МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРАЗВЕДЫВАТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

слушателям подготовительного отделения для иностранных граждан

Днепропетровск
НГУ
2013

Функции. Предел. Производная и ее применение. Методические указания по элементарной математике слушателям подготовительного отделения для иностранных граждан / Д.В. Бабец, Е.А. Сдвижкова, С.Е. Тимченко, С.Н. Подольская, З.И. Бондаренко, Д.В. Клименко. – Д.: Национальный горный университет», 2013. – 126 с.

Автори:
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.;
Д.В. Бабець, канд. техн. наук, доц.;
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.;
С.Н. Подольська, ст. викладач;
З.І. Бондаренко, ст. викладач;
Д.В. Клименко, асист.

Затверджено до видання методичною комісією університету за поданням кафедри вищої математики (протокол № 7 від 30.05.2013 р.).

Данные методические указания по элементарной математике предназначены для подготовительного отделения и рассчитаны на иностранных граждан, которые прибыли в Украину с целью получения высшего образования. Включают элементы теории, методические указания и примеры решения задач. Весь материал разбит на параграфы, каждый из которых посвящен отдельной теме с последующим рассмотрением разнообразных примеров. В конце разделов приведены задания для самостоятельной работы.

Відповідальна за випуск зав. кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Учебным планом подготовительного факультета НГУ для иностранных граждан предусмотрено изучение математики в объеме 168 учебных часов. При этом учебные программы по математике включают все основные разделы школьных курсов алгебры, основ анализа и геометрии, которые излагаются в украинских школах. Иностранные студенты, которые учатся на подготовительном отделении НГУ для иностранных граждан, изучали математику на родине в разных объемах. Очень часто из учебных программ школ и колледжей других стран выпадают целые разделы, необходимые для изучения курса высшей математики в вузах Украины.

Данное методическое пособие подготовлено с целью повышения качества обучения иностранных студентов элементарной математике в курсе программы подготовительного отделения для иностранных граждан и рассчитано на студентов-иностранцев, которые прибыли в Украину для получения высшего образования. Включает элементы теории, задачи, методические указания, собственно, решения задач, и задачи для самостоятельного решения. В данном разделе рассмотрена тема «Пределы и производная». Весь материал разбит на параграфы, каждый из которых посвящен отдельной теме и снабжен разобранными примерами. В конце раздела приведены задания для самостоятельной работы.

I. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1. Определение функции

Определение. Пусть X – некоторое множество значений переменной x и задано правило, которое каждому числу x из множества X ставит в соответствие определенное число y. Это соответствие называют ***функцией*** y от x и записывают $y = f(x)$.

Переменную x называют ***аргументом*** или ***независимой переменной***. Множество X – ***область определения*** функции. Множество Y всех значений $y = f(x)$ есть ***область изменения*** функции.

Функция $y = f(x)$ задана если:

1) определено множество X, из которого берутся числа x;
2) указан закон f, по которому происходит отображение множества X на множество Y.

2. Способы задания функции

Соответствие между x и y которое определяет функцию $y = f(x)$, устанавливается различными способами. **Табличный** способ предполагает наличие некоторой таблицы, в которой помещены частные значения x и соответствующие им значения y. Например, тригонометрические, логарифмические и прочие таблицы. **Графический** способ задает график функции $y = f(x)$, т.е. определяет на плоскости xOy линию, для которой равенство $y = f(x)$ служит ее уравнением. **Аналитический** способ выражает соответствие $y = f(x)$ посредством некоторого аналитического выражения, т.е. при помощи одной или нескольких формул, уравнения. Также существуют неявные способы задания функции, например, **параметрический,** когда величины x и y выступают функциями вспомогательной переменной, называемой параметром: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$. Например, соотношения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ при

$0 \le t \le \pi$ определяют часть эллипса расположенную выше оси Ox. Исключив параметр t, вместо двух уравнения получим одно:

$$\frac{x}{a} = \cos t,\ \frac{y}{b} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Специальные классы функций

1. Четные и нечетные функции. Функцию $y = f(x)$, заданную на симметричном промежутке $(-l, l)$, называют **четной,** если $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in (-l, l)$. Здесь и в дальнейшем символ $\forall$ – означает «для любого». График четной функции симметричен относительно оси Oy. К четным функциям, заданным на всей числовой оси, относятся: $y = x^2$, $y = \cos x$ и многие другие.

Функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $(-l, l)$, называют **нечетной,** если $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in (-l, l)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примером нечетных функций, заданных на всей числовой оси, служат: $y = x^3$, $y = \sin x$ и др.

2. Периодические функции. Функцию $y = f(x)$ заданную на всей числовой оси, называют **периодической**, если существует такое число $T \ne 0$, что $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$. Величина T называется период функции. Если T – период, то для любого целого числа k произведение kT также служит периодом функции. Например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют период 2π но также и $T = 2k\pi$, где $k \in N$.

3. Монотонные функции. Функцию $y = f(x)$ заданную на промежутке, называют **возрастающей**, если для любой пары x_1 и x_2 из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. при $x_2 > x_1 \quad f(x_2) > f(x_1)$. Обратное неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ при том же условии $x_2 > x_1$ соответствует **убывающей** функции. Возрастающие и убывающие функции называют **монотонными**.

4. Основные элементарные функции.

1. **Степенная**: $y = x^{\alpha}$, где α – любое действительное число.

2. **Показательная**: $y = a^{x}$, где $a > 0, \quad a \neq 1$ (рис. 1). $X \in (-\infty, \infty), \qquad Y \in (0, \infty)$.

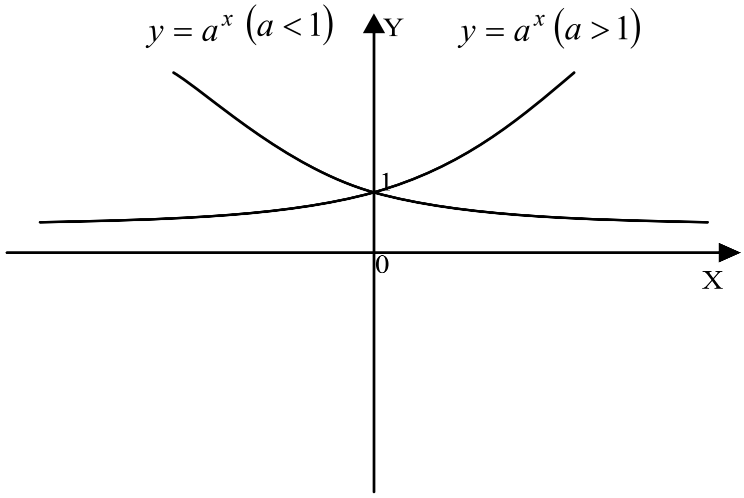


Рис. 1. Показательная функция.

3. **Логарифмическая**: $y = \log_a x, \quad где \ a > 0, \quad a \neq 1$ (рис. 2). $X \in (0, \infty), \quad Y \in (-\infty, \infty)$.

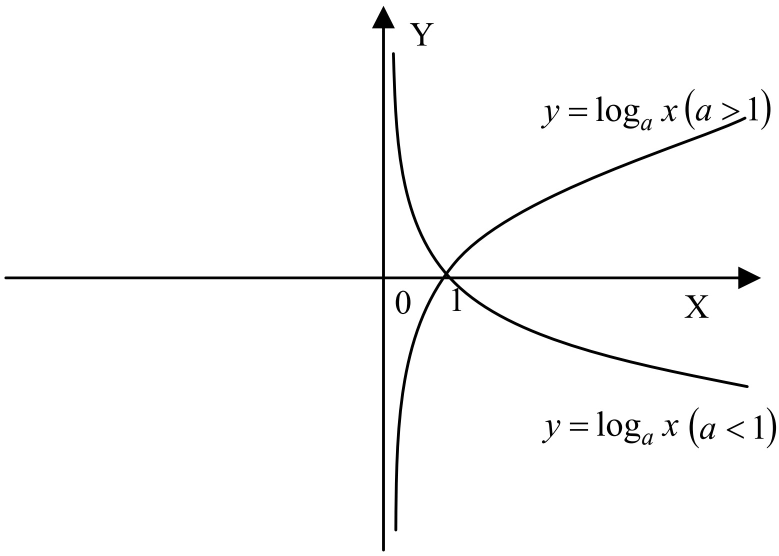


Рис. 2. Логарифмическая функция.

4. **Тригонометрические**:

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $X \in (-\infty, \infty), \qquad Y \in [-1, 1]$;

$y = tgx$, $X \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) + k\pi, \qquad k \in Z, \quad Y \in (-\infty, \infty)$;

$y = ctgx$, $X \in (0, \pi) + k\pi, \qquad k \in Z, \quad Y \in (-\infty, \infty)$.

Графики тригонометрических функций представлены на рис. 3.

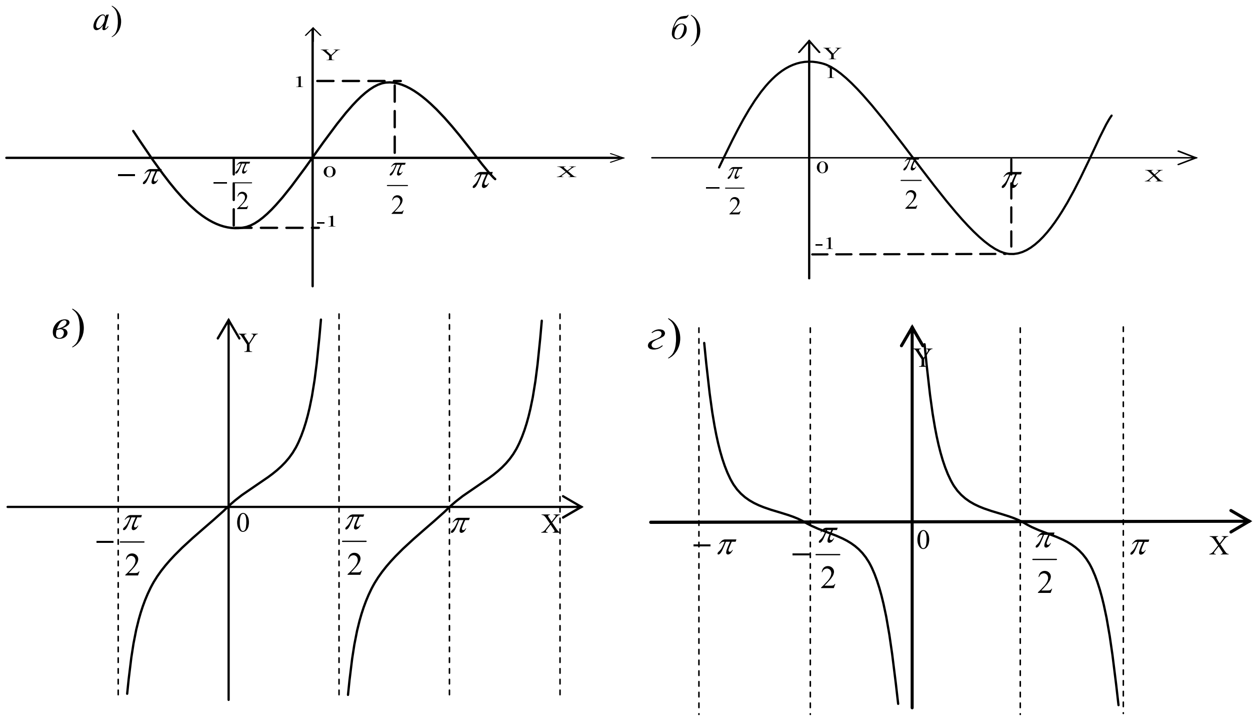


Рис. 3. Графики тригонометрических функций:

а) $y = \sin x$, б) $y = \cos x$, в) $y = tgx$, г) $y = ctgx$.

5. **Обратные тригонометрические функции.**

$y = \arcsin x$, $X \in [-1,1]$, $Y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x$, $X \in [-1,1]$, $Y \in [0, \pi]$;

$y = arctgx$, $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$y = arcctgx$, $X \in (-\infty, \infty)$, $Y \in (0, \pi)$.

Графики обратных тригонометрических функций представлены на рис. 4.

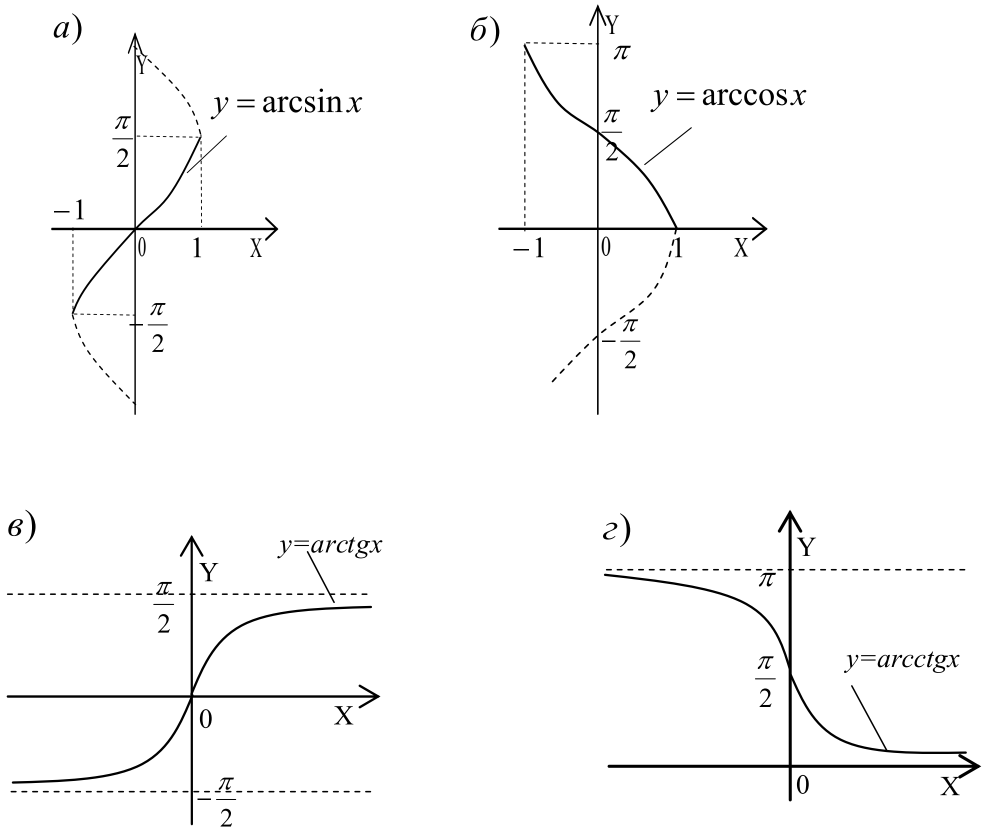


Рис. 4. Графики обратных тригонометрических функций:

а) $y = \arcsin x$, б) $y = \arccos x$, в) $y = arctgx$, г) $y = arcctgx$.

II. ПРЕДЕЛЫ

1. Определение предела.

1.1 Предел функции при $x \to \infty$.

Определение. Число a называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$, можно найти такое число N, что для всех x, больших N, выполняется неравенство:

$$\left| f(x) - a \right| < \varepsilon.$$

Это означает, что значения функции $y = f(x)$ для всех $x > N$ содержится в полосе, ограниченной прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$ (рис. 5).

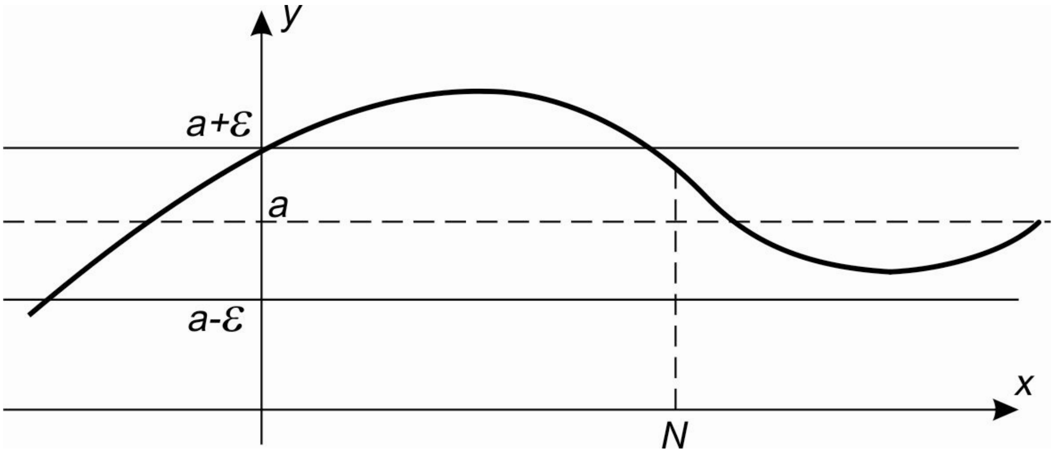


Рис. 5. К определению предела функции при $x \to +\infty$.

Определение. Число a называется **пределом функции** $y = f(x)$ **при** $x \to -\infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$, можно найти такое число N, что для всех x, меньших N, выполняется неравенство:

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что значения функции $y = f(x)$ для всех $x < N$ содержится в полосе, ограниченной прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$.

1.2 Предел функции при $x \to x_0$.

Определение. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **справа (слева)** $\left[a = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \left(a = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right) \right]$, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое $M > x_0$, $(N < x_0)$, что для всех x $(x_0 < x < M, \quad (N < x < x_0))$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$

Определение. Число a называется **пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$, существуют такие числа N и M $(N < x_0 < M)$, что для всех x из промежутка (N, M), (за исключением возможно самой точки x_0) справедливо неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Используется обозначение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

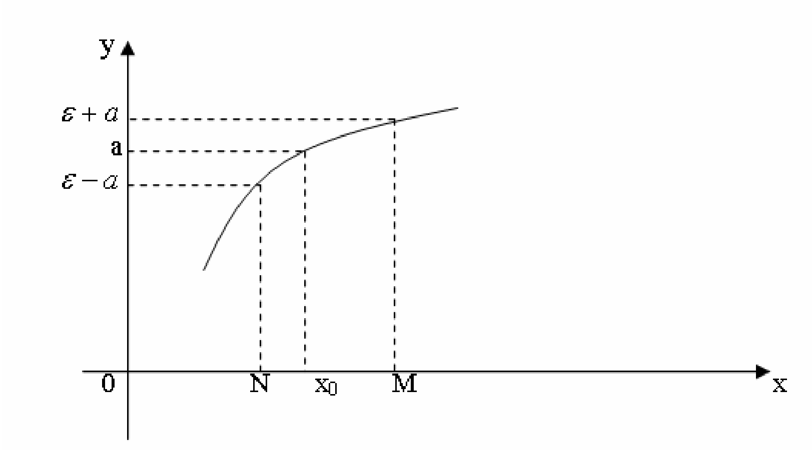


Рис. 6. К определению предела функции в точке.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Решение. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что существуют такие числа M и N, ($N < \mathrm{x}_0 < \mathrm{M}$), что для всех точек из промежутка (N,M) выполняется неравенство $|(3x-2)-1|<\varepsilon$. Решая это неравенство получим:

$$|3x-3|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<3x-3<\varepsilon \Rightarrow 1-\tfrac{\varepsilon}{3}<x<1+\tfrac{\varepsilon}{3}$$

Разность между функцией $y=3x-2$ и числом 1 будет по абсолютной величине меньше чем любое малое $\varepsilon>0$ для всех значений x, которые находятся между числами $N=1-\frac{\varepsilon}{3}$ и $M=1+\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому при $x\to 1$ пределом данной функции будет число $a=1$.

1.3 Бесконечно малые, бесконечно большие и ограниченные функции.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x\to+\infty$, если ее предел при $x\to+\infty$ равен нулю ($\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$).

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0$. Бесконечно малую функцию будем обозначать « 0 ».

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to +\infty$, если имеет место одно из равенств: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0$. Бесконечно большую функцию будем обозначать « ∞ ».

Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на некотором множестве Q значений аргумента *x,* если существует такое положительное число *C,* что для всех $x \in Q$, выполняется неравенство $|f(x)| \le C$.

Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

2. Вычисление пределов.

Если $f(x)$ элементарная функция и предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к подстановке граничного значения аргумента т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + x - 1)$.

Решение:

$$\lim_{x \to 1}(2x^2 + x - 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 2.$$

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to -3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$.

Решение:

$$\lim_{x \to -3}(x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 1 = -68;$$

Пример 4. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{3x+1}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{3x+1}}=\sqrt{\frac{2^2-4}{3\cdot 2+1}}=0.$$

3. Предел частного.

