Так, збереження енергії пов'язане з однорідністю часу (на осі часу немає виділених точок, тому немає різниці, яку з них прийняти за початок відліку часу); збереження імпульсу пов'язане з однорідністю простору (у просторі немає виділених точок, тому немає різниці, яку з них прийняти за початок координат); збереження моменту імпульсу пов'язане з ізотропією простору (у просторі немає виділеного напрямку, тому немає різниці, як орієнтувати координатні осі). Якщо будь-яка із зазначених симетрій порушується, відповідний закон збереження перестає виконуватися. Так, в однорідному полі є виділений напрям. Цей напрям є привілейованим під час вибору координатних осей, тому напрям однієї з них природно пов'язати з напрямом поля; проекція моменту імпульсу системи частинок на цей напрям зберігається. У центрально-симетричному полі порушується однорідність простору, і тому порушується закон збереження імпульсу; в той самий час тут зберігається момент імпульсу, бо центрально-симетричне поле не порушує ізотропії простору.

Під час переходу від механіки Ньютона – Галілея до релятивістської роль законів збереження в даному питанні значно зростає. Тут справа полягає в тому, що в релятивістському випадку взагалі рівняння руху без зауважень можна розглядати лише для частинки, яка перебуває у зовнішньому полі або для статичної взаємодії частинок (причини цього розглядалися у п. 3.4.3). *Замість окремих законів збереження енергії та імпульсу в ньютонівській механіці в релятивістській механіці існує єдиний закон збереження чотиривимірною вектора енергії – імпульсу, який є наслідком однорідності чотиривимірною простору*.

Під час вивчення зіткнень релятивістських частинок істотним є те, що пружні та непружні зіткнення, на відміну від механіки Ньютона – Галілея, тут розглядаються з єдиної точки зору, оскільки під час будь-яких зіткнень зберігається повна енергія системи. Проте, під час пружних і непружних зіткнень зміна енергії окремих частинок розподіляється різним способом між зміною енергії спокою і зміною кінетичної енергії частинок.

#### 3.7.1 Пружне зіткнення релятивістських частинок. Ефект Комптона

Розглянемо важливий з фізичної точки зору і практичного застосування приклад пружного зіткнення релятивістських частинок – розсіяння фотонів на

вільних електронах (ефект Комптона). Під час розглядання цього ефекту можна продемонструвати ідеї, які використовуються під час аналізу зіткнень релятивістських частинок. Тут, зокрема, широко використовуються інваріантні співвідношень для чотиривимірних векторів.

Як було зазначено вище, суть ефекту Комптона полягає в розсіянні кванта електромагнітного поля – фотона на вільному електроні. У замкненій системі електрон - квант зберігається чотиривимірний вектор енергії-імпульсу, тобто

$$p_e + p_\gamma = p'_e + p'_\gamma; \quad (3.7.1)$$

тут  $p_e, p_\gamma$  – чотиривимірні вектори енергії-імпульсу електрона і фотона – відповідно – до зіткнення,  $p'_e, p'_\gamma$  – чотиривимірні вектори цих самих частинок

після зіткнення. Ці вектори мають проєкції  $p_e\left(\vec{p}_e, \frac{iE_e}{c}\right)$ ,  $p_\gamma\left(\vec{p}_\gamma, \frac{iE_\gamma}{c}\right)$ ,

$p'_e\left(\vec{p}'_e, \frac{iE'_e}{c}\right)$ ,  $p'_\gamma\left(\vec{p}'_\gamma, \frac{iE'_\gamma}{c}\right)$ , де  $\vec{p}_e, \vec{p}_\gamma, \vec{p}'_e, \vec{p}'_\gamma$  – тривимірні вектори імпульсів

відповідних частинок, а  $E_e, E_\gamma, E'_e, E'_\gamma$  – їхні енергії.

Розв'яжемо (3.7.1) відносно  $p'_e$

$$p'_e = p_e + p_\gamma - p'_\gamma \quad (3.7.2)$$

та піднесемо рівність (3.7.2) до квадрату:

$$p'^2_e = p_e^2 + p_\gamma^2 - p'^2_\gamma + 2(p_e \cdot p_\gamma) - 2(p_e \cdot p'_\gamma) - 2(p'_\gamma \cdot p_\gamma). \quad (3.7.3)$$

У співвідношенні (3.7.3)  $(p_e \cdot p_\gamma)$ ,  $(p_e \cdot p'_\gamma)$ ,  $(p_\gamma \cdot p'_\gamma)$  – скалярні добутки чотиривимірних векторів, які дорівнюють відповідно

$$\begin{aligned} (p_e \cdot p_\gamma) &= \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\gamma - \frac{E_e \cdot E_\gamma}{c^2}, \\ (p_e \cdot p'_\gamma) &= \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_\gamma - \frac{E_e \cdot E'_\gamma}{c^2}, \\ (p_\gamma \cdot p'_\gamma) &= \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}'_\gamma - \frac{E_\gamma \cdot E'_\gamma}{c^2}. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Оскільки ці добутки є інваріантами перетворень Лоренца (як скалярні добутки чотиривимірних векторів), їхні значення не залежать від вибору системи відліку, тому зручно обрати таку систему, в якій  $\vec{p}_e = 0$ , тобто таку, в якій електрон до зіткнення перебував у спокої. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} (p_e \cdot p_\gamma) &= -\frac{E_e \cdot E_\gamma}{c^2}, \\ (p_e \cdot p'_\gamma) &= -\frac{E_e \cdot E'_\gamma}{c^2}; \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

тут  $E_e = mc^2$  – власна енергія електрона.

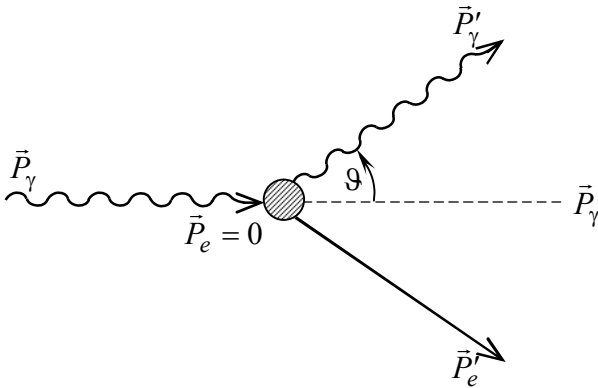
Для скалярного добутку  $(p_\gamma \cdot p'_\gamma)$  маємо

$$(p_\gamma \cdot p'_\gamma) = |\vec{p}_\gamma| \cdot |\vec{p}'_\gamma| \cos \vartheta - \frac{E_\gamma \cdot E'_\gamma}{c^2}, \quad (3.7.6)$$

де  $\vartheta$  – кут розсіяння кванта (див. рис. 3.3).

Далі врахуємо співвідношення (3.3.8), і, підставляючи формули (3.7.4) і (3.7.5) до (3.7.6), одержуємо

$$m_0 E_\gamma - m_0 E'_\gamma + \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} (\cos \vartheta - 1) = 0. \quad (3.7.7)$$



Під час одержання рівності (3.7.7) враховано, що маса кванта дорівнює нулеві, тобто  $p_\gamma^2 = p'^2_\gamma = 0$ , а  $p_e^2 = p'^2_e = -(mc)^2$ . Візьмемо також до уваги, що енергія кванта дорівнює

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3.7.8)$$

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'},$$

Рисунок 3.3. До теорії ефекту Комптона

де  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $\lambda$  – довжина хвилі випромінювання, яка відповідає кванту до розсіяння, а  $\lambda'$  – після. Тоді, використовуючи (3.7.7) і (3.7.8), пишемо:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = hc \left( \frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} \right) = \frac{h}{mc} \cdot (1 - \cos \vartheta). \quad (3.7.9)$$

Величина  $\lambda_c = h/(mc) = 2,42 \cdot 10^{-12}$  м називається *комptonівською довжиною хвилі* електрона. Остаточний результат для зміни довжини хвилі випромінювання під час комptonівського розсіяння (комptonівське зміщення) можна записати у вигляді

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (3.7.10)$$

Аналізуючи вираз (3.7.10), можна дійти такі висновки.

1) Оскільки  $\lambda_c \sim 1/m$ , зі збільшенням маси розсіювача комptonівське зміщення  $\Delta\lambda$  зменшується. Тому ефект Комптона практично не спостерігається на зв'язаних електронах – тут під  $m$  слід розуміти масу атома; передача енергії атому в цілому майже відсутня, і енергія кванта не змінюється.

2) Максимальне зміщення довжини хвилі спостерігається для кута  $\vartheta = \pi$  (розсіяння назад), а мінімальне – для кута  $\vartheta = 0$  (розсіяння вперед).

3) Для видимого діапазону ефект Комптона не спостерігається, тому що тут величина зміщення порівняна з похибкою вимірювання довжини хвилі.



Урахування ефекту Комптона відіграє важливу роль під час аналізу процесів проходження  $\gamma$ -випромінювання через речовину; він також використовується в геофізичних методах пошуку та розвідки корисних копалин тощо.

### 3.7.2 Випромінювання Вавілова – Черенкова

Вільний електрон у вакуумі не випромінює електромагнітних хвиль. Це є наслідком спеціального принципу відносності: в системі відліку, пов'язаній з електроном, не повинно спостерігатися будь-яких додаткових фізичних ефектів у порівнянні з тими, що відбуваються в системі відліку, відносно якої електрон рухається рівномірно і прямолінійно. Можна довести, що неможливість випромінювання для вільного електрона є наслідком збереження для нього вектора енергії - імпульсу, в чому читачеві пропонується переконатися самостійно.

Наявність діелектрика, в якому може рухатися електрон, кардинально змінює ситуацію. Покажемо це, використовуючи квантове тлумачення поля випромінювання, як сукупності відповідних до нього квантів. Отже, нехай електрон, який рухається рівномірно з чотиривимірним імпульсом  $p_e$ , випускає квант з чотиривимірним імпульсом  $p_\gamma$ . Тоді внаслідок закону збереження чотиривимірний імпульсу маємо

$$p_e = p'_e + p_\gamma, \quad (3.7.11)$$

де  $p'_e$  – чотиривимірний імпульс електрона після випускання кванта. Далі розв'яжемо рівність (3.7.11) відносно  $p'_e$ :

$$p'_e = p_e - p_\gamma, \quad (3.7.12)$$

піднесемо вираз (3.7.12) до квадрату, після чого одержимо

$$p_e'^2 = p_e^2 + p_\gamma^2 - 2(p_e \cdot p_\gamma), \quad (3.7.13)$$

де

$$\begin{aligned} p_e'^2 &= \vec{p}_e'^2 - (E_e'/c)^2 = -(mc)^2; \quad p_e^2 = \vec{p}_e^2 - (E_e/c)^2 = -(mc)^2; \\ p_\gamma^2 &= \vec{p}_\gamma^2 - (E_\gamma/c)^2; \\ (p_e \cdot p_\gamma) &= \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\gamma - E_e \cdot E_\gamma / c^2 = |\vec{p}_e| \cdot |\vec{p}_\gamma| \cdot \cos \vartheta - E_e \cdot E_\gamma / c^2. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Тут позначення такі самі, як у попередньому прикладі:  $p_e^2, p_e'^2, p_\gamma^2, (p_e \cdot p_\gamma)$  – квадрати і скалярні добутки чотиривимірних векторів енергії – імпульсу частинок,  $\vartheta$  – кут між напрямками руху електрона та випущеного кванта (див. рис. 3.4а).

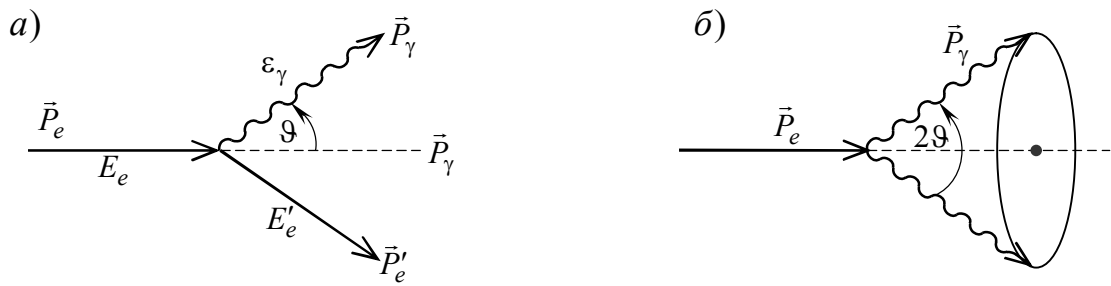


Рисунок 3.4. До теорії ефекту Вавілова – Черенкова:  
 а – додержання законів збереження енергії та імпульсу;  
 б – конус випромінювання

У вакуумі  $p_\gamma^2 = \vec{p}_\gamma^2 - E_\gamma^2/c^2 = 0$  (див. 3.3.2); щодо діелектрика, це не так. Насправді, модуль імпульсу кванта визначається рівністю

$$|\vec{p}_\gamma| = \hbar|\vec{k}|, \quad (3.7.15)$$

де  $\hbar = h/2\pi$ ,  $\vec{k}$  – хвильовий вектор хвилі, яка відповідає даному кванту. Для хвилі будь-якої природи зв'язок між циклічною частотою коливань  $\omega$ , модулем хвильового вектора  $|\vec{k}|$  і фазовою швидкістю поширення хвилі  $c'$  дається співвідношенням

$$|\vec{k}| = \omega/c'. \quad (3.7.16)$$

Для електромагнітної хвилі

$$c' = \frac{c}{n} \quad (3.7.17)$$

де  $n$  – показник заломлення діелектрика. Використовуючи другу з формул (3.7.14), а також формули (3.3.8), (3.3.12), (3.7.15) – (3.7.17), маємо

$$p_\gamma^2 = \frac{n^2 - 1}{c^2} \cdot E_\gamma^2. \quad (3.7.17)$$

Використовуючи вирази (3.7.13), (3.7.14) та (3.7.17), одержуємо

$$\frac{n^2 - 1}{c^2} \cdot E_\gamma^2 = 2 \frac{E_e \cdot E_\gamma}{c^2} \left( \frac{v_e n}{c} \cdot \cos \vartheta - 1 \right), \quad (3.7.18)$$

де  $v_e$  – швидкість електрона (під час одержання співвідношення (3.7.18) було використано рівність (3.3.11)).

Із співвідношення (3.7.18) визначаємо кут між імпульсами рухомого електрона і випущеного фотона

$$\cos \vartheta = \frac{c}{n v_e} \left( 1 + \frac{1}{2} (n^2 - 1) \frac{E_\gamma}{E_e} \right) \quad (3.7.19)$$

Оскільки має задовольнятися нерівність  $\cos \vartheta \leq 1$ , з формули випливає, що супроводжує електрон, який рухається рівномірно, можливо лише за виконання умови

$$\frac{c}{n\nu_e} \leq 1, \quad (3.7.20)$$

тобто, якщо електрон рухається в діелектрику зі швидкістю, що перевищує фазову швидкість світла в даному середовищі.

Таким чином, за виконання умови (3.7.20) під час руху зарядженої частинки в діелектрику виникає випромінювання, яке поширюється вздовж поверхні конуса з кутом розчину  $2\vartheta$  (див. рис. 3.4б). Зі збільшенням швидкості частинки кут розчину конуса зростає.

Якщо взяти до уваги, що енергія фотона  $E_\gamma = hc/\lambda$ , а довжина хвилі випромінювання в діелектрику  $\lambda = \lambda_0/n$ , де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі, яка відповідає даному фотону, то другий доданок у дужках формули (3.7.18) може бути записаний у вигляді  $\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{hc}{\lambda_0 E_e}$ . Цей доданок містить сталу Планка

$h$ , тобто він є квантовою поправкою до класичного результату (враховує віддачу електрона під час випромінювання). У класичному випадку маємо:

$$\cos \vartheta = \frac{c}{n\nu_e} \quad (3.7.21)$$

Саме в такому вигляді цей результат був вперше одержаний в 1937р. І.Є.Таммом і І.М.Франком, а з урахуванням квантової поправки – в 1940р. В.Л. Гінзбургом.

З фізичної точки зору можливість випромінювання електрона, який рухається рівномірно в діелектрику, пов'язана з тим, що в даному випадку його не можна розглядати як вільний. Його взаємодія з атомами і молекулами середовища призводить до відрізнення швидкості поширення кванта від  $c$  і до заміни її на  $c' = \frac{c}{n}$ , що враховується формальним введенням показника заломлення діелектрика. Якщо  $n = 1$  (вакуум), нерівність (3.7.20) не має місця, і випромінювання немає.

Випромінювання Вавілова – Черенкова спостерігається у вигляді синюватого свічення під час руху в діелектрику інтенсивного пучка частинок. На його основі створені черенковські лічильники заряджених частинок, за допомогою яких можна реєструвати ці частинки, виміряти величини і напрями їхніх швидкостей.

### 3.7.3 Самовільний розпад частинки

Нехай частинка з масою  $M$  розпадається на дві частинки. Тоді застосування закону збереження енергії в системі спокою вихідної частинки, дає

$$Mc^2 = E_1 + E_2, \quad (3.7.22)$$

де  $E_1$  і  $E_2$  – повні енергії створених частинок. Як випливає з (3.3.4),  $E_1 > m_1 c^2, E_2 > m_2 c^2$  ( $m_1$  і  $m_2$  – маси створених частинок), тому розпад відбувається лише за виконання умови

$$M > m_1 + m_2. \quad (17.22)$$

Такий розпад можна розглядати як *екзотермічну реакцію з енергією*  $Q = (M - m_1 - m_2) \cdot c^2 > 0$  (див. 3.7.4).

Якщо вихідна частинка стабільна, (тобто, якщо  $M < m_1 + m_2$ ), то для її розпаду їй необхідно надати додаткову енергію  $\Delta E \geq (m_1 + m_2 - M) \cdot c^2 > 0$ , (яка в даному випадку відіграє роль енергії зв'язку складеної частинки (3.4.10).

Визначимо енергії створених частинок. Для цього, поряд із законом збереження енергії, використаємо закон збереження імпульсу. Оскільки частинка, що розпадається, перебуває в спокої, маємо

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= 0, \\ \vec{p}_1^2 &= \vec{p}_2^2, \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

де  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$  – імпульси створених частинок. Використовуючи співвідношення (3.3.8) і (3.7.24), одержуємо

$$E_1^2 - (m_1 c^2)^2 = E_2^2 - (m_2 c^2)^2 \quad (3.7.24)$$

Розв'язуючи систему (3.7.22), (3.7.24), для енергії зазначених частинок одержуємо

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \cdot c^2, \\ E_2 &= \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \cdot c^2 \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

З виразів (3.7.25) визначимо кінетичні енергії частинок –  $T_1$  і  $T_2$ . Згідно з (3.3.7) пишемо

$$\begin{aligned} T_1 &= E_1 - m_1 c^2 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M} \cdot c^2, \\ T_2 &= E_2 - m_2 c^2 = \frac{(M - m_2)^2 - m_1^2}{2M} \cdot c^2. \end{aligned}$$

Ці формули можна спростити, якщо використати вираз для енергії реакції і врахувати, що в даному випадку  $Q > 0$ , а також ввести позначення для різниці мас створених частинок  $\delta m = m_2 - m_1$ . Тоді для  $T_1$  і  $T_2$  одержуємо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} Q \cdot (1 + \delta m / M), \\ T_2 &= \frac{1}{2} Q \cdot (1 - \delta m / M). \end{aligned}$$

Отже, з двох утворених під час самовільного розпаду частинок на частку більш важкої частинки припадає менша кінетична енергія, ніж на частку більш легкої.

### 3.7.4 Непружні зіткнення релятивістських частинок. Ядерні реакції. Поріг та енергія реакції.

Під ядерною реакцією розуміють взаємне перетворення ядер або суб'ядерних частинок, яке зумовлено їхньою взаємодією. Цьому визначенню ядерної реакції відповідає як окремий випадок також пружне зіткнення частинок. Тут, проте, увага зосереджується на реакціях, пов'язаних з непружними зіткненнями, а саме – з реакціями вигляду

$$A_1 + A_2 \rightarrow A'_1 + A'_2 + \dots + A'_N, \quad (3.7.26)$$

де в лівій частині стоять символи частинок, які вступили в реакцію, а в правій – частинок, утворених внаслідок протікання реакції.

Повна енергія в процесі протікання реакції, описаної рівністю (3.7.26), зберігається. Тому можна записати

$$E_1 + E_2 \rightarrow E'_1 + E'_2 + \dots + E'_N. \quad (3.7.27)$$

В лівій частині цій рівності стоять повні енергії частинок, що вступили в реакцію, а в правій – повні енергії продуктів реакції.

Перепишемо тепер співвідношення (3.7.27) за допомогою формули (3.3.4), розглядаючи повну енергію частинки, як суму кінетичної енергії та енергії спокою. Тоді одержимо

$$T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2 = T'_1 + m'_1 c^2 + T'_2 + m'_2 c^2 + \dots + T'_N + m'_N c^2.$$

В останній рівності перенесемо члени, що відповідають кінетичним енергіям частинок, в один бік, а члени з енергіями спокою – в інший, після чого матимемо

$$T'_1 + T'_2 + \dots + T'_N - (T_1 + T_2) = ((m_1 + m_2) - (m'_1 + m'_2 + \dots + m'_N)) \cdot c^2. \quad (3.7.28)$$

Величина, яка дорівнює

$$Q = \left( m_1 + m_2 - \sum_{i=1}^N m'_i \right) \cdot c^2, \quad (3.7.29)$$

називається *енергією реакції*. Як випливає з (3.7.28), це є різниця між кінетичними енергіями частинок, які вступили до реакції, та її продуктів.