При вычислении предела частного используется следующая теорема:

Если предел числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю, то предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Используя обозначения, введенные в предыдущей главе («∞» – бесконечно большая величина, « 0 » – бесконечно малая величина) отметим следующие обобщенные правила для вычисления предела частного:

$$\left\{\frac{b}{0}\right\}=\infty \qquad \left\{\frac{b}{\infty}\right\}=0 \qquad \left\{\frac{b}{+0}\right\}=+\infty \qquad \left\{\frac{b}{-0}\right\}=-\infty$$

$$\left\{\frac{\infty}{b}\right\}=\infty \qquad (b>0); \qquad \left\{\frac{\infty}{a}\right\}=-\infty \qquad (a<0);$$

где a и b - конечные пределы.

Случаи « $\frac{\infty}{\infty}$ » и « $\frac{0}{0}$ » называются «неопределенностями», которые требуют дополнительных исследований (раскрытия неопределенностей).

Пример 5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25}{x^2+5x+1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25}{x^2+5x+1}=\left\{\frac{25}{\infty}\right\}=0.$$

Пример 6. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\left\{\frac{3}{0}\right\}=\infty.$$

Пример 7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^3+x-1}{x-2}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3+x-1}{x-2}=\left\{\frac{9}{-0}\right\}=-\infty.$$

** Обозначение $x\to 2-0$ означает, что x приближается к точке 2 «слева», т.е. остается меньше чем 2. Тогда в знаменателе получим бесконечно малую <u>отрицательную</u> величину.*

<u>3.1 Раскрытие неопределенности</u> $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Если в числителе и знаменателе дроби находятся алгебраические функции, то неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ раскрывается делением числителя и знаменателя на старшую степень переменной.

Пример 8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-2}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-6}{x^4-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}}{1-\frac{2}{x^4}}=\left\{\frac{0}{1}\right\}=0.$$

Пример 9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2+\sqrt{x}}{x^2-4x^4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}}{\frac{1}{x^2}-4}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 10. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{7^x}+\frac{7^{x+2}}{7^x}}{\frac{3}{7^x}-\frac{7^x}{7^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{7^x}+7^2}{\frac{3}{7^x}-1}=-49.$$

Пример 11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{8x^9+11}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^3}}{\sqrt[3]{8+\frac{11}{x^9}}}=\frac{3}{2}.$$

Пример 12. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x+5}{\sqrt{x^3}+3x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}}{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty.$$

Пример 13. Вычислить предел: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}$.

Решение:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{3}{t}}{1+\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

Замечание: при раскрытии неопределенности $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ бывает удобно воспользоваться так называемым «упрощенным правилом». Пусть дана дробь: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}$, где $Qn(x)$, $Rm(x)$ – многочлены с наивысшими степенями «n» и «m», тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)}=\begin{cases}0, & \text{если } m>n\\ \infty, & \text{если } n>m\\ A, & \text{если } m=n\end{cases},$$

где А – отношение коэффициентов при старших степенях x в числителе и знаменателе.

Пример 14.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+7x^4-1}{x(x+4)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\infty$. Наивысшая степень в числителе равна 5, а в знаменателе 2, поэтому предел равен ∞.

Пример 15.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=1$. В числителе и знаменателе дроби – произведение из 3-х сомножителей. Для раскрытия данного предела достаточно узнать наивысшую степень и коэффициенты x в числителе и знаменателе. Старшая степень числителя и знаменателя 3, коэффициенты одинаковые и равны 1.

Пример 16.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2\sqrt{x+1}+3x+2}{\sqrt{5x^5+2}-2x^2+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Наивысшая степень в числителе и знаменателе $\frac{5}{2}$, при этом коэффициент при старшей степени в числителе равен 2, а в знаменателе – $\sqrt{5}$, поэтому предел равен отношению этих коэффициентов $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3.2 Раскрытие неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Пусть заданный предел имеет вид:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{Pn(x)}{Rm(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$, т.е. $Pn(x_0)\to 0$ и $Rm(x_0)\to 0$ при $x\to x_0$.

В этом случае в числителе и знаменателе необходимо выделить множитель вида $(x-x_0)$ и сократить дробь, чтобы устранить неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Замечание: необходимо знать формулы.

$$x^2-x_0{}^2=(x-x_0)(x+x_0);$$
$$x^3-x_0{}^3=(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0{}^2);$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Пример 17. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

Решение: Найдем корни числителя $x^2-3x+2=0$; $x_1=2, x_2=1$, тогда $x^2-3x+2=1\cdot(x-2)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x^2+x+1)}=\frac{1-2}{1+1+1}=\frac{-1}{3}.$$

Пример 18. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

Решение: Для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе необходимо перенести иррациональность из знаменателя в числитель путем умножения числителя и знаменателя на выражение $\sqrt{x}+\sqrt{2}$, а затем сократить дробь.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x-3)}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x-3)=(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2-3)=-2\sqrt{2}.$$

Пример 19. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$$

Для вычисления данного предела необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на выражение $(x-x_0)$, т.е. в данном случае на $(x+2)$.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5+2x^4+x^2-3x-10 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5+2x^4\qquad\qquad\qquad} & x^4+x-5 \\
x^2-3x-10 & \\
\underline{x^2+2x\quad} & \\
-\quad -5x-10 & \\
\underline{-5x-10} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4+2x^3+3x^2+5x-2 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+2x^3\qquad\qquad\qquad} & x^3+3x-1 \\
3x^2+5x-2 & \\
\underline{3x^2+6x\quad} & \\
-\quad -x-2 & \\
\underline{-x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

После сокращения получим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^4+x-5)(x+2)}{(x^3+3x-1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^4+x-5)}{(x^3+3x-1)}-\frac{3}{5}.$$

Для нахождения пределов с неопределенностью вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, содержащих тригонометрические функции удобно использовать **первый замечательный предел.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Заметим что если $\lim_{x\to a} f(x)=0$, то и $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

Пример 20. Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Для решения данного предела мы умножили числитель и знаменатель дроби на 5, тем самым привели выражение к 1-му замечательному пределу.

Пример 21. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot\sin 5x}{2\cdot 5\cdot x\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

В данном случае умножаем числитель и знаменатель на $2\cdot 5\cdot x$.

Пример 22. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Решение:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

В этом примере мы разложили числитель на множители, а затем разделили числитель и знаменатель на 2.

Пример 23. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Решение следующей группы примеров основано на 1-м замечательном пределе и понятии эквивалентных бесконечно малых величин, т.е. – под знаком предела можно одну бесконечно малую величину заменить эквивалентной.

Примеры эквивалентных бесконечно малых величин:

При $x\to 0$: $\sin\alpha x\sim\alpha x$, $\arcsin\alpha x\sim\alpha x$, $tg\alpha x\sim\alpha x$, $arctgax\sim ax$,

$1-\cos\alpha x \sim \frac{\alpha^2 x^2}{2}$ т.к. $1-\cos\alpha x = 2\sin^2\frac{\alpha x}{2}$.

Пример 24. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{\sin 3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 25. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg 2x\sin x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg 2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^2 x^2}{2}}{2x\cdot x} = \frac{9}{4}.$$

4. Предел произведения и суммы.

Рассмотрим основные правила вычисления пределов произведения и суммы.

1. если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c$,

   тогда $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x)) = b+c$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x)) = b\cdot c$.

2. если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$,

   тогда $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x)) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x)) = \infty$, при $b \neq 0$.

3. если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \infty$, а $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$,

   тогда $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x)) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x)) = \infty$.

При решении подобных примеров могут возникать две неопределенности $\{0\cdot\infty\}$ и $\{\infty-\infty\}$. Для раскрытия этих неопределенностей необходимо привести выражения к правилам 1-3 либо к рассмотренным выше неопределенностям $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Пример 26. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-\sqrt[3]{x^4})$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-\sqrt[3]{x^4})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}(x^{4/3}(x^{11/4}-1))=\infty.$$

В данном примере мы выносим x в младшей степени за скобки и тем самым избавляемся от неопределенности.

Пример 27. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

В данном примере мы искусственно создаем знаменатель и умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение, для того чтобы перенести иррациональность в знаменатель и получить легко раскрываемую неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Пример 28. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$.

Решение:

$$\lim_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

В этом примере приведем выражение к общему знаменателю и получим неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Пример 29. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{4}{x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4(x+1)}{x}\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(1+\frac{1}{x})\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}=4.$$

Для решения данного предела умножим числитель и знаменатель на $\frac{4}{x}$, тем самым перейдем к 1-му замечательному пределу.

5. Предел степени.

Основные правила вычисления предела **степенно-показательной** функции $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$.

1. если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=b^c$
2. если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty & b>1\\ 0 & 0<b<1\end{cases}$
3. если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}0 & b>1\\ \infty & 0<b<1\end{cases}$
4. если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\begin{cases}\infty & c>0\\ 0 & c<0\end{cases}$
5. если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, *а* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, то при решении возникает неопределенность $\{1^\infty\}$. Для ее раскрытия необходимо использовать **второй замечательный предел**.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \textit{или} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

Пример 30. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

Решение:

Рассмотрим отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)=1,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=2^1=2$.

Пример 31. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}\right)^{x^2}$.

Решение:

Рассмотрим отдельно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}x^2=\infty,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}\right)^{x^2}=2^{\infty}=\infty$.

Для решения следующих примеров воспользуемся 2-м замечательным пределом.

Пример 32. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{\frac{3}{x}5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{15x}{x}}=e^{15}.$$

** В показателе степени добавлен множитель $\frac{x}{3}$ для того, чтобы получить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}$, равный e. Множитель $\frac{3}{x}$ за фигурными скобками компенсирует множитель $\frac{x}{3}$. В следующем примере будет использован аналогичный приём.*

Пример 33. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-1}{x+3}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^{x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x+3)}\right)^{-(x+3)}\right)^{\frac{x+4}{-(x+3)}}=e^{-1}.$$

Пример 34. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$.

<u>Решение</u>:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=e.$$

6. Индивидуальные задания.

Найти пределы функций:

1.
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x-1}}{5\sqrt{x^3}+2};\qquad б)\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x}{1-\sqrt{x}};$$
$$в)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$$

2. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x^5} - x + 4}{2x^2\left(\sqrt{x}+1\right)}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - x}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$

3. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\sqrt{2x} + 3x - 4}{5x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{x+2}$

4. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\sqrt{5x} - 2x + 1}{x^2\left(\sqrt{x}+2\right)}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - \sqrt{x}}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{1 - \cos 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{x-1}$

5. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 + 2x + \sqrt{x^5}}{x^2\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3}\right)}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 4}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{1 - \cos 2x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{x-2}$

6. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(1 + x\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{5x^3} + 3}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x}{\sqrt{x} - 1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x \cdot tg 2x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$

7. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(x\sqrt{x} + 3x + 1\right)}{4 + 6\sqrt{x^5}}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - x^4}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{1 - \cos 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+4}{5x+5}\right)^{4x+1}$

8. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 1}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x^4}{\sqrt{x} - 1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 7x}{\sin 2x \cdot \sin 3x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$

9. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+4\right)}{5x+\sqrt{x}+2}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 3x}{1-\cos 5x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+1}\right)^{3x+1}$

10. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(5x-\sqrt{x}+1\right)}{3+\sqrt{x^3}+x}$; $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x}$; $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{3x}$.

III. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Понятие непрерывности функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Значение функции в этой точке $f(x_0)$. Дадим x приращение Δx. Новому значению аргумента соответствует новое «наращенное» значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. Приращение функции равно:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ ***<u>непрерывна в точке</u>*** x_0, если она определена в этой точке, и бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (рис. 7).

Это определение можно расширить. Функция $y = f(x)$ ***<u>непрерывна в точке</u>*** x_0, если:

1. Функция определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;
2. Односторонние пределы равны и совпадают со значением функции в точке: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

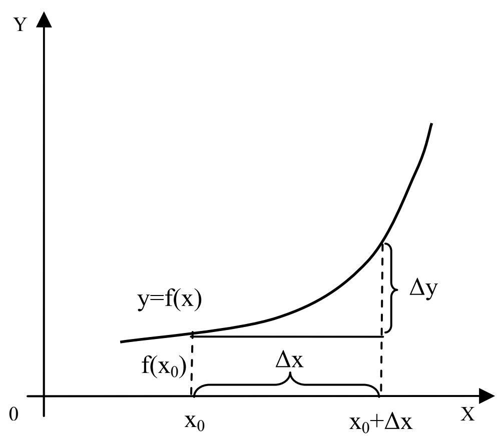


Рис. 7. К определению непрерывности.

2. Классификация точек разрыва.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или ее границе и не является точкой непрерывности.

1. ***<u>Точки разрыва I-го рода (конечный разрыв)</u>***. Если односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (рис. 8) функции в точке x_0 существуют, конечны, но не равны друг другу, то говорят, что функция терпит в точке x_0 ***<u>конечный разрыв I-го рода</u>***. ***<u>Скачком</u>*** h функции $y = f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность ее односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, если они различны. На рис. 8а) скачок функции $y = f(x)$ составляет $(a - b)$, здесь значение функции совпадает с правосторонним пределом функции (равно a), на рис. 8б) скачек функции $h = 0$ и имеет место устранимый разрыв.

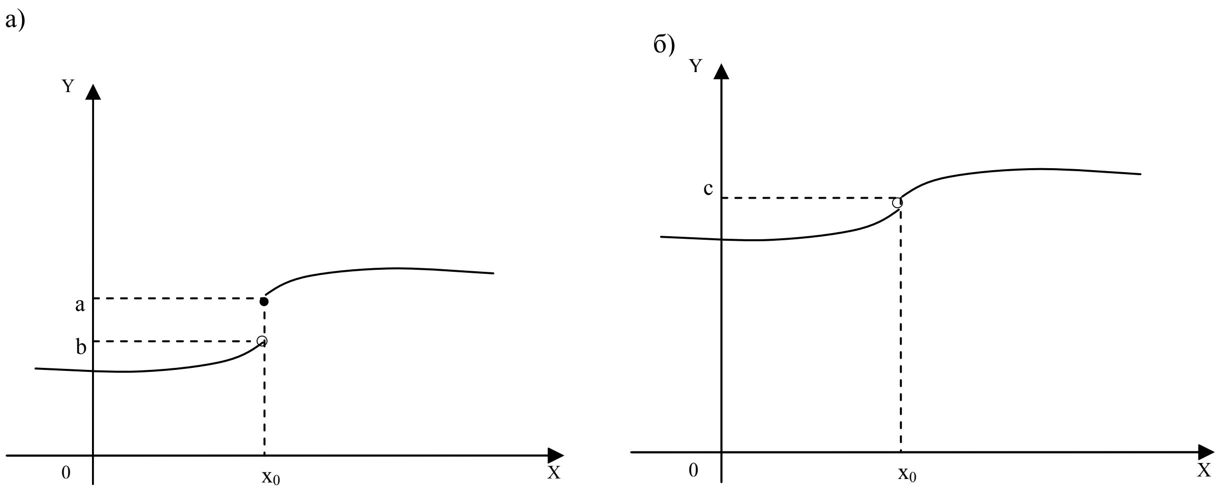


Рис. 8. Точки разрыва I-го рода.

2. ***<u>Точки разрыва II-го рода (бесконечный разрыв)</u>***. Разрыв функции в точке x_0 называется **бесконечным**, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ не существует или бесконечен. (рис. 9)

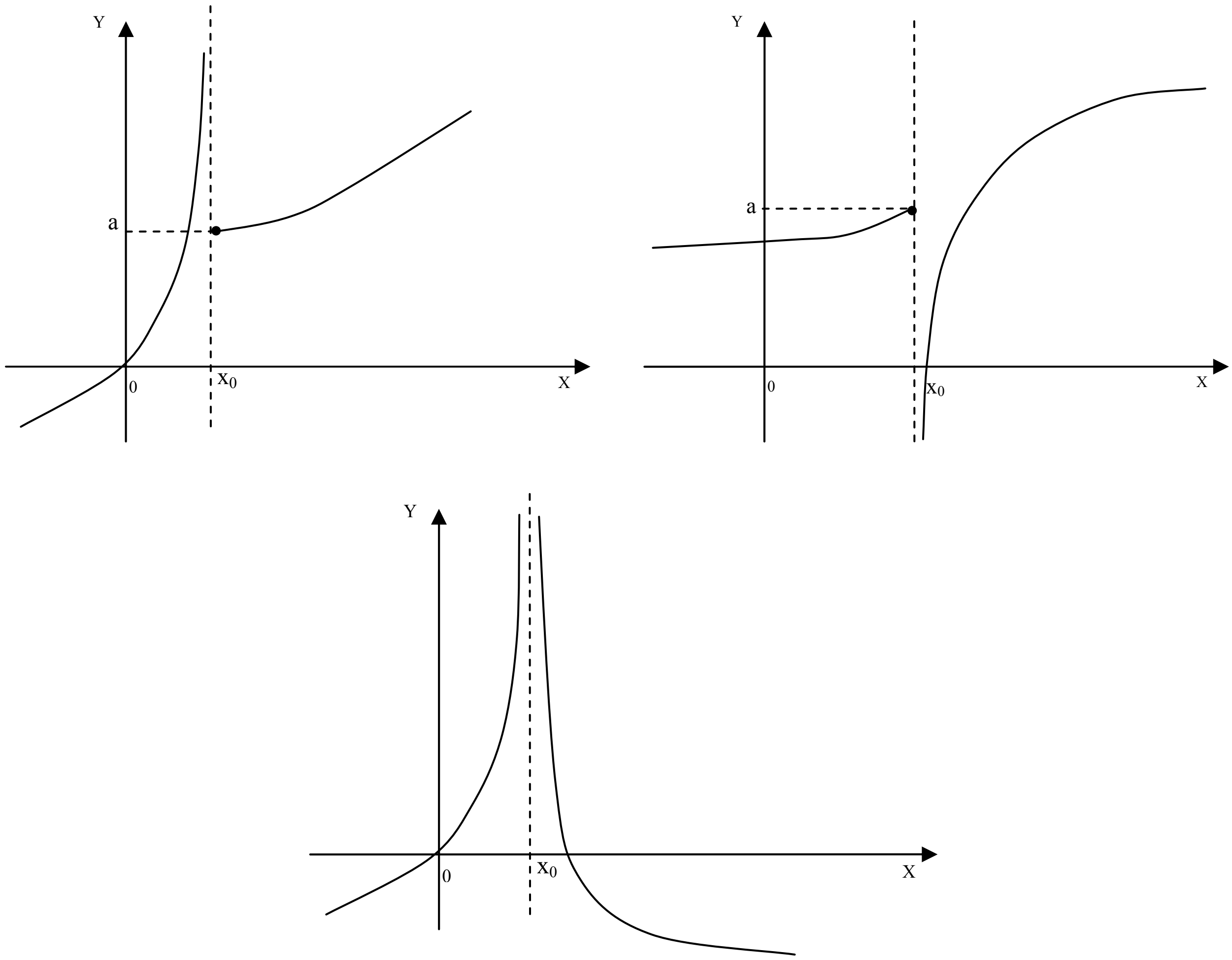


Рис. 9. Точки разрыва II-го рода.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены. Неэлементарные функции могут иметь разрывы как в точках, где они не определены, так и в точках, где они определены. В частности если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение.

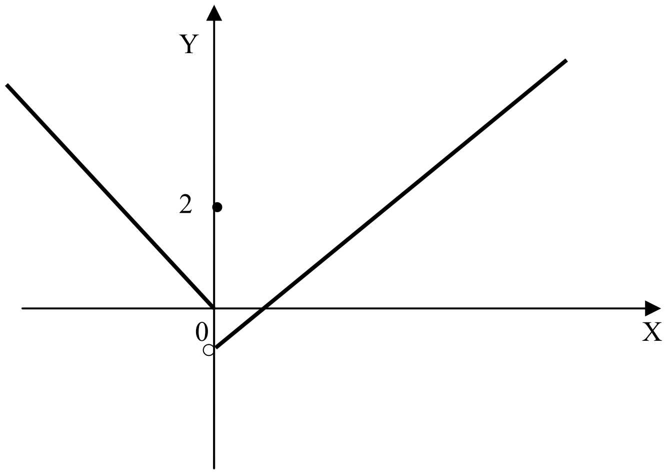
Пример 36. Найти точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases} -x, & -\infty<x<0 \\ 2, & x=0 \\ x-1, & 0<x<\infty \end{cases}$, исследовать их характер и построить график.