Як бачимо з виразу (3.7.29) якщо  $Q > 0$ , реакція протікає з виділенням енергії. Така реакція називається *екзотермічною*. Якщо  $Q < 0$ , реакція протікає з поглинанням енергії і називається *ендотермічною*. Для того, щоб ендотермічна реакція мала місце, частинки, що стикаються, повинні мати деяку мінімальну кінетичну енергію, починаючи з якої реакція стає можливою в енергетичному відношенні. Зазначена енергія називається *порогом реакції*.

Поняття порога реакції можна пояснити на простому нерелятивістському прикладі. Відомо, що кінетична енергія  $T$  системи, яка складається з двох частинок, у нерелятивістській механіці може бути представлена у вигляді суми

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2}\mu \vec{V}^2, \quad (3.7.30)$$

де  $\vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$  – швидкість руху центра інерції системи,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  –

зведена маса системи,  $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  – відносна швидкість частинок. Перший член у сумі (3.7.30) являє собою енергію руху системи як цілого, а другий – енергію її відносного руху. Яким би не був характер процесу зіткнення частинок, перший доданок у сумі (3.7.30) завжди зберігається, оскільки в нерелятивістській механіці повна маса і вектор швидкості центра інерції замкненій системі зберігаються. Тому в інші види енергії може перетворитися лише енергія відносного руху частинок, тобто

$$|Q| = \frac{1}{2}\mu \vec{V}^2. \quad (3.7.31)$$

Таким чином, нерелятивістський поріг визначається співвідношенням

$$T_{\text{пор}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \vec{V}_c^2 + |Q|. \quad (3.7.32)$$

Інакше кажучи, поріг реакції включає в себе енергію реакції так само як кінетичну енергію руху системи частинок як цілого.

Формулі (3.7.32) можна надати більш зручного вигляду, якщо розглядати зіткнення в тій системі відліку, в якій одна з частинок, (наприклад, друга) перебуває в спокої, тобто, якщо,  $\vec{v}_2 = 0$ . Тоді у відповідності з визначенням порога реакції він дорівнює кінетичній енергії першої частинки, або

$$T_{\text{пор}} = \frac{1}{2}m_1 \vec{v}_1^2. \quad (3.7.33)$$

Якщо за допомогою співвідношення (3.7.31) виключити з (3.7.33) швидкість першої частинки, для *нерелятивістського порога* одержимо

$$T_{\text{пор}} = |Q| \cdot (1 + m_1/m_2). \quad (3.7.34)$$

Перейдемо тепер до визначення порога в релятивістському випадку. Тут за умови того, що енергія частинок, які стикаються, є пороговою, всі створені частинки мають перебувати в спокої в системі центра інерції. Тому, якщо друга частинка до зіткнення перебуває в спокої, інваріантне співвідношення (3.3.13) можна записати у вигляді

$$\vec{p}_1^2 - (E_1 + m_2 c^2)^2 / c^2 = -c^2 \cdot \left( \sum_{i=1}^N m'_i \right)^2 \quad (3.7.35)$$

У наведеній рівності використана інваріантність співвідношення (3.3.13): його ліва частина взята в лабораторній системі відліку (тобто в системі спокою другої частинки), а права – в системі центра інерції (тобто, в системі відліку, в якій повний імпульс системи частинок дорівнює нулеві). Далі, за допомогою рівності (3.3.9) для першої частинки виключаємо  $\vec{p}_1^2$  і, використовуючи співвідношення (3.3.7), перейдемо до кінетичної енергії. Кінетична енергія

першої (яка налітає) частинки саме й є пороговою, оскільки всі утворені частинки в системі центра інерції мають нульові імпульси. Таким чином, використовуючи співвідношення (3.3.4),(3.7.35), маємо

$$\left(T_{nop} + m_1 c^2\right)^2 / c^2 - (m_1 c)^2 - \left(T_{nop} + m_1 c^2 + m_2 c^2\right)^2 / c^2 = -c^2 \left(\sum_{i=1}^N m'_i\right)^2. \quad (3.7.36)$$

Розв'язуючи останню рівність відносно  $T_{nop}$ , одержуємо

$$T_{nop} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m'_i + m_1 + m_2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N m'_i - (m_1 + m_2)\right) \cdot c^2}{2m_2}. \quad (3.7.37)$$

Другий множник чисельника цього виразу є  $-Q/c^2 = |Q|/c^2$  (див. співвідношення (3.7.29)). Щодо першого множника чисельника співвідношення (3.7.37), то його можна перетворити за допомогою цього самого співвідношення, якщо виключити суму мас продуктів реакції, після чого маємо *порог реакції в релятивістському випадку*:

$$T_{nop} = |Q| \cdot \left(1 + m_1/m_2 + |Q|/2m_2 c^2\right) \quad (3.7.38)$$

Якщо  $|Q| \ll m_2 c^2$ , з виразу (3.7.38) одержуємо нерелятивістську формулу (3.7.34). В ультрарелятивістському випадку ( $|Q| \gg m_2 c^2$ ) можна записати

$$T_{nop} = Q^2 / 2m_2 c^2, \quad (3.7.39)$$

тобто порогова енергія зростає пропорційно до квадрату енергії реакції, в той самий час, як для нерелятивістського випадку це зростання носить лінійний характер (див. співвідношення (3.7.34)).

Розглянемо деякі приклади застосування одержаних формул для обчислення енергії реакції та її порога.

### 3.7.4.1 Народження пари електрон-позитрон ( $e^+e^-$ ) фотоном у полі атомного ядра

Дослідимо процес  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  (народження фотоном пари електрон-позитрон). Цей процес можна розглядати як реакцію розпаду фотона з утворенням пари  $e^+e^-$ . Можна, проте, довести, що такий процес, так само як випромінювання кванта вільним електроном, заборонений законами збереження енергії та імпульсу. Отже, *процес  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  може відбуватися лише за наявності ще одного тіла, якому фотон може передати надлишковий імпульс*. Цим тілом може виявитися атомне ядро з масою  $M$ . Оскільки маса фотона  $m_1 = 0$ , маємо  $m_2 = M$ . У процесі реакції створено 2 частинки з

однаковими масами  $m$  кожна, а ядро з масою  $M$  збереглося, тому в даному випадку  $\sum_{i=1}^N m'_i = 2m + M$  і для енергії реакції маємо

$$-Q = \left( \sum_{i=1}^2 m'_i - (m_1 + m_2) \right) \cdot c^2 = (2m + M - M)c^2 = 2mc^2. \quad (3.7.40)$$

Таким чином, енергія зазначеної реакції являє собою сумарну енергію спокою частинок, утворених у процесі реакції.

Знайдемо тепер поріг реакції, використовуючи формулу (3.7.38). Оскільки тут  $m_1 = 0, m_2 = M, |Q| = 2mc^2$ , одержуємо

$$T_{\text{пор}} = |Q| \cdot (1 + m/M).$$

### 3.7.4.2 Поріг народження пари нуклон-антинуклон (антипротонний поріг)<sup>\*)</sup>

Реакція з утворенням зазначеної пари має вигляд



Тут  $n$  – позначення нейтрона,  $p$  – протона,  $\bar{p}$  – антипротона. Вважаючи маси всіх нуклонів та їх античастинок у реакції (3.7.41) однаковими і такими, що дорівнюють одна одній, після використання (3.7.29) маємо  $m_1 = m_2 = M, m'_1 = m'_2 = m'_3 = m'_4 = M$ , внаслідок чого

$$|Q| = (4M - 2M) \cdot c^2. \quad (3.7.42)$$

Для визначення  $T_{\text{пор}}$  використовуємо формулу (3.7.38):

$$T_{\text{пор}} = \frac{6M \cdot 2Mc^2}{2M} = 6Mc^2. \quad (3.7.43)$$

Вираз (3.7.43) показує, що в даному випадку  $T_{\text{пор}}/|Q| = 3$ , тобто лише третина кінетичної енергії налітаючого нейтрона перетворюється на енергію реакції, в той самий час, коли  $\frac{2}{3}$  цієї енергії пов'язано з кінетичною енергією руху системи як цілого.

### 3.7.4.3 Ідея прискорювачів на зустрічних пучках

З формули (3.7.39) можна побачити, що, коли  $|Q| \gg m_2c^2$ ,  $T_{\text{пор}}$  зростає квадратично, тобто під час одержання великих енергій реакції більша частина кінетичної енергії частинки, яка налітає, зростає, не перетворюючись на енергію реакції, і витрачається на рух системи частинок як цілого.

<sup>\*)</sup> Реакція з утворенням пари  $p$  і  $\bar{p}$  під час зіткнення двох нейтронів не може відбуватися за схемою  $n + n \rightarrow p + \bar{p}$  внаслідок закону збереження баріонного заряду  $B$  (для протона і нейтрона  $B = +1$ , для античастинок  $B = -1$ ).



У прискорювачі на зустрічних пучках зіткнення частинок відбуваються в системі їх центра інерції, тому тут  $T_{пор} = |Q|$ , де  $T_{пор}$  – кінетична енергія частинки в кожному з пучків відносно тієї системи відліку, в якій повний імпульс системи частинок дорівнює нулеві.

Нехай електрон у кожному з пучків має кінетичну енергію, якій відповідає енергія реакції  $Q = 1,2 \text{ Гев}$ . Для того, щоб таку енергію одержати у звичайному прискорювачі (в цьому випадку  $\frac{|Q|}{2mc^2} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \text{ МеВ}}{1,022 \text{ МеВ}} \approx 10^3$ , і можна користуватися формулою (3.7.39)), порогова енергія електрона має бути  $T_{пор} = 1,44 \cdot 10^6 \text{ МеВ}$ , тобто для здійснення тієї самої реакції енергія електрона у звичайному прискорювачі повинна перебільшувати його енергію в прискорювачі на зустрічних пучках на 3 порядки.

#### 3.7.4.4 Реакція поділу ядер урану

Уран – єдиний хімічний елемент, який, як ядерне паливо, зустрічається в природних умовах. Природний уран містить 0,7% ізоотопу  $^{235}\text{U}$  і 99,3% ізоотопу  $^{238}\text{U}$ . Використання урану як ядерного палива ґрунтується на можливості протікання в ньому реакції поділу ядер, під час якої утворюється декілька вільних нейтронів. Зазнаючи зіткнення з іншими ядрами урану, ці нейтрони ініціюють їхній подальший поділ з утворенням нових нейтронів та т.д. Взагалі – це схема так званої *ланцюгової реакції*, що відбувається в природному урані, і можливість протікання якої є фізичною основою ядерної енергетики. Проте різні ізоотопи урану відіграють неоднакову роль під час протікання ланцюгової реакції. Так, ядра ізоотопу  $^{235}\text{U}$  зазнають поділу нейтронами різних енергій – як швидкими, так і повільними. У той самий час ядра ізоотопу  $^{238}\text{U}$  зазнають поділу тільки швидкими нейтронами, поглинаючи повільні. Не вдаючись до детального аналізу роботи ядерного реактора, в якому відбуваються процеси, що розглядаються, спробуємо дати відповідь на одне питання – чому ядра ізоотопу  $^{235}\text{U}$  зазнають поділу нейтронами різних енергій, в той самий час як ядра ізоотопу  $^{238}\text{U}$  – тільки швидкими. Зазначимо, що *поділ ядра відбувається під дією нейтронів і протікає через утворення складеного ядра, яке виявляється в збудженому стані; розпаду зазнає саме це ядро*.

Для кількісного аналізу процесу необхідно знати закон взаємодії між нуклонами, який досі невідомий. Тому для вирішення задач ядерної фізики користуються різними модельними уявленнями про ядро. Однією з найбільш поширених є модель рідкої краплі. У цій моделі ядро розглядається як крапля рідини, в якій діють сили поверхневого натягу (сили притягання між всіма нуклонами) і сили кулонівського відштовхування між протонами, при цьому енергія ядра та його енергія зв'язку ядра в основному визначається дією цих сил. Як показує розрахунок, якщо  $Z^2/A > 45$ , ядро взагалі не може існувати, бо

воно відразу буде поділятися. Тому всі подальші міркування, наведені нижче, стосуються випадку  $Z^2/A < 45$ .

Схематично процес поділу ядра можна зобразити рисунками 3.5, 3.6. Спочатку проміжне ядро має сферичну форму А, якій відповідає найменша поверхня та отже найменша енергія ядра. Під час поглинання нейтрона, ядро збуджується, тобто енергія його зростає. Зростання енергії супроводжується зміною форми поверхні ядра та збільшенням її площі, що призводить до збільшення поверхневої енергії, а також до збільшення середньої відстані між нуклонами, внаслідок чого зменшується внесок енергії кулонівського відштовхування між протонами до енергії ядра (за цих процесів об'єм ядра не змінюється, оскільки ядерна речовина майже нестислива).

Збуджене ядро зазнає коливань, під час яких змінюється його форма. Послідовність зазначених змін форми ядра під час збудження зображена на рисунку 3.5. Якщо енергія збудження недостатня, щоб викликати стадії

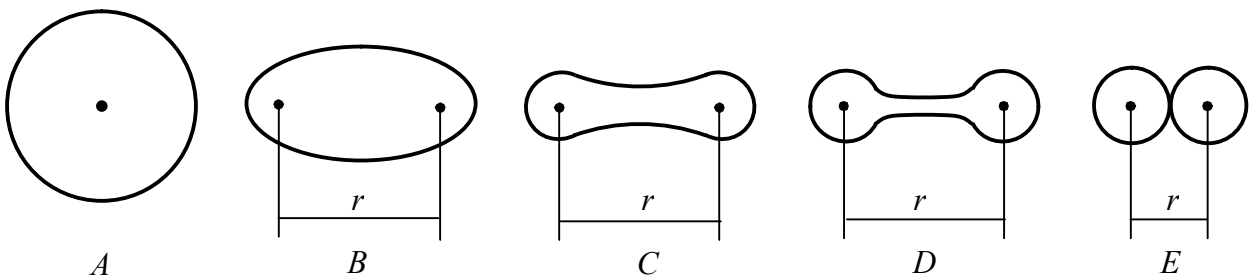


Рисунок 3.5. Схематичне зображення послідовних стадій поділу ядра

деформації ядра, які слідують за станом В, внаслідок коливань ядро повернеться до стану А. Але, якщо енергія збудження достатня для набуття ядром форми С, малоймовірно, щоб воно повернулось до стану А. Після цього ядро проходить через стани D і E, що й призводить його до поділу на два окремих ядра – 2 уламки. На рисунку 3.6 зображена залежність енергії зв'язку проміжного ядра від параметра деформації ядра  $r$ , який на останній стадії

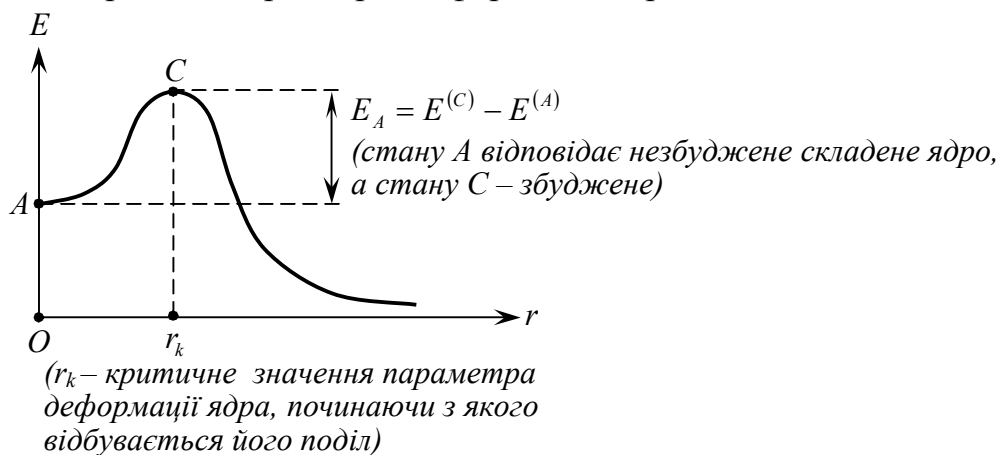


Рисунок 3.6. Залежність енергії проміжного ядра від параметра деформації ядра

переходить у відстань між центрами ядер - уламків. Точці А відповідає незбуджене ядро, а точці С – збуджений стан, з якого починається поділ ядра. Різниця енергій ядра, що відповідають цим станам, називається *енергією активації ядра*  $E_A$ . Інакше кажучи, *енергія активації – це мінімальна енергія збудження ядра, за якою процес його поділу стає можливим*.

Нехай нейтрон з кінетичною енергією  $T_n$  стикається з нерухомим ядром і захоплюється останнім. Внаслідок цього виникає складне ядро у збудженому стані. Тоді закон збереження енергії дає

$$T_n + m_n c^2 + M(A, Z)c^2 = M'(A+1, Z)c^2 + T'; \quad (3.7.44)$$

тут  $m_n$  – маса нейтрона,  $M(A, Z)$  – маса вихідного ядра,  $M'(A+1, Z)$  – маса збудженого ядра, одержаного внаслідок реакції,  $T'$  – кінетична енергія цього ядра. Вважатимемо нейтрони нерелятивістськими; це припустимо, якщо задовольняється рівність  $T_n \ll m_n c^2$ . У той самий час ядро є *релятивістською системою, оскільки енергія зв'язку ядра порівняна з власною енергією частинок, з яких воно складається*.

Далі використовуємо закон збереження імпульсу

$$p_n = p',$$

де  $p_n$  – імпульс нейтрона,  $p'$  – імпульс ядра, одержаного внаслідок реакції. Розраховуючи після зроблених зауважень зазначені імпульси за нерелятивістськими формулами, маємо

$$\sqrt{2m_n T_n} = \sqrt{2M T'},$$

або

$$T' = \frac{m_n}{M'} \cdot T_n.$$

З останнього співвідношення та з нерівності  $m_n \ll M'$  випливає нерівність  $T' \ll T_n$ . Оскільки вважається, що  $T_n \ll M'c^2$ , останнім доданком у правій частині формули (3.7.44) можна знехтувати. Тоді для кінетичної енергії нейтрона, який налітає, маємо

$$T_n = E_{зб} - E_{зв.n}. \quad (3.7.45)$$

У формулі (3.7.45)

$$E_{зб} = (M'(A+1, Z) - M(A+1, Z))c^2 \quad (3.7.46)$$

являє собою енергію збудження ядра, а вираз

$$E_{зв.n} = (m_n + M(A, Z) - M(A+1, Z))c^2 \quad (3.7.47)$$

є енергією зв'язку нейтрона в складеному незбудженому ядрі. Фізичний зміст останньої формули можна зрозуміти краще, якщо звернутися до загального виразу для енергії зв'язку системи частинок (3.4.11). Застосування цього виразу для енергії зв'язку ядра дає

$$E_{зв} = (Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z))c^2, \quad (3.7.48)$$

Використовуючи співвідношення (3.7.46) – (3.7.48), енергії збудження ядра і енергії зв'язку нейтрона в ядрі можна також надати вигляду

$$E_{зб} = E_{зб}(A+1, Z) - E'_{зб}(A+1, Z), \quad (3.7.49)$$

$$E_{зб.н} = E_{зб}(A+1, Z) - E_{зб}(A, Z). \quad (3.7.50)$$

У формулах (3.7.47), (3.7.50) позначення такі:  $m_p$  – маса протона,  $m_n$  – маса нейтрона,  $E_{зб}(A+1, Z)$  – енергія зв'язку незбудженого складеного ядра, одержаного внаслідок реакції,  $E'_{зб}(A+1, Z)$  – енергія зв'язку збудженого ядра, а  $E_{зб}(A, Z)$  енергія зв'язку вихідного ядра. Поділ ядра відбувається, якщо енергія збудження  $E_{зб}$  перевищує деякий ефективний поріг  $E_A$ , який й виявляється *енергією активації поділу*, тобто поділ ядра має місце за умови  $E_{зб} \geq E_A$ . Тоді з рівності (3.7.45) для кінетичної енергії нейтрона, за якою відбувається поділ ядра, одержуємо

$$T_n \geq E_A - E_{зб.н}. \quad (3.7.51)$$

Наведене співвідношення можна використати для аналізу поділу ядер  $^{235}\text{U}$  і  $^{238}\text{U}$ . Зауважимо також, що з фізичного змісту величини параметра поділу  $Z^2/A$  можна побачити, що з її зростанням енергія активації поділу ядра зменшується, прямуючи до нуля для критичного значення  $Z^2/A = 45$ .

Під час захоплення нейтрона ядром  $^{235}\text{U}$  утворюється проміжне ядро  $^{236}\text{U}$ , а ядром  $^{238}\text{U}$  – ядро  $^{239}\text{U}$ . Для цих ядер маємо: для  $^{236}\text{U}$  –  $Z^2/A = 35,86$ , для  $^{239}\text{U}$  –  $Z^2/A = 35,41$ . Тобто параметр поділу для ядра  $^{236}\text{U}$  є більшим за відповідну величину для ядра  $^{239}\text{U}$ . Це має позначитися на величинах енергії активації поділу цих ядер. Насправді, ці енергії дорівнюють відповідно  $E_A(236) = 6,5$  МеВ і  $E_A(239) = 7,0$  МеВ, причому ядро  $^{236}\text{U}$  є парно – парним (з парною кількістю нуклонів обох видів – 92 протона і 144 нейтрона); ядро  $^{239}\text{U}$  має непарну (239) загальну кількість нуклонів обох видів (92 протона і 147 нейтронів).