<u>Решение.</u> Функция состоит из нескольких аналитических выражений для различных интервалов x. На каждом интервале x она задается непрерывными функциями, следовательно, подозрительной на разрыв является только точка $x=0$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-x) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1) = -1.$$

Левосторонний и правосторонний пределы существуют и они различны, следовательно, в точке $x = 0$ существует разрыв I-го рода. Скачек функции $h = -1 - 0 = -1$. Построим график этой функции.



Пример 37. Найти точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$, исследовать их характер и построить график.

<u>Решение.</u> Как и в предыдущем примере, функция состоит из двух непрерывных частей, следовательно, подозрительной на разрыв является только точка $x = \dfrac{\pi}{2}$.

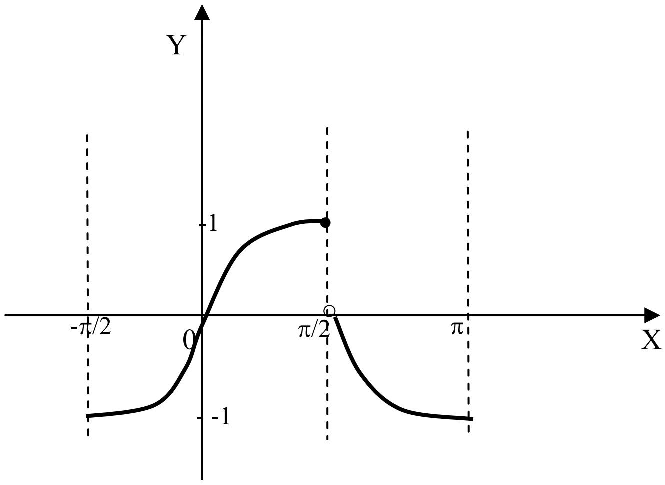
Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = 1;$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \cos x = 0.$$

Левосторонний и правосторонний пределы существуют и они различны, следовательно, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ существует разрыв I-го рода. $h = 0 - 1 = -1$.

Построим график этой функции.

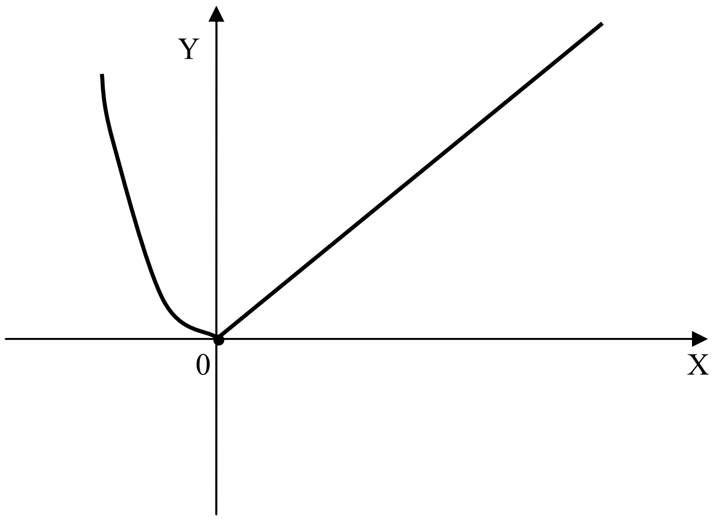


Пример 38. Найти точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty < x < 0 \\ 0, & x=0 \\ x, & 0 < x < \infty \end{cases}$, исследовать их характер и построить график.

<u>Решение.</u> Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2=0; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x=0;\ f(0)=0.$$

Левосторонний и правосторонний пределы существуют, равны между собой и совпадают со значением функции в точке $x=0$ следовательно функция $f(x)$ **непрерывна**. Построим график этой функции.



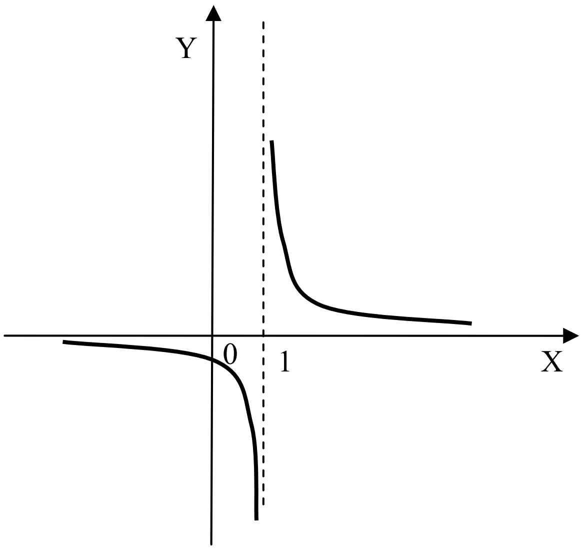
Пример 39. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, исследовать их характер и построить график.

<u>Решение.</u> Данная функция непрерывна во всех точках из ее области определения. Область определения функции $x\in(-\infty;1)\bigcup(1;\infty)$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Левосторонний и правосторонний пределы бесконечны, следовательно, в точке $x=1$ разрыв II-го рода. Построим график этой функции.



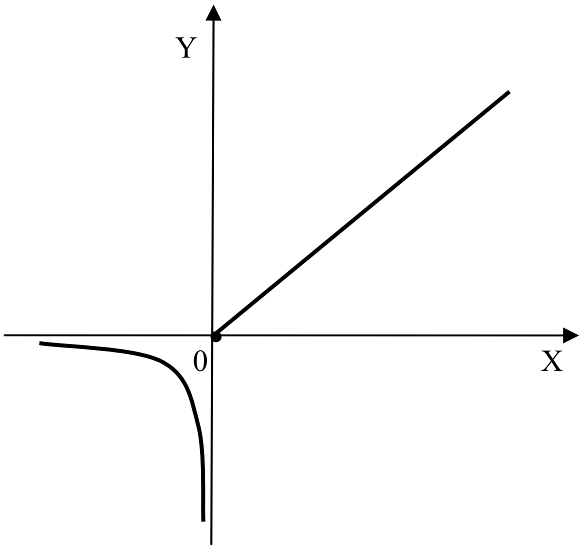
Пример 40. Найти точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ x, & 0\le x<\infty\end{cases}$, исследовать их характер и построить график.

<u>Решение.</u> Функция $\dfrac{1}{x}$ непрерывна во всех точках из области определения. Область определения функции $x\in(-\infty;0)\bigcup(0;\infty)$. Следовательно, исследуем на разрыв точку $x=0$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x)=0.$$

Левосторонний предел бесконечен, следовательно, в точке $x=0$ разрыв II-го рода. Построим график этой функции.



3. Индивидуальные задания.

1. Найти точки разрыва и построить графики функций:

Вариант 1

1. $y=\begin{cases}2^x, & -1\le x\le 1\\ x-1, & 1\prec x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{x+1}$

Вариант 2

1. $y=\begin{cases}x^2+2, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

Вариант 3

1. $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\le 0\\ 2x+3, & x\succ 0\end{cases}$ 2. $y=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$

Вариант 4

1. $y=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ \sin x, & 0\prec x\le \pi\\ x^2+4, & x\succ \pi\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$

Вариант 5

1. $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ \cos x, & 1\prec x\le \pi\\ 2x, & x\succ \pi\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x-1}{x+3}$

Вариант 6

1. $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 4-2x, & 1\prec x\prec 2{,}5\\ 2x-7, & 2{,}5\le x\le 4\end{cases}$ 2. $y=3^{\frac{x}{4-x^2}}$

Вариант 7

1. $y=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\prec\frac{\pi}{4}\\ 1, & x=\frac{\pi}{4}\\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4}\prec x\le\pi\end{cases}$ 2. $y=\frac{x^3-x^2}{2(x-1)}$

Вариант 8

1. $y=\begin{cases}\sin x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ x, & 0<x\le 2\\ 3x+1, & x\succ 2\end{cases}$ 2. $y=x+\frac{1}{x+2}$

Вариант 9

1. $y=\begin{cases}2, & x=0, x=\pm 2\\ 4-x^2, & 0\prec|x|\prec 2\\ 4, & |x|\succ 2\end{cases}$ 2. $y=x^2+5x+\frac{1}{x}$

Вариант 10

1. $y=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ \sin x, & 0\prec x\le\pi\\ 2x+1, & x\succ\pi\end{cases}$ 2. $y=2-\frac{1}{x}$

Вариант 11

1. $y=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ 1, & x\succ 0\end{cases}$ 2. $y=2^{\frac{1}{x-2}}$

Вариант 12

1. $y=\begin{cases}arctgx, & x\le 0\\ x+2, & x\succ 0\end{cases}$ 2. $y=1-2^{\frac{1}{x}}$

Вариант 13

1. $y=\begin{cases}\ln(x+3), & -3\prec x\le 0\\ x^2, & x\succ 0\end{cases}$ 2. $y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Вариант 14

1. $y=\begin{cases}\arcsin x, & -1\le x\prec 0\\ x^2+1, & x\succ 0\end{cases}$ 2. $y=\frac{x^3+x}{2x}$

Вариант 15

1. $y=\begin{cases}tgx, & -\frac{\pi}{2}\prec x\prec 0\\ x^2, & 0\le x\le 2\\ 2x, & x\succ 2\end{cases}$ 2. $y=\frac{4-x^2}{x-5}$

Вариант 16

1. $y=\begin{cases} tg2x, & -\dfrac{\pi}{4}\prec x\le 0 \\ x^2, & 0\prec x\le 2 \\ x+5, & x>2 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

Вариант 17

1. $y=\begin{cases} e^x, & x\prec 0 \\ x+1, & 0\le x\prec 2 \\ x^2, & x\ge 2 \end{cases}$ 2. $y=1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

Вариант 18

1. $y=\begin{cases} \ln x, & 0\prec x\le 1 \\ 2x, & 1\prec x\prec 3 \\ x^2+1, & x\ge 3 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1+2x}{x+1}$

Вариант 19

1. $y=\begin{cases} 3x^2+2, & x\le 0 \\ x+2, & 0\prec x\le 1 \\ x^2+5, & x\succ 1 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1+2x}{x+4}$

Вариант 20

1. $y=\begin{cases} \sin x, & x\le 0 \\ x^2, & 0\prec x\prec 2 \\ 2x+3, & x\ge 2 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

Вариант 21

1. $y=\begin{cases} 3^x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0\prec x\le 2 \\ x+1, & x\succ 2 \end{cases}$ 2. $y=3x+\dfrac{1}{x}$

Вариант 22

1. $y=\begin{cases} ln\,x, & 0\prec x\le 1 \\ x^2+1, & x\succ 1 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

Вариант 23

1. $y=\begin{cases} \arccos x, & -1\le x\prec 0 \\ x^2+2, & x\ge 0 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

Вариант 24

1. $y=\begin{cases} arctgx, & x\le 0 \\ x^2-2, & x\succ 0 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{1}{x+3}$

Вариант 25

1. $y=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x\prec 0 \\ x^2+2, & x\succ 0 \end{cases}$ 2. $y=\dfrac{x-7}{x-2}$

IV. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. *Определение производной*

Пусть на промежутке (a; b) определенная некоторая функция $y = f(x)$. Возьмем любое значение x из этого промежутка и предоставим ему приращение Δx. Разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется приращением функции в точке x.

Производной функции y = f(x) в точке x называется предел, если он существует, отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последний стремится к нулю, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$**.**

Функция, которая имеет конечную производную в точке x, называется дифференцируемой в этой точке. Вычисление производной называют дифференцированием. Производную обозначают: $y''; f'(x); \dfrac{dy}{dx}; \dfrac{df}{dx}$.

2. *Основные правила дифференцирования*

Предположим, что $u = u(x); v = v(x)$ и $w = w(x)$- дифференцируемые функции, зависящие от x, c – постоянная. Тогда:

$$(c)' = 0; \tag{1}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \tag{2}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \tag{3}$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \tag{4а}$$

$$(\frac{c}{v})' = -\frac{cv'}{v^2}; \tag{4б}$$

$$(\frac{u}{c})' = \frac{u'}{c}; \tag{4в}$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + v'uw + w'uv; \tag{5}$$

$$(cu)' = cu'. \tag{6}$$

3. ***Формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных)***

$$y = x^n, \qquad y' = nx^{n-1}; \tag{7}$$

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \tag{8}$$

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x \ln a}; \tag{9}$$

$$y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x} \tag{10}$$

$$y = a^x \qquad y' = a^x \ln a \tag{11}$$

$$y = e^x \qquad y' = e^x \tag{12}$$

$$y = \sin x \qquad y' = \cos x \tag{13}$$

$$y = \cos x \qquad y' = -\sin x \tag{14}$$

$$y = tgx \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{15}$$

$$y = ctgx \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{16}$$

$$y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{17}$$

$$y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{18}$$

$$y = arctgx \qquad y' = \frac{1}{1+x^2} \tag{19}$$

$$y = arcctgx \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{20}$$

$$y = shx \qquad y' = chx \tag{21}$$

$$y = chx \qquad y' = shx \tag{22}$$

$y = thx$ $$y' = \frac{1}{ch^2 x} \quad (23)$$

$y = cthx$ $$y' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (24)$$

Рассмотрим примеры нахождения производных, используя формулы (1) - (24).

Пример 41. Найти производную выражения $y = 10x^5 + 5x^4 - 3$.

Решение:

С помощью формул (2), (1), (6), (7) получим:

$y' = (10x^5 + 5x^4 - 3)' = (10x^5)' + (5x^4)' - 3) = 10(x^5)' + 5(x^4)' - 3' =$

$= 10 \cdot 5x^4 + 5 \cdot 4x^3 - 0 = 50x^4 + 20x^3$.

Пример 42. Найти производную выражения $y = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение:

Помня, что $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ и $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, получим:

$$y' = (\frac{4}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}})' = (4x^{-3} - 3x^{-\frac{2}{3}})' = 4 \cdot (-3)x^{-3-1} - 3 \cdot (-\frac{2}{3})x^{-\frac{2}{3}-1} =$$

$-12x^{-4} + 2x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{12}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$. Данную производную можно также посчитать по формуле (4а). Предлагаем это сделать самостоятельно.

Пример 43. Найти производную выражения $y = \ln x \cdot arctgx$.

Решение:

Используя формулы (3), (10), (19) получим:

$y' = (\ln x \cdot arctgx)' = (\ln x)' \cdot arctgx + \ln x \cdot (arctgx)' = \frac{1}{x} arctgx + \ln x \frac{1}{1+x^2}$.

Пример 44. Найти производную выражения $y = \frac{\sin x}{3^x}$.

Решение:

По формулам (4), (13), (11):

$$y' = \left(\frac{\sin x}{3^x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot 3^x - (3^x)' \cdot \sin x}{(3^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 3^x - 3^x \ln 3 \cdot \sin x}{3^{2x}}.$$

Пример 45. Найти $y'(0)$, если $y = e^x tgx$.

Решение:

По формулам (3), (12), (15): $y' = (e^x tgx)' = (e^x)' tgx + e^x (tgx)' =$

$$= e^x tgx + e^x \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'(0) = e^0 tg0 + e^0 \frac{1}{\cos^2 0} = 1 \cdot 0 + \frac{1}{1} = 1.$$

Задания

Найти производные функций:

1. $y = 3 + x^2 - x^5$;
2. $y = 5x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[5]{x^4}$;
3. $y = \frac{2}{\cos x} - \frac{\sin x}{5}$;
4. $y = 10^x \arccos x$;
5. $y = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}$;
6. $y = 3^x - \cos x \cdot \ln x$;
7. $y = \frac{2 + x^5}{x^4 - 2}$;
8. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^6 + 3^x}$;
9. $y = \frac{arctgx}{arcctgx}$;
10. $y = e^x \arcsin x$.
11. $y = 3arctg^2 x + e^2$
12. $y = \sin 5^x + \lg 3$
13. $y = arctg(3x)$
14. $y = \sqrt{1 - x^{\frac{3}{2}}}$
15. $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$
18. $y = x^2 \cdot e^{-x}$
19. $y = x - arctg(2x)$
20. $y = \frac{1}{1 - e^x}$
21. $y = arctg \frac{1}{x}$
22. $y = \frac{tg(x-2)}{x^2}$
23. $y = \sin 3x$
24. $y = \arcsin^5 x$
25. $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$
26. $y = \sqrt[4]{x + 2}$
27. $y = \cos^2 \sqrt{x}$
28. $y = \frac{2^x}{\sqrt{x} + 3}$
29. $y = \ln arctgx$
30. $y = \frac{\sin 2x}{1 + x^3}$
31. $y = \ln \cos(x - 1)$
32. $y = arctg\sqrt{4x - 1}$
33. $y = x^3 - 3^x$
34. $y = \sqrt{x} + 1$
35. $y = \cos^2 x + \sqrt[3]{x}$

16. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$

17. $y = \frac{2x^2 - 5}{x}$

Вычислить:

36. $y'(\frac{1}{2})$, если $y = \frac{\arccos x}{\log_4 x}$;

37. $y'(0)$, если $y = \sin x \cdot e^x$

38. $y'(1)$, если $y = \frac{1 + xe^x}{\sqrt{x}}$;

39. $y'(1)$, если $y = \frac{x^3 - 2x + 2}{x}$;

40. $y'(1)$, если $y = x^3 \ln x - \frac{2}{x}$;

41. $y'(-1)$, если $y = \frac{x^5 + 1}{x} + 3x + \frac{1}{x}$;

43. $y'(3)$, если $y = \frac{4x + 9}{x^2 + 16}$;

42 $y'(0)$, если $y = \frac{2x}{1 - x}$;

44. $y'(\pi)$, если $y = e^x(\sin x + 2\sqrt{x})$;

45. $y'(1)$, если $y = \ln x + 2^x - \sqrt[5]{x}$;

46. $y'(\pi)$, если $y = (\sqrt[3]{x} + \ln x)\sin x$;

47. $y'(e)$, если $y = \frac{6^x + x^6}{\ln x}$;

48. $y'(\pi)$, если $y = \frac{2^x + \ln x}{\cos x}$;

49. $y'(\frac{1}{2})$, если $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$;

50. $y'(\frac{\pi}{4})$, если $y = ctgx \cdot \ln x$.