Експериментальні дані свідчать про те, що енергія  $E_{зб.н.}$  у парно-парних ядер більша за енергію зв'язку для таких, у яких масове число (загальна кількість нуклонів) непарне. Зокрема, користуючись даними про енергію зв'язку всіх зазначених ядер  $E_{зб}(235) = 1783,8$  МеВ;  $E_{зб}(236) = 1790,2$  МеВ;  $E_{зб}(238) = 1801,7$  МеВ;  $E_{зб}(239) = 1806,5$  МеВ; за допомогою співвідношення (3.7.50) одержуємо  $E_{зб.н.}(236) = 6,4$  МеВ;  $E_{зб.н.}(239) = 4,8$  МеВ.

Із співвідношення (3.7.51) та наведених даних про  $E_A$  та  $E_{зб.н.}$  бачимо, що умови поділу ядра  $^{235}\text{U}$  більш сприятливі, ніж ядра  $^{238}\text{U}$ : перше з них поділяється нейтронами з будь-якою кінетичною енергією а друге – з енергією  $T_n = 2,2$  МеВ. Якщо для енергій зв'язку використати більш точні значення, зі співвідношення (3.7.51), побачимо, що ядра  $^{235}\text{U}$  поділяються нейтронами з будь-якою кінетичною енергією, в тому числі повільними – тепловими нейтронами, а ядра  $^{238}\text{U}$  – нейтронами з енергіями  $T_n \approx 1,1$  МеВ.

### 3.8 Перетворення Лоренца для сили в релятивістській динаміці

Для відшукування законів перетворення складових сили, взагалі, природно було б виходити з чотиривимірною вектора сили Мінковського. Проте, для досягнення поставленої мети цей підхід не є зручним, бо просторові і часова складові зазначеного вектора, у свою чергу, виражаються через вектор звичайної тривимірної сили  $\vec{F}$ . Тому для вирішення задачі, поставленої назвою параграфу, будемо виходити безпосередньо з рівняння руху (3.1.6), маючи на увазі, що під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої поздовжня до вектора відносної швидкості  $\vec{V}$  складова тривимірною вектора релятивістського імпульсу  $\vec{p}_{\parallel}$  та його поперечна складова  $\vec{p}_{\perp}$  перетворюються за різними законами (див. 3.5.1).

Нас буде цікавити перехід від сили, яка вимірюється в деякій рухомій системі відліку  $K'$ , до сили в лабораторній системі  $K$ . Такий перехід, зокрема, містить в собі як окремий випадок такий, коли складова швидкості частинки відносно системи  $K'$ , яка є колінеарною до швидкості  $\vec{V}$  і зазнає дії сили, дорівнює нулеві.

Безпосередній розв'язок задачі почнемо зі звернення до рівнянь руху у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\parallel} &= \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt}, \\ \vec{F}_{\perp} &= \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt},\end{aligned}\tag{3.8.1}$$

де  $\vec{F}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}$  поздовжня та поперечна у відношенні до вектора відносної швидкості  $\vec{V}$  складові сили  $\vec{F}$ .

#### 3.8.1 Перетворення поздовжньої складової сили

Користуючись співвідношеннями (3.8.1), (3.1.6), (3.5.5), пишемо

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} = \frac{\frac{d\vec{p}'_{\parallel}}{dt'} + \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot \frac{dE'}{dt'}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cdot \frac{dt'}{dt},\tag{3.8.2}$$

де  $dE'$  – зміна енергії релятивістської частинки, яка вимірюється в системі  $K'$ . Вона дорівнює роботі сили  $\vec{F}'$ , здійсненою над частинкою протягом часу  $dt'$ , тобто  $dE' = \vec{F}' \cdot d\vec{r}' = \vec{F}' \cdot \vec{v}' \cdot dt'$ , звідки

$$dE'/dt' = \vec{F}' \cdot \vec{v}',\tag{3.8.3}$$

де  $\vec{v}'$  – швидкість частинки відносно системи  $K'$ . Тоді, використовуючи рівності (3.5.3), (3.8.3), (2.4.6), з рівності (3.8.2) для складової  $\vec{F}_{\parallel}$  одержуємо

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{\vec{F}'_{\parallel} + (\vec{V}/c^2) \cdot (\vec{F}' \cdot \vec{v}')}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2}. \quad (3.8.4)$$

З принципової точки зору наведене співвідношення розв'язує задачу. Проте, вираз (3.8.4) не є зручним для використання, тому що в його правій частині міститься швидкість частинки відносно системи відліку  $K'$ , в той час як для тлумачення кінцевого результату та розглядання окремих випадків бажано було б виразити її через швидкість частинки в лабораторній системі відліку –  $\vec{v}$ . Для того, щоб уникнути цього недоліку, скористуємося формулами (2.4.14), що дає

$$\frac{1}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2} = \frac{1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2}{1 - V^2/c^2}. \quad (3.8.5)$$

Подальше використання формул (3.8.4), (3.8.5) дозволяє одержати вираз для поздовжньої складової  $\vec{F}_{\parallel}$  у вигляді

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{1}{1 - V^2/c^2} \cdot \left( \vec{F}'_{\parallel} (1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2) + \vec{V}/c^2 \cdot (\vec{F}'_{\parallel} \cdot (\vec{v} - \vec{V})) + (\vec{F}'_{\perp} \cdot \vec{v}) \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2} \right) \quad (3.8.6)$$

Значимо, що у виразі (3.8.6) окремі члени дозволяють представлення

$$\vec{V} \cdot (\vec{F}'_{\parallel} \cdot \vec{v}) - \vec{F}'_{\parallel} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{V}) = \vec{v} \times (\vec{V} \times \vec{F}'_{\parallel}) = 0, \quad (3.8.7)$$

а доданок  $(\vec{V}/c^2) \cdot (\vec{F}'_{\parallel} \cdot \vec{V})$  перетворюємо в такий спосіб:

$$\frac{\vec{V}}{c^2} \cdot (\vec{F}'_{\parallel} \cdot \vec{V}) = \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot \frac{(\vec{F}'_{\parallel} \cdot \vec{V})}{V^2} \cdot V^2 = \frac{V^2}{c^2} \cdot \vec{F}'_{\parallel}. \quad (3.8.8)$$

Використовуючи рівності (3.8.7) та (3.8.8), одержуємо кінцевий результат для перетворення поздовжньої складової сили  $\vec{F}_{\parallel}$ :

$$\vec{F}_{\parallel} = F'_{\parallel} + \frac{(\vec{V}/c^2) \cdot (\vec{F}'_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp})}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (3.8.9)$$

Таким чином, бачимо, що поздовжня складова сили  $\vec{F}_{\parallel}$  під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої *знає зміни тільки за наявності поперечної складової сили  $\vec{F}'_{\perp}$ , що діє на частинку, яка рухається відносно системи відліку  $K'$  перпендикулярно до відносної швидкості систем відліку  $\vec{V}$  в системі відліку  $K$ .*

### 3.8.2 Перетворення поперечної складової сили

Для встановлення закону перетворення поперечної складової сили  $\vec{F}_{\perp}$  під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої також виходимо з рівностей (3.8.1) і скористаємося співвідношеннями (2.4.6) та (3.5.5), що дає

$$\vec{F}_{\perp} = \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{p}'_{\perp}}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt},$$

або

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F}'_{\perp} \cdot \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2}.$$

У наведеній рівності, так само, як і в попередньому прикладі, позбавимося залежності від швидкості  $\vec{v}'$ , виражаючи її в термінах швидкості частинки відносно лабораторії  $\vec{v}$ , використовуючи при цьому зауваження, зроблене після рівності (2.4.15). Це дозволяє одержати закон перетворення поперечної складової сили  $\vec{F}$  під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої у вигляді

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F}'_{\perp} \cdot \frac{1-\vec{v} \cdot \vec{V}/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (3.8.10)$$

Порівнюючи вирази (3.8.9) і (3.8.10) для поздовжньої і поперечної складових сили  $\vec{F}$  в релятивістській механіці, зазначаємо, що *під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої ці складові змінюються за різними законами.*

### 3.8.3 Перетворення повної сили

Об'єднуючи співвідношення (3.8.9) та (3.8.10), для повної сили  $\vec{F}$ , що діє на частинку, одержуємо

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} = \vec{F}'_{\parallel} + \frac{\vec{F}'_{\perp} + (\vec{V}/c^2) \cdot (\vec{F}'_{\perp} \cdot \vec{v}) - \vec{F}'_{\perp} (\vec{v} \cdot (\vec{V}/c^2))}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (3.8.11)$$

У другому і третьому доданках чисельника можна побачити подвійний векторний добуток

$$\frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot (\vec{F}'_{\perp} \cdot \vec{v}) - \vec{F}'_{\perp} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{V})) = \frac{1}{c^2} \cdot \vec{v} \times (\vec{V} \times \vec{F}'_{\perp}).$$

Підставляючи одержаний вираз до співвідношення (18.13), остаточно маємо

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} = \vec{F}'_{\parallel} + \frac{\vec{F}'_{\perp} + (\vec{v}/c^2) \times (\vec{V} \times \vec{F}'_{\perp})}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (3.8.12)$$

Під час зазначеної підстановки враховано, що  $\vec{V} \times \vec{F}'_{\perp} = \vec{V} \times \vec{F}'$ .

Для зручності тлумачення виразу (3.8.12) введемо вектори

$$\vec{P} = \vec{F}'_{\parallel} + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$\vec{Q} = \frac{\vec{V} \times \vec{F}'}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$
(3.8.13)

Тоді вектор повної сили визначатиметься рівністю

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{v} \times \vec{Q}.$$
(3.8.14)

Наведений вираз повністю збігається з тим, що було одержано в **3.1.4.3** ▶ іншим шляхом.

З формул (3.8.13), (3.8.14) випливає таке:

а) якщо в системі  $K'$  сила, що діє на частинку, не залежить від її швидкості, то в системі  $K$  виникає складова такої сили, яка від швидкості залежить;

б) зазначена складова є перпендикулярною до вектора швидкості частинки.

Зазначені наслідки різко контрастують з аналогічними для механіки Ньютона – Галілея (1.4.12), в якій під час переходу від однієї інерціальної системи до іншої вектор сили не зазнає перетворень. Щодо перетворення сили типу (3.8.14), то в нерелятивістській механіці перетворення такого типу має місце під час переходу від інерціальної системи відліку до неінерціальної, зокрема, до такої, що обертається. У цьому випадку в системі відліку, що обертається, виникає додаткова сила (сила Коріоліса), яка діє на частинку в напрямі, перпендикулярному до вектора швидкості частинки. Сили, яку мають таку властивість, називають *гіроскопічними*. Отже, в релятивістській механіці в лабораторній системі відліку на рухому відносно лабораторії частинку діє гіроскопічна сила, яка визначається формулою (3.8.14), якщо на цю частинку в будь-якій іншій системі відліку діє інша сила, яка не має гіроскопічного характеру.

Наведений висновок має загальний характер, оскільки він не спирається на будь-які припущення про природу сил, які розглядаються. Результати, які тут одержані, мають важливе значення для розуміння електромагнітних явищ.



## Контрольне завдання до третього розділу

3.1. Чи має місце в релятивістській динаміці III закон Ньютона?

3.2. Чи колінеарні вектори сили і прискорення в релятивістській динаміці?

3.3. Швидкість релятивістської частинки  $\vec{v}$  є перпендикулярною до її прискорення  $\vec{a}$ . Який висновок можна зробити з цього щодо взаємного розташування векторів сили  $\vec{F}$  та прискорення  $\vec{a}$ ? а)  $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{a}$ ; б)  $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{a}$ ;

в)  $\vec{F} \perp \vec{a}$ ; д) може бути довільним.

3.4. На скільки відсотків відрізняється кінетична енергія штучного супутника Землі на навколосезній орбіті, обчислена за нерелятивістською формулою, від енергії, обчисленої за релятивістською формулою? За точний результат прийняти такий, що впливає з релятивістської формули (3.3.7).

3.5. З якою швидкістю повинен рухатись електрон, щоб його повна енергія перевищувала енергію спокою в 3 рази?

3.6. Чи являються величини, які визначаються співвідношення (2.4.3) і (2.4.4), релятивістськими інваріантами?

3.7. Маса системи частинок в релятивістській механіці не є адитивною, проте, вона є такою, що зберігається. Обговорити останнє твердження та довести його.

3.8. Визначити власну енергію електрона ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг) і протона ( $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  кг) і порівняти їхні кінетичні енергії під час руху зі швидкостями  $v_1 = 3 \cdot 10^6$  м/с та  $v_2 = 2,7 \cdot 10^8$  м/с.

3.9. Визначити відносну похибку під час обчислення швидкості електрона з кінетичною енергією  $T = 0,1$  МеВ за допомогою формул механіки Ньютона – Галілея. За точний результат прийняти такий, що обчислюється за допомогою релятивістського співвідношення (3.3.7).

3.10. Визначити імпульс і масу системи, що складається з двох фотонів, якщо енергія кожного з них  $E = 4,5$  еВ у випадках, коли вектори імпульсів фотонів: а) паралельні; б) антипаралельні.

3.11. Електрон перебуває в електричному полі плоского конденсатора, різницю потенціалів  $U$  між пластинами якого можна змінювати в широких межах. Навести графік залежності швидкості електрона, який пройшов цю

різницю потенціалів, від величини  $\frac{eU}{E_0}$  ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд,  $E_0 = mc^2$  –

власна енергія електрона,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – його маса). Якого висновку звідси можна дійти щодо можливого обмеження на величину швидкості електрона?

3.12. Довести, що в системі відліку, в якій центр інерції системи частинок перебуває в спокої (система центра інерції), маса частинок є адитивною величиною.

3.13. Чи може маса складеної системи виявитися такою, що не дорівнює сумі мас окремих її частин?

3.14. У чому полягає різниця між поняттями потенціальної енергії взаємодії частинок системи та енергії зв'язку цієї системи?

3.15 У чому полягає аналогія між квадратом інтервалу і квадратом вектора

енергії – імпульсу частинки? Яку принципову різницю між цими величинами можна зазначити?

3.16. Одержати закони перетворення енергії й імпульсу (3.5.2), (3.5.5), безпосередньо виходячи з визначення релятивістського імпульсу (3.1.1).

3.17. Як впливає з формули (3.3.4), мінімальна повна енергія частинки  $E_0 = mc^2 > 0$ . У той самий час з формул (3.5.2) випливає, що в тому разі, коли система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  зі швидкістю  $V = E/p_1$ , то  $E' = 0$ . Як розв'язується це протиріччя?

3.18. Що є спільного і чим відрізняються поняття центра інерції системи частинок в релятивістському та нерелятивістському випадках?

3.19. Одержати закон перетворення моменту імпульсу системи частинок під час переходу від системи, в якій частинки як ціле перебувають у спокої, до такої, яка рухається відносно зазначеної зі швидкістю  $V$  вздовж осі  $OX$ .

3.20. Розглядаючи рух системи відліку вздовж осі  $OX$ , прямим обчисленням довести релятивістську інваріантність виразу  $\vec{L}^2 - c^2 \vec{L}_0^2$ .

3.21. У чому полягає зміст поняття «система центра інерції» в релятивістському випадку? Як пов'язані між собою імпульси двох частинок, що створюють систему частинок, в системі центра інерції?

3.22. Проаналізувати вирази для енергії  $E$  системи з двох частинок у лабораторній системі відліку та вказати вірний: а)  $E = 2mc^2$ ; б)

$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$  ( $\vec{p}$  – вектор імпульсу кожної частинки в системі центра інерції); в)  $E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$  ( $\vec{p}$  – вектор імпульсу однієї з частинок у системі спокою іншої); г)  $E = 2c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$  ( $\vec{p}$  – вектор імпульсу кожної частинки в системі центра інерції).

3.23. Аналізуючи співвідношення (3.5.2), вказати, чи існують такі системи відліку, в яких  $p'_1$  та  $E'$  змінюють знак у порівнянні зі знаками  $p_1$  та  $E$ : а) ні, не існують; б) існує така система, в якій обидві величини змінюють знак; в) існує така система, в якій змінює знак величина  $p'_1$ ; г) існує така система, в якій змінює знак величина  $E'$ .

3.24. Порівняти комптонівські довжини хвиль електрона ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг) і протона ( $M = 1,7 \cdot 10^{-27}$  кг).

3.25. Користуючись законами збереження енергії та імпульсу, довести, що вільний електрон не поглинає світлового кванта під час їхнього зіткнення. Який процес відбудеться під час зазначеного зіткнення?

3.26. Користуючись законами збереження енергії та імпульсу, довести, що під час зіткнення електрона з позитроном процес  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$  відбувається тільки за наявності третього тіла.

3.27. Чи має сенс вводити поняття порогової енергії для екзотермічних ядерних реакцій?

3.28. Різниця мас  $\delta m = m_2 - m_1$  частинок на які розпалася вихідна нестабільна частинка маси  $M$ , дорівнює  $\frac{1}{3}M$ . Встановити відношення  $T_2/T_1$  кінетичних енергій цих частинок.

3.29. У чому полягає зміст понять порогової енергії (порога) ядерної реакції та енергії реакції?

3.30. Яка з наведених величин – порогова енергія та енергія реакції – більша за іншу та чому?

3.31. Визначити поріг (3.7.37) реакції (3.7.41) у випадку, коли внаслідок зіткнення двох нейтронів народжується  $N$  протон – антипротонних пар.

3.32. У чому полягає принцип дії прискорювача на зустрічних пучках?

3.33. Пояснити, чому ядра  $^{238}\text{U}$  поділяються швидкими, а ядра  $^{235}\text{U}$  – повільними нейтронами.

3.34. Чи однаковим способом перетворюються в релятивістській механіці поздовжні та поперечні у відношенні до вектора відносної швидкості систем координат  $\vec{V}$  проекції вектора сили?

3.35. Частинка рухається вздовж осі  $oY$ . Проаналізувати, чи є така з проекцій вектора сили на координатні осі, яка діє на частинку, що під час переходу до системи  $K'$  не зазнає перетворень, якщо відповідні осі систем координат паралельні і система  $K'$ , рухається вздовж осі  $oX$ : а) проекція  $F_x$ ; б) проекція  $F_y$ ; в) проекція  $F_z$ ; г) жодна з проекцій вектора сили не зазнає перетворень.

3.36. Частинка перебуває під дією сили, для якої в системі  $K$   $F_y = F_z = 0$ ,  $F_x \neq 0$ . Проаналізувати, який вигляд мають проекції цієї сили в системі  $K'$ , якщо відповідні осі систем координат паралельні і система  $K'$ , рухається вздовж осі  $oX$ : а)  $F'_y = F'_z = F'_x = 0$ ; б)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z \neq 0$ ,  $F'_x \neq 0$ ; в)  $F'_y = 0$ ,  $F'_z = 0$ ,  $F'_x \neq 0$ ; г)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z \neq 0$ ,  $F'_x = 0$ .

3.37. У системі  $K$  перпендикулярна до вектора  $\vec{V}$  складова імпульсу частинки є сталим вектором. Проаналізувати, який вигляд мають проекції цієї сили в системі  $K'$ , якщо відповідні осі систем координат паралельні і система  $K'$ , рухається вздовж осі  $oX$ : а)  $F'_y = F'_z = F'_x = 0$ ; б)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z \neq 0$ ,  $F'_x = 0$ ; в)  $F'_y = 0$ ,  $F'_z = 0$ ,  $F'_x = F_x$ ; г)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z \neq 0$ ,  $F'_x = 0$ .

3.38. В системі  $K$  проекції сили, що діє на частинку, дорівнюватимуть  $F_y = F_x = F_z = 0$ . Проаналізувати, який вигляд мають проекції цієї сили в системі  $K'$ , якщо відповідні осі систем координат паралельні і система  $K'$ , рухається вздовж осі  $oX$ : а)  $F'_y = F'_z = F'_x = 0$ ; б)  $F'_y = 0$ ,  $F'_z = 0$ ,  $F'_x \neq 0$ ; в)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z = 0$ ,  $F'_x = 0$ ; г)  $F'_y \neq 0$ ,  $F'_z \neq 0$ ,  $F'_x = 0$ .

3.39. Встановити, чи переходять формули перетворення (3.8.9), (3.8.10) для сили у відповідні нерелятивістські формули, якщо  $V \ll c$ .

## 4 ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

### Навчальна мета:

- одержати уявлення про взаємозв'язок загальної теорії відносності із спеціальною теорією та нерелятивістською теорією тяжіння;
- ознайомитися з основними поняттями загальної теорії відносності, одержати уявлення про принцип еквівалентності і принцип загальної коваріантності;
- ознайомитися з основними уявлення про простір – час у загальній теорії відносності та про взаємозв'язок властивостей простору – часу з розподілом матерії;
- ознайомитися з гравітаційним полем найпростішої моделі загальної теорії відносності – сферично-симетричного розподілу мас і на його прикладі – поняттями гравітаційного радіуса об'єкту, чорної дірки, горизонту подій, сфери Шварцшильда, гравітаційного колапсу;
- ознайомитися з умовою можливості нехтування ефектами загальної теорії відносності і переходу до ньютонівської теорії тяжіння;
- ознайомитися з експериментальним статусом загальної теорії відносності.

### Глосарій

**Загальна теорія відносності** – фізична теорія, яка узагальнює спеціальну теорію відносності, поширюючи спеціальний принцип відносності на неінерціальні системи відліку; водночас є релятивістською теорією тяжіння.

**Інертна маса** – характеристика матеріального об'єкту, яка в нерелятивістському випадку відображає міру його інертних властивостей.

**Гравітаційна маса** – характеристика матеріального об'єкту, яка в нерелятивістському випадку відображає міру його гравітаційних властивостей, є аналогом електричного заряду і може тлумачитися як гравітаційний заряд частинки.

**Сила інерції** – сила, що діє на тіло, яке перебуває в неінерціальній системі відліку, яка є пропорційною до його маси.

**Принцип загальної коваріантності** – узагальнює спеціальний принцип відносності і стверджує, що закони фізики виражаються рівняннями, які мають однаковий вигляд у всіх системах відліку незалежно від стану їх руху.

**Принцип еквівалентності** – в нерелятивістському випадку полягає у твердженні про пропорційність інертної та гравітаційної маси для того ж самого об'єкту; у загальному випадку цей принцип полягає в тому, що фізичні явища в гравітаційному полі відбуваються так само, як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості цих полів у відповідних точках простору збігаються, а початкові умови однакові для всіх тіл системи, яка розглядається.

**Неевклідовий простір** – простір, властивості якого базуються на системі аксіом, яка відрізняється від аксіом Евкліда.

**Гравітаційний радіус (радіус Шварцшильда)** – радіус сфери, на поверхні якої сила тяжіння, що діє на нерухому частинку з боку сферично - симетричного розподілу мас, який цілком міститься всередині зазначеної сфери, прямує до нескінченності; з іншого боку, це радіус такого сферичного об'єкту, для якого швидкість світла у вакуумі виявляється другою космічною швидкістю. Якщо лінійні розміри об'єкту наближаються до його гравітаційного радіуса, поблизу нього в сильному полі тяжіння стають істотними ефекти загальної теорії відносності: простір виявляється неевклідовим, а час плине повільніше, ніж на великій відстані від джерела поля.

**Сфера (поверхня) Шварцшильда, або горизонт подій,** – сфера з гравітаційним радіусом сферично - симетричного розподілу мас, який перебуває в спокої.

**Чорна дірка** – матеріальний об'єкт, лінійні розміри якого збігаються з його гравітаційним радіусом; цей об'єкт поглинає будь-які сигнали, які виникають поблизу нього, і тому інформація про нього не може дійти до віддаленого спостерігача; межею чорної дірки є сфера Шварцшильда.

**Дійсний час** – час, що показує годинник, поміщений в точку простору, в якій перебуває об'єкт.

**Геодезичні лінії** – лінії на поверхні, досить малі дуги яких виявляються на цій поверхні найкоротшими лініями між їхніми кінцями.

**Гауссова кривизна поверхні сфери** – границя, до якої прямує відношення модуля зміни одиничного вектора під час його паралельного переносу вздовж замкненого контуру який складається з геодезичних та обмежує криву поверхню, до площі поверхні, якщо величина останньої прямує до нуля.

**Поле Шварцшильда** – гравітаційне поле, створене сферично - симетричним розподілом мас, який перебуває в спокої, з урахуванням ефектів загальної теорії відносності: неевклідовістю простору і сповільненням плину часу.

**Гравітаційний колапс** – швидке стискання матеріального об'єкту під дією гравітаційних сил.

**Віддалений спостерігач** – спостерігач, що перебуває в точках простору, в яких ефекти, пов'язані з його кривизною, неістотні.

**Ізотропні сферичні координати** – координати, в яких просторова частина інтервалу між двома близькими подіями, на відміну від координат Шварцшильда, має загальний множник.

**Перигелій Меркурію** – точка навколосонячної орбіти Меркурію, в якій його відстань від Сонця виявляється мінімальною.

**Гравітаційне зміщення спектральних ліній** – зміщення спектральних ліній під час поширення світла в гравітаційному полі; під час поширення світла в бік зменшення гравітаційного потенціалу спостерігається збільшення частоти (фіолетовий зсув), у протилежному випадку спостерігається зменшення частоти (червоний зсув).

## 4.1 Передумови створення загальної теорії відносності

Фізична теорія, яка стверджує рівноправність усіх інерціальних систем відліку у фізиці, є спеціальна теорія відносності. Інерціальна система відліку являє собою певну ідеалізацію, яка, хоч і є вельми задовільною для розв'язку значної кількості задач фізики макро- і мікросвіту. Проте теорія, яка виділяє інерціальні системи відліку серед інших, залишає почуття незадоволеності, перш за все, відсутністю повноти та логічної замкненості. Сукупність уявлень, яка за певних умов стверджує рівноправність будь-яких систем відліку, узагальнює спеціальну теорію відносності та являє собою основний зміст галузі фізичної науки, який називають *загальною теорією відносності*.

Протягом довгого часу загальна теорія відносності цікавила лише незначні кола теоретиків, заворожених її внутрішньою злагодженістю. Проте технічний прогрес і, зокрема, розвиток ракетно-космічної техніки в останні десятиріччя зробив можливим і поставив до порядку денного застосування її наслідків до астрономії і, зокрема, до астрофізики, до проблем зв'язку, навігації тощо.

Нижче розглядаються конкретні питання, які були предметом стурбованості дослідників і відповіді на які сприяли створенню загальної теорії відносності як узагальненню спеціальної теорії.

### 4.1.1 Принцип еквівалентності

Повернемося до поняття маси в нерелятивістській механіці. Це поняття введено для характеристики міри інертних властивостей того чи іншого об'єкта. Проте, ці об'єкти мають не тільки властивість інерції, але й властивість створювати навколо себе гравітаційне поле. Без додаткового аналізу невідомо, чи існує будь-який зв'язок між мірою інертності тіл та їхньою властивістю створювати гравітаційне поле. Взаємодія матеріальних точок описується законом всесвітнього тяжіння:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1^{(g)} \cdot m_2^{(g)}}{r^2} \cdot \vec{e}_r, \quad (4.1.1)$$

де  $m_1^{(g)}, m_2^{(g)}$  – маси точок,  $r$  – відстань між ними,  $\vec{e}_r$  – орт напрямку від першої точки до другої,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ ; – гравітаційна стала. Позначення мас, які входять до закону (4.1.1), містять зверху позначки  $^{(g)}$ . Зазначені позначення означають, що це т.з. *гравітаційні маси*, які можуть відрізнитись від мас  $m^{(i)}$ , що входять до визначення імпульсу  $\vec{p} = m^{(i)}\vec{v}$  і які одержали назву *інертних*.

Дослід показує, що з великою точністю для всіх тіл

$$m^{(i)} = C m_1^{(g)},$$

де  $C$  – стала. Якщо зручно обрати одиниці вимірювання, то можна покласти  $C = 1$ . Як зазначено вище, рівність  $m^{(i)} = m^{(g)}$  сьогодні перевірена з великою

точністю. Твердження про рівність цих мас називають *принципом еквівалентності інертної та гравітаційної мас*.

Пояснимо сказане таким прикладом. Прискорення  $g$ , яке набуває частинка в полі тяжіння, визначається співвідношенням

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m^{(i)}} \quad (4.1.2)$$

де  $m^{(i)}$  – інертна маса частинки,  $\vec{F}$  – сила, що діє на цю частинку з боку поля. З (4.1.1) і (4.1.2) бачимо, що сила, що діє на частинку в полі тяжіння, пропорційна до її гравітаційної маси  $m^{(g)}$ , тобто  $F \sim m^{(g)}$ , звідки прискорення

$$g \sim \frac{m^{(g)}}{m^{(i)}};$$

внаслідок принципу еквівалентності інертної та гравітаційної маси воно не залежить від маси  $m^{(i)}$ .

Розглянемо тепер рух вільної частинки в неінерціальній системі відліку. На цю частинку діє *сила інерції*

$$\vec{F}_i = -m^{(i)} \cdot \vec{a}, \quad (4.1.3)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення системи відліку. Прискорення, з яким рухається частинка, як це впливає з виразу (4.1.3) в цьому випадку буде

$$\vec{a} = -\frac{\vec{F}_i}{m^{(i)}}.$$

Воно не залежить від  $m^{(i)}$ , оскільки  $F_i \sim m^{(i)}$  (див. (4.1.3)). Таким чином, *поля тяжіння і сил інерції мають таку*

*однакову властивість, що тіла в цих полях рухаються з прискореннями, які не залежать від мас цих тіл. У зв'язку з цим іноді кажуть, що ці поля не можна розрізнити одне від одного в досліді і що рух в неінерціальній системі відліку можна розглядати як рух в інерціальній системі в присутності відповідного гравітаційного поля.*

Тут, проте, слід ввести такі уточнення. Розглянемо гравітаційне поле, яке створює рівномірний розподіл мас у циліндрі (див. рис. 4.1). Вважаючи циліндр нескінченно довгим, можна довести, що прискорення, яке поля тяжіння цього циліндра надає пробній частинці в точці А (всередині циліндра) і в точці В (зовні його) такі:

$$g_A = 2\pi G\rho r_A; \quad (4.1.4)$$

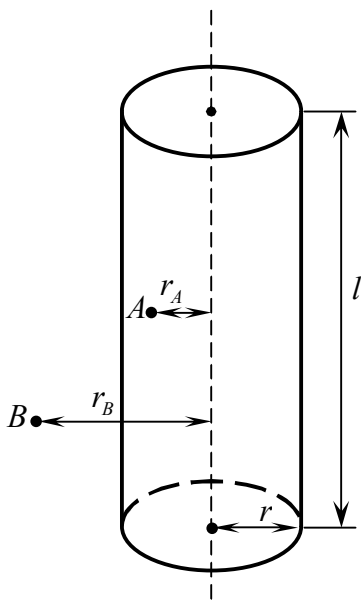


Рисунок 4.1. Вибір точок А і В під час обчислення гравітаційного поля однорідного нескінченного ( $r \ll l$ ) циліндра

$$g_B = \frac{2G\tau}{r_B}, \quad (4.1.5)$$

де  $\rho$  – об’ємна густина маси в циліндрі,  $\tau$  – маса, що припадає на одиницю довжини циліндра (лінійна густина маси),  $r_A$  і  $r_B$  – відстані відповідних точок до осі циліндра. Головне в цьому прикладі полягає в тому, що гравітаційне поле, яке розглядається, має осьову симетрію (тобто напруженість цього поля залежить тільки від відстані точок поля до осі циліндра, що є віссю симетрії поля).

Щодо поля сил інерції, зазначимо: осьову симетрію має поле сил інерції, яке виникає в системі відліку, що обертається. Так, наприклад, поле відцентрових сил інерції в системі, що обертається навколо осі ОО (рис.4.1), створює прискорення

$$g = \omega^2 r,$$

де  $\omega$  – кутова швидкість системи,  $r$  – відстань від осі обертання. Зі співвідношень (4.1.4) і (4.1.5) можна побачити, що еквівалентність сил інерції і тяжіння має місце лише в області  $r < r_0$ ; щодо області  $r > r_0$ , то в ній замінити дію сил інерції дією відповідного поля сил тяжіння неможливо, тому що в системі відліку, що обертається, не існує сил інерції, значення яких зменшувалося б зі зростанням відстані до осі обертання. Для виключення поля сил інерції поблизу точки В необхідно створити розподіл мас, аналогічний тому, що був розглянутий вище, але так, щоб точка В виявилася усередині цього розподілу. Отже, в загальному випадку поле сил інерції не можна замінити еквівалентним йому полем сил тяжіння, але це можна зробити для кожної точки простору, тобто, вводячи для кожної точки поля сил інерції гравітаційне поле відповідного розподілу мас. Інакше кажучи, еквівалентність сил інерції і тяжіння слід розуміти у *локальному сенсі (тобто в околі кожної точки простору)*.

#### 4.1.2 Проблеми нерелятивістської теорії тяжіння

Нерелятивістська теорія тяжіння (гравітації) базується на законі всесвітнього тяжіння (4.1.1). Зазначимо, що під час обчислення відстані  $r$  між частинками *передбачається, що їхні положення беруться в той самий момент часу, тобто передбачається, що гравітаційна взаємодія поширюється в просторі з нескінченною швидкістю*. Ця обставина різко контрастує з висновком спеціальної теорії відносності про існування граничної швидкості переносу взаємодії (2.1).

Невідповідність спеціальній теорії відносності можна побачити також у формальній відсутності релятивістської інваріантності закону (4.1.1). Релятивістське узагальнення відповідного закону для електричної взаємодії – закону Кулона – призводить до численних фізичних наслідків, зокрема, до наявності, крім традиційних джерел електричного поля – зарядів частинок, ще й таких джерел, як електричні струми, які, у свою чергу створюють магнітні поля



тощо. Такі самі наслідки слід очікувати під час узагальнення нерелятивістської теорії тяжіння на випадок рухомих мас.

Неспроможність нерелятивістської теорії тяжіння можна також продемонструвати на такому прикладі. Нехай частинка масою  $m$  перебуває в центрально-симетричному полі тяжіння джерела масою  $M$ . Повна енергія такої частинки

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}, \quad (4.1.6)$$

де  $v$  – швидкість частинки,  $r$  – її відстань від центра джерела. Якщо частинка падає на джерело з нескінченності з нульовою початковою швидкістю, її повна енергія на нескінченності, як випливає з (4.1.6), дорівнює нулеві і у відповідності із законом збереження енергії в механіці залишається такою самою в будь-якій точці її траєкторії під час падіння. Отже, з рівності (4.1.6) випливає, що на поверхні джерела радіуса  $r_0$  швидкість частинки  $v$  визначатиметься рівністю

$$v = \left( \frac{2GM}{r_0} \right)^{1/2},$$

Зменшуючи тепер радіус джерела, можна досягти значення  $v = c$  і навіть значення, що задовольняє нерівність  $v > c$ , яке знаходиться в протиріччі з твердженням про граничний характер швидкості світла. З іншого боку, з погляду класичної теорії тяжіння силам тяжіння ніщо не повинно заважати стискувати об'єкт до будь-яких малих розмірів; це, в свою чергу, призводить до можливості значень  $v > c$  і свідчить про неспроможність нерелятивістської теорії тяжіння.

### 4.1.3 Про витоки загальної теорії відносності в ньютонівській механіці

З погляду ньютонівської механіки в інерціальній системі відліку тіло, що не взаємодіє з іншими тілами, рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває в спокої. Таке тіло називають *вільним*, а його рух – *вільним рухом*. При цьому за однакових початкових умов неможливо вказати, яке з тіл, що не взаємодіють з іншими тілами, рухається рівномірно і прямолінійно, а яке – перебуває в спокої.

Проте, зазначене твердження не вичерпує всіх можливих випадків, коли тіла можуть рухатися одне відносно іншого рівномірно і прямолінійно. На підтвердження сказаного розглянемо два тіла, що вільно падають і перебувають одне від іншого на такій відстані, що різницею прискорень, що ці тіла набувають під дією сили тяжіння, можна знехтувати. Тоді в системі відліку, пов'язаній з одним із таких тіл, рух другого тіла також відбувається вздовж прямої лінії. Цей приклад показує, що між рухом вільної частинки в інерціальній системі відліку і рухом частинки, що перебуває під дією сили

тяжіння в неінерціальній системі відліку, пов'язаній з іншою частинкою, що також перебуває під дією сили тяжіння, принципової різниці немає.

Користуючись принципом еквівалентності, міркування, що наведені вище, можна узагальнити на випадок будь-якої неінерціальної системи відліку, що рухається прямолінійно (про таку систему можна казати, що відносно неї різні об'єкти можуть розглядатися як такі, що перебувають *в однорідному полі сил інерції*): в однорідному полі сил інерції рух вільних частинок однієї відносно іншої є рівномірний і прямолінійний.

Зі сказаного випливає, що інерціальні системи відліку навіть у ньютонівській механіці втрачають своє привілейоване місце у звичайному сенсі, а механічний принцип відносності дозволяє певне узагальнення також і на неінерціальні системи відліку. Саме таке узагальнення з урахуванням релятивістських ефектів і становить зміст загальної теорії відносності (див. 4.2).

## **4.2 Дещо про фізику та геометрію; основні положення загальної теорії відносності**

### **4.2.1 Про зв'язок фізики і геометрії**

Для того, щоб перейти до узагальнення принципу відносності на неінерціальні системи відліку, зазначимо, що зроблені в п. 4.1.3. твердження щодо прямолінійності та рівномірності відносного руху частинок, що перебувають у гравітаційному полі, втрачає сенс, якщо це поле не є однорідним. Те ж саме можна казати про рух у неоднорідному полі сил інерції. Інакше кажучи, взаємодія частинок у загальному випадку призводить до викривлення їхніх траєкторій.

Проте на проблему можна подивитися з іншого боку: можна казати, що взаємодія частинок призводить до *викривлення простору*, в якому перебувають частинки. У такому просторі частинка, що взаємодіє, може розглядатися як вільна, причому вигляд її траєкторії в такому просторі визначається розподілом мас об'єктів, що створюють поле тяжіння, та їхнім взаємним рухом. Тоді з принципу еквівалентності випливає, що *рух частинки в неінерціальній системі відліку можна розглядати як рух вільної частинки, який відбувається у викривленому просторі, властивості якого визначаються характером поля сил інерції*. У цьому випадку кажуть, що розподіл сил інерції (або як наслідок принципу еквівалентності – сил тяжіння) визначає метрику чотиривимірного простору (див. (4.2.3.1)). Такий підхід до описання руху матеріальних об'єктів узагальнює такий, що використовується у спеціальній теорії відносності. Це узагальнення було здійснено А.Ейнштейном у 1916 р. Знову-таки на базі аналізу дослідних фактів ним були висунуті постулати, які складають основу теорії, що пізніше дістала назву *загальної теорії відносності*.

Для того, щоб дати належне фізичне тлумачення зазначеній теорії, наведемо деякі відомості про криві простори, які називають *рімановими*, або неевклідовими (вивчення таких просторів пов'язане з іменами таких вчених, як Бернхардт Ріман (1826 – 1866 р. р.), М. І. Лобачевській (1792 – 1856 р. р.),

Янош Больяї (1802 – 1860 р. р.),  
А. З. Петров (1910 – 1972 р.р.).

Карл Гаусс (1777 – 1855 р. р.),

## 4.2.2 Елементи геометрії неевклідова простору

### 4.2.2.1 Метрика простору

У 2.6.2 зазначено, що найважливішою характеристикою простору є його метрика, яка визначає відстань між точками в цьому просторі. Метрика простору задається виразом, який визначає відстань між близькими точками в цьому просторі. Як приклад, спочатку дослідимо звичайну відстань між двома точками на колі радіуса  $R$ , сукупність яких можна розглядати як *одновимірний неевклідовий підпростір* двовимірного евклідового простору на площині. Відстань між двома близькими точками в евклідовому просторі на площині має вигляд

$$d\bar{r}^2 = dx_1^2 + dx_2^2. \quad (4.2.1)$$

Виразу (4.2.1) можна надати іншого вигляду, якщо взяти до уваги, що ці точки належать означеному вище колу, сукупність усіх точок якого утворює неевклідовий підпростір. Декартові координати цих точок задовольняють рівняння кола

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

з якого  $x_2 = \pm(R^2 - x_1^2)^{1/2}$ , звідки

$$dx_2 = \pm x_1 \cdot dx_1 / (R^2 - x_1^2)^{1/2}. \quad (4.2.2)$$

Зі співвідношень (4.2.1), (4.2.2) маємо

$$d\bar{r}^2 = g(x_1) dx_1^2; \quad (4.2.3)$$

у виразі (4.2.3) функція  $g(x_1) = R^2 / (R^2 - x_1^2)$  визначає відстань між близькими точками на колі та, відповідно, метрику даного простору, неевклідовий характер якого проявляється в залежності функції  $g(x_1)$  від координати  $x_1$ . Так само можна розглядати поверхню сфери радіуса  $R$  як неевклідовий підпростір у звичайному тривимірному евклідовому просторі, в якому відстань між двома близькими точками є  $d\bar{r}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ . Використовуючи рівняння сфери

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2,$$

так само, як у попередньому прикладі, одержуємо  $x_3 = \pm(R^2 - (x_1^2 + x_2^2))^{1/2}$ ,  $dx_3 = \pm(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) / (R^2 - (x_1^2 + x_2^2))^{1/2}$ , звідки

$$d\bar{r}^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 \cdot dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2. \quad (4.2.4)$$

Бачимо, що тут метрика простору визначається не однією функцією, а декількома:

$$\begin{aligned}
g_{11}(x_1, x_2) &= (R^2 - x_2^2) / (R^2 - (x_1^2 + x_2^2)); \\
g_{22}(x_1, x_2) &= (R^2 - x_1^2) / (R^2 - (x_1^2 + x_2^2)); \\
g_{12}(x_1, x_2) &= g_{21}(x_1, x_2) = x_1 x_2 / (R^2 - (x_1^2 + x_2^2)).
\end{aligned}
\tag{4.2.5}$$

Отже, в неевклідовій геометрії відстань між точками простору визначається не тільки різницею координат точок, але й положенням (координатами) точок, між якими зазначена відстань обчислюється. Саме цією обставиною в прикладах (4.2.4) та (4.2.5) пояснюється відміна функцій  $g_{11}, g_{22}$  від тотожної одиниці, а функцій  $g_{12}, g_{21}$  – від тотожного нуля. Таким чином, для інтервалу між подіями в загальній теорії відносності слід записати

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot dx_i dx_k,
\tag{4.2.6}$$

де координата  $x_4$  пов'язана з часовою координатою  $t$  звичайним співвідношенням  $x_4 = ix_0, x_0 = ct$ . Функції  $g_{ik}$  за своїми індексами симетричні, тобто  $g_{ik} = g_{ki}$ . Якщо для часових компонент перейти від  $x_4$  до  $x_0$ , замість функцій  $g_{4i}, g_{i4}, g_{44}$  використовують функції  $g_{0i}, g_{i0}, g_{00}$ .