Ответы

1. $y' = 2x - 5x^4$;

2. $y' = 5 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$;

3. $y' = \frac{2tgx}{\cos x} - \frac{\cos x}{5}$;

4. $y' = 10^x \ln 10 \cdot \arccos x - \frac{10^x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

5. $y' = \frac{\cos x \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{2\sin x}{3\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{3x\cos x - 2\sin x}{3x\sqrt[3]{x^2}}$;

6. $y' = 3^x \ln 3 + \sin x \cdot \ln x - \dfrac{\cos x}{x}$;

7. $y' = \dfrac{x^3(x^5 - 10x - 8)}{(x^4 - 2)^2}$;

8. $y' = \dfrac{(x^6 + 3^x) - 2x(6x^5 + 3^x \ln 3)}{2\sqrt{x}(x^6 + 3^x)^2}$;

9. $y' = \dfrac{arcctgx + arctgx}{(1 + x^2)arcctg^2 x}$;

10. $y' = \dfrac{e^x(\sqrt{1 - x^2}\arcsin x + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$;

11. $y' = \dfrac{6 \cdot arctg\, x}{1 + x^2}$

12. $y' = 5^x \cdot \ln 5 \cdot \cos 5^x$

13. $y' = \dfrac{3}{1 + 9 \cdot x^2}$

14. $y' = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^{\frac{3}{2}}}}$

15. $y' = e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

16. $y' = -\dfrac{1}{x^2} + 8x$

17. $y' = \dfrac{4x^2 - (2x^2 - 5)}{x^2} = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2}$

18. $y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right)$

19. $y' = 1 - \dfrac{2}{1 + 4x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$

20. $y' = \dfrac{e^x}{(1 - e^x)^2}$

21. $y' = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $y' = \dfrac{\frac{1}{\cos^2(x-2)} \cdot x^2 - 2x \cdot tg(x-2)}{x^4} = \dfrac{x^2 - x \cdot \sin(2x-4)}{x^4} = \dfrac{x - \sin(2x-4)}{x^3}$

23. $y' = 3 \cdot \cos 3x$

24. $y' = \dfrac{5\cdot \arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}$

25. $y' = \dfrac{\sin 2x}{2\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}}$

26. $y' = \dfrac{1}{4}\cdot(x+2)^{-\frac{3}{4}}$

27. $y' = -\dfrac{\sin(2\cdot\sqrt{x})}{2\cdot\sqrt{x}}$

28. $y' = \dfrac{2^x\cdot\left(\ln 2(\sqrt{x}+3)-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$

29. $y' = \dfrac{1}{arctgx\cdot(1+x^2)}$

30. $y' = \dfrac{\sin 2x\cdot\left(2(1+x^3)-3x^2\right)}{\left(1+x^3\right)^2} = \dfrac{\sin 2x\left(2x^3-3x^2+2\right)}{\left(1+x^3\right)^2}$

31. $y' = \dfrac{1}{\cos(x-1)}\cdot\left(-\sin(x-1)\right) = -tg(x-1)$

32. $y' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{4x-1}}\cdot 4 = \dfrac{1}{2\cdot x\cdot\sqrt{4x-1}}$

33. $y' = 3x^2 - 3^x\cdot\ln 3$

34. $y' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

35. $y' = 2\cdot\cos x\cdot\left(-\sin x\right)+\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = -\sin 2x + \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

36. $y' = -\dfrac{x\ln 4\cdot\log_4 x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{x\sqrt{1-x^2}\ln 4\cdot\log_4^2 x}, \quad y'(\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{3}\ln 2-\pi}{3\ln 2};$

37. $y' = e^x(\cos x+\sin x), \quad y'(0)=1;$

38. $y' = \dfrac{2x^2e^x+xe^x-1}{2x\sqrt{x}}, \quad y'(1) = \dfrac{3e-1}{2};$

39. $y' = \dfrac{2(x^3-1)}{2x^2}, \quad y'(1)=0;$

40. $y' = x^2(3\ln x+1)+\dfrac{2}{x^2}, \quad y'(1)=3;$

41. $y' = \frac{2(2x^5-1)}{x^2} + 3;\ y'(-1) = -3;$

42. $y' = \frac{2}{(1-x)^2}, \quad y'(0) = 2;$

43. $y' = -\frac{2(2x^2+9x+32)}{(x^2-16)^2}; \quad y'(3) = -\frac{22}{7};$

44. $y' = e^x(\cos x + \sin x + \frac{x+1}{\sqrt{x}}), \quad y'(\pi) = e^{\pi}(\frac{\pi+1}{\sqrt{\pi}} - 1);$

45. $y' = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \quad y'(1) = \frac{4}{5} + 2\ln 2;$

46. $y' = (\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x})\sin x, \quad y'(1) = \frac{4}{5} + 2\ln 2;$

47. $y' = \frac{(6^x \ln 6 + 6x^5)x \ln x - 6^x - x^6}{x \ln^2 x}, \quad y'(e) = \frac{6^e(e\ln 6 - 1) + 5e^6}{e};$

48. $y' = \frac{(2^x \ln 2 + \frac{1}{x})\cos x + (2^x + \ln x)\sin x}{\cos^2 x}, \quad y'(\pi) = -(2^{\pi} \ln 2 + \frac{1}{\pi});$

49. $y' = -\frac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}, \quad y'(\frac{1}{2}) = -\frac{12\sqrt{3}}{\pi};$

50. $y' = -\frac{ctgx}{x} - \frac{\ln x}{\sin^2 x}, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{4}{\pi} - 2\ln\frac{\pi}{4}.$

4. Производная сложной функции

Если функция $y = f(u)$ имеет производную в точке u, а функция $u = g(x)$ – в точке x, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем

$$y' = f'(u)g'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (25)$$

Другими словами, производная сложной функции $y = f(g(x))$ равняется произведению производной от внешней функции f, взятой по внутреннему аргументу u, и производной от внутренней функции g, взятой по независимой переменной x.

Используя правило дифференцирования сложной функции, найти производные функций:

Пример 46. $y=(3x^5+4)^8$.

<u>Решение:</u>

Внешняя функция - степенная, т.е., сначала используем формулу (7), а потом формулу (2) и получим:

$$y'=8(3x^5+4)^{8-1}\cdot(3x^5+4)'=8(3x^5+4)^7\cdot 15x^4=120x^4(3x^5+4)^7.$$

Пример 47. $y=\cos^4 x$.

<u>Решение:</u>

Внешняя функция - степенная, внутренняя - тригонометрическая, т.е. используем формулы (7) и (14) и получим:

$$y'=(\cos^4 x)'=4\cos^3 x\cdot(\cos x)'=4\cos^3 x(-\sin x)=-4\cos^3 x\sin x.$$

Пример 48. $y=\sqrt{x^5+\arcsin x+3}$.

<u>Решение:</u>

Используем формулы (8), (2), (7), (17), (1) и получим:

$$y'=(\sqrt{x^5+\arcsin x+3})'=\frac{1}{2\sqrt{x^5+\arcsin x+3}}\cdot(x^5+\arcsin x+3)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^5+\arcsin x+3}}\cdot(5x^4+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}).$$

Пример 49. $y=5^{tgx}\cdot e^{\sin x}$.

<u>Решение:</u>

Используем формулы (3), (11), (15), (12), (13) и получим:

$$y=(5^{tgx}e^{\sin x})'=(5^{tgx})'e^{\sin x}+5^{tgx}(e^{\sin x})'=5^{tgx}\ln 5\cdot(tgx)'e^{\sin x}+$$

$$+5^{tgx}e^{\sin x}(\sin x)'=5^{tgx}\ln 5\cdot\frac{1}{\cos^2 x}e^{\sin x}+5^{tgx}e^{\sin x}\cos x=$$

$$=5^{tgx}e^{\sin x}(\ln 5\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x).$$

Пример 50. $y=\dfrac{\sqrt{ctgx}}{\log_3^4 x}$.

Решение:

Используем формулы (4), (8), 16), (7), (9):

$$y'=(\frac{\sqrt{ctgx}}{\log_3^4 x})'=\frac{(\sqrt{ctgx})'\log_3^4 x-\sqrt{ctgx}(\log_3^4 x)'}{(\log_3^4 x)^2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{ctgx}}(-\frac{1}{\sin^2 x})\log_3^4 x-\sqrt{ctgx}(4\log_3^3 x\cdot\frac{1}{x\ln 3})}{(\log_3^4 x)^2}=$$

$$=\frac{-\log_3^3 x(\frac{\log_3 x}{2\sqrt{ctgx}\sin^2 x}+\cdot\frac{4\sqrt{ctgx}}{x\ln 3})}{\log_3^8 x}=-\frac{\frac{\log_3 x}{2\sqrt{ctgx}\sin^2 x}+\cdot\frac{4\sqrt{ctgx}}{x\ln 3}}{\log_3^5 x}.$$

Пример 51. $y=\ln^4(arcctg\sqrt{5x^2+e^{3x}-1})$.

Решение:

Используем формулы (7), (10), (20), (8), (2), (7), (12), (1) и получим:

$$y'=(\ln^4(arcctg\sqrt{5x^2+e^{3x}-1}))'=4\ln^3(arcctg\sqrt{5x^2+e^{3x}-1})\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{arcctg\sqrt{5x^2+e^{3x}-1}}(-\frac{1}{1+(\sqrt{5x^2+e^{3x}-1})^2})\frac{1}{2\sqrt{5x^2+e^{3x}-1}}(10x+e^{3x}3).$$

Пример 52. $y=\dfrac{\sin^5 3x^2}{ch^2(4^{tgx})}$.

Решение:

Используем формулы (4), (7), (13), (6), (7), (7), (22), (11), (15) и получим:

$$y' = \left(\frac{\sin^5 3x^2}{ch^2(4^{tgx})}\right)' = \frac{(\sin^5 3x^2)' ch^2(4^{tgx}) - (ch^2(4^{tgx}))' \sin^5 3x^2}{(ch^2(4^{tgx}))^2} =$$

$$= \frac{5\sin^4 3x^2 \cos 3x^2 \cdot 3 \cdot 2x \cdot ch^2(4^{tgx}) - 2ch(4^{tgx}) sh(4^{tgx}) \cdot 4^{tgx} \ln 4 \dfrac{\sin^5 3x^2}{\cos^2 x}}{ch^4(4^{tgx})} =$$

$$= \frac{2(15\sin^4 3x^2 \cos 3x^2 \cdot x \cdot ch(4^{tgx}) - sh(4^{tgx}) \cdot 4^{tgx} \ln 4 \dfrac{\sin^5 3x^2}{\cos^2 x})}{ch^3(4^{tgx})}.$$

Задания

Найти производные функций:

51. $y = (x^4 - x^2 + 1)^3 + e^{\sin^3 4x}$;

52. $y = \lg \dfrac{10 - x}{x + 2} - \sin^6 \dfrac{x}{3}$;

53. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1} + \sqrt[7]{x^6} \cdot tg^6 2x + 7^{\cos 3x}$;

54. $y = \cos^5 3x \cdot tg(\sin x) + 4^{tg 3x}$;

55. $y = \log_2 \dfrac{x - 6}{3} \cdot \sin^7 \dfrac{2}{x}$;

56. $y = 12^{\sqrt{x}} \cdot \ln^4 2x + e^{-5x^2}$;

57. $y = \dfrac{ctg^3 4x}{(3x^6 + 5)^4}$;

58. $y = (x^4 - \dfrac{3}{x}) \cdot \sin^6(e^{-2x})$;

59. $y = \sqrt[5]{e^{2x} + 4} \cdot ctg^4 5x + \pi^{5x}$;

60. $y = \dfrac{\cos^3 4x}{8} + \sqrt[3]{2x} \cdot e^{-6x}$;

61. $y=\sqrt[3]{(4x+3)^2}\cdot\cos^4\frac{2}{x}+10^{x^2}$;

62. $y=e^{\sin x}\cdot tg^4 2x+\sqrt{2+\sqrt{x}}$;

63. $y=\sin^3(\frac{1-x}{3})\cdot 2^{\sqrt{x}}$;

64. $y=2^{\ln 4x}+\sqrt[5]{x^7}\cdot\sin^4(3+2x)$;

65. $y=2^{\pi/x}\cdot\ln^6\sqrt{\frac{1-x}{3}}$;

66. $y=e^{-2x}(\sin^2 3x+\sqrt{x^3-2x+1})$;

67. $y=(\ln^2\frac{x}{3}+3^x-\sqrt[5]{x})\sin^2 x^3$;

68. $y=(6^{\ln x^4}-e^{2x})^3$;

69. $y=\frac{2^{x/2}+\ln 3x}{\cos^2 x}$;

70. $y=\ln^2(tg^2\frac{3x}{2}+\sqrt[3]{x^2})$;

71. $y=(\sin(\ln^3 x)+\frac{x+1}{x^2})^2$;

72. $y=e^{-3x}(\ln^3 x^2+tg 2x+\frac{5x^2}{3})$;

73. $y=(tg^2\sqrt{x}+\sin x^3)^2$;

74. $y=e^{3x}(x^2+\sqrt[3]{x}-\ln^5 2x)$;

75. $y=(2^{tg\frac{1}{x}}+\cos^3 x+\sqrt{\sin x})^3$.

Ответы

51. $y'=6x(x^4-x^2+1)^2(2x^2-1)+12e^{\sin^3 4x}\sin^2 4x\cos 4x$;

52. $y'=-\frac{12}{(10-x)(x+2)\ln 10}-2\sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$;

53. $y' = \dfrac{2x(6x-7)}{3\sqrt[3]{(4x^3-7x^2+1)^2}} + \dfrac{6tg^6 2x}{7\sqrt[7]{x}} + \dfrac{12\sqrt[7]{x^6}tg^5 2x}{\cos^2 2x} - 3\cdot 7^{\cos 3x}\ln 7 \sin 3x$;

54. $y' = -15\sin 3x \cos^4 3x tg(\sin 3x) + \dfrac{\cos^5 3x \cos x}{\cos^2(\sin x)} + \dfrac{3\cdot 4^{tg 2x}\ln 4}{\cos^2 3x}$;

55. $y' = \dfrac{\sin^7 \frac{2}{x}}{(x-6)\ln 2} - \dfrac{14\log_2 \frac{x-6}{3}\sin^6 \frac{2}{x}\cos\frac{2}{x}}{x^2}$;

56. $y' = \dfrac{12^{\sqrt{x}}\ln 12 \ln^4 2x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{4\cdot 12^{\sqrt{x}}\ln^3 2x}{x} - 10xe^{-5x^2}$;

57. $y' = \dfrac{-4ctg^2 4x(9x^6+15+18x^5 ctg 4x \sin^2 4x)}{(3x^6+5)^5 \sin^2 4x}$;

58. $y' = (4x^3 + \frac{3}{x^2})\sin^6(e^{-2x}) - 12e^{-2x}(x^4 - \frac{3}{x})\sin^5(e^{-2x})\cos(e^{-2x})$;

59. $y' = \dfrac{2e^{2x}ctg^4 5x}{5\sqrt[5]{(e^{2x}+4)^4}} - \dfrac{20\sqrt[5]{e^{2x}+4}\,ctg^3 5x}{\sin^2 5x} + 5\pi^{5x}\ln\pi$;

60. $y' = -\frac{3}{2}\cos^2 4x \sin 4x + \dfrac{2e^{-6x}}{3\sqrt[3]{4x^2}} - 6\sqrt[3]{2x}\cdot e^{-6x}$;

61. $y' = \dfrac{2\cos^4(\frac{2}{x})}{3\sqrt[3]{4x+3}} + \dfrac{8\sqrt[3]{(4x+3)^2}\cos^3(\frac{2}{x})\sin(\frac{2}{x})}{x^2} + 2\cdot 10^{x^2}x\ln 10$;

62. $y' = e^{\sin x}\cos x\, tg^4 2x + \dfrac{8e^{\sin x}tg^3 2x}{\cos^2 2x} + \dfrac{1}{4\sqrt{2\sqrt{x}+x}}$;

63. $y' = 2^{\sqrt{x}}\sin^2(\frac{1-x}{3})(\sin(\frac{1-x}{3})\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} - \cos(\frac{1-x}{3}))$;

64. $y' = \dfrac{2^{\ln 4x}\ln 2}{x} + \sin^3(3+2x)(\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}\sin(3+2x) + 8\sqrt[5]{x^7}\cos(3+2x))$;

65. $y' = -2^{\pi/x}\ln^5\sqrt{\frac{1-x}{3}}(\frac{\pi\ln 2}{x^2}\ln\sqrt{\frac{1-x}{3}} + \frac{3}{1-x})$;

66. $y' = e^{-2x}(3\sin 6x + \dfrac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}} - 2\sin^2 3x - 2\sqrt{x^3 - 2x + 1}$;

67. $y' = (\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{x}{3} + 3^x \ln 3 - \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}})\sin^2 x^3 + 3x^2 \sin 2x^3(\ln^2\dfrac{x}{3} + 3^x - \sqrt[5]{x})$;

68. $y' = 6(6^{\ln x^4} - e^{2x})^2(\dfrac{6^{\ln x^4} 2\ln 6}{x} - e^{2x})$;

69. $y' = \dfrac{(\dfrac{2^{x/2}\ln 2}{2} + \dfrac{1}{x})\cos x + 2\sin 2(2^{x/2} + \ln 3x)}{\cos^3 x}$;

70. $y' = \dfrac{2\ln(tg^2\dfrac{3x}{2} + \sqrt[3]{x^2})}{tg^2\dfrac{3x}{2} + \sqrt[3]{x^2}}\left(\dfrac{3tg\dfrac{3x}{2}}{\cos^2\dfrac{3x}{2}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$;

71. $y' = 2(\sin(\ln^3 x) + \dfrac{x+1}{x^2})\cdot(\dfrac{3\cos(\ln^3 x)\ln^2 x}{x} - \dfrac{x+2}{x^3})$;

72. $y' = -3e^{-3x}(\ln^3 x^2 + tg2x + \dfrac{5x^2}{3}) + e^{-3x}(\dfrac{6}{x}\ln^2 x^2 + \dfrac{2}{\cos^2 2x} + \dfrac{10}{3}x)$;

73. $y' = 2(tg^2\sqrt{x} + \sin x^3)\cdot(\dfrac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} + 3x^2\cos x^3)$;

74. $y' = e^{3x}(3x^2 + 3\sqrt[3]{x} - 3\ln^5 2x + 2x + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5\ln^4 2x}{x})$;

75. $y' = 3\left(2^{tg\frac{1}{x}} + \cos^3 x + \sqrt{\sin x}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{2^{tg\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}} - 3\sin x\cos^2 x + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)$.

5. Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ - пара взаимнообратных функций. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b) и имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то существует обратная функция $x = g(y)$, которая также имеет производную $g'(y)$, причем

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad (y'_x = \frac{1}{x'_y})\cdot \tag{26}$$

Пример 53. Найти производную y'_x, если $x = y^5 - 3y^2$.

Решение:

$x'_y = 5y^4 - 6y$. Согласно формулы (26) $y'_x = \dfrac{1}{5y^4 - 6y}$.

Пример 54. Найти производную y'_x, если $x = y\ln y + \sin y$.

Решение:

$x'_y = y'_y \ln y + y(\ln y)'_y + \cos y = \ln y + 1 + \cos y$. $y'_x = \dfrac{1}{\ln y + 1 + \cos y}$.

Задания

76. $x = y^5 - \sqrt{y^4 - 1}$;

77. $x = e^{\sin y}$;

78. $x = \sin^3 y + \cos^3 y$;

79. $x = arctg(y - 3) + \arcsin y$;

80. $x = 5^{\cos y} + \sqrt{10y^3 + 5y}$.

Ответы

76. $y'_x = \dfrac{1}{5y^4 - \dfrac{2y^3}{\sqrt{y^4 - 1}}}$;

77. $y'_x = \dfrac{1}{e^{\sin y} \cos y}$;

78. $y'_x = \dfrac{2}{3\sin 2y(\sin y - \cos y)}$;

79. $y'_x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{1 - (y - 3)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$;

80. $y'_x = \dfrac{1}{5^{\cos y}(-\sin y)\ln 5 + \dfrac{30y^2 + 5}{2\sqrt{10y^3 + 5y}}}$.

6. Дифференцирование неявной функции

Пусть функция $y(x)$ задана уравнениям $F(x, y) = 0$, не разрешимым относительно зависимой переменной y. Чтобы найти производную y', нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по *x*, не забывая при этом, что *y* является функцией сменной *x*. Полученное уравнение решить относительно y'. Таким образом, производную находим из условия $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$. Производная неявной функции выражается через независимую сменную *x* и самую функцию *y*.

Пример 55. Найти производную y'_x, если $x^2 + y^5 = 25$.

Решение:

Продифференцируем по x обе части уравнения $x^2 + y^5 = 25$ и получим:

$$2x + 5y^4 y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2x}{5y^4}.$$

Пример 56. Найти производную y'_x, если $x^3 + 10x^2y^3 + y^3 = 10x^2$.

Решение:

Продифференцируем по *x* обе части приведенного уравнения, помня, что *y* является функцией от *x*: $3x^2 + 10(2xy^3 + x^2 3y^2 y') + 3y^2 y' = 10 \cdot 2x$;

$3x^2 + 20xy^3 + 30x^2y^2y' + 3y^2y' = 20x$; $\quad 3y^2y'(10x^2 + 1) = 20x - 3x^2 - 20xy^3$;

$$y' = \frac{20x - 3x^2 - 20xy^3}{3y^2(10x^2 + 1)} = \frac{x(20 - 3x - 20y^3)}{3y^2(10x^2 + 1)}.$$

Пример 57. Найти производную y'_x, если $\sin(xy) + \cos(\frac{x}{y}) = tg(x + y)$.

Решение:

Продифференцируем по x обе части приведенного уравнения:

$$\cos(xy) \cdot (xy)' - \sin(\frac{x}{y}) \cdot (\frac{x}{y})' = \frac{1}{\cos^2(x + y)}(x + y)';$$

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') - \sin(\frac{x}{y}) \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{1}{\cos^2(x + y)}(1 + y');$$

$$y\cos(xy)+xy'\cos(xy)-\frac{1}{y}\sin(\frac{x}{y})+\frac{xy'}{y^2}\sin(\frac{x}{y})=\frac{1}{\cos^2(x+y)}+\frac{y'}{\cos^2(x+y)};$$

$$y'\left(x\cos(xy)+\frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y})-\frac{1}{\cos^2(x+y)}\right)=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-y\cos(xy)+\frac{1}{y}\sin(\frac{x}{y});$$

$$y'=\frac{\frac{1}{\cos^2(x+y)}-y\cos(xy)+\frac{1}{y}\sin(\frac{x}{y})}{\left(x\cos(xy)+\frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y})-\frac{1}{\cos^2(x+y)}\right)}.$$

Задания

Найти производную y' от неявно заданных функций:

81. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

82. $x^3+y^3-3axy=0$;

83. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$;

84. $x^3+2x^2y+3xy^2+y^3=0$;

85. $2y\ln y=x$;

86. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$;

87. $y=\cos(y+x)$;

88. $x=\cos(yx)$;

89. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

90. $y=x+arctgy$;

Ответы

81. $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$;

82. $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$;

83. $y'=\frac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$;

84. $y'=-\frac{3x^2+4xy+3y^2}{2x^2+6xy+9y^2}$;

85. $y'=\frac{1}{2(\ln y+1)}$;

86. $y'=\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-y^2})}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$;

87. $y'=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$;

88. $y'=-\frac{y\sin(xy)+1}{x\sin(xy)}$;

89. $y'=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1$;

90. $y'=-\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$.