Тут можна навести приклад інтервалу для випадку неевклідового простору, що відповідає слабкому гравітаційному полю, що створює точкова маса. Виходячи з виразу (2.5.9), маємо

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2 \cdot dt^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right),
\tag{4.2.7}$$

де  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  – швидкість нерелятивістського об'єкту масою  $m$  в точках, у яких на об'єкт діє слабе гравітаційне поле з потенціалом  $\phi$  у відповідній точці. Тоді із закону збереження енергії маємо

$$\frac{m\vec{v}^2}{2} + m\phi = \frac{m\vec{v}_0^2}{2},
\tag{4.2.8}$$

де  $\vec{v}_0$  – швидкість об'єкту в точках простору, в яких дією гравітаційного поля можна знехтувати; тоді зі співвідношень (4.2.7), (4.2.8) одержуємо

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 \left(1 + 2\phi/c^2\right) - \vec{v}_0^2 \cdot dt^2;$$

тут  $\vec{v}_0 \cdot dt = d\vec{r}_0$  – зміна радіуса-вектора під час переходу від точки з радіус-вектором  $\vec{r}_0$  до точки з радіус-вектором  $\vec{r}_0 + d\vec{r}_0$  в області простору, де гравітаційне поле можна вважати відсутнім. Отже, у випадку, що розглядається, можна записати

$$ds^2 = g_{00}(\vec{r})c^2 \cdot dt^2 - d\vec{r}_0^2.
\tag{4.2.9}$$

Тут  $g_{00}(\vec{r}) = 1 + 2\phi/c^2$ , всі інші  $g_{ii} = 1, g_{ik} = 0$  (для  $i \neq k$ ). З виразу для  $g_{00}(\vec{r})$  можна побачити, що для слабкого гравітаційного поля вона відрізняється від одиниці на величину порядку  $\phi/c^2$  у той самий час, як усі інші функції  $g_{ik}$  відповідних поправок не містять. Проте, більш строгий розрахунок показує, що з точністю до величин  $\phi/c^2$  у випадку, що розглядається, мають місце рівності

$g_{11}(\vec{r}) = g_{22}(\vec{r}) = g_{33}(\vec{r}) = 1 - 2\varphi/c^2$  (див. 4.3.1); для функцій  $g_{ik}$  (якщо  $i \neq k$ ) відповідні поправки не виникають і під час більш строгого розрахунку.

#### 4.2.2.2 Геодезичні лінії

В евклідовому просторі найкоротшою лінією, що з'єднує дві точки, є пряма. В неевклідовому просторі такими лініями є криві, притаманні для відповідного простору: зокрема, на поверхні сфери цими лініями є відрізки великих кіл. Ці лінії в геометрії називають *геодезичними*. У загальній теорії відносності припускається, що зазначені лінії є лініями в чотиривимірному просторі.

#### 4.2.2.3 Паралельний перенос вектора у криволінійному просторі

У різних математичних і фізичних задачах досить часто виникає необхідність порівняння векторів, визначення їхньої суми тощо. З цією метою має бути визначена математична операція паралельного переносу векторів. У плоскому (евклідовому) просторі під час зазначеної операції кут між вектором, та прямою, вздовж якої відбувається перенос, залишається незмінним. Для того, щоб узагальнити визначення операції паралельного переносу вектора на кривий (неевклідов) простір, зауважимо, що в евклідовому випадку пряма лінія, вздовж якої розглядається перенос, є геодезичною. Отже зазначену операцію у випадку неевклідова простору природно узагальнити в такий спосіб, щоб це був перенос вектора вздовж геодезичної, під час якого кут між зазначеним вектором і геодезичною, вздовж якої відбувається перенос, залишався сталим.

На рисунку 4.2а наведено результат паралельного переносу вектора одиничної довжини  $\vec{e}$  вздовж сторін рівнобедреного трикутника ABC, з якого можна побачити, *що вектор, одержаний внаслідок такого переносу, збігається з вихідним вектором*.

#### 4.2.2.4 Кривизна поверхні

Розглянемо паралельний перенос вектора одиничної довжини  $\vec{e}$  вздовж сторін сферичного трикутника ABC (див. рис. 4.2б), в якому кут між меридіональними площинами AOB і AOC дорівнює  $\Delta\varphi$ . Зазначені сторони є геодезичні на поверхні сфери. Тому перенос здійснюється в такий спосіб, щоб у його процесі напрям цього вектора зі сторонами трикутника утворював сталий кут: з точки A рухаємося вздовж меридіана AB, при цьому вектор  $\vec{e}$  вздовж всього меридіана залишається дотичним до нього.

Оскільки на сфері меридіани і паралелі ортогональні одні до інших, рух вздовж ділянки екватора BC відбувається у такий спосіб, що вектор  $\vec{e}$  залишається перпендикулярним до екватора під час руху вздовж цієї ділянки (див. рис. 4.2б). Нарешті, починаючи з точки C, перенос здійснюється вздовж меридіана від точки C до точки A; дотичний до меридіана AC характер вектора  $\vec{e}$  при цьому також зберігається. Отже, бачимо, що на відміну від евклідового

випадку під час переносу вектора вздовж замкненої траєкторії в неевклідовому просторі початковий вектор не збігається з вектором, одержаним внаслідок переносу, і повернеться відносно нього на кут  $\Delta\varphi$ .

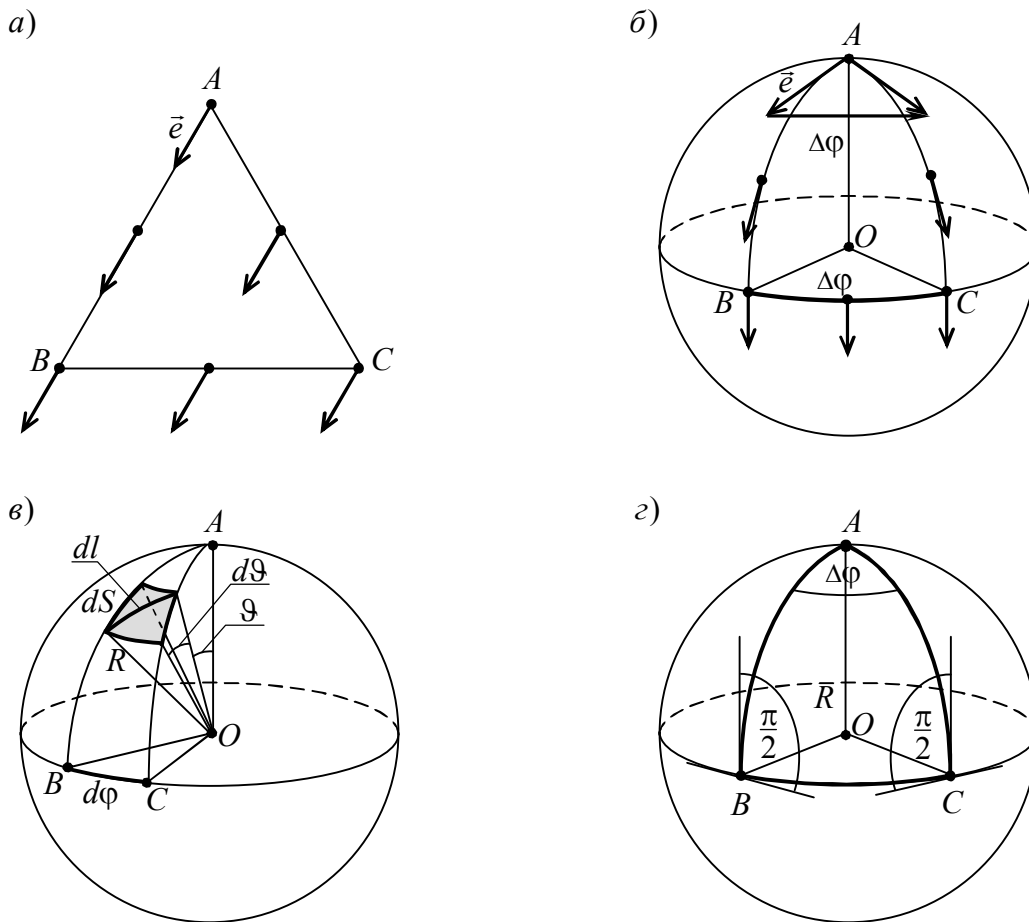


Рисунок 4.2. Властивості кривого простору:

а – паралельний перенос вектора  $\vec{e}$  вздовж замкненої траєкторії на плоскій поверхні; б – паралельний перенос вектора  $\vec{e}$  вздовж замкненої траєкторії на поверхні сфери; в – до обчислення площі малого елемента сфери та відстані між точками та поверхні сфери; г – до обчислення суми кутів поблизу вершин сферичного трикутника.

З рисунку 4.2б можна побачити, що під час переносу модуль зміни вектора  $\vec{e}$  дорівнюватиме  $|\Delta\vec{e}| = 2 \sin(\Delta\varphi/2)$ . За міру викривлення поверхні можна взяти відношення модуля зміни одиничного вектора під час його паралельного переносу вздовж замкненого контуру, що складається з геодезичних ліній, до досить малої ділянки поверхні  $\Delta S$ , обмеженої цим контуром, тобто

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{e}|}{\Delta S} \quad (4.2.10)$$

Малий елемент поверхні сфери у сферичній системі координат

$$dS = R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (4.2.11)$$

(див. рис. 4.2в). Для того, щоб скористатися формулою (4.2.10), елемент  $\Delta S$  слід узяти між геодезичними. З цією метою інтегруємо вираз (4.2.11) за широтним кутом  $\vartheta$  від значення  $\vartheta = 0^\circ$  до  $\vartheta = 90^\circ$ . Тоді одержимо

$$\Delta S = R^2 \int_0^{90^\circ} \sin \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{\Delta\varphi} d\varphi = R^2 \cdot \Delta\varphi. \quad (4.2.12)$$

Підставляючи до (4.2.10) вираз для  $|\Delta\vec{e}|$  і вираз (4.2.12) для  $\Delta S$ , маємо

$$K = \frac{1}{R^2}. \quad (4.2.13)$$

Зазначену величину називають *гауссовою кривизною* поверхні. У випадку поверхні довільної форми її гауссова кривизна є функцією точки і залежить, в околі якої точки обраний елемент поверхні  $\Delta S$ .

Наведений результат можна одержати також з таких міркувань. Сума кутів біля вершин сферичного трикутника ABC (див. рис. 4.2г) є  $\pi/2 + \pi/2 + \Delta\varphi = \pi + \Delta\varphi$  відрізняється від такої для трикутника на площині на величину  $\Delta\varphi$ . Якщо поділити зазначену різницю на площу трикутника (4.2.12), одержимо формулу (4.2.13).

## 4.2.3 Основні положення загальної теорії відносності

### 4.2.3.1 Загальні відомості

Основні положення загальної теорії відносності були сформульовані А.Ейнштейном у 1915 – 1916рр. у вигляді двох постулатів. Ці постулати полягають у такому.

Перший постулат: *закони фізики виражаються рівняннями, які мають однаковий вигляд у всіх системах відліку незалежно від стану їх руху.* Цей постулат називається *принципом загальної коваріантності*.

Другий постулат: *фізичні явища в гравітаційному полі відбуваються так само, як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості цих полів у відповідних точках простору збігаються, а початкові умови однакові для всіх тіл системи, яка розглядається.* Цей постулат називається *принципом еквівалентності*.

Принцип еквівалентності дозволяє розглядати загальну теорію відносності як релятивістську теорію гравітації. У свою чергу, остання являє собою узагальнення закону взаємного тяжіння (4.1.1) на випадок рухомих частинок – так само, як електродинаміка є узагальненням закону Кулона на випадок рухомих зарядів. Проте структура гравітаційного поля є значно складнішою, ніж електромагнітного. Почнемо з того, що електромагнітне поле створюється зарядженими частинками і в той самий час само залишається нейтральним об'єктом. Щодо гравітаційного поля, зазначимо, що його джерелом, скажімо, у статичному випадку, виявляється маса частинки, яка з суті є аналогом електричного заряду. *Отже, джерелом статичного гравітаційного поля, що*

створює певний об'єкт, є його маса. З іншого погляду, співвідношення (3.3.6) показує, що будь-який об'єкт, який має масу, також має енергію. Таким чином, можна казати, що джерелом гравітаційного поля взагалі є енергія. У той самий час це поле само має енергію. Інакше кажучи, *гравітаційне поле, на відміну від електромагнітного, переносить заряд джерела, яке зазначене поле створює.* Це означає, що, на відміну від електромагнітного випадку, рівняння гравітаційного поля не є лінійними (лінійність цих рівнянь має місце лише у випадку слабких полів). Зазначимо, що відміна лінійного випадку від нелінійного полягає, зокрема, в наявності в лінійному випадку принципу суперпозиції для характеристик поля, який у випадку нелінійних полів не має місця.

Більш принципове значення нелінійності рівнянь гравітаційного поля проявляється в такому. В електромагнітному випадку, коли рівняння поля лінійні, *рівняння руху заряджених частинок не впливають з рівнянь поля*; у свою чергу, без цих рівнянь описати рух заряджених частинок в електромагнітному полі неможливо, і тому систему рівнянь руху електродинаміки без додаткового задання рівняння руху заряджених частинок не можна вважати повною. Щодо гравітаційного поля, то нелінійність його рівнянь руху, зокрема, є наслідком того, що *рівняння руху джерел поля впливають з рівнянь поля.*

Зазначений вище взаємозв'язок був сформульований Ейнштейном так: ***«речовина вказує простору як прогинатися; простір вказує речовині як рухатися».***

Інше ускладнення теорії поля тяжіння пов'язане зі збільшенням кількості величин, що описують поле в точці. Так, якщо електромагнітне поле в точці в загальному випадку описується чотирма проекціями векторного потенціалу, трьома проекціями вектора напруженості електричного поля і трьома проекціями вектора магнітної індукції, поле тяжіння в точці характеризується десятьма величинами, які відіграють роль потенціалів поля та двадцятьма величинами, що відіграють роль аналогів напруженості електричного та індукції магнітного поля в електродинаміці. Ця обставина пов'язана з досить складною структурою джерела гравітаційного поля в порівнянні з електромагнітним: якщо густина електричного заряду, який є джерелом електромагнітного поля, являється компонентою чотиривимірного вектора густини електричного струму, відповідна величина для гравітаційного поля – маса (або енергія) *не є компонентою чотиривимірного вектора, а виявляється певною частиною більш складної математичної величини, ніж чотиривимірний вектор.*

Тепер настає час звернутися до згаданого в 4.2.1 зв'язку фізики і геометрії. Цей зв'язок пов'язаний з універсальністю поля тяжіння, тобто з тією обставиною, що властивість гравітаційної взаємодії притаманна всім без виключення матеріальним об'єктам. Оскільки наявність взаємодії призводить до викривлення траєкторії частинок, а гравітаційна взаємодія є універсальною, природно вважати, що всі частинки є вільними об'єктами, а викривлення їхніх траєкторій пов'язане із властивостями простору та часу, які створюють єдиний



чотиривимірний неевклідовий простір. Метрика цього простору визначається розподілом мас у зазначеному просторі, при цьому функції  $g_{ik}$  (формула (4.2.6)) визначають потенціали гравітаційного поля. Напруженість цього поля визначається похідними функцій  $g_{ik}$  за простором та часом. Ці величини являють собою узагальнення на чотиривимірний випадок поняття кривизни поверхні (формула (4.2.13)).

З іншого боку, локально дію гравітаційного поля можна замінити дією сил інерції (див. 4.1.1). Тому можна казати, що перехід від інерціальної системи відліку до неінерціальної супроводжується переходом від плоского евклідового простору до неевклідового простору подій, метрика якого визначається відповідним розподілом мас. У такому просторі частинку, що перебуває під дією сил інерції, можна розглядати як вільну, яка рухається вздовж геодезичної в цьому просторі. Саме в цьому й полягає зміст принципу загальної коваріантності.

Неевклідовий характер простору в неінерціальній системі відліку вже в нерелятивістському випадку можна проілюструвати простим переходом від інерціальної системи  $K$ , що перебуває в спокої, до системи  $K'$ , яка рівномірно обертається відносно інерціальної системи навколо осі  $z$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Такий перехід визначається співвідношеннями

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t; y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t; z = z'; t = t'.$$

Після підстановки наведених співвідношень до виразу (2.5.9) для інтервалу одержуємо

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)) \cdot dt^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2\omega x' \cdot dy' \cdot dt - 2\omega y' \cdot dx' \cdot dt),$$

звідки можна зробити висновок про неевклідовий характер простору в наведеній неінерціальній системі відліку.

#### 4.2.3.2 Проміжки часу в загальній теорії відносності

У 4.2.2 було зазначено, що в неевклідовому просторі відстань між точками простору не має прямого відношення до різниці просторових координат: вона залежить також від того, навколо яких точок ця відстань обчислюється. У загальній теорії відносності, де йдеться про чотиривимірний простір, ситуація ускладнюється ще й наявністю залежності наведеної різниці від часової координати. Саме такі обставини ускладнюють встановлення в загальній теорії відносності безпосереднього зв'язку між різницею часових змінних та проміжками часу.

Звернемося до задачі про встановлення вищезначеного зв'язку. З цією метою введемо поняття *дійсного часу*  $\tau$  як такого, що показує годинник, поміщений в точку простору, в якій перебуває об'єкт. Розглянемо дві близьких події, що відбуваються в тій самій точці простору (тобто для яких  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ ), і тоді інтервал між цими подіями є  $ds = cd\tau$ . З іншого боку,

використовуюючи загальний вигляд інтервалу між близькими подіями (4.2.6), за умови  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$  маємо

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 g_{00} \cdot dt^2,$$

звідки

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} \cdot dt. \quad (4.2.14)$$

Наведене співвідношення й розв'язує поставлену задачу про встановлення зв'язку між проміжком дійсного часу, який розділяє дві близькі за часом події в тій самій точці простору, та їхніми часовими координатами –  $t$  та  $t+dt$  у неінерціальної системі відліку. Для подій, які розділені скінченним проміжком часу, одержуємо

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{00}} \cdot dt. \quad (4.2.15)$$

Отже, за зміною часової координати  $t$  за допомогою співвідношення (4.2.15) можна вимірити проміжок дійсного часу.

Зазначимо, що в спеціальній теорії відносності показання годинників є різними для різних систем відліку. Щодо загальної теорії відносності, то тут, як випливає з формул (4.2.14), (4.2.15), дійсний час є різним не тільки для різних систем відліку, але й для різних точок простору в тій самій системі відліку. Це означає, що проміжок дійсного часу між двома подіями в околі деякої точки простору, та проміжок цього часу між одночасними з цими подіями в околі іншої точки, взагалі, не дорівнюють один одному.

### 4.2.3.3 Відстані в загальній теорії відносності

У спеціальній теорії відносності елемент  $dl$  просторової відстані між частинками можна визначити як інтервал між двома близькими подіями, що відбуваються одночасно. Як зазначається у кінці 4.2.3.2, у загальній теорії відносності поняття одночасності подій визначається не тільки системою відліку, але й точками простору. Тому для визначення елемента  $dl$  застосуємо таку процедуру.

Нехай з точки  $B$  простору з координатами  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$  відправляється світловий сигнал у досить близьку точку  $A$  з координатами  $x_1, x_2, x_3$ , а потім – зворотно – вздовж цього ж самого шляху потрапляє до точки  $B$ . Час, який втрачається на цей процес, відрахований у тій самій точці  $B$ , помножений на швидкість світла  $c$ , й є подвійна відстань між зазначеними точками.

Відокремлюючи просторові змінні виразу для квадрату інтервалу між зазначеними подіями надамо вигляду

$$ds^2 = c^2 g_{00} \cdot dt^2 + 2c \sum_{i=1}^{i=3} g_{0i} \cdot dt \cdot dx_i + \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k. \quad (4.2.16)$$

Використовуючи визначення інтервалу для світлового сигналу  $ds^2 = 0$ , з виразу (4.2.16) для  $dt$  одержуємо два корені

$$\begin{aligned} dt_1 &= -\frac{1}{c g_{00}} \left( \sum_{i=1}^{i=3} g_{0i} \cdot dx_i + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} g_{0i} g_{0k} - g_{00} g_{ik} \right) \cdot dx_i dx_k} \right); \\ dt_2 &= -\frac{1}{c g_{00}} \left( \sum_{i=1}^{i=3} g_{0i} \cdot dx_i - \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} g_{0i} g_{0k} - g_{00} g_{ik} \right) \cdot dx_i dx_k} \right). \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Ці корені відповідають часу поширення сигналу в двох напрямках: якщо  $t$  – є часова координата прибуття сигналу в точку  $A$ , то відповідна координата його відправлення з  $B$  є  $t + dt_1$  і координата повернення в цю саму точку – є  $t + dt_2$  відповідно. Далі, користуючись співвідношеннями (4.2.14), (4.2.17), визначаємо дійсний час, що протікає між моментами відправлення сигналу та його поверненням у ту саму точку:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} \cdot ((t + dt_2) - (t + dt_1)) = \frac{2}{c} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \left( \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \right) \cdot dx_i dx_k}. \quad (4.2.18)$$

Для просторової відстані  $dl$  це дає

$$dl = (c/2) \cdot d\tau,$$

звідки, використовуючи співвідношення (4.2.18), для квадрату цієї відстані маємо

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \left( \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \right) \cdot dx_i dx_k. \quad (4.2.19)$$

Співвідношення (4.2.19) містить зв'язок між метрикою реального тривимірного простору і метрикою чотиривимірного простору - часу загальної теорії відносності.

З приводу одержаного результату для довжини  $dl$  (формула (4.2.19)) зробимо такі зауваження. По-перше, не має сенсу питання про інтегрування цієї величини, оскільки результат інтегрування тут залежить від лінії інтегрування, тобто від світової лінії об'єкту. По-друге, оскільки функції  $g_{ik}$ , що визначають метрику простору, залежать від часової координати, просторова відстань  $dl$  у теорії, яка розглядається, також залежить від неї. Інакше кажучи, у загальній теорії відносності, взагалі, не існує тіл, які були б нерухомими одне відносно одного.

## 4.3 Прості моделі

### 4.3.1 Статичне гравітаційне поле точкової маси

У 4.2.3 було зазначено, що метрика простору, який заповнено матерією, визначається її розподілом. Найпростішим прикладом такого розподілу можна вважати нерухому точкову масу. Якщо для наведеного розподілу мас поставити задачу визначення метрики простору, зазначимо, що останній навколо досліджуваної маси, по-перше, має сферичну симетрію. По-друге, гравітаційне поле в зазначеному випадку є стаціонарним, тобто воно не залежить від часу. Тому для розв'язання поставленої задачі зручно скористатися сферичними координатами  $(r, \vartheta, \varphi)$ . З іншого боку, стаціонарність поля означатиме, що функції  $g_{ik}$ , які визначають метрику простору, не залежать від часу. Нарешті, припускається, що на великій відстані від джерела гравітаційного поля простір має псевдоевклідовий характер.

У зазначеній постановці задача була розв'язана К. Шварцшильдом у 1916 році, і внаслідок значної складності повний її розв'язок тут не дається. Разом з тим, нижче наводяться деякі інтуїтивні міркування, які дозволяють одержати точний розв'язок поставленої задачі.

Нагадаємо, що в загальній теорії відносності прямого зв'язку між координатами  $x_1, x_2, x_3, x_0$  та просторовими відстанями і проміжками часу не існує (див. (4.2.14), (4.2.19)): для визначення зазначених величин між двома близькими точками в просторі або між двома близькими подіями в часі необхідно знати не тільки різниці  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_0 = cdt$  (у сферичній системі координат – різниці  $dr, d\vartheta, d\varphi, dx_0 = cdt$ ), але й явний вигляд функцій  $g_{ik}$ . Для встановлення цього вигляду візьмемо до уваги, що зазначені різниці визначені в певній інерціальній системі відліку  $K$ , і розглянемо частинку, яка рухається відносно інерціальної системи вздовж радіальної координати  $r$  зі змінною швидкістю  $\vec{v}$ . З цією частинкою пов'яжемо неінерціальну систему відліку  $K'$ . Відносно зазначеної системи частинка нерухома, тобто час між близькими подіями в цій системі відліку  $dt'$  є власний час частинки. Щодо спостерігача, пов'язаного із системою  $K$ , частинка рухається вздовж певної траєкторії. Якщо розбити цю траєкторію на малі ділянки – такі, у межах кожної з яких швидкість частинки можна вважати сталою, зв'язок між проміжками часу  $dt'$  і  $dt$ , що розділяють дві близькі події в системах  $K$  і  $K'$ , які полягають у перебуванні частинки на початку і в кінці ділянки, можна записати у вигляді  $dt' = dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$  (зазначимо, що  $dt$  – проміжок часу між двома близькими подіями, виміряний годинником, нерухомим відносно інерціальної системи відліку  $K$  (див. формули (2.4.3), (2.5.8))). Внаслідок неінерціальності системи швидкість  $\vec{v}$  залежить від часу і, як наслідок цього, – від координат.)

З іншого боку, принцип еквівалентності дозволяє в околі певної точки дію сил інерції на матеріальний об'єкт в неінерціальній системі відліку замінити дією відповідно підібраних сил тяжіння. Нехай частинка перебуває в центрально-симетричному полі тяжіння. Тоді, обираючи потенціальну енергію

частинки в нескінченності за нуль і вважаючи, що в початковий момент часу частинка перебуває на нескінченності і має нульову швидкість, використовуючи закон збереження механічної енергії, одержимо

$$dt' = dt \cdot \sqrt{1 - 2GM/rc^2} \quad (4.3.1)$$

(нагадуємо, що тут  $M$  – маса джерела поля тяжіння, а  $r$  – відстань від цього джерела до точки поля, в якій миттєва швидкість частинки дорівнює  $v$ ). У точках простору, для яких  $r \rightarrow \infty$ , у випадку, що тут розглядається, гравітаційного поля немає, і тому для зазначених точок  $dt' = dt$ . Отже, співвідношення (4.3.1) можна тлумачити як таке, що свідчить про наявність у гравітаційному полі ефекту сповільнення ходу годинників. Цей ефект слід розглядати як зміну властивостей простору та часу за наявності гравітаційного поля, а не як вплив гравітаційного поля на хід фізичних процесів.

Такі самі міркування можна навести щодо впливу гравітаційного поля на властивості простору. Якщо відстань між двома близькими точками вздовж радіуса, взятими навколо значення  $r$ , виміряна в інерціальній системі відліку  $K$ , є  $dr$ , то в неінерціальній системі  $K'$ , пов'язаній з частинкою, ця відстань буде (формула (2.4.2))

$$dr' = \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/rc^2}}. \quad (4.3.2)$$

Щодо квадрата відстані між точками  $dl^2 = r^2 \cdot d\vartheta^2 + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2$ , які належать лінії, яка є перпендикулярною до радіуса сфери (див. рис. 4.2в), то, як відомо, ця відстань під час переходу від системи  $K$  до системи  $K'$ , або під час урахування дії гравітаційного поля, не змінюється (дивись зауваження, зроблені з цього приводу в 2.4.1). Завдяки принципу еквівалентності знову-таки цей результат можна тлумачити як зміну властивостей простору за наявності гравітаційного поля.

Зазначимо, що співвідношення (4.3.1), (4.3.2) можна узагальнити на випадок довільного гравітаційного поля. У випадку, що розглядається, потенціал гравітаційного поля в точці з радіальною координатою  $r$  буде  $\varphi(r) = -GM/r$ . Тому узагальнення формул (4.3.1), (4.3.2) виглядатиме так:

$$\begin{aligned} dt' &= dt \cdot \sqrt{1 + 2\varphi(\vec{r})/c^2}; \\ dr' &= \frac{dr}{\sqrt{1 + 2\varphi(\vec{r})/c^2}}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Для квадрата інтервалу між двома подіями, близькими в просторі-часі, у статичному гравітаційному полі точкової маси, використовуючи рівності (4.3.3), маємо

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 \left(1 - 2GM/rc^2\right) \cdot dt^2 - \\ &- \left(1 - 2GM/rc^2\right)^{-1} \cdot dr^2 - r^2 \cdot \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2\right) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

У термінах функцій  $g_{ik}$ , які визначають метрику простору-часу (рівність (4.2.6)), інтервал в даному випадку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & c^2 g_{00}(r, \vartheta, \varphi) \cdot dt^2 + g_{rr}(r, \vartheta, \varphi) \cdot dr^2 + \\
 & + g_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) \cdot d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}(r, \vartheta, \varphi) \cdot d\varphi^2 + \\
 & + 2g_{r\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) \cdot dr \cdot d\vartheta + 2g_{r\varphi}(r, \vartheta, \varphi) \cdot dr \cdot d\varphi + \\
 & + 2g_{\vartheta\varphi}(r, \vartheta, \varphi) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi + 2cg_{0r}(r, \vartheta, \varphi) \cdot dr \cdot dt + \\
 & + 2cg_{0\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) \cdot d\vartheta \cdot dt + 2cg_{0\varphi}(r, \vartheta, \varphi) \cdot d\varphi \cdot dt,
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

де зазначені функції визначаються рівностями:

$$\begin{aligned}
 g_{00}(r, \vartheta, \varphi) &= 1 - 2GM/rc^2; \quad g_{rr}(r, \vartheta, \varphi) = -\left(1 - 2GM/rc^2\right)^{-1}; \\
 g_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) &= -r^2; \quad g_{\varphi\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = -r^2 \cdot \sin^2 \vartheta; \\
 g_{r\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) &= g_{r\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = g_{\vartheta\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = \\
 &= g_{0r}(r, \vartheta, \varphi) = g_{0\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) = g_{0\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Поява коефіцієнту «2» перед певними функціями у співвідношенні (4.3.6) пов'язана з симетрією цих функцій за їхніми індексами.

Під час одержання формули ((4.3.4)) з метою спрощення аналізу проблеми було зроблено низку припущень (застосування для перетворень довжини і проміжків часу в неінерціальній системі відліку виразів, справедливих для інерціальних систем без попереднього аналізу, рух тільки вздовж радіальної координати, нерелятивістське наближення, тощо). Проте, незважаючи на це, формула ((4.3.4)) з функціями  $g_{ik}$ , які визначаються рівностями ((4.3.5)), (4.3.6) виявляється *точним* розв'язком задачі, що розглядається. *Вона застосовна для кількісного описання викривлення чотиривимірного простору-часу поза тілом, яке створює гравітаційне поле, у випадку, коли цим тілом виявляється нерухома точкова маса, або інший сферично-симетричний розподіл мас.* Ця формула використовується для опису руху небесних тіл навколо зірок, а також дає невеликі поправки до законів руху планет сонячної системи, які спостерігаються в досліді (див. 4.4). Більш детально фізичний зміст і галузь застосовності формули (4.3.4) аналізуються в 4.3.3.

## 4.3.2 Проміжки часу та відстані в статичному гравітаційному полі точкової маси

### 4.3.2.1 Проміжки часу

Для зв'язку між часовою координатою і дійсним часом використаємо формулу (4.2.14). У нашому випадку це дає

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} \cdot dt = \sqrt{1 - r_g/r} \cdot dt. \tag{4.3.7}$$

З наведеної формули бачимо, що проміжок дійсного часу у випадку, що розглядається, залежить від просторових координат точки, в якій відбуваються події.

#### 4.3.2.2 Відстані

Зв'язок між координатами точок та відстанню між ними визначаємо за допомогою формули ((4.2.19)), звідки маємо

$$dl^2 = \left(1 - 2GM/rc^2\right)^{-1} \cdot dr^2 + r^2 \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2). \quad (4.3.8)$$

#### 4.3.3 Гравітаційний радіус. Чорні дірки

##### 4.3.3.1 Поняття про гравітаційний радіус

Розглядаючи співвідношення (4.3.6), бачимо, що для певних значень відстані  $r = r_g$  функції  $g_{00}, g_{rr}$  змінюють знак, при цьому функція  $g_{00}$  перетворюється на нуль, а функції  $g_{rr}$  – на нескінченність. З наведених рівностей одержуємо, що

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.3.9)$$

Ця величина називається *гравітаційним радіусом матеріального об'єкту* і має важливий фізичний зміст. Зауважимо, що, використовуючи позначення ((4.3.9)), функції  $g_{00}, g_{rr}$  можна записати у вигляді

$$g_{00}(r, \vartheta, \varphi) = 1 - r_g/r; \quad g_{rr}(r, \vartheta, \varphi) = -\left(1 - r_g/r\right)^{-1}, \quad (4.3.10)$$

звідки випливає, що саме величина безрозмірного відношення  $r_g/r$  є характеристикою викривлення простору-часу внаслідок дії сил тяжіння і відміни його метрики від псевдоевклідової. Отже, умова

$$r_g/r \ll 1 \quad (4.3.11)$$

є такою, що дозволяє нехтувати ефектами загальної теорії відносності і користуватися ньютонівською теорією тяжіння.

Поняття гравітаційного радіуса об'єкту можна проілюструвати наочно, використовуючи нерелятивістські уявлення. Визначимо радіус однорідної сфери маси  $M$ , яка тяжіє і для якої швидкість світла  $c$  є другою космічною. Для цього у формулі (4.1.6) покладемо  $E = 0$ , звідки відразу ж випливає співвідношення (4.3.9). *Отже, гравітаційний радіус певного сферично-симетричного розподілу мас можна тлумачити як радіус такого розподілу, для якого швидкість світла є другою космічною швидкістю.*

Здійснимо оцінки гравітаційного радіуса і відношення  $r_g/r$  для атомних ядер і атомів. У випадку ядер, зокрема, для оцінки маси можна взяти величину порядку атомної маси  $M \approx 10^{-27}$  кг, тоді, як випливає з рівності (4.3.9), для атомних ядер  $r_g \approx 1,5 \cdot 10^{-54}$  м. Порівнюючи одержану величину з радіусом дії

ядерних сил  $r_n \sim 10^{-15}$  м, бачимо, що тут умова (4.3.11) задовольняється, і тому врахування ефектів загальної теорії відносності в цьому випадку є зайвим: воно маскується іншими ефектами і перебуває за межами можливостей вимірювальної техніки. У випадку атомів для оцінки маси знехтуємо масою електронів і тоді під їхньою масою розуміємо ту саму атомну масу, що була використана в попередньому випадку. Тоді гравітаційний радіус атома приблизно буде збігатися з таким для атомних ядер. Беручи для оцінки лінійних розмірів атома порядок величини його радіуса  $r_a \sim 10^{-10}$  м, бачимо, що нерівність (4.3.11) тут задовольняється з великою точністю, і тому щодо необхідності врахування ефектів загальної теорії відносності у випадку, що розглядається, можна казати те ж саме, що було сказане з цього приводу у випадку атомного ядра.

Наведемо значення гравітаційних радіусів деяких космічних об'єктів і порівняємо останні з їхніми геометричними радіусами  $R$  (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Гравітаційні радіуси деяких космічних об'єктів

$r_g$	$r_g/R$
Сонце $r_g = 2,96 \cdot 10^3$ м	$r_g/R = 4,21 \cdot 10^{-6}$
Меркурій $r_g = 4,88 \cdot 10^{-4}$ м	$r_g/R = 2,00 \cdot 10^{-10}$
Венера $r_g = 6,96 \cdot 10^{-3}$ м	$r_g/R = 1,15 \cdot 10^{-9}$
Земля $r_g = 8,88 \cdot 10^{-3}$ м	$r_g/R = 1,38 \cdot 10^{-9}$
Марс $r_g = 9,47 \cdot 10^{-4}$ м	$r_g/R = 2,79 \cdot 10^{-10}$
Юпітер $r_g = 2,82$ м	$r_g/R = 3,92 \cdot 10^{-10}$
Плутон $r_g = 2,19 \cdot 10^{-5}$ м	$r_g/R = 3,78 \cdot 10^{-11}$
Місяць $r_g = 1,10 \cdot 10^{-4}$ м	$r_g/R = 0,63 \cdot 10^{-10}$
Зірка Ригель $r_g = 5,03 \cdot 10^4$ м	$r_g/R = 0,51 \cdot 10^{-6}$
Зірка Антарис $r_g = 4,44 \cdot 10^4$ м	$r_g/R = 0,45 \cdot 10^{-7}$
Зірка R1361a1 $r_g = 7,85 \cdot 10^5$ м	$r_g/R = 1,01 \cdot 10^{-5}$
Зірка Проксима Центавра $r_g = 0,365 \cdot 10^3$ м	$r_g/R = 1,82 \cdot 10^{-4}$
Нейтронна зірка $r_g = 4,14 \cdot 10^3$ м	$r_g/R = 0,92$

З наведеної таблиці бачимо, що врахування викривлення простору-часу поблизу космічних об'єктів дає невеликі поправки до нерелятивістських законів руху тіл, які перебувають у гравітаційному полі цих об'єктів. Ефекти, пов'язані з цими поправками, а також специфічні ефекти, притаманні тільки загальній теорії відносності, спостерігаються на досліді (див. 4.4).

Аналізуючи вираз (4.3.10) для функцій  $g_{00}, g_{rr}$ , який було встановлено Шварцшильдом, можна дійти висновку, що цей вираз має фізичний зміст лише



для відстаней  $r_g/r < 1$ : якщо  $r_g/r = 1$ , зазначені функції перетворюються на нуль або на нескінченність, а у випадку  $r_g/r > 1$  – змінюють знак. Насправді, таким значенням під час первинного аналізу фізичного змісту надати важко. Але більш глибоке вивчення проблеми показує, що це твердження є справедливим лише частково.

### 4.3.3.2 Поняття про чорні дірки та горизонт подій

Для подальших міркувань введемо поняття *сфери Шварцшильда як такої, центр якої збігається з центром розподілу мас і радіус якої дорівнює  $r_g$* . Тоді, як можна бачити, вирази (4.3.10) для функцій  $g_{00}, g_{rr}$  виявляються такими, що мають безпосередній фізичний зміст лише для точок простору, які містяться поза об'ємом, обмеженого сферою Шварцшильда. Щоб уявити собі, що являє собою простір всередині зазначеної сфери, розглянемо погляду віддаленого спостерігача події, які полягають у випусканні світлового променя точковим джерелом, що перебуває в точці з радіальною координатою  $r$  поза сферою, та у досягненні цим променем точки з радіальною координатою  $r_0$ , причому  $r_0 > r \geq r_g$ . Для світлового променя  $ds = 0$ , і тому з формули (4.3.4) для радіальної складової швидкості маємо

$$\frac{dr}{dt} = (1 - r_g/r) \cdot c, \quad (4.3.12)$$

звідки для часу  $\Delta t$  поширення променя між зазначеними точками одержимо

$$\Delta t = (1/c) \cdot \int_r^{r_0} \frac{rdr}{r - r_g} = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \cdot \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}. \quad (4.3.13)$$

Отже, під час прямування  $r \rightarrow r_g$  час  $\Delta t$  збільшується і для відстані  $r = r_g$  з погляду віддаленого спостерігача  $\Delta t \rightarrow \infty$ . З фізичної точки зору це означає, що світловий промінь, випущений з довільної точки сфери Шварцшильда, цю сферу не здатний залишити. Більш складний математичний аналіз показує, що наведене твердження справедливе не тільки для світлових променів, але й для довільних тіл. Інакше кажучи, якщо з погляду віддаленого спостерігача будь-який матеріальний об'єкт опинився поблизу сфери Шварцшильда, він захоплюється цією сферою. Тому об'єм, обмежений сферою Шварцшильда, одержав назву *чорної дірки*, а сама сфера Шварцшильда – назву *горизонту подій*. Інакше кажучи, чорна дірка – це такий матеріальний об'єкт, який поглинає будь-які сигнали, які виникають поблизу нього, і тому інформація про нього не може дійти до віддаленого спостерігача (тобто спостерігача, який перебуває в тій області простору, де ефекти, пов'язані з його кривизною, неістотні).

Виникає питання, чи існують у природі згадані вище матеріальні об'єкти. Для того, щоб цей об'єкт можна було вважати чорною діркою, необхідно, щоб його геометричні розміри за порядком величини збігалися з його гравітаційним радіусом, тобто він повинен мати надзвичайно високу густину. Як можна

бачити з наведеної вище таблиці, на роль таких об'єктів можуть претендувати нещодавно відкриті нейтронні зірки. Щодо наявності таких об'єктів у мікро- та макросвіті, зазначимо, що такі дані на сьогодні відсутні. Проте це поняття може відігравати важливу роль у фізиці як фізична модель.

Для більш повного фізичного аналізу проблеми порівняємо час падіння матеріального об'єкту у шварцшильдівському полі з погляду віддаленого спостерігача та спостерігача, нерухомого відносно об'єкта. Спочатку розглядаємо випадок віддаленого спостерігача; тут для радіальної складової швидкості світла (так само, як і в прикладі, розглянутому вище), маємо

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - r_g/r\right) \cdot c \quad (4.3.14)$$

(знак «-» пов'язаний з поширенням світла до *центру* (дивись формулу (4.3.12))). Звідси для часу його поширення від точки з радіальною координатою  $r_0$  поза сферою, до точки з радіальною координатою  $r$ , якщо  $r_0 > r$  маємо

$$\Delta t = -(1/c) \cdot \int_{r_0}^r \frac{r dr}{r - r_g} = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \cdot \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g},$$

тобто одержуємо ту саму формулу (4.3.13). З цієї формули випливає, що тут також під час прямування  $r \rightarrow r_g$  для віддаленого спостерігача  $\Delta t \rightarrow \infty$ , тобто час, який потрібен світловому променю, щоб досягти сфери Шварцшильда під час падіння на неї з будь-якої точки з погляду віддаленого спостерігача, є нескінченний. Як і в попередньому прикладі, цей результат виявляється справедливим не тільки для світлових променів, але й для будь-яких матеріальних об'єктів.

З одержаного результату можна дійти висновку про те, що все, що відбувається всередині сфери Шварцшильда, є недоступним для спостерігача, який перебуває за межами цієї сфери (звідки й іде для сфери Шварцшильда назва «горизонт подій»). Проте цей висновок є помилковий. До справжнього тлумачення цього результату ми ще повернемося, а зараз розглянемо подальші міркування, які свідчать про помилковість наведеного можливого висновку. Для цього, як уже було зазначено, визначимо час падіння об'єкту на сферу Шварцшильда в системі відліку, нерухомій відносно цього об'єкту. Строгий розв'язок задачі тут досить складний, тому ми обмежимося розглядом нерелятивістського випадку, виходячи з того, що саме для цього випадку проміжки часу, виміряні в системі відліку, нерухомій відносно об'єкту, збігаються з такими у будь-якій системі. Виявляється, що результат, одержаний тут для часу падіння матеріального об'єкту у шварцшильдівському полі, збігається з тим, що одержується під час точного розв'язування задачі.