7. Дифференцирование параметрически заданных функций

Производная функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t),\ y=\phi(t)$, где $\varphi(t),\phi(t)$ – дифференцируемые в точке t функции, причем $\varphi(t)\neq 0$, вычисляются по формуле

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{или} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{27}$$

Пример 58. Найти y'_x, если $\begin{cases} y=3\sin^3 t; \\ x=2\cos^3 t. \end{cases}$

Решение:

Поскольку $y'_t=(3\sin^3 t)'_t=3\cdot 3\sin^2 t\cos t=9\sin^2 t\cos t$;

$x'_t=(2\cos^3 t)'_t=2\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)=-6\sin t\cos^2 t$, согласно (27)

$$y'_x=\frac{9\sin^2 t\cos t}{-6\sin t\cos^2 t}=-\frac{3}{2}\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{3}{2}tgt.$$

Пример 59. Найти y'_x если $\begin{cases} y=t^2, \\ x=t^3+1. \end{cases}$

Решение:

Найдем производные: $y'_t=2t$; $x'_t=3t^2$. Согласно (27) $y'_x=\frac{2}{3}\frac{t}{t^2}=\frac{2}{3t}$.

Пример 60. Найти y'_x если $\begin{cases} y=e^{2t}\sin^2 t, \\ x=e^{2t}\cos^2 t. \end{cases}$

Решение:

Найдем производные:

$y'_t=(e^{2t}\sin^2 t)'_t=\{\text{згідно (3)}\}=(e^{2t})'\sin^2 t+e^{2t}(\sin^2 t)'=e^{2t}2\sin^2 t+e^{2t}2\sin t\cos t;$

$x'_t=(e^{2t}\cos^2 t)'_t=(e^{2t})'\cos^2 t+e^{2t}(\cos^2 t)'=e^{2t}2\cos^2 t-e^{2t}2\sin t\cos t.$

Тогда соответственно формуле (26)

$$y'_x = \frac{2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\sin t\cos t}{2e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\sin t\cos t} = \frac{2\sin^2 t + \sin 2t}{2\cos^2 t - \sin 2t}.$$

Задания

Найти производную y'_x параметрически заданной функции:

91. $\begin{cases} x = 4\sin t, \\ y = 3\cos t; \end{cases}$

92. $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t; \end{cases}$

93. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + 2\sin t; \end{cases}$

94. $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t; \end{cases}$

95. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases}$

96. $\begin{cases} x = sh2t, \\ y = ch2t; \end{cases}$

97. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}$

98. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases}$

99. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$

100. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} t. \end{cases}$

Ответы

91. $y'_x = -\frac{3}{4} tgt$;

92. $y'_x = \frac{t+1}{t-1}$;

93. $y'_x = -\frac{1 + 2\cos t}{\sin t}$;

94. $y'_x = 2\cos^2 t(\cos 2t - 2\sin 2t)$;

95. $y'_x = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$;

96. $y'_x = tn2t$;

97. $y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$;

98. $y'_x = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$;

99. $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$;

100. $y'_x = \frac{t^2 - 1}{2t}$.

8. ***Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно–степенной функции***

В некоторых случаях при нахождении производной лучше функцию сначала прологарифмировать, а потом найти производную неявной функции. Эта операция называется логарифмическим дифференцированием. Этот способ лучше всего использовать в двух случаях:

1) если надо продифференцировать произведение трех и больше функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения функций;

2) если надо продифференцировать показательно-степенную функцию $y = V(x)^{U(x)}$.

Функцию $y = V(x)^{U(x)}$ можно продифференцировать, используя формулу:

$$y' = (V(x)^{U(x)})' = V^{U} \ln V \cdot U' + UV^{U-1}V', \qquad (28)$$

т.е. производная показательно-степенной функции равняется произведению показательной функции при условии $V = const$ и степенной при условии что $U = const$.

Уместно отметить, что довольно часто ошибаются, считая функцию $y = V(x)^{U(x)}$ или только степенной, или только показательной.

Пример 61. Найти производную функции $y = \dfrac{(x+1)^2 \cdot \cos x^2 \cdot 3^{2x}}{\sqrt{5x-1} \cdot tgx}$.

<u>Решение:</u>

Производную данной функции можно найти по правилу производной частного. Однако, этот способ в данном случае громоздкий. Прологарифмируем данное выражение. Напомним, что

$$\log_c |a \cdot b| = \log_c |a| + \log_c |b|; \qquad (29)$$

$$\log_c \left|\frac{a}{b}\right| = \log_c |a| - \log_c |b|; \qquad (30)$$

$$\log_c\left|a^n\right| = n\log_c|a|; \qquad (31)$$

Получим:

$$\ln y = \ln\frac{(x+1)^2\cdot\cos x^2\cdot 3^{2x}}{\sqrt{5x-1}\cdot tgx} = \ln((x+1)^2\cdot\cos x^2\cdot 3^{2x}) - \ln(\sqrt{5x-1}\cdot tgx);$$

$$\ln y = \ln(x+1)^2 + \ln\cos x^2 + \ln 3^{2x} - (\ln\sqrt{5x-1} + \ln tgx);$$

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \ln\cos x^2 + 2x\ln 3 - \frac{1}{2}\ln(5x-1) - \ln tgx.$$

Продифференцируем обе части:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)2x + 2\ln 3 - \frac{1}{2}\frac{5}{5x-1} - \frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y' = y\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)2x + 2\ln 3 - \frac{1}{2}\frac{5}{5x-1} - \frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}\right);$$

$$y' = \frac{(x+1)^2\cos x^2\cdot 3^{2x}}{\sqrt{5x-1}\cdot tgx}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{\sin x^2}{\cos x^2}2x + 2\ln 3 - \frac{5}{2(5x-1)} - \frac{1}{tgx\cos^2 x}\right).$$

Пример 62. Найти производную функции $y = (tgx)^{\sin x}$.

<u>Решение:</u>

Применим логарифмическое дифференцирование, и получим:

$$\ln y = \ln(tgx)^{\sin x} = (\text{см. } 29) = \sin x\ln(tgx);$$

$$\frac{1}{y}y' = (\sin x\ln(tgx))' = (\sin x)'\ln(tgx) + \sin x(\ln(tgx))' =$$

$$= \cos x\ln(tgx) + \sin x\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x} = \cos x\ln(tgx) + \sin x\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y' = y(\cos x\ln(tgx) + \frac{1}{\cos x}) = (tgx)^{\sin x}(\cos x\ln(tgx) + \frac{1}{\cos x}).$$

Пример 63. Найти производную функции $y = (\arcsin 5x)^{\sqrt{2x^2+3x}}$.

<u>Решение:</u>

Применим формулу (28). Тогда $V(x) = \arcsin 5x$; $U(x) = \sqrt{2x^2+3x}$.

$$y' = (\arcsin 5x)^{\sqrt{2x^2+3x}} \cdot \ln(\arcsin 5x)\left(\sqrt{2x^2+3x}\right)' +$$

$$+\sqrt{2x^2+3x}(\arcsin 5x)^{\sqrt{2x^2+3x}-1} \cdot (\arcsin 5x)' =$$

$$= (\arcsin 5x)^{\sqrt{2x^2+3x}} \cdot \ln(\arcsin 5x) \cdot \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x}} +$$

$$+\sqrt{2x^2+3x} \cdot (\arcsin 5x)^{\sqrt{2x^2+3x}-1} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}.$$

Задания

Найти производные функций:

101. $y = (tgx)^{\sqrt{\cos 2x}}$;

102. $y = \left(\cos^3 4x\right)^{\sqrt[3]{2x}}$;

103. $y = \dfrac{e^x \ln\dfrac{x}{2} \cdot (x^3+1)^2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2 \ln tgx}}$;

104. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4} \cdot \cos 2x \cdot \sin^2 x^3}{x\sqrt[3]{3x^2+1}}$;

105. $y = \left(\sin\dfrac{\pi}{10} - \ln\dfrac{3}{x}\right)^{tgx}$;

106. $y = \dfrac{(x^4-x^2+1)^3 \sqrt[3]{\sin^2 x+1} \cdot e^{3x}}{(3-2x^2)(1-\cos 2x)}$;

107. $y = (tg \sin x)^{\cos^2 3x}$;

108. $y = x^2 \cos\dfrac{1}{x}(tg 2x - ctg 2x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}$;

109. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-5x} \cdot e^{\frac{x}{7}}}{(x-1)^3 6^{\ln x^4}}$;

110. $y = \dfrac{e^{x^3-5x^2} \cos\dfrac{\pi x}{2}}{(tg^2\sqrt{x} + \sin x^3)^2}$.

Ответы

101. $y' = (tgx)^{\sqrt{\cos 2x}} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt{\cos 2x}}{\sin 2x} - \dfrac{\sin 2x \ln(tgx)}{\sqrt{\cos 2x}}\right)$;

102. $y' = \left(\cos^3 4x\right)^{\sqrt[3]{2x}}\left(\dfrac{2\ln(\cos^3 4x)}{3\sqrt[3]{4x^2}} - \dfrac{12\sqrt[3]{3x}\cos^2 4x \sin 4x}{\cos^3 4x}\right)$;

103. $y'=\dfrac{e^x\ln\frac{x}{2}(x^3+1)^2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}\,\ln tgx}\left(x+\dfrac{1}{x(\ln x-\ln 2)}+\dfrac{6x^2}{x^3+1}-\dfrac{4}{3(2x-1)}-\dfrac{2}{\sin 2x\ln tgx}\right)$;

104. $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+4}\cdot\cos 2x\sin^2 x^3}{x\sqrt[3]{3x^2+1}}\left(\dfrac{x}{x^2+4}-2tg2x+6x^2ctgx^3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{3x^2+1}\right)$;

105. $y'=\left(\sin\dfrac{\pi}{10}-\ln\dfrac{3}{x}\right)^{tgx}\left(\dfrac{\ln(\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x})}{\cos^2 x}+\dfrac{tgx}{x(\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x})}\right)$;

106. $y'=\dfrac{e^{3x}(x^4-x^2+1)^3\sqrt[3]{\sin^2 x+1}}{(3-2x^2)(1-\cos 2x)}\left(\dfrac{6x(2x^2-1)}{x^4-x^2+1}+\dfrac{\sin 2x}{3(\sin^2 x+1)}+3+\dfrac{4x}{3-2x^2}-2ctgx\right)$;

107. $y'=(tg(\sin x))^{\cos^2 3x}\left(\dfrac{\cos^2 3x\cos x}{tg(\sin x)\cos^2(\sin x)}-3\sin 6x\ln(tg(\sin x))\right)$;

108. $y'=x^2\cos\dfrac{1}{x}(tg2x-ctg2x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{tg\frac{1}{x}}{x^2}-\dfrac{8}{\sin 8x}+\dfrac{3x-1}{3x(x-1)}\right)$;

109. $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-5x}\cdot e^{\frac{x}{7}}}{(x-1)^3 6^{\ln x^4}}\left(\dfrac{2x-5}{2(x^2-5)}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4\ln 6}{x}\right)$;

110. $y'=\left(3x^2-10x-\dfrac{\pi}{2}tg\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{2(tg\sqrt{x}+3x^2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}\cos x^3)}{(tg^2\sqrt{x}+\sin x^3)\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{e^{x^3-5x^2}\cos\frac{\pi x}{2}}{(tg^2\sqrt{x}+\sin x^3)^2}$.

9. Геометрический, физический и механический смысл производной

1. Производная функции $y=f(x)$ для каждого значения x равняется угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в соответствующей точке, т.е. $f'(x_0)=tg\alpha$, где α - угол, который образовывает касатель-

ная к графику функции в точке x_0 с положительным направлением оси Ox (рис. 10).

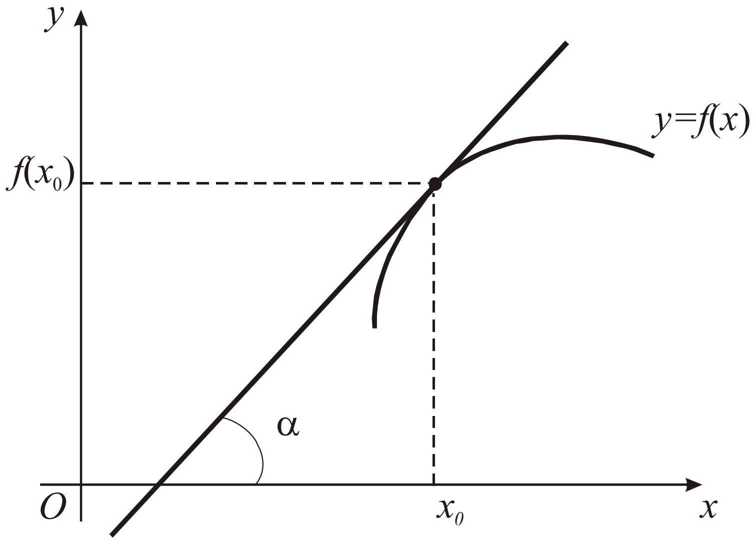


Рис. 10. Геометрический смысл производной

Приведем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{32}$$

а также уравнение нормали, которая проходит через ту же самую точку перпендикулярно к касательной:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{33}$$

2. Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый физический процесс, то производная y' является скоростью изменения этого процесса, т.е., какую бы зависимость не отображала функция $y = f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно рассматривать как среднюю скорость изменения функции y относительно аргумента x, а производную $f'(x)$ - мгновенную скорость изменения этой функции. Это - физическое содержание производной.

3. Если $S = S(t)$ закон движения материальной точки, то производная $S'(t)$ - это скорость v точки в момент времени t, вторая производная $S''(t)$ - мгновенное ускорение a точки в момент времени t, т.е.

$$v = S'(t); \quad a = S''(t) = v'(t) \qquad (34)$$

Это - механический смысл производной.

Рассмотрим примеры относительно использования производной.

Пример 64. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 0$.

<u>Решение:</u>

Определим ординату точки касания: $y_0 = y(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$, т.е. точка касания имеет координаты $M(0;-1)$. Найдем производную: $y' = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' =$

$$= \frac{(x-1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Тогда $y'(0) = \frac{0+2\cdot 0+1}{(0+1)^2} = 1$. Найдем значение производной в точке $M(0;-1)$. Подставив $x_0, y_0, y'(0)$ в выражения (32) и (33), получим:

$y-(-1) = 1(x-0) \Rightarrow y+1 = x \Rightarrow y = x-1$ - уравнение касательной;

$y-(-1) = -\frac{1}{1}(x-0) \Rightarrow y+1 = -x \Rightarrow y = -x-1$ - уравнение нормали.

Пример 65. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{4x-x^2}{4}$ в точке $x_0 = 2$.

<u>Решение:</u>

Определим вторую координату точки касания, подставив в уравнение кривой значения $x_0 = 2$: $y_0 = \frac{4\cdot 2-2^2}{4} = \frac{8-4}{4} = 1$. Точка касания имеет координаты $(2;1)$. Тогда производная заданной функции $y' = \frac{(4x - x^2)'}{4} =$ $= \frac{1}{4}(4 - 2x) = 1 - \frac{x}{2}$. Значение производной в точке касания $y'(x_0) = y'(2) = 1 - \frac{2}{2} = 0$. Таким образом, $y - 1 = 0(x - 2) \Rightarrow$ $y - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 1$ – уравнение касательной, а $x = 2$ – уравнение нормали.

Пример 66. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $4x^4 + 6xy - y^4 = 0$ в точке $M(1;2)$.

Решение:

Подставим координаты точки M в уравнение кривой: $4 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1 \cdot 2 - 2^4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Точка M принадлежит данной кривой, т.е. $x_0 = 1; y_0 = 2$. Найдем производную заданной функции (функция задана в неявном виде!): $(4x^4 + 6xy - y^4)' = 0 \Rightarrow 4 \cdot 4x^3 + 6(y + xy') - 4y^3y' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 16x^3 + 6y + 6xy' - 4y^3y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 16x^3 + 6y + y'(6x - 4y^3) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{16x^3 + 6y}{4y^3 - 6x} \quad \Rightarrow y'(M) = \frac{16 \cdot 1^3 + 6 \cdot 2}{4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 1} = \frac{16 + 12}{32 - 6} = \frac{28}{26} = \frac{14}{13}.$$

Тогда согласно (32) и (33) $y - 2 = \frac{14}{13}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad 13y - 26 = 14x - 14 \quad \Rightarrow$.

$\Rightarrow 14x - 13y = -12$ – уравнение касательной, а $y - 2 = -\frac{1}{14/13}(x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = -\frac{13}{14}(x - 1) \Rightarrow 14y - 28 = -13x + 13 \Rightarrow 13x + 14y = 41$ – уравнение нормали.

Пример 67. Составить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнениями $x = \cos^3 t; \quad y = \sin^3 t$ в точке $t = \pi / 4$.

Решение:

Уравнение кривой задано в параметрическом виде. Найдем

$x_0 = \cos^3(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $y_0 = \sin^3(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Тогда производная функции заданной параметрически (27):

$$y' = \frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -tgt\,.\; y'(\frac{\pi}{4}) = -tg\frac{\pi}{4} = -1.$$

Уравнение касательной имеет вид: $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -1(x - \frac{\sqrt{2}}{4})$; $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -x + \frac{\sqrt{2}}{4}$;

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - x.$$

Уравнение нормали согласно (33)

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{-1}(x - \frac{\sqrt{2}}{4});\quad y - \frac{\sqrt{2}}{4} = x - \frac{\sqrt{2}}{4};\quad y = x\,.$$

Пример 68. Под каким углом пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$?

Решение:

Под углом между двумя кривыми понимают угол между их касательными, которые проведены к линиям в точке пересечения M_0. Этот угол можно определить за формулой $tg\varphi = \frac{y_2'(x_0) - y_1'(x_0)}{1 + y_1'(x_0)y_2'(x_0)}$. Чтобы найти точку пересечения заданных линий (обращаем внимание, линии которые заданы в условии – это окружность и парабола), решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$$ Первое уравнение имеет корни: $x_1 = -4$ (не имеет смысла, так как $y = \pm\sqrt{2x}$, т.е. $x \geq 0$) и $x_2 = 2$. Отсюда $y_{1,2} = \pm\sqrt{2 \cdot 2} = \pm 2$. Мы получили две точки сечения линий: $M_1(2;2)$ и $M_2(2;-2)$. Найдем угол между кривыми в точке M_1. Производная функции $x^2 + y^2 = 8$ имеет вид: $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$; $y'(M_1) = -\frac{2}{2} = -1$

$y_1'(M_1) = -\frac{2}{2} = -1$. Производная функции $y^2 = 2x$ такая: $2yy' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$;

$y'(M_1) = \frac{1}{2}$. Тогда $tg\varphi = \dfrac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$; $\varphi = arctg3$.

Угол между кривыми в точке M_2 предлагаем найти самостоятельно.

Пример 69. Закон движения материальной точки по прямой определяется формулой $x=\frac{t^4}{4}-4t^3+18t^2$. В какие моменты времени ее ускорение равняется нулю?

Решение:

Найдем скорость точки:

$$v=x'=(\frac{t^4}{4}-4t^3+18t^2)'=\frac{4t^3}{4}-4\cdot 3t^2+18\cdot 2t=t^3-12t^2+36t.$$

Тогда ускорение точки

$a=v'=(t^3-12t^2+36t)'=3t^2-12\cdot 2t+36=3t^2-24t+36$. По условию ускорения в некоторое время равняется нулю, т.е. $3t^2-24t+36=0\Rightarrow$ $t^2-8t+12=0 \Rightarrow t_{1,2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2 \Rightarrow t_1=6;\ t_2=2$. Ведь ускорение равняется нулю при $t=6$ с та $t=2$ с.

Пример 70. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону $S(t)=t^2 3^t$. Найти кинетическую энергию тела через 3 с после начала движения.

Решение:

Кинетическая энергия тела определяется формулой $E=\frac{mv^2}{2}$. Найдем скорость $v=S'(t)=(t^2 3^t)'=2t3^t+t^2 3^t\ln 3$.

Тогда $v(3)=2\cdot 3\cdot 3^3+3^2\cdot 3^3\ln 3=81(2+3\ln 3)$;

$$E=\frac{5\cdot 81^2(2+3\ln 3)^2}{2}=16402{,}5(2+3\ln 3)^2 \text{ (Дж).}$$

Задания

111. На графике функции $y = x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

112. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?

113. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образовывает с осью Ox угол 135°?

114. В какой точке нормаль к параболе $y = x^2$ перпендикулярная к прямой $y = 4x + 1$?

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

115. $y = \arcsin\frac{1}{x}$, $x_0 = 2$;

116. $y = \sqrt{x^2 - 9}$, $x_0 = 5$;

117. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$, $x_0 = 0$.

Сложить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически в точке t_0:

118. $x = t - \sin t, \quad y = t - \cos t$, $t_0 = \pi/2$;

119. $x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$, $t_0 = \pi/2$;

120. $x = 1 - t^2, \quad y = t - t^3$, $t_0 = 2$.

Сложить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной в неявном виде в точке $M\,(x;y)$:

121. $3x - x^2 + y + 2y^2 = 0$, $M\,(3;0)$;

122. $2x^2 + 8x + y^2 + 2 = 0$. $M\,(-3;2)$;

123. $x^2 + 3y - 2x^3 y = 1$, $M\,(1;0)$.

124. Закон движения материальной точке выражается формулой $S = \dfrac{4t+3}{t+4}$. Найти скорость в момент времени $t = 9$ с.

125. Закон движения двух материальных точек вдоль одной прямой определяются уравнениями $S_1 = 4t^2 + 2$, $S_2 = 3t^2 + 4t - 1$. Найти скорость движения точек в тот момент времени, когда расстояния пройденные ими, равны между собой.

126. Найти количество движения материальной точки массой $m = 5$ кг, которая движется прямолинейно по закону $S(t) = t\sin^2 3t$ в момент времени $t = \pi / 6$ с (количество движения находим по формуле $p = mv$).

127. Под действием силы F материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по закону $S(t) = \dfrac{t^2+3}{\sqrt{t}}$. Найти значение силы F в момент времени $t = 1$ с.

Ответы

111. (4;0) и (1;-27); 112. (3;-2) и (-1;2/3); 113. (0;-1) и (4;3); 114. (-1/8;1/64);

115. $\sqrt{3}x + 6y - \pi - 2\sqrt{3} = 0,\ \ y = 2\sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} - 4\sqrt{3}$; 116. $5x - 4y = 9, \quad 5y + 4x = 40$;

117. $y = x - 1, \quad y = -x - 1$; 118. $y = x + 2 - \pi/2, \quad y = -x + \pi/2$;

119. $y + x = 3, \quad y = x + 1$; 120. $4y - 11x = 9, \quad 11y + 4x = -78$;

121. $y = 3x - 9, \quad 3y + x = 3$; 122. $y = x + 5, \quad y = -x - 1$;

123. $y = -2x + 2, \quad y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$; 124.1/13 (м/с);

125. $v_1 = 8, \quad v_2 = 10$ и $v_1 = 24, \quad v_2 = 22$ м/с; 126. $p = 5$ (кг· м/с); 127. $F = 3$ Н.

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Определение и геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцирована в точке *x*, т.е. в этой точке имеет производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда приращение функции $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$. Первое из слагаемых линейно относительно Δx, второе слагаемое – бесконечно малая величина более высокого порядка, чем Δx. Первое слагаемое составляет главную часть приращения функции, которая и носит название дифференциала функции. Т.к. дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением, то

$$dy = f'(x)dx \tag{35}$$

Геометрически, дифференциал функции $f(x)$ при заданных значениях *x* и Δx равняется приращению *QN* ординаты касательной *MQ*, которая проведена к кривой $y = f(x)$ в точке *M*, когда аргумент получает прирост Δx (рис. 11).

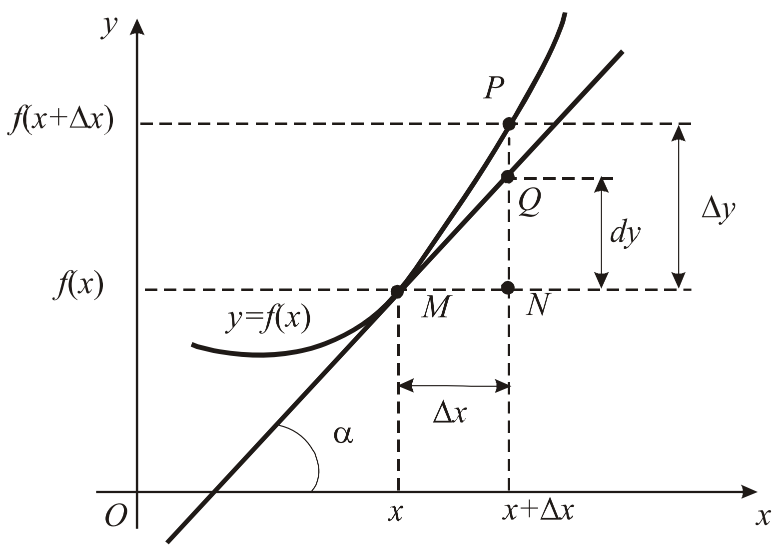


Рис. 11. Геометрический смысл дифференциала функции

2. *Основные свойства дифференциала*

Пусть $u(x)$, $v(x)$ - дифференцированные функции. Тогда выполняются равенства:

1. $dc = 0 \quad (c - const)$;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3. $d(uv) = vdu + udv$;
4. $dcu = cdu \quad (c - const)$;
5. $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0$;
6. $df(u) = f'du, \quad u = u(x)$.

Последнее уравнение называют свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка, которая заключается в том, что форма дифференциала не изменяется от того, или есть x независимым изменением, или есть некоторой дифференцированной функцией.

3. *Применение дифференциала* $dy = f'(x)dx$ *в приближенных вычислениях и в теории ошибок*

При малых Δx справедливо, что $\Delta y \approx dy$, т.е.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{36}$$

Относительная ошибка при вычислении значения функции y может быть приближенно определена с помощью дифференциала, т.е.

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right|. \tag{37}$$

Пример 71. Найти дифференциал функции $y = arctg\sqrt{x^2 - 1} + \ln\cos x^2$.

Решение:

Согласно (35) $dy = d(arctg\sqrt{x^2-1} + \ln\cos x^2) = (arctg\sqrt{x^2-1} + \ln\cos x^2)'dx =$

$$= \left(\frac{1}{(\sqrt{x^2-1})^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x + \frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)2x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} - 2xtgx^2\right)dx = \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - 2xtgx^2\right)dx.$$

Пример 72. Найти дифференциал функции $x^3 + y^3 + 3xy - 15 = 0$ в точке $M(1;2)$.

Решение:

Найдем производную неявно заданной функции:

$3x^2 + 3y^2y' + 3y + 3xy' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2y' + y + xy' = 0 \Rightarrow y'(y^2 + x) = -(x^2 + y)$.

$\Rightarrow y' = -\dfrac{x^2+y}{y^2+x}$. Согласно (35): $dy = f'(x)dx = -\dfrac{x^2+y}{y^2+x}dx$ или

$$dy(M) = -\frac{1^2+2}{2^2+1}dx = -\frac{3}{5}dx.$$

Пример 73. Вычислить приближенно значение $\sqrt[3]{30}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда согласно (36). $\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x$. В нашем случае $x + \Delta x = 30$. Если положим, что $x = 27$, то $\Delta x = 3$ и $\sqrt[3]{27+3} \approx \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}3 = 3 + \dfrac{3}{3\cdot 9} = 3 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{28}{9}$. Ответ: $\sqrt[3]{30} \approx \dfrac{28}{9}$.

Пример 74. Вычислить приближенно значение $\cos 155°$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$. Тогда, согласно (36), $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x+(\cos x)'\Delta x=\cos x-\sin x\Delta x$. Переведем градусы в радианы (<u>это надо делать обязательно!</u>): $155°=\frac{\pi}{180}155^{\circ}=\frac{31\pi}{36}$. Пусть $x=150°=\frac{5\pi}{6}$; $x+\Delta x=\frac{31\pi}{36}$, т.е. $\frac{5\pi}{6}+\Delta x=\frac{31\pi}{36}$; $\Delta x=\frac{31\pi}{36}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{36}$.

Получим $\cos155°=\cos\frac{31\pi}{36}\approx\ \cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{36}$.

Согласно формулам приведения $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\cos155°=\cos\frac{31\pi}{36}\approx\cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{36}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{36}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{72}\approx-0{,}908.$$

Пример 75. Найти относительную погрешность при расчете объема шара, если погрешность при определении ее радиуса была Δr.

<u>Решение:</u>

Согласно (37) $\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{dV}{V}=\frac{V'(r)\Delta r}{V(r)}=\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'\Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{4\pi r^2\Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3\frac{\Delta r}{r}$.

Итак, относительная погрешность при определении объема шара приближенно равняется утроенной относительной погрешности, которая была сделана при расчете радиуса шара.

Задания

128. Найти приращение и дифференциал функции $y=3x^2-x$ при переходе независимой переменной от значения $x=1$ к значению $x=1{,}02$.

129. Найти дифференциал функции $y=\frac{5}{x^2}+arctg\frac{x}{5}$ в точке $x=1$.

Найти дифференциал функций:

130. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{0.2}$;

131. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$;

132. $y=2^{-1/\cos x}$;

133. $y=\ln tg(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4})$;

134. $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$;

135. $y=tg^2 x$;

136. $y=5^{\ln tgx}$;

137. $y=\sqrt{\arcsin x}+(arctgx)^2$;

138. $y=3^{-1/x^2}+3x^2-4\sqrt{x}$.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значения выражений:

139. $\sqrt[3]{131}$; 140. $\sin 9°$; 141. $\arccos 0{,}02°$; 142. $\ln 1{,}2$.

Ответы

128. $\Delta y=0{,}1012,\quad dy=0{,}1$; 129. $dy=9\dfrac{21}{26}$; 130. $dy=\dfrac{1}{0.6\sqrt[3]{x^2}}dx$;

131. $dy=\dfrac{3x^2(x^3-1)-3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2}dx=\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}dx$;

132. $dy=2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2(\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x})dx$; 133. $dy=\dfrac{1}{tg(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})}\dfrac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})}(-\dfrac{1}{4})dx$;

134. $dy=\dfrac{-\sin x(1-x^2)-\cos x(-2x)}{(1-x^2)^2}dx$; 135. $dy=2tgx\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$;

136. $dy=5^{\ln tgx}\ln 5\dfrac{1}{tgx}\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$;

137. $dy=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin x}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2arctgx\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$;

138. $dy=\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\ln 3\cdot\dfrac{2}{x^3}+6x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

139. 5,08; 140. 0,257; 141. 1,55; 142. 0,2.

VI. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Производные высших порядков

Пусть на интервале *(a, b)* задана дифференцируемая функция $y = f(x)$, тогда ее производная первого порядка $y' = f'(x)$ также является функцией от x. Если функция $f'(x)$ также имеет производную на интервале *(a, b)*, то последняя называется второй производной и обозначается одним из символов: y''; $f''(x)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

Производную от второй производной, если она существует, называют производной третьего порядка, т.е. $y''' = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d^2y}{dx^2})$.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$, называют первую производную, если она существует, от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные порядка выше первого называют производными высших порядков. Производные выше третьего порядка обозначаются цифрами, которые берутся в скобки.

Пример 76. Найти производную третьего порядка функции $y = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3$.

Решение:

Последовательно находим: $y' = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2$; $y'' = 20x^3 - 36x^2 + 12x$;

$y''' = 60x^2 - 72x + 12$.

Пример 77. Найти производную n-го порядка функции $y = a^x$.

Решение:

$y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x \ln a \cdot \ln a = a^x \ln^2 a$; $y''' = a^x \ln a \cdot \ln a \cdot \ln a = a^x \ln^3 a$;

$\ldots$; $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

2. Вычисление производных второго порядка функций заданных параметрически

Если функция задана параметрическими уравнениями $x = x(t), \ y = y(t)$, тогда вторая производная ($\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ или y''_{xx}) имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} \tag{38}$$

или

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''_t \, x'_t - y'_t \, x''_t}{\left(x'_t\right)^3}. \tag{39}$$

Пример 78. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = \ln t, \ y = t^2 - 1$.

<u>Решение:</u>

Имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(t^2-1)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{2t}{\frac{1}{t}} = 2t^2$. Дальше согласно (38) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(2t^2\right)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{4t}{\frac{1}{t}} = 4t^2$.

Пример 79. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = 2\cos t, \ y = 3\sin t$.

<u>Решение:</u>

Вторую производную вычислим по формуле (39). Для этого найдем $x'_t = -2\sin t, \ x''_{tt} = -2\cos t, \ \ y'_t = 3\cos t, \ \ y''_{tt} = -3\sin t$ и подставим их в (39).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-3\sin t(-2\sin t) - (-2\cos t)3\cos t}{(-2\sin t)^3} = \frac{6\sin^2 t + 6\cos^2 t}{-8\sin^3 t} = -\frac{3}{4\sin^3 t}.$$

3. Производные высших порядков неявно заданных функций

Пусть функция задана неявно $F(x,y)=0$. Чтобы найти первую производную продифференцируем это равенство по x и решим полученное уравнение относительно y'. Для нахождения второй производной продифференцируем первую производную по x и в полученное соотношение подставим ее значение. Если продолжить дифференцирование, то можно найти одну за другой производные любого порядка. Все они будут выражены через независимую переменную x и саму функцию y.

Пример 80. Найти y'', если $y = \sin(x + y)$.

Решение:

Продифференцируем заданную функцию по x:

$y' = \cos(x + y) \cdot (1 + y')$. Решим это равенство относительно y':

$$y' = \cos(x + y) + y'\cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad y'(1 - \cos(x + y)) = \cos(x + y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}.$$

Дифференцируем полученное соотношение по x:

$$y'' = \frac{-\sin(x + y)(1 + y')(1 - \cos(x + y)) - \cos(x + y)\sin(x + y)(1 + y')}{(1 - \cos(x + y))^2};$$

$$y'' = \frac{(1 + y')(-\sin(x + y) + \sin(x + y)\cos(x + y) - \sin(x + y)\cos(x + y)}{(1 - \cos(x + y))^2} =$$

$$= \frac{(1 + y')(-\sin(x + y)}{(1 - \cos(x + y))^2}.$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$, имеем

$$y'' = -\frac{\left(1 + \dfrac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}\right)\sin(x + y)}{(1 - \cos(x + y))^2} = -\frac{\left(1 - \cos(x + y) + \cos(x + y)\right)\sin(x + y)}{(1 - \cos(x + y))^3} =$$

$$= -\frac{\sin(x + y)}{(1 - \cos(x + y))^3}.$$

4. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом n -го порядка n раз дифференцированной функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала (n – 1) –го порядка:

$d^n y = d(d^{n-1} y)$, т.е. $d^2 y = f''(x)dx^2;\quad d^3 y = f'''(x)dx^3 \ldots.$

Пример 81. Найти $d^2 y$, если $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение:

Найдем производные:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{2}{3}x^{-1/3};\qquad y'' = \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})x^{-4/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Тогда $d^2 y = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}dx^2 = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}dx^2$.

Пример 82. Найти $d^3 y$, если $y = \sin^2 x$.

Решение:

Найдем производные: $y'' = 2\sin x \cos x = \sin 2x;\quad y'' = 2\cos 2x$;

$y''' = -4\sin 2x.$ Имеем $d^3 y = -4\sin 2x dx^3$.

Задания

Найти производные второго порядка функций:

143. $y = xe^{x^2}$;

144. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$;

145. $y = (1+x^2)arctgx$;

146. $y = \sqrt{(4-x^2)}$;

147. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

148. $y = e^{\sqrt{x}}$;

149. $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

150. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

Найти производные второго порядка функций, которые заданы неявно:

151. $x^3 + y^3 = 3xy$;

152. $\ln(x+y) = y - x$;

153. $e^{x+y} = xy$;

154. $e^y + xy = e$. Найти y'' при $x = 0$.

Найти производные второго порядка параметрически заданных функций:

155. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2); \end{cases}$

157. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$

156. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t; \end{cases}$

158. $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = t^2/2. \end{cases}$

159. Найти производную второго порядка функции $\begin{cases} x = e^t, \\ y = t^2 e^t \end{cases}$ в точке $M(1;0)$.

Найти дифференциалы второго порядка функций:

160. $y = (x+1)^3(x-1)^2$;

161. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$;

162. $y = 4^{-x^2}$;

163. $y = arctg\dfrac{1}{x}$.

Ответы

143. $y'' = 2e^{x^2}(3x + 2x^3)$;

144. $y'' = \dfrac{6x(2x^3 - 1)}{(1+x^3)^3}$;

145. $y'' = \dfrac{2x}{1+x^2} + 2arctgx$;

146. $y'' = \dfrac{-4}{\sqrt{(4-x^2)}^3}$;

147. $y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

148. $y'' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$;

149. $y'' = -9\cos 3x$;

150. $y'' = -\dfrac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

151. $y'' = \dfrac{2xy(3xy - x^3 - y^3 - 1)}{(y^2 - x)^3}$;

152. $y'' = -\dfrac{4(y+x)}{(x+y-1)^3}$;

154. $y'' = \dfrac{1}{e^2}$;

155. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2}{1-t^2}$;

156. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$;

157. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$;

158. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3t^4 + 4t^2 + 1$;

159. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$;

160. $d^2y = 4(x+1)(5x^2 - 2x - 1)dx^2$;

161. $d^2y = \dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^2$;

162. $d^2y = 4^{-x^2} 2\ln 4(2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$;

153. $y'' = -\dfrac{y(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2(y-1)^3}$; 163. $d^2y = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}dx^2$;

VII. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Правило Лопиталя является эффективным средством нахождения предела функции при раскрытии неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определенные и дифференцированные в окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой точки x_0, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, т.е. $f(x)$ и $g(x)$ одновременно бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to x_0$;

3) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда существует предел отношения функций $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{40}$$

Надо заметить, что иногда допускается ошибка, искать вместо предела $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ предел $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)'$. Правило Лопиталя применяется к раскрытию неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые называются основными. Другие неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 сводятся к основным. Приведем основные способы сведения этих неопределенностей к основным:

1. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$, при $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$) сводится к основным так:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \text{ или } f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}. \quad (41)$$

2. Неопределенность вида $\infty - \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x)$, при $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$) сводится к основным так:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\}. \quad (42)$$

3. Неопределенности вида 1^{∞}, 0^0, ∞^0 сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$ с помощью предыдущего логарифмирования или представление функции как

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}. \quad (43)$$

Пример 83. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{(e^{3x} - e^{2x})'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} - 2e^{2x}}{1} = 3 - 2 = 1.$$

Пример 84. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Пример 84. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. По всей видимости, неопределенность $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ осталась, поэтому снова применим правило Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Снова применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Пример 85. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} ((\pi - 2arctgx)\ln x)$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty} ((\pi - 2arctgx)\ln x) = \{0\cdot\infty\}$. Тогда согласно (41), получим:

$$\lim_{x\to\infty} ((\pi - 2arctgx)\ln x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2arctgx)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln^2 x}{(1+x^2)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x + x2\ln x\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 2}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Пример 86. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx - \dfrac{1}{\cos x})$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx - \frac{1}{\cos x}) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Пример 87. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

<u>Решение:</u>

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \left\{0^0\right\}$. Рассмотрим функцию $y = \lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ и прологарифмируем ее: $\ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$. Помня, что $\ln \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln f(x)$, получим

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \{\text{ так как } \cos 0 = 1 \} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{1} = 0, \text{ т.е. } \ln y = 0, \text{ откуда } y = e^0 = 1.$$

Задания

Вычислить пределы функций по правилу Лопиталя:

164. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$;

165. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x} = 0$;

166. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$;

167. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$;

168. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

169. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{tgx} - e^x}{tgx - x}$;

170. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;

171. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2\cos x}$;

172. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x})^{tgx}$;

173. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Ответы

164. $3/5$; 165. 0; 166. 0; 167. $1/2$; 168. $-1/2$; 169. 1; 170. 1; 171. e^2; 172. 1; 173. e^2.

VIII. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

1. Возрастание и убывание функции. Локальный экстремум функции

Функция $f(x)$ называется возрастающей (ниспадающей) на интервале $(a;b)$, если для двух произвольных точек x_1 и x_2 из указанного интервала таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неровность $f(x_1) < f(x_2)$ $\quad (f(x_1) > f(x_2))$.