Виходимо із закону збереження механічної енергії і вважаємо, що частинка в початковий момент часу перебуває в спокої в точці, що міститься на віддалі  $r_0$  від початку координат; тоді повна механічна енергія частинки масою  $m$  в заданій точці дорівнює її потенціальній енергії, тобто  $E_1 = U_1 = -GMm/r_0$ . Якщо частинка починає з цієї точки радіальний рух до центру, частина її

потенціальної енергії перетворюється на кінетичну, внаслідок чого для точки, що міститься на віддалі  $r$  від центру, маємо  $E_2 = T_2 + U_2 = mv^2/2 - GMm/r$ , де  $v$  – швидкість частинки в заданій точці. Із закону збереження механічної енергії  $E_1 = E_2$  одержуємо

$$v_r = -\frac{dr}{dt} = -c \left( \frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{1/2}. \quad (4.3.15)$$

Зазначимо, що такий самий результат одержується під час точного розв'язування релятивістської задачі. Отже, як це впливає з формули (4.3.15), у випадку спостерігача, який рухається разом з частинкою, для точок  $r = r_g$  швидкість  $v_r$  не перетворюється на нуль, на протилежність випадку віддаленого спостерігача (дивись формулу (4.3.14)). Інакше кажучи, спостерігач, нерухомий відносно частинки, не «відчуває» ніякої особливої ролі поверхні Шварцшильда, як горизонту подій; частинка перетинає цю поверхню і падає на центр, досягаючи в ньому нескінченної швидкості.

З формули (4.3.15) можна визначити час падіння  $\Delta t$  частинки на сферу Шварцшильда. Насправді, обчислюючи інтеграл, маємо

$$\Delta t = -(1/c) \cdot \left( \frac{r_0}{r_g} \right)^{1/2} \int_{r_0}^{r_g} \left( \frac{r}{r_0 - r} \right)^{1/2} \cdot dr = \frac{2r_0}{c} \cdot \left( \frac{r_0}{r_g} \right)^{1/2} \cdot I, \quad (4.3.16)$$

де

$$I = \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \cdot d\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2} - \arctg \xi_1 \right), \quad \xi_1 = \left( \frac{r_g}{r_0 - r_g} \right)^{1/2}.$$

З наведеного виразу для  $\Delta t$  можна побачити, що цей час скінченний, що є наслідком одержаного вище ненульового результату (4.3.15) для швидкості частинки. Проте явний вигляд для часу падіння досить громіздкий. Він допускає спрощення в двох найбільш цікавих випадках: якщо  $\xi_1 \ll 1$  (або  $r_0 \gg 2r_g$ ) та  $\xi_1 \gg 1$  ( $r_0 \sim r_g$ ), при цьому  $r_0 > r_g$ . У першому з цих випадків маємо

$$\Delta t = \frac{\pi r_0}{2c} \cdot \left( \frac{r_0}{r_g} \right)^{1/2};$$

другий випадок дає

$$\Delta t = \frac{2r_0}{c} \cdot \left( \frac{r_0}{r_g} \right)^{1/2} \cdot \frac{r_0 - r_g}{r_g}.$$

Наведений приклад з розрахунком швидкості падіння частинки в полі Шварцшильда в системі відліку спостерігача, нерухомого відносно частинки, та часу її руху, як було зазначено вище, показує, що сфера Шварцшильда не є такою поверхнею, за межами якої є принципово нова фізика. Як довели

подальші дослідження проблеми, специфічна поведінка функцій  $g_{00}, g_{rr}$  при  $r = r_g$  пов'язана з вибором системи координат, зокрема, з вибором системи відліку, в якій час вимірює віддалений спостерігач. Виявляється, що для описання властивостей простору-часу навколо статичного сферично-симетричного розподілу мас можна використати систему відліку, пов'язану з рухом досліджуваного тіла. У цій системі згадані функції не перетворюються на нуль та не втрачають неперервності у точці  $r = r_g$ . Тобто зазначені вище властивості функцій  $g_{00}, g_{rr}$  у точці  $r = r_g$  не означають, що при  $r = r_g$  розв'язок (4.3.6) (або (4.3.10)) втрачає зміст; вони лише свідчать про неповноту системи відліку, пов'язану з віддаленим спостерігачем. З такою системою відліку неможливо пов'язати систему координат, яка би «покривала» весь простір-час. Саме у неможливості використання для спостереження процесів, що відбуваються всередині сфери Шварцшильда, системи відліку, пов'язаної з віддаленим спостерігачем і полягає помилковість висновку про принципову неможливість спостереження процесів, що відбуваються всередині сфери Шварцшильда.

#### 4.3.4 Простір - час у системі відліку, що рівномірно обертається

Система координат, що рівномірно обертається, є неінерціальною. У 4.2.3.1 було показано, простір – час, якщо розглядати його в цій системі, не є евклідовим (точніше – псевдоевклідовим). Для зручності дослідження структури простору – часу в цій системі для просторового підпростору зручно обрати циліндричну систему координат. Так само, як і в попередньому випадку, будемо розглядати нерелятивістський випадок; більш точне кількісне обмеження, що відповідає цьому випадку, наводиться нижче (співвідношення (4.3.20)).

Розглянемо інерціальну систему відліку  $K$ , з якою пов'язана циліндрична система координат  $(r, \varphi, z)$ ; нехай відносно осі  $z$  цієї системи з кутовою швидкістю  $\omega$  обертається інша система  $K'$ , з якою також пов'язана циліндрична система координат  $(r', \varphi', z')$ , причому напрями осей  $z$  та  $z'$  збігаються. Зв'язок між координатами та часом у випадку, що розглядається має вигляд

$$\begin{aligned} r &= r'; \\ z &= z'; \\ \varphi &= \varphi' + \omega t'; \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Інтервал між близькими подіями в системі  $K'$ , як це впливає з (4.3.17), має вигляд

$$ds^2 = c^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega r'}{c} \right)^2 \right) dt'^2 - (dr'^2 + dz'^2 + r'^2 d\varphi'^2 + 2r'^2 \omega \cdot d\varphi' \cdot dt'). \quad (4.3.18)$$

З виразу (4.3.18) випливає явний вигляд функцій  $g_{ik}$ , які визначають метрику в неінерціальній системі відліку  $K'$ :

$$g_{00} = 1 - \left( \frac{\omega r'}{c} \right)^2; \quad g_{r'r'} = g_{z'z'} = -1; \quad g_{\varphi'\varphi'} = -r'^2; \quad g_{\varphi'0} = g_{0\varphi'} = -r'^2 \omega; \quad (4.3.19)$$

$$g_{0r'} = g_{r'0} = g_{0z'} = g_{z'0} = g_{r'z'} = g_{z'r'} = g_{\varphi'r'} = g_{r'\varphi'} = g_{z'\varphi'} = g_{\varphi'z'} = 0.$$

Бачимо, що наведені тут співвідношення справедливі за умови

$$\frac{\omega r'}{c} \ll 1. \quad (4.3.20)$$

Зазначимо також, що і в цьому випадку неінерціальність системи відліку веде до викривлення простору і робить його неевклідовим.

Визначимо квадрат довжини у системі відліку, що тут розглядається. Застосовуючи формули (4.2.19), (4.3.19), одержуємо

$$dl'^2 = dr'^2 + dz'^2 + \frac{r'^2 d\varphi'^2}{1 - (\omega r'/c)^2}. \quad (4.3.21)$$

За допомогою одержаної формули можна визначити довжину кола  $l'_{\text{кол}}$ , яке лежить у площині обертання з центром на осі  $z$ . За допомоги співвідношення (4.3.21) маємо

$$dl'_{\text{кол}} = \frac{r' d\varphi'}{\sqrt{1 - (\omega r'/c)^2}},$$

звідки інтегрування за кутом дає

$$l'_{\text{кол}} = \frac{r'}{\sqrt{1 - (\omega r'/c)^2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{2\pi r'}{\sqrt{1 - (\omega r'/c)^2}} > 2\pi r'.$$

Отже, бачимо, що у випадку, який розглядається, відношення довжини кола до його радіуса в площині обертання  $l'_{\text{кол}}/r' > 2\pi$ , що є відображенням неевклідового характеру метрики простору (порівняти цей факт зі сказаним у 4.2.2.4).

### 4.3.5 Про граничний перехід до евклідової геометрії у випадку статичного гравітаційного поля точкової маси

Аналізуючи вирази для функцій  $g_{ik}$  (4.3.10), що визначають метрику простору у випадку точкової маси, зазначаємо, що граничний перехід до випадку  $r \rightarrow \infty$  для радіальних і кутових функцій тут відбувається за різними законами. Ця обставина викликає певне незадоволення з принципової точки зору, а також є не дуже зручною під час розв'язання конкретних задач. Тому виникає питання про можливість переходу до іншої системи координат, вільної від зазначеного

недоліку. Така можливість дійсно існує: їй відповідає перехід до нової радіальної координати  $\rho$  :

$$r = \rho \left( 1 + r_g / 4\rho \right)^2. \quad (4.3.22)$$

Підставляючи співвідношення (4.3.22) до (4.3.4), одержуємо вираз для інтервалу між точками у чотиривимірному просторі подій у гравітаційному полі точкової маси, в якому роль радіальної змінної відіграє  $\rho$  :

$$ds^2 = c^2 \left( \frac{1 - r_g / 4\rho}{1 + r_g / 4\rho} \right)^2 \cdot dt^2 - \quad (4.3.23)$$

$$- \left( 1 + r_g / 4\rho \right)^4 \cdot \left( d\rho^2 + \rho^2 \left( d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2 \right) \right)$$

Отже в (4.3.23) *перед просторовою частиною інтервалу міститься загальний множник, чого немає у випадку (4.3.4)*. Сферичні координати з радіальною координатою, визначеною співвідношенням (4.3.22), називаються *ізотропними*.

#### 4.4 Експериментальні засади загальної теорії відносності

Під час створення загальної теорії відносності А. Ейнштейн спирався на такі експериментальні факти: зсув (прецесія) перигелію Меркурію, викривлення світлових променів, що проходять поблизу Сонця, та червоне зміщення спектральних ліній, що випускаються з поверхонь масивних нагрітих тіл. Спроби пояснити всі зазначені ефекти були зроблені й до створення загальної теорії відносності, проте, в цілому вони виявилися невдалими: припущення, що були зроблені для пояснення одного з ефектів, перебували у протиріччі з іншою низкою експериментальних фактів. Отже, лише загальна теорія відносності виявилася спроможною на базі геометризації теорії тяжіння пояснити всі зазначені вище експериментальні факти з єдиної точки зору, не вдаючись при цьому до будь-яких припущень, які спрощують картину.

##### 4.4.1 Зсув перигелію Меркурію

Із законів Кеплера відомо, що в полі тяжіння Сонця планети рухаються вздовж еліптичних орбіт, в одному з фокусів яких міститься Сонце. Зазначене твердження, зокрема, впливає, з розв'язку рівнянь руху точкової маси в центрально-симетричному полі у ньютонівській теорії тяжіння. Проте, ще в 19 сторіччі видатним французьким астрономом Левер'є було виявлено, для деяких планет, зокрема, для Меркурію від цього закону спостерігається невелике відхилення. Це відхилення полягає в тому, що положення еліптичної орбіти з часом не залишається сталим, а повільно прецесіє; інакше кажучи, спостерігається повільне обертання перигелію Меркурію. Точні вимірювання довели, що кут зазначеного оберту для Меркурію складає  $43'',11 \pm 0'',45$  за сторіччя. Нижче показано, як у межах загальної теорії відносності пояснюються зазначені спостереження – спочатку за допомогою наївного розглядання, а потім – у межах більш строгого – кількісного.

Уявлення про кут оберту перигелію Меркурію за сторіччя можна одержати шляхом розмірних оцінок. Для оцінки скористаємося безрозмірним відношенням  $r_g/R$ , де  $r_g$  – гравітаційний радіус Сонця, а  $R$  – середня відстань від планети до центру Сонця у незбуреному русі, за яку можна взяти її більшу піввісь (у випадку Меркурію  $R = 5,8 \cdot 10^{10}$  м), і тому для кута зсуву перигелію планети за один оберт у радіанній мірі з розмірних міркувань пишемо

$$\vartheta = 2\pi \cdot \frac{r_g}{R} \quad (4.4.1)$$

З наведеної формули випливає, що з усіх планет сонячної системи найбільшого кута зсуву слід чекати для Меркурію, бо для нього радіус орбіти незбуреного руху є найменший.

Беручи до уваги, що одному радіану відповідає  $(180/\pi) \cdot 3,6 \cdot 10^3 = 2",06 \cdot 10^5$  (кутових секунд), а також користуючись даними таблиці в 4.3.2 про гравітаційний радіус Сонця і наведеним вище значенням величини більшої півосі  $R$ , з формули (4.4.1) можна записати

$$\vartheta = 6",70 \cdot 10^{-2}. \quad (4.4.2)$$

Цей кут виявляється дуже малим для спостережень, внаслідок чого для відповідних оцінок користуються кутом зсуву перигелію планети за сторіччя  $\vartheta_{100}$ . Для вищезначеної величини пишемо

$$\vartheta_{100} = \vartheta \cdot N, \quad (4.4.3)$$

де  $N$  – кількість обертів планети вздовж незбуреної орбіти за сторіччя, тобто

$$N = \frac{100 \cdot T_3}{T}, \quad (4.4.4)$$

де  $T$  – період обертання планети вздовж зазначеної орбіти,  $T_3 = 365 \text{ діб} = 31,54 \cdot 10^6 \text{ с}$  – період орбітального руху Землі в секундах. Вважаючи незбурену орбіту планети колом, цей період визначаємо з умови, що сила тяжіння  $F = GMm/R^2$  ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$  – стала тяжіння,  $M$  – маса Сонця), що діє на планету масою  $m$  з боку Сонця, надає їй нормальне прискорення  $a_n = v^2/R = 4\pi^2/(T^2 \cdot R)$ . Тоді

$$GMm/R^2 = 4\pi^2 Rm/T^2,$$

звідки

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{c^2}{8\pi^2} r_g = \text{const}. \quad (4.4.5)$$

Отже, бачимо, що відношення  $R^3/T^2$  для планет, що обертаються навколо фіксованого точкового джерела і взаємодіють з ним за законом  $F \sim 1/R^2$ , є сталим (це твердження відоме як 3<sup>ій</sup> закон Кеплера). Використовуючи вищезначений закон та відповідні параметри земної орбіти  $R_3 = 1,5 \cdot 10^{11}$  м,  $T_3 = 365 \text{ діб} = 31,54 \cdot 10^6 \text{ с}$ , маємо

$$\frac{T_3}{T} = \left(\frac{R_3}{R}\right)^{3/2} = 4,16. \quad (4.4.6)$$

Підставляючи рівності (4.4.2), (4.4.4) і (4.4.6) до співвідношення (4.4.3), для кута зсуву перигелію Меркурію за сторіччя одержуємо

$$\vartheta_{100} = \vartheta \cdot N = 27'',8,$$

що складає майже 65% від наведеного вище експериментального значення. Беручи до уваги грубість моделі, збіг експериментального значення кута зсуву перигелію Меркурію за сторіччя із знайденим на основі наведених вище теоретичних міркувань можна вважати цілком задовільним.

Кількісний розрахунок, зроблений на основі аналізу руху частинки в полі Шварцшильда, для кута зсуву перигелію Меркурію за один оберт дає

$$\vartheta = \frac{3\pi}{1-e^2} \cdot \frac{r_g}{R},$$

де  $e = 0.205$  – ексцентриситет його орбіти. Тоді для кута зсуву перигелію планети за сторіччя маємо  $\vartheta_{100} = 43'',53$ , що добре узгоджується з даними експерименту.

#### 4.4.2 Відхилення світлового променя в полі Сонця

Даний ефект, який спостерігається на досліді, можна розглядати, як наслідок можливості падіння фотона на Сонце, тобто як наслідок можливості захоплення фотона світилом. Можливість захоплення знову - таки визначається відношенням  $r_g/R$ , де  $r_g$ , як і раніше, гравітаційний радіус Сонця, а  $R$  – його звичайний геометричний радіус. Захопленню фотона, який пролітає в безпосередній близькості від сонячного диску, відповідає кут оберту порядку  $\pi$ , тому для оцінки кута відхилення світлового променя під час його проходження поблизу Сонця скористуємося співвідношенням

$$\vartheta = \pi \cdot \frac{r_g}{R}.$$

Якщо взяти  $R = 7 \cdot 10^8$  м, для шуканої величини одержимо

$$\vartheta = 2,78''. \quad (4.4.7)$$

Так само, як і у попередньому випадку, цікаво порівняти цей результат з тим, що дає строга теорія, а також – з експериментальними даними. Строга теорія, яка базується, так само, як і у попередньому прикладі, на аналізі руху безмасової частинки в полі Шварцшильда, дає

$$\vartheta = 2 \frac{r_g}{R} = 1,77''. \quad (4.4.8)$$

Порівнюючи результати (4.4.7) та (4.4.8) з експериментальним значенням ( $\vartheta = 1,75''$ ), бачимо, що наївні якісні міркування призводять до результату, який



добре узгоджується з експериментальним за порядком величини, а строга теорія виявляє й добре кількісне узгодження з експериментом.

#### 4.4.3 Гравітаційне зміщення спектральних ліній

Нехай поблизу земної поверхні фотон має частоту  $\omega$ . Тоді під час підйому догори на висоту  $H$  (передбачається, що  $H \ll R$ , де  $R$  – радіус земної кулі), фотон витрачає на подолання сили притягання з боку Землі енергію  $(\hbar\omega/c^2) \cdot gH$ . Отже повна енергія цього фотона на висоті  $H$  над поверхнею Землі є

$$\hbar\omega' = \hbar\omega - (\hbar\omega/c^2) \cdot gH$$

Таким чином, під час підйому фотона догори з поверхні Землі спостерігатися зміщення його частоти  $\Delta\omega = \omega - \omega'$ . Ефект характеризується відносною частотою, тобто величиною

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gH}{c^2}, \quad (4.4.9)$$

що випливає з (4.4.9). Якщо взяти  $H = 20\text{м}$ ,  $g = 9,8\text{м/с}^2$ , то  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2,2 \cdot 10^{-15}$ .

Саме таке значення для цієї величини було одержане в дослідах, які були виконані в 1960р. Паундом і Ребкою.

Оскільки в даному випадку частота фотона під час його віддалення від джерела гравітаційного поля зменшується, зазначений ефект отримав назву *червоного зміщення*: скажімо, частота фотона, який належить до блакитної області спектра, зазнає зміщення в напрямку червоної області видимого спектра.

*Отже, наявність гравітаційного червоного зміщення можна розглядати як пряме експериментальне підтвердження принципу еквівалентності.*

З іншого боку, ефект, що розглядався вище, можна тлумачити як прямий наслідок зміни властивостей простору - часу за наявності гравітаційного поля, який призводить до сповільнення ходи годинників у гравітаційному полі (див. 4.3.1). Насправді, нехай період коливач світлового вектора у світовій хвилі з погляду віддаленого спостерігача (тобто такого, який пов'язаний з тими точками простору, в яких гравітаційне поле відсутнє), є  $T$ ; тоді за наявності поля відповідною величиною буде

$$T' = T \sqrt{1 + 2\phi/c^2}$$

(див. формули (4.3.3)). Для циклічної частоти тоді маємо  $\omega = 2\pi/T$ ,

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 + 2\phi/c^2}}. \quad (4.4.10)$$

Зі знаку похідної

$$\frac{d\omega'}{d\phi} = -\left(\frac{\omega}{c^2}\right) \left(1 + 2\phi/c^2\right)^{-3/2} < 0$$

бачимо, що зростання потенціалу гравітаційного поля супроводжується зменшенням частоти: якщо джерело монохроматичних світлових хвиль перебуває в точках простору, в яких поле більш слабе, а спостерігач з приймачем – у точках, де воно сильніше (нагадуємо, що потенціал поля обрано нульовим на нескінченності і таким, що це значення є максимальне), частота світла, що сприймається спостерігачем, є більшою, ніж та, що випромінюється джерелом, тобто зсув частоти  $\Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1$  відбувається до фіолетової області. Якщо має місце протилежний випадок, то цей зсув відбудеться до червоної області.

Згаданий зсув найпростіше обчислюється у випадку слабких полів ( $\phi \ll c^2$ ). Тоді, нехтуючи в розкладанні правої частини виразу (4.4.10) членами  $(\phi/c^2)^2$  та більш високих степенів  $\phi/c^2$ , одержуємо

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'_1} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}. \quad (4.4.11)$$

Якщо на поверхні Землі спостерігається випромінювання, випущене атомом поблизу Сонця, у наведеному виразі  $\phi_1$  – потенціал гравітаційного поля на поверхні Землі, а  $\phi_2$  з припустимою точністю можна вважати таким, що дорівнює потенціалу на поверхні Сонця. Тоді  $\phi_1/c^2 = -GM_1/c^2 R_1 = -r_{g1}/2R_1$ ;  $\phi_2/c^2 = -GM_2/c^2 R_2 = -r_{g2}/2R_2$ , де індекси «1» та «2» відносяться до Землі та Сонця – відповідно. Використовуючи дані таблиці, наведеної в 4.3.3, бачимо, що з достатньою точністю можна вважати  $\phi_1/c^2 \approx 0$ ; отже з використанням даних зазначеної таблиці для зсуву, що визначається співвідношенням (4.4.11) маємо

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'_1} = -\frac{\phi_2}{c^2} = -0,5 \cdot \frac{r_{g2}}{R_2} \approx -2,10 \cdot 10^{-6}, \quad (4.4.12)$$

тобто тут спостерігається *червоний зсув* спектральних ліній. Навпаки, якщо спостерігати на Землі випромінювання, випущеного віддаленим джерелом з точки, що має нульовий потенціал, одержимо

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'_1} = \frac{\phi_1}{c^2} = 0,5 \cdot \frac{r_{g1}}{R_1} \approx 6,9 \cdot 10^{-10}. \quad (4.4.13)$$

У даному випадку зсув спектральної лінії відбувається у *фіолетовий бік*. Порівнюючи праві частини рівностей (4.4.12) і (4.4.13) з (4.4.9), бачимо, що точність вимірювання зсуву спектральної лінії (формула (4.4.9)) в досліді Паунда і Ребки значно перевищує результати обчислень (4.4.12), (4.4.13). Отже, про вплив гравітаційного поля на властивості простору – часу (зокрема, на ходу часу) можна казати досить впевнено.