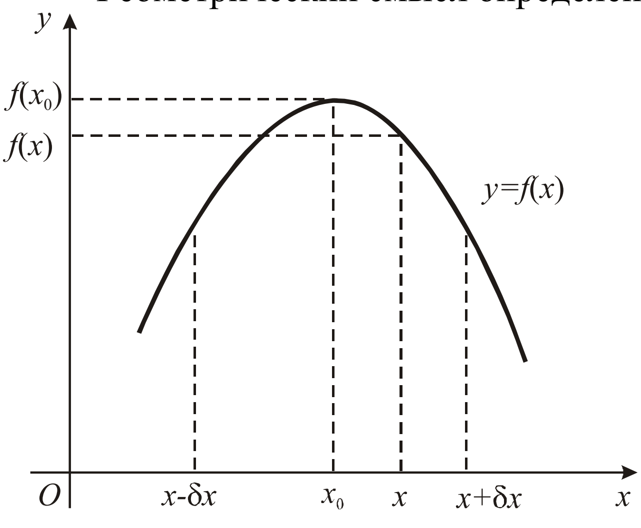
Признаки возрастания и убывания функции:

1) если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, функция $f(x)$ возрастает на $(a;b)$;

2) если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, функция $f(x)$ спадает на $(a;b)$.

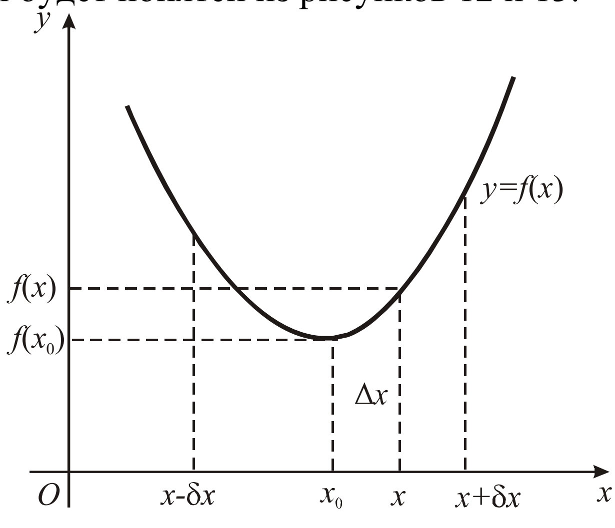
Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такой окрестность $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, который принадлежит области определения функции, и для всех x из этой окрестности выполняется неровность $f(x) < f(x_0)$ $\quad (f(x) > f(x_0))$.

Геометрический смысл определения будет понятен из рисунков 12 и 13.



x_0 - точка максимума

Рис. 12.



x_0 - точка минимума

Рис. 13.

Выясним условия существования локального экстремума.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума) Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцированная в ней, то $f'(x_0)=0$.

Эта теорема имеет следующий геометрический смысл: если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцированная в ней, то в этой точке существует касательная к графику функции $y=f(x)$ и эта касательная параллельная оси Ox. Условие $f'(x_0)=0$ является необходимым, но недостаточным, чтобы в точке x_0 функция имела экстремум. Например, производная функции $y=x^3$ в точке $x=0$ равняется нулю, но не имеет в этой точке экстремума.

Точки, в которых первая производная равняется нулю, называются стационарными или критическими.

Теорема 2 (первое достаточное условие существования локального экстремума). Пусть x_0 - критическая точка функции $f(x)$, которая в этой точке непрерывная, и пусть существует окрестность ($x_0-\delta; x_0+\delta$) точки x_0, в которой функция имеет производную $f'(x)$ кроме, возможно, точки x_0. Тогда:

1) если в интервале ($x_0-\delta; x_0$) производная $f'(x)>0$, а в интервале ($x_0; x_0+\delta$) производная $f'(x)<0$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$;

2) если в интервале ($x_0-\delta; x_0$) производная $f'(x)<0$, а в интервале ($x_0; x_0+\delta$) производная $f'(x)>0$, то точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$;

3) если в обоих интервалах ($x_0-\delta; x_0$) и ($x_0; x_0+\delta$) производная $f'(x)$ имеет одинаковый знак, то точка x_0 не является экстремальной точкой функции $f(x)$.

Другими словами, если при переходе через критическую точку x_0 знак производной $f'(x)$ изменяется из плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального максимума функции; если знак производной $f'(x)$ изменяется из минуса на плюс, то точка x_0 является точкой локального минимума; если знак производной $f'(x)$ не изменяется, то в точке x_0 экстремум отсутствующий.

Теорема 3 (второе достаточное условие существования локального экстремума). Пусть x_0 - критическая точка функции $f(x)$, т.е. $f'(x_0)=0$, и в окрестности точки x_0 существует вторая непрерывная производная, причем $f''(x_0)\neq 0$. Если $f''(x_0)>0$, то точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$; если $f''(x_0)<0$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.

2. Правило исследования функции на экстремум

Чтобы определить локальный экстремум функции $f(x)$, надо:

1) найти критические точки функции $f(x)$. Для этого следует найти производную $f'(x)$ и приравнять ее нулю. Найти корни полученного уравнения и среди них выбрать те, что являются внутренними точками области существования функции. Кроме того, найти точки, в которых производная не существует;

2) нанести на ось эти точки и исследовать знак производной в каждом из интервалов, на которые разбивается ось этими точками;

3) по изменению знака $f'(x)$ при переходе через критические точки слева направо определить точки максимумов и минимумов. Вычислить значение функции в этих точках.

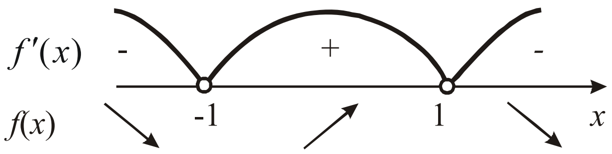
Пример 88. Найти интервалы монотонности, а также локальные экстремумы функции $f(x)=x-\frac{x^5}{5}$.

Решение:

Область определения функции $(-\infty;+\infty)$. Найдем критические точки:

$$f'(x)=1-\frac{5}{5}x^4=1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2)=0.$$

Итак, точки $x = \pm 1$ - критические точки. Нанесем эти точки на ось и определим знаки производной на каждом из интервалов



Таким образом, функция убывает, если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ и возрастает, если $x \in (-1; 1)$. По теореме 2, видим, что $x = -1$ – точка локального минимума; $x = 1$ – точка локального максимума. Вычислим $y_{\min} = y(-1) = -1 - \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{4}{5}$;

$y_{\max} = y(1) = 1 - \frac{(1)^5}{5} = \frac{4}{5}$.

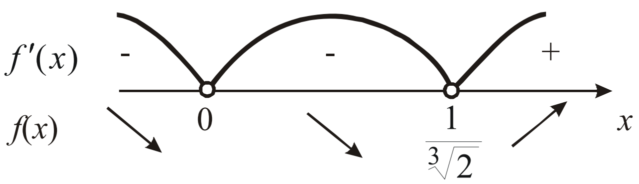
Пример 89. Найти интервалы монотонности, а также локальные экстремумы функции $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

<u>Решение:</u>

Область определения функции $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Найдем производную

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2} = \frac{2(x^3 - \frac{1}{2})}{x^2} = \frac{2(x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}})(x^2 + \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}})}{x^2} = 0.$$

Производная $f'(x)$ равняется нулю при $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и не существует при $x = 0$. Обозначим эти точки на числовой прямой и определим знак производной на каждом из интервалов



Таким образом, функция убывает, если $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, и возрастает, если $x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty)$. Кроме того, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ – точка локального минимума;

$$y_{\min} = y(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{1+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1+2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Отметим, что точка $x = 0$ не является критической точкой (в этой точке функция неопределенная).

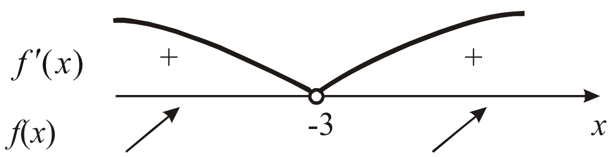
Пример 90. Найти интервалы монотонности, а также локальные экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.

Решение:

Область определения функции $(-\infty;-3) \cup (-3;\infty)$. Найдем производную

$$f'(x) == \frac{(x-1)'(x+3)-(x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{1(x+3)-1(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}.$$

Видим, что производная $f'(x) \neq 0$ ни для каких значений x. Поэтому на ось нанесем только точку $x = -3$, т.е., функция будет возрастающей на всей числовой оси.



В точке $x = -3$ функция не определена.

Пример 91. Исследовать функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

Решение:

Область определения функции $(-\infty;\infty)$. Производная $y' = 6x^2 + 6x$. Решим уравнение $y' = 0$. $6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 6x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0$ – критические точки. Найдем вторую производную: $y'' = 12x + 6$.

Определим знак производной y'' в критических точках: $y''(-1) = 12(-1) + 6 = -6 < 0$; $y''(0) = 12 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$. По теореме 3 делаем вывод: $x = -1$ – точка максимума, а $x = 0$ – точка минимума. Причем $y(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -2 + 3 - 1 = 0$; $y(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 1 = -1$.

Задания

Найти промежутки возрастания и убывания функций, а также их экстремумы:

174. $y = 0{,}5x^4 - 4x^2$;

175. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

176. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 4x + 4}$;

177. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-4)}$;

178. $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

Ответы

175. $x = \pm 2$ – точки минимума, $x = 0$ – точка максимума. Функция возрастает на $(-2;0) \cup (2;\infty)$, функция убывает на $(-\infty;-2) \cup (0;2)$;

175. $x = -1$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума. Функция возрастает на $(-1;1)$, функция убывает на $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$;

176. $x = 2$ – точка максимума. Функция возрастает на $(-2;2)$, функция убывает на $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$;

177. $x = 2{,}5$ – точка максимума. Функция возрастает на$(-\infty;1) \cup (1;2{,}5)$, функция убывает на $(2.5;4) \cup (4;\infty)$;

178. $y_{\max} = 0{,}25$ при $x = \ln 2$. Функция возрастает на $(-\infty; \ln 2)$, функция убывает на $(\ln 2; \infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Иногда путают локальный максимум (минимум) с наибольшим (наименьшим) значением функции, которого она достигает на отрезке. Локальных максимумов и минимумов функция может иметь несколько, тогда как наибольшее (наименьшее) значение одно.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, нужно:

1) найти производную $f'(x)$ и критические точки данной функции;

2) вычислить значение функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $[a;b]$, а также в точках a и b;

3) среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 92. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение:

Найдем критические точки, для этого определим производную $f'(x)$ и приравняем ее к нулю: $f'(x)=3x^2-6x+3=0$; $\Rightarrow$ $3x^2-6x+3=0$; $\Rightarrow$ $(x-1)^2=0$ $\Rightarrow$ $x_{1,2}=1$. Эта точка принадлежит интервалу $[-2;2]$. Ведь: $f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+3(-2)+2=-8-12-6+2=-24$;

$f(1)=1^3-3\cdot1^2+3\cdot1+2=1-3+3+2=3$;

$f(2)=2^3-3\cdot2^2+3\cdot2+2=8-12+6+2=4$.

Таким образом $f_{наим}=f(-2)=-24$ $f_{наиб}=f(2)=4$.

Пример 93. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^2\ln x$ на отрезке $[1;e]$.

Решение:

Найдем производную $f'(x)=(x^2\ln x)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+\dfrac{x^2}{x}=$ $=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$. Из условия $f'(x)=0$ найдем критические точки: $x(2\ln x+1)=0$. Так как функция $\ln x$ определена при $x>0$, то $x\neq0$, Поэтому критическую точку находим из условия $2\ln x+1=0$ $\Rightarrow$ $\ln x=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Эта точка не принадлежит промежутку $[1;e]$. Поэтому вычислим лишь значение функции на концах отрезка, т.е. в точках $x=1$ и $x=e$.

$f(1)=1^2\ln 1=0$; $\quad f(e)=e^2\ln e=e^2$. Таким образом $f_{наиб}=f(e)=e^2$, $f_{наим}=f(1)=0$.

Пример 94. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x+\cos^2 x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

Определим критические точки:

$$f'(x)=(x+\cos^2 x)'=1+2\cos x(-\sin x)=1-\sin 2x=0;$$

$$\sin 2x=1;\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\ .$$

Среди полученных точек выберем те, которые принадлежат промежутку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Это точка $x=\dfrac{\pi}{4}$. Найдем значение функции на концах промежутка и в этой точке.

$$f(0)=0+\cos^2 0=1; \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}=\frac{\pi+2}{4};$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad f_{наим}=f(0)=1,\ f_{наиб}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Задания

Определить наибольшее и наименьшее значение функции на указанном промежутке:

179. $y=6x^5-15x^4+10x^3+2,\quad x\in[0;3]$;

180. $y=2\sin x+\cos 2x,\quad x\in[0;\frac{\pi}{2}]$;

181. $y=tgx+ctg2x,\quad x\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]$;

182. $y=2x^2-\ln x,\quad x\in[1;e]$;

183. $y=x+\dfrac{8}{x^4},\quad x\in[1;3]$.

Ответы

179. $y_{наиб} = y(3) = 511, \ y_{наим} = y(0) = -2$;

180. $y_{наиб} = y(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}, \ y_{наим} = y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 1$;

181. $y_{наиб} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \ y_{наим} = 1$;

182. $y_{наиб} = y(e) = 2e^2 - 1, \ y_{наим} = y(1) = 2$;

183. $y_{наиб} = y(1) = 9$, $y_{наим} = y(2) = 2{,}5$.

4. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба

Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале $(a;b)$, если все ее точки, кроме точки соприкосновения, лежат ниже произвольной ее касательной на этом интервале (рис. 14). Кривая $y = f(x)$ называется вогнутой на интервале $(a;b)$, если все ее точки, кроме точки соприкосновения, лежат выше произвольной ее касательной на этом интервале (рис. 15). Точкой перегиба называется такая точка кривой, которая отделяет ее выпуклую часть от выпуклой (рис. 16).

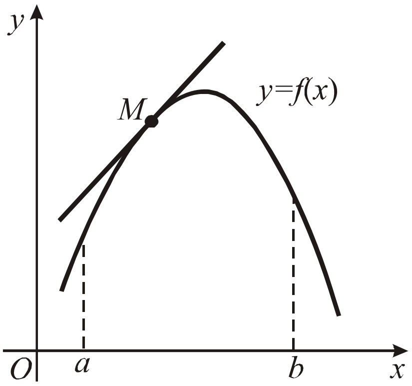


Рис. 14

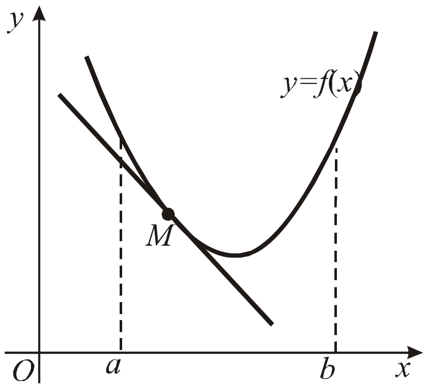


Рис. 15

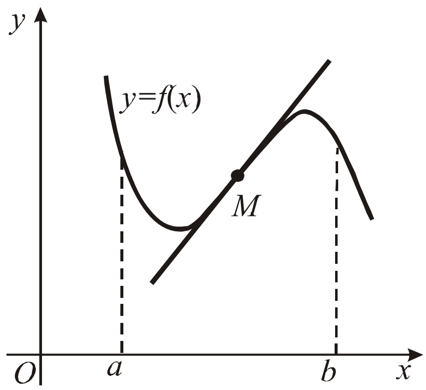


Рис. 16

Для исследования графика функции на выпуклость и вогнутость применяется вторая производная функции.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ является дважды дифференцируемой на интервале $(a;b)$. Тогда:

1) если $f''(x) < 0,\ x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ выпуклый на интервале $(a;b)$;

2) если $f''(x) > 0,\ x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ вогнут на интервале $(a;b)$.

Из теоремы вытекает необходимое условие существования точки перегиба. Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равняется нулю или не существует, называют критическими точками второго рода функции $y = f(x)$. Сформулируем достаточные условия существования точек перегиба.

Теорема 5. Пусть x_0 - критическая точка второго рода функции $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ изменяет знак, то точка (x_0 ; $f(x_0)$) является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

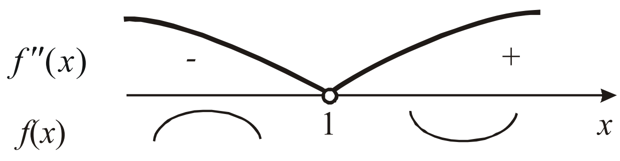
Пример 95. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 6$.

Решение:

Находим производные: $y' = 3x^2 - 6x + 9$; $y'' = 6x - 6$.

Решаем уравнение: $y''(x) = 0$; $6x - 6 = 0$; $6(x-1) = 0$; $x = 1$,

т.е., $x = 1$ – критическая точка второго рода. Обозначим эту точку на числовой прямой и определим знак второй производной на каждом из интервалов.



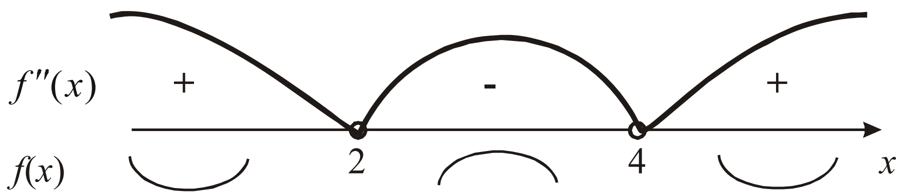
Если $x < 1$, то $f''(x) < 0$ и кривая выпуклая; если $x > 1$, то $f''(x) > 0$ и кривая вогнута. При переходе через точку $x = 1$ вторая производная изменяет знак. Итак, точка $(1;13)$ является точкой перегиба данной кривой.

Пример 96. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Решение:

Определим производные: $y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$; $y'' = 12x^2 - 72x + 96.$

Находим критические точки второго рода ($y''(x) = 0$): $12x^2 - 72x + 96 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $(x-2)(x-4) = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ – критические точки второго рода. Нанесем их на числовую прямую и определим знак второй производной на полученных интервалах.



Для $x \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$ $f''(x) > 0$ и кривая вогнута. Для $x \in (2;4)$ $f''(x) < 0$ и кривая выпуклая, т.е. при переходе через точки $x_1 = 2$ і $x_2 = 4$ вторая производная изменяет знак. Вычислим $y(2)$ и $y(4)$: $y(2) = 62$ и $y(4) = 206$. Т.о. точки (2;62) и (4;206) - точки перегиба данной кривой.

Пример 97. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Решение:

Определим производные: $y' = (x^4)'(12\ln x - 7) + x^4(12\ln x - 7)' =$

$$= 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \frac{12}{x} = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3 = 16x^3(3\ln x - 1);$$

$$y'' = (16x^3(3\ln x - 1))' = 48x^2(3\ln x - 1) + 16x^3 \cdot \frac{3}{x} = 48x^2 \cdot 3\ln x = 144x^2 \ln x.$$

Приравниваем вторую производную к нулю: $144x^2 \ln x = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{cases}$ Так как заданная функция существует при $x \in (0;\infty)$, то получим одну критическую точку. Это $x = 1$. Прежде чем определить знак второй производной на полученных интервалах, приведем график функции $y = \ln x$ (рис. 17).

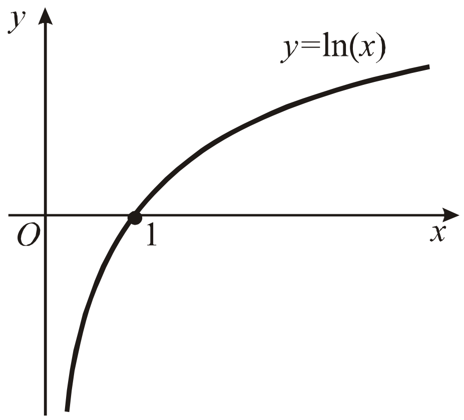
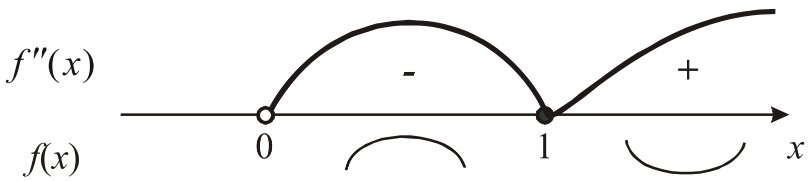


Рис. 17

Теперь обозначим на числовой прямой критическую точку второго рода $x = 1$ и определим знак второй производной в окрестности этой точки.



Итак, при переходе через точку $x = 1$ вторая производная изменяет знак. Если $x \in (0;1)$ – кривая вогнута, если $x \in (1;\infty)$ – кривая выпуклая; $y(1) = -7$. Точка (1;7) - точка перегиба данной кривой.