## Контрольне завдання

4.1. Що нового в порівнянні зі спеціальною теорією відносності до уявлень про властивості простору та часу вносить загальна теорія відносності?

4.2. У чому полягає принцип еквівалентності інертної і гравітаційної маси? Чи досить надійно він експериментально обґрунтований?

4.3. Які експериментальні факти підтверджують принцип еквівалентності інертної і гравітаційної мас?

4.4. Вздовж діаметра Землі пробурений наскрізний отвір, в якому міститься частинка. Дослідити, чи існує пов'язана з частинкою неінерціальна система відліку, в якій дія поля тяжіння на частинку не відчувається і, якщо існує, вказати її: а) така система існує, в ній частинка рівномірно обертається вздовж кола всередині Землі, центр якого збігається з центром Землі з кутовою швидкістю  $\omega = (g/R)^{1/2}$  ( $g$  – прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі,  $R$  – радіус Землі); б) така система існує, в ній частинка рівномірно обертається вздовж кола всередині Землі, центр якого збігається з центром Землі з кутовою швидкістю  $\omega = (g/R)^{1/2}$  ( $g$  – прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі,  $R$  – радіус кола); в) така система існує, в ній частинка рівномірно обертається вздовж кола поза Землі, центр якого збігається з центром Землі з кутовою швидкістю  $\omega = (g/R)^{1/2}$  ( $g$  – прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі,  $R$  – радіус кола); г) такої системи не існує.

4.5. У чому полягає принцип еквівалентності сил інерції і тяжіння?

4.6. У чому полягає зв'язок між властивостями простору та часу і силами інерції і тяжіння, що в цьому просторі діють?

4.7. Указати, в чому полягає принцип загальної коваріантності: а) у твердженні про однаковість протікання фізичного явища у всіх системах відліку; б) у твердженні, що існує така система відліку, в якій всі фізичні явища описуються одним законом; в) у твердженні, що закони природи у всіх системах відліку мають мати однаковий вигляд, проте, протікання фізичних явищ у цих системах відбувається різним способом; г) у твердженні, що закони природи за наявності однорідного поля тяжіння у всіх системах відліку мають однаковий вигляд; г) вірної відповіді немає.

4.8. Указати, чи спостерігається сповільнення ходи годинників під час поміщення годинника у гравітаційне поле і, якщо спостерігається, вказати причину: а) не спостерігається, б) спостерігається внаслідок впливу гравітаційного поля на властивості простору – часу, в якому перебуває годинник; в) спостерігається внаслідок безпосереднього впливу гравітаційного поля на процеси, що протікають у годиннику; г) неоднорідне поле тяжіння не змінює властивості простору – часу, в якому перебуває годинник, але воно безпосереднього впливає на роботу годинника, і тому в цьому випадку сповільнення його ходи спостерігається: однорідне поле тяжіння не впливає на властивості простору – часу, в якому перебуває годинник, і безпосередньо не

впливає на роботу годинника; тому в зазначеному випадку сповільнення ходи годинників не спостерігається.

4.9. Указати, в чому полягає зміст поняття «геодезична лінія»: а) будь-яка лінія на поверхні, що відрізняється від прямої; б) будь-яка замкнена лінія на поверхні; в) будь-яка незамкнена лінія на поверхні; г) найкоротша лінія на поверхні, що з'єднує будь-які точки, що належать поверхні.

4.10. Визначити гравітаційний радіус таких об'єктів: а) електрона (маса  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг); б) протона (маса  $m = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг); в) ядра  $^{238}\text{U}$  (маса  $m \approx 4 \cdot 10^{-25}$  кг); г) планети Уран (маса  $m = 8,7 \cdot 10^{25}$  кг); д) Місяця (маса  $m = 7,4 \cdot 10^{22}$  кг).

4.11. Чи можна у загальній теорії відносності визначити проміжок часу між двома подіями, якщо відомі тільки часові координати подій? Чи може цей проміжок залежати від просторових координат точок або часових координат подій, в яких вони відбуваються? Відповідь обґрунтувати.

4.12. Чи можна у загальній теорії відносності визначити просторову відстань між двома точками, якщо відомі тільки просторові координати точок? Чи може ця відстань залежати від просторових координат точок або часових координат зазначених точок? Відповідь обґрунтувати.

4.13. Чи існують, взагалі, в загальній теорії відносності тіла, нерухомими одне відносно одного?.

4.14. Обмежуючись нерелятивістським наближенням, визначити інтервал між двома близькими подіями в неінерціальній системі відліку, яка рухається прямолінійно з постійним вектором прискорення  $\vec{a}$ .

4.15. Обмежуючись нерелятивістським наближенням, визначити відстань між двома близькими точками простору в неінерціальній системі відліку, яка рухається прямолінійно з постійним вектором прискорення  $\vec{a}$ .

4.16. Обмежуючись нерелятивістським наближенням, визначити проміжок часу між двома подіями в неінерціальній системі відліку, яка рухається прямолінійно з постійним вектором прискорення  $\vec{a}$ .

4.17. Функції  $g_{ik}$  у моделі Шварцшильда при  $r = r_g$  перетворюються на нуль та нескінченність. Дослідити, які висновки можна зробити з цього факту: а) у точках простору  $r < r_g$  нової фізики немає, а модель Шварцшильда є непридатною для опису фізичних явищ у цих точках простору; б) у точках простору  $r < r_g$  нової фізики немає, система координат, обрана Шварцшильдом, принципово не дозволяє одержати відповіді на поставлене питання; в) у точках простору  $r < r_g$  має місце принципово нова фізика, яка моделлю Шварцшильда не описується; г) вірна відповідь на питання сьогодні невідома.

4.18. Визначити, яку густину  $\rho_s$  мала б Земля, якщо б її геометричний радіус дорівнював гравітаційному, і порівняти її із середньою густиною  $\rho_j$  ядерної речовини. Радіус ядра визначити з формули  $r_j = r_0 \cdot A^{1/3}$  ( $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$  м,  $A$  – масове число ядра).

4.19. Визначити густину речовини  $\rho_n$ , з якої складається нейтронна зірка. Необхідні дані взяти з таблиці, поміщеної в 4.3.3.1. Порівняти одержаний результат із середньою густиною  $\rho_y$  ядерної речовини (дивись попереднє завдання).

4.20. Користуючись розмірними оцінками, оцінити кут зсуву перигелію Землі за 100 – річчя. Для середньої відстані від планети до центра Сонця у незбуреному русі взяти  $R = 1,5 \cdot 10^{11}$  м, для маси Землі взяти  $M = 6 \cdot 10^{24}$  кг.

4.21. Користуючись таблицею, поміщеною в 4.3.3.1, за допомогою розмірних оцінок оцінити кут відхилення світлового променя під час його проходження поблизу а) Місяця; б) Юпітера; в) Плутона; г) Зірки Проксима Центавра; д) нейтронної зірки.

4.22. Оцінити, наскільки суттєвим є врахування неоднорідності поля тяжіння Землі під час аналізу результатів досліду Паунда і Ребки, описаного в 4.4.3.

## Список рекомендованої літератури

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики : в 3 т. / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцік. – К. : «Техніка», 1999 – Т. 10: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – 1999. – 536 с.
2. Лопатинський І.Є. Фізика для інженерів / І.Є.Лопатинський, І.Р. Зачек та ін. – Л. : «Львівська Політехніка», 2009. – 385 с.
3. Савельєв І.В. Курс общей физики : в 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 352 с.
4. Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М.Яворский. – М. : «Высшая школа», 2002. – 718 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И.Трофимова. – М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.
6. Матвеев А.Н. Курс физики : в 5 т. / А.Н. Матвеев. – М. : «Мир и образование», 2003 – Т. 1: Механика и теория относительности. – 2003. – 432 с.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т: 4: Оптика. – 2005. – 792 с.
8. Гаркуша І.П. Загальний курс фізики. Збірник задач / І.П. Гаркуша, І.Т. Горбачук, В.П. Курінний, І.М. Кучерук, М.Ш. Певзнер. – К. : «Техніка», 2003. – 560 с.
9. Киттель Ч. Берклеевский курс физики : в 5 т. / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М. : «Наука», 1971 – Т: 1: Механика. – 1971. – 481 с.
10. Фейнман Р.Ф. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р.Ф. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – «ЛИБРОКОМ», 2009. – Выпуск 1. Современная наука о природе. Законы механики. Выпуск 2. Пространство. Время. Движение. – 440 с.
11. Бутиков Е.И. Релятивистские представления в курсе общей физики / Е.И. Бутиков. – СПб. СПбГУ, 2006. – 90 с.
12. Воробьев И.И. Теория относительности в задачах / И.И. Воробьев. – М. : «Наука», 1989. – 176 с.

## Література для поглибленого вивчення

13. Эйнштейн А. Сущность теории относительности / А. Эйнштейн. – М. : Изд. ин. лит., 1955. – 157 с.
14. Фейнман Р.Ф. Фейнмановские лекции по гравитации / Р.Ф. Фейнман, Ф.Б. Мориниго, У.Г. Вагнер. – М. : «Янус К», 2000. – 296 с.
15. Румер Ю.Б. Теория относительности / Ю.Б. Румер, М.С. Рывкин. Теория относительности. – «ЛИБРОКОМ», 2010. – 216 с.
16. Ландау Л.Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : «Наука», 1988 – Т. 2: Теория поля. – 1988. – 512 с.
17. Паули В. Теория относительности / В. Паули. – М. : «Наука», 1983. – 336 с.
18. Дирак П. Общая теория относительности / П. Дирак. – М. : «Атомиздат», – 1975. – 64 с.
19. Хриплович И.Б. Общая теория относительности / И.Б. Хриплович. Ижевск : «РХД», – 2001. – 120 с.

20. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения / В.А. Фок. – М. : Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. – 504 с.
21. Борн М. Эйнштейновская теория относительности / М. Борн. – М. : «Мир», 1972. – 368 с.
22. Тейлор Э.Ф. Физика пространства – времени / Э.Ф. Тейлор, Дж.А. Уилер. – М. : «Мир», 1971. – 318 с.
23. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л.И. Мандельштам. – М. : «Наука», 1972. – 440 с.
24. Угаров В.А. Специальная теория относительности / В.А. Угаров. – М. : «Едиториал УРСС», 2010. – 384 с.
25. Окунь Л.Б. Понятие массы / Л.Б. Окунь // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 158, вып. 3. – С. 511 – 530.
26. Окунь Л.Б. Формула Эйнштейна  $E_0 = mc^2$ . «Не смеётся ли Господь Бог»? / Л.Б. Окунь // Успехи физических наук, 2008. – Т. 178, вып. 5. – С. 540 – 555.
27. Окунь Л.Б. Теория относительности и теорема Пифагора / Л.Б. Окунь // Успехи физических наук, 2008. – Т.178, вып. 6. – С. 653 – 663.
28. Паунд Р. Гравитационное смещение в ядерном резонансе / Р. Паунд, Г. Ребка // Сборник статей «Новейшие проблемы гравитации» / под. ред. Д.Д. Иваненко. – М. : Изд. ин. лит., 1961. – С. 469 – 473.
29. Паунд Р. Эффективный вес фотона / Р. Паунд, Г. Ребка // Сборник статей «Новейшие проблемы гравитации» / под. ред. Д.Д. Иваненко. – М. : Изд. ин. лит., 1961. – С. 474 – 483.
30. Курганов В. Введение в теорию относительности / В. Курганов. – М. : «Мир», 1964. – 216 с.
31. Бом Д. Специальная теория относительности / Д. Бом. – М. : «Мир», 1967. – 288 с.
32. Бергман Г. Введение в теорию относительности / Г. Бергман. – М. : Изд. ин. лит, 1947. – 380 с.
33. М.В. Сажин. Теория относительности для астрономов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.astronet.ru/db/msg/1170927>.

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА .....</b>	<b>3</b>
<b>1 МЕХАНІКА НЬЮТОНА – ГАЛІЛЕЯ.....</b>	<b>5</b>
Навчальна мета.....	5
Глосарій .....	5
1.1 Релятивістська і квантова механіка. Механіки Ньютона – Галілея та галузь її застосування. Стан частинки в механіці Ньютона – Галілея .....	6
1.2 Інерціальні системи відліку. Маса та імпульс частинки в механіці Ньютона – Галілея. Фундаментальні закони механіки Ньютона –Галілея.....	9
1.2.1 Основна задача механіки Ньютона-Галілея та інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона.....	9
1.2.2 Про рівноправність станів спокою і рівномірного прямолинійного руху.....	10
1.2.3 Маса та імпульс частинки в механіці Ньютона – Галілея.....	11
1.2.4 Фундаментальні закони механіки Ньютона – Галілея.....	12
1.3 Механічний принцип відносності .....	14
1.4 Перетворення Галілея. Поняття про інваріанти перетворень Галілея. Перетворення Галілея і механічний принцип відносності. ....	16
1.4.1 Перетворення Галілея.....	16
1.4.2 Додавання швидкостей в механіці Ньютона – Галілея .....	18
1.4.3 Інваріанти перетворень Галілея .....	18
1.4.3.1 Проміжок часу (тривалість події).....	19
1.4.3.2 Відстань між точками у просторі .....	19
1.4.3.3 Вектор відносної швидкості .....	20
1.4.3.4 Вектор прискорення .....	20
1.4.3.5 Маса частинки .....	20
1.4.3.6 Сила взаємодії між частинками.....	20
1.4.3.7 Закони руху механіки Ньютона-Галілея .....	20
Контрольне завдання до першого розділу .....	21
<b>2 ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.</b>	
<b>РЕЛЯТИВІСТСЬКА КІНЕМАТИКА .....</b>	<b>24</b>
Навчальна мета.....	24
Глосарій .....	24
2.1 Принцип відносності в електродинаміці та його експериментальне обґрунтування. Постулати спеціальної теорії відносності .....	25
2.2 Аналіз поняття одночасності подій в кінематиці Ньютона – Галілея та в релятивістській кінематиці.....	32
2.3 Перетворення Лоренца для координат і моментів часу .....	34
2.4 Основи релятивістської кінематики. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца.....	37
2.4.1 Скорочення довжин .....	37



2.4.2 Сповільнення ходу годинників .....	39
2.4.3 Релятивістський закон додавання швидкостей .....	40
2.5 Кінематичні інваріанти перетворень Лоренца.	
Поняття про чотиривимірний простір подій.....	43
2.5.1 Швидкість світла у вакуумі $c$ .....	43
2.5.2 Інтервал між двома подіями.....	43
2.5.3 Власний час.....	46
2.5.4 Чотиривимірні вектори .....	46
2.5.5 Вектор чотиривимірної швидкості та чотиривимірною прискорення як приклади чотиривимірних векторів .....	50
2.5.6 Скалярний добуток чотиривимірних векторів; ефект Доплера ....	51
2.5.7 Чотиривимірний об'єм .....	53
2.6 Поняття про світловий конус. Світові лінії і діаграми Мінковського.....	54
2.6.1 Поняття про світловий конус .....	54
2.6.2 Деякі додаткові відомості про геометрію чотиривимірною простору подій .....	55
2.6.3 Світові лінії і діаграми Мінковського .....	56
Контрольне завдання до другого розділу .....	59

### **3 ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ДИНАМІКИ .....**

Навчальна мета.....	62
Глосарій .....	62
3.1 Маса та імпульс в релятивістській механіці. Релятивістське рівняння руху .....	64
3.1.1 Маса релятивістської частинки та її імпульс .....	64
3.1.2 Релятивістський закон руху .....	66
3.1.3 Додаткові зауваження щодо властивостей маси в релятивістській механіці.....	67
3.1.4 Деякі додаткові зауваження щодо вектора сили в релятивістській механіці та релятивістського закону руху .....	68
3.1.4.1 Додаткові відомості про вектор сили і релятивістський закон руху в релятивістській механіці.....	68
3.1.4.2 Релятивістська форма закону руху в механіці.....	68
3.1.4.3 Структура вектора сили в релятивістській механіці. Залежність сили від швидкості.....	70
3.2 Виведення виразу для релятивістського імпульсу .....	71
3.3 Енергія в релятивістській механіці. Кінетична енергія релятивістської частинки. Власна енергія матеріального об'єкту як прояв його релятивістських властивостей. ....	74
3.3.1 Вектор енергії – імпульсу релятивістської частинки, її власна, повна та кінетична енергія.....	74
3.3.2 Деякі співвідношення для енергії релятивістської частинки та зауваження щодо маси системи частинок .....	77
3.3.3 Безпосередній розрахунок повної енергії релятивістської частинки.....	79

3.3.4 Приклад перетворення енергії спокою частинки в інші види енергії: розпад вільного нейтрона .....	79
3.4 Релятивістська частинка у зовнішньому потенціальному полі. Зв'язаний стан у релятивістській механіці. Енергія зв'язку релятивістської системи .....	80
3.4.1 Релятивістська частинка у зовнішньому потенціальному полі.....	80
3.4.2 Умова створення зв'язаного стану .....	80
3.4.3 Енергія зв'язку релятивістської системи.....	81
3.5 Перетворення Лоренца для енергії та імпульсу релятивістської частинки.....	86
3.5.1 Використання аналогії між проекціями чотиривимірного радіус-вектора і проекціями чотиривимірного імпульсу.....	86
3.5.2 Використання релятивістського закону додавання швидкостей ....	86
3.5.3 Граничний перехід до ньютонівської механіки .....	87
3.5.4 Про систему центра інерції сукупності релятивістських частинок.....	88
3.6 Про момент імпульсу частинки в релятивістській механіці.....	91
3.7 Релятивістські закони збереження. Зіткнення і розпад релятивістських частинок. ....	94
3.7.1 Пружне зіткнення релятивістських частинок. Ефект Комптона.....	94
3.7.2 Випромінювання Вавілова-Черенкова .....	97
3.7.3 Самовільний розпад частинки .....	99
3.7.4 Непружні зіткнення релятивістських частинок. Ядерні реакції. Поріг та енергія реакції.....	101
3.7.4.1 Народження пари електрон-позитрон ( $e^+e^-$ ) фотоном у полі атомного ядра .....	103
3.7.4.2 Поріг народження пари нуклон-антинуклон (антипротонний поріг) .....	104
3.7.4.3 Ідея прискорювачів на зустрічних пучках .....	104
3.7.4.4 Реакція поділу ядер урану.....	105
3.8 Перетворення Лоренца для сили в релятивістській механіці .....	109
3.8.1 Перетворення поздовжньої складової сили .....	109
3.8.2 Перетворення поперечної складової сили.....	110
3.8.3 Перетворення повної сили .....	111
Контрольне завдання до третього розділу .....	113
<b>4 ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.....</b>	<b>116</b>
Навчальна мета.....	116
Глосарій .....	116
4.1 Передумови створення загальної теорії відносності.....	118
4.1.1 Принцип еквівалентності .....	118
4.1.2 Проблеми нерелятивістської теорії тяжіння .....	120
4.1.3 Про витоки загальної теорії відносності в ньютонівській механіці.....	121

4.2 Дещо про фізику та геометрію; основні положення загальної теорії відносності .....	122
4.2.1 Про зв'язок фізики і геометрії .....	122
4.2.2 Елементи геометрії неевклідового простору .....	123
4.2.2.1 Метрика простору .....	123
4.2.2.2 Геодезичні лінії.....	125
4.2.2.3 Паралельний перенос вектора у криволінійному просторі .....	125
4.2.2.4 Кривизна поверхні.....	125
4.2.3 Основні положення загальної теорії відносності.....	127
4.2.3.1 Загальні відомості.....	127
4.2.3.2 Проміжки часу в загальній теорії відносності .....	129
4.2.3.3 Відстані в загальній теорії відносності .....	130
4.3 Прості моделі.....	132
4.3.1 Статичне гравітаційне поле точкової маси .....	132
4.3.2 Проміжки часу та відстані в статичному гравітаційному полі точкової маси.....	134
4.3.2.1 Проміжки часу.....	134
4.3.2.2 Відстані .....	135
4.3.3 Гравітаційний радіус. Чорні дірки.....	135
4.3.3.1 Поняття про гравітаційний радіус .....	135
4.3.3.2 Поняття про чорні дірки та горизонт подій .....	137
4.3.4 Простір – час у системі відліку, що рівномірно обертається .....	140
4.3.5 Про граничний перехід до евклідової геометрії у випадку статичного гравітаційного поля точкової маси .....	141
4.4 Експериментальні засади загальної теорії відносності .....	142
4.4.1 Зсув перигелію Меркурію .....	142
4.4.2 Відхилення світлового променя в полі Сонця .....	144
4.4.3 Гравітаційне зміщення спектральних ліній.....	145
Контрольне завдання до четвертого розділу .....	147