Задания

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривых:

184. $y = x^3 - 5x^2 - 3x + 5$;

185. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$;

186. $y = \sin x$;

187. $y = x^2 \ln x$;

188. $y = xe^x$.

Ответы

184. $(\frac{5}{3};-\frac{25}{27})$ – точка перегиба, $(-\infty;\frac{5}{3})$ – выпуклый, $(\frac{5}{3};\infty)$ – вогнутый;

185. (–3; 294) и (2; 114) – точки перегиба, $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$ – выпуклый, (-3;2) - вогнутый;

186. $\{\pi n;0\}$ – точки перегиба, $(2\pi n;\pi+2\pi n)$ – выпуклый, $(-\pi+2\pi n;2\pi n)$ – вогнутый;

187. $(e^{-3/2};-\frac{3}{2e^3})$ – точка перегиба, $(0;e^{-3/2})$ – выпуклый, $(e^{-3/2};\infty)$ – вогнутый;

188. $(-2;-\frac{2}{e^2})$ – точка перегиба, $(-\infty;-2)$ – выпуклый, $(-2;\infty)$ – вогнутый.

5. Асимптоты кривой

Асимптотой кривой $y=f(x)$ называют прямую, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном отдалении ее от начала координат. Существует три типа асимптота: вертикальные, наклонные и горизонтальные (рис. 18-20).

Прямая $x=c$ – вертикальная асимптота (рис. 18), если $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=\pm\infty$.

Прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота (рис. 19), если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ (k\neq 0)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Внимание! Надо рассматривать случаи как $x\to+\infty$, так и $x\to-\infty$.

Горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ называют прямую $y=b$ (рис. 20), если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

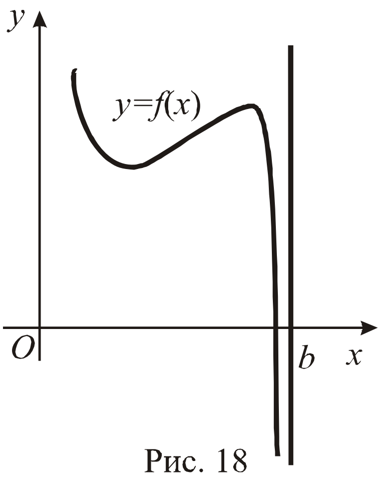


Рис. 18

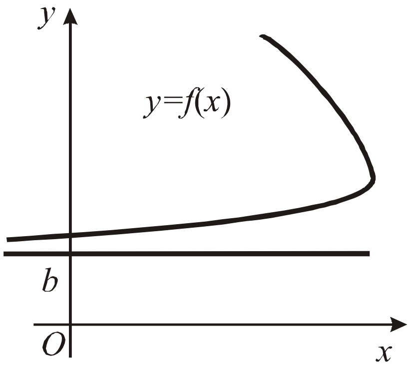


Рис. 19

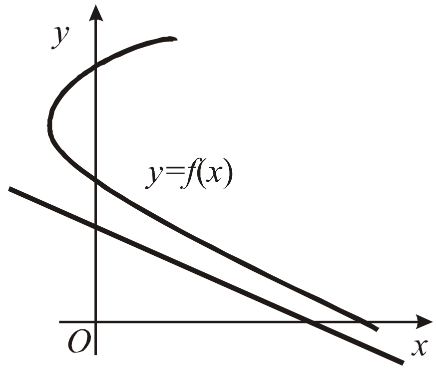


Рис. 20

Пример 98. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{6x^4+3x^3}{5x^3+1}$.

<u>Решение:</u>

Приравняем знаменатель дроби к нулю и найдем точку разрыва функции: $5x^3+1=0$; $x^3=-\dfrac{1}{5}$; $x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$, т.е. заданная функция имеет разрыв второго рода в точке $x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$. Тогда прямая $x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$ – вертикальная асимптота данной кривой.

Уравнение наклонной асимптоты ищем в виде $y=kx+b$. Имеем:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+3x^3}{x(5x^3+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+3x^3}{5x^4+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^4}{x^4}+\dfrac{3x^3}{x^4}}{\dfrac{5x^4}{x^4}+\dfrac{x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{3}{x}}{5+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{6}{5};$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^4+3x^3}{5x^3+1}-\frac{6}{5}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{30x^4+15x^3-30x^4-6x}{5(5x^3+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^3-6x}{5(5x^3+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{15x^3}{x^3}-\dfrac{6x}{x^3}}{\dfrac{25x^3}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{15-\dfrac{6}{x^2}}{25+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{3}{5};$$

$y=kx+b$; $\quad y=\dfrac{6}{5}x+\dfrac{3}{5}$; $\quad 5y=6x+3$; $\quad 5y-6x-3=0$ – уравнение наклонной асимптоты.

Для определения горизонтальной асимптоты найдем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^4+3x^3}{5x^3+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^4}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}}{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{3}{x}}{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}} = \infty,$$ т.е. горизонтальных асимптот нет.

Задания

Найти асимптоты к кривым:

189. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

190. $y = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$;

191. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

192. $y^3 = 1 - x^3$;

193. $y = xe^{2/x} + 1$.

Ответы

189. $x = 1; x = 2$ - вертикальные, $y = 0$ - горизонтальная;

190. $y = x + 1$ - наклонная, $x = 0$ - вертикальная;

191. $y = \pm\frac{b}{a}x$ - наклонная;

192. $y + x = 0$ - наклонная;

193. $x = 0$ - вертикальная, $y = x + 3$ - наклонная.

6. Схема исследования функции. Построение графиков функции

Чтобы исследовать функцию и построить ее график, надо:

1) найти область существования функции;
2) найти точки разрыва и установить их характер;
3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность;

5) найти точки локальных экстремумов, значение функции в этих точках, а также интервалы монотонности функции;

6) найти точки перегиба, а также интервалы выпуклости и вогнутости функции;

7) найти асимптоты кривой;

8) исследовать поведение функции в бесконечно отдаленных точках;

9) построить график функции с учетом результатов предыдущих исследований.

Пример 99. Исследовать функцию $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ и построить ее график.

<u>Решение:</u>

Будем придерживаться приведенной выше схемы.

1. Область существования функции – вся числовая прямая, кроме точки $x = 0$, т.е. $x \in (-\infty; 0) \bigcup (0; \infty)$.

2. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв. Определим какого он рода. Для этого найдем пределы функции в окрестности точке разрыва:

$\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = \left\{ \frac{1}{-0} \right\} = -\infty;$ $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = \left\{ \frac{1}{+0} \right\} = +\infty,$ т.е. в точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода. Во всех других точках функция непрерывная.

3. График пересекает ось ординат в точке $(0; f(x))$. Так как $x = 0$ не входит в область существования, ось ординат график не пересекает. Чтобы найти точки пересечения графика с осью абсцисс, решим уравнение $y = 0$, т.е. $\frac{3x^4 + 1}{x^3} = 0$, $3x^4 + 1 = 0$. Это уравнение действительных корней не имеет. Функция не пересекает ось *Ox*.

4. Функция непериодическая.

При исследовании функции на четность и нечетность напомним, что:

- функция четная, если $f(-x)=f(x)$. В этом случае она симметричная относительно оси ординат;

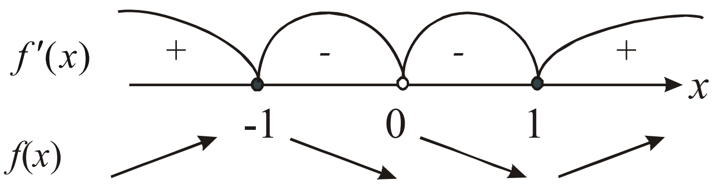
- функция нечетная, если $f(-x)=-f(x)$. Тогда она симметричная относительно начала координат.

Если не выполняются оба условия, функция является функцией общего вида. Возвратимся к заданной функции: $f(-x)=\dfrac{3(-x)^4+1}{(-x)^3}=\dfrac{3x^4+1}{-x^3}$, т.е. $f(-x)=-f(x)$ – функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

5. Найдем производную: $y'=\left(\dfrac{3x^4+1}{x^3}\right)'=\dfrac{12x^3\cdot x^3-(3x^4+1)3x^2}{(x^3)^2}=$

$$=\frac{12x^6-9x^6-3x^2}{x^6}=\frac{3x^6-3x^2}{x^6}=\frac{3x^2(x^4-1)}{x^6}=\frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^4}=$$

$=\dfrac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4}$. Решим уравнение $y'=0$, т.е. $3(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$ $\Rightarrow$ $x_1=1;\ x_2=-1$. Кроме того, производная неопределенна при $x=0$. Итак, $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=0$ – критические точки. Нанесем эти точки на числовую прямую и исследуем знак производной на каждом из полученных интервалов.

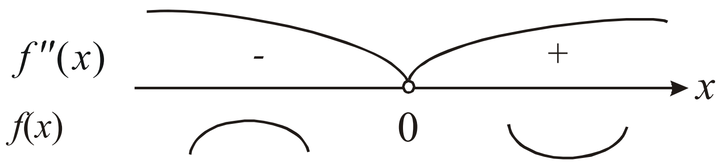


Таким образом, на интервале (–1;0) U (0;1) первая производная отрицательная и функция убывает; на интервале $(-\infty;-1)$ U $(1;\infty)$ первая производная положительна и функция возрастает. При переходе через точку $x_2=-1$ производная изменяет знак с плюса на минус, следовательно, в этой точке (т. A) существует локальный максимум, причем $y_{\max}=y(-1)=\dfrac{3(-1)^4+1}{(-1)^3}=\dfrac{3+1}{-1}=-4$.

При переходе через точку $x_1 = 1$ производная изменяет знак с минуса на плюс, т.е. в этой точке (т. В) имеем локальный минимум, $y_{\min} = y(1) = \dfrac{3(1)^4 + 1}{(1)^3} = \dfrac{3+1}{1} = 4$. В точке $x_3 = 0$ функция неопределена.

6. Найдем вторую производную: $y'' = \left(\dfrac{3(x^4 - 1)}{x^4}\right)' = \dfrac{3(4x^3x^4 - (x^4 - 1)4x^3)}{(x^4)^2} =$

$= \dfrac{3(4x^7 - 4x^7 + 4x^3)}{x^8} = \dfrac{12x^3}{x^8} = \dfrac{12}{x^5}$. Нанесем на числовую прямую точку $x = 0$, где вторая производная и самая функция не существуют.



На интервале $(-\infty;0)$ вторая производная отрицательная, поэтому кривая на этом интервале выпуклая; на интервале $(0;\infty)$ вторая производная положительна – кривая вогнута, но точка $x = 0$ не является точкой перегиба, так как в этой точке функция не существует.

7. Из пункта 2 вытекает, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты, если они существуют: $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4+1}{x^4} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{3x^4+1}{x^3} - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4+1-3x^4}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3} = \pm 0,$$ т.е.

$y = 3x$ – наклонная асимптота. Других асимптот нет.

8. Учитывая проведенные исследования, строим график (рис. 21).

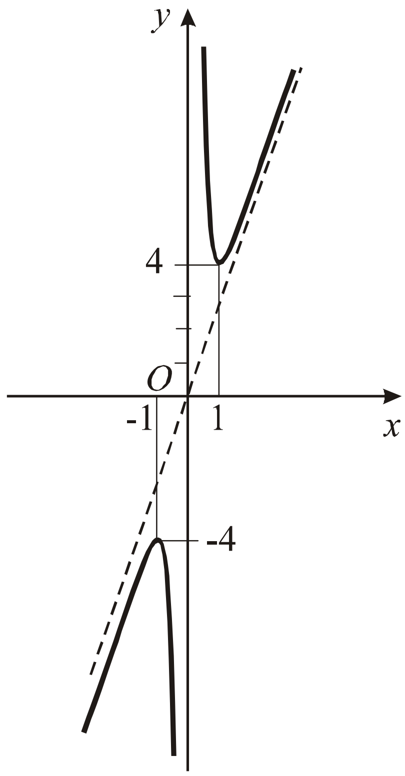


Рис. 21

Пример 100. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$ и построить ее график.

Решение:

Будем придерживаться приведенной выше схемы.

1. Область существования функции – вся числовая прямая.

2. Точек разрыва нет.

3. Точки пересечения с осями координат: если $x=0$, то $y=0$; если $y=0$, то $x=0$ или $x=2$. Итак, кривая проходит через точки $B(0;0)$ и $A(2;0)$.

4. Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида. Таким образом, симметрии нет.

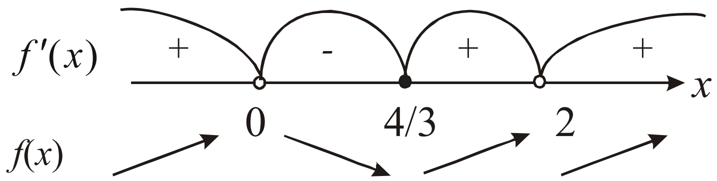
5. Найдем производную.

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}\right)'=\frac{1}{3}(x^3-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-4x)=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}}=$$

$$=\frac{x(3x-4)}{3\sqrt[3]{(x^2(x-2))^2}}=\frac{x(x-4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}.$$ Критические точки: $x=0$; $x=2$;

$x=\frac{4}{3}$ (в этих точках первая производная равняется нулю или не существует).

Нанесем эти точки на числовую прямую и исследуем знак производной на каждом из полученных интервалов.



Итак, на интервале $(-\infty;0)\bigcup(\frac{4}{3};\infty)$ первая производная положительна – функция возрастает; на интервале $(0;\frac{4}{3})$ первая производная отрицательная – функция убывает. При переходе через точку $x = 0$ производная изменяет знак с плюса на минус, итак, $x = 0$ – точка максимума, притом $y_{\max}=y(0)=0$. Поскольку при $x = 0$ первая производная не существует, то это точка острого максимума. При переходе через точку $x=\frac{4}{3}$ производная изменяет знак с минуса на плюс, итак, в этой точке существует минимум.

$$y_{\min}=y(\frac{4}{3})=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3}-2\right)}=\sqrt[3]{-\frac{32}{27}}=-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\approx-1{,}1.$$

При переходе через точку $x = 2$ производная не изменяет знак, т.е. эта точка не является точкой экстремума.

6. Найдем вторую производную.

$$y''=\left(\frac{x(x-\frac{4}{3})}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}\right)'=\left(\frac{x(x-\frac{4}{3})}{x\cdot\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\right)'=\left(\frac{x-\frac{4}{3}}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2}-(x-\frac{4}{3})\frac{1}{3}\left(x(x-2)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left((x-2)^2+2x(x-2)\right)}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2}-(x-\frac{4}{3})\frac{\left((x-2)^2+2x(x-2)\right)}{3\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}=$$

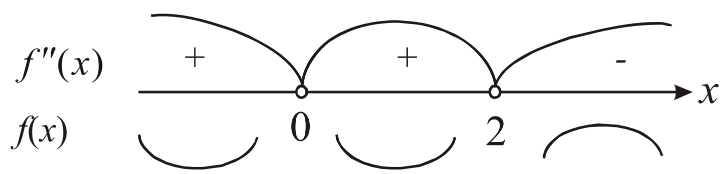
$$=\frac{3\sqrt[3]{x^3(x-2)^6}-\frac{(3x-4)\left((x-2)(x-2+2x)\right)}{3}}{3\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}=$$

$$=\frac{9\sqrt[3]{x^3(x-2)^6}-(3x-4)(x-2)(3x-2)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}=$$

$$=\frac{(x-2)(9x(x-2)-(3x-4)(3x-2))}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}=$$

$$=\frac{(x-2)(9x^2-18x-9x^2+6x+12x-8)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}=-\frac{8}{9}\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}.$$

Вторая производная не существует при $x = 0$ и $x = 2$. Итак, это критические точки второго рода. Нанесем эти точки на числовую ось.



На интервалах $(-\infty;0)\bigcup(0;2)$ вторая производная положительная, т.е. на этих интервалах кривая вогнута, на интервале $(2;\infty)$ вторая производная отрицательная – кривая выпуклая. Точка перегиба имеет координаты $(2;0)$.

7. Найдем асимптоты. Вертикальных асимптот нет. Наклонная асимптота:

$$y = kx + b; \quad k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x) = \{\infty - \infty\} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x)(\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2)}{(\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{(\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2)} = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом $y = x - \dfrac{2}{3}$ – наклонная асимптота.

8. Построим график функции (рис. 22).

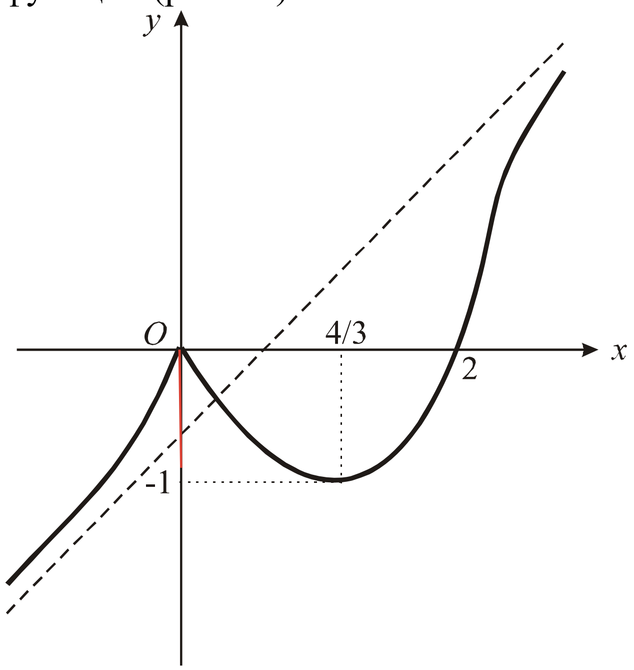


Рис. 22

VIII. ЗАДАЧИ КОНКРЕТНОГО ПЛАНА

В этом разделе покажем применение вышеприведенной теории для решения задач конкретного плана.

Пример 101. В наличии есть доски, из которых можно построить забор длиной 200 м. Надо оградить прямоугольник двора наибольшей площади, используя для одной стороны двора стенку близлежащего дома (рис. 13).

Решение:

Обозначим через x длину тех сторон забора, которые перпендикулярные к стене дома. Тогда длина стороны, которая параллельная дому, будет 200 - 2x, а площадь всего двора $S = F = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$.

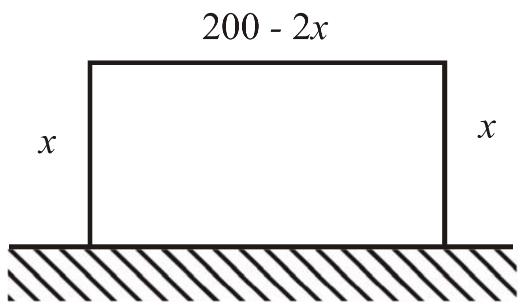


Рис. 23

Это функция аргумента x. По смыслу задачи x изменяется на отрезке [0;100]. Задача сводится к определению наибольшего значения функции на отрезке. Согласно пункту 3 главы VII находим $F' = 200 - 4x$. Полагая $F' = 0$, находим стационарную точку $200 - 4x = 0$ или $x = 50$. Так как $F'' = -4 < 0$, то здесь – максимум. Поскольку этот максимум – единственный экстремум, который лежит в интервале [0;100], то ему и отвечает $F_{наиб}$. Итак, размеры двора есть 50 г$\times$ 100 г, а площадь его 5000 м^2. Если взять другие размеры, например 45 г $\times$110 г, или 55 г $\times$90 г, то получим двор с меньшей площадью.

Пример 102. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать стояк, который имеет прямоугольное сечение и может воспринимать наибольшую нагрузку. Какими должны быть размеры стояка?

Решение:

Поскольку стояк является элементом конструкции, которая работает на сжатие, то он будет воспринимать наибольшую нагрузку тогда, когда площадь его поперечного сечения будет наибольшей. Таким образом, задача сводится к определению прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в окружность диаметром *d* (рис. 24).

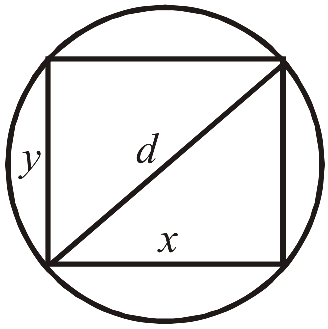


Рис. 24

Пусть *x* и *y* – стороны искомого прямоугольника. Тогда $y=\sqrt{d^2-x^2}$, тогда площадь прямоугольника $S=S(x)=x\sqrt{d^2-x^2}$, $0<x<d$, а

$$S'(x)=\sqrt{d^2-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{d^2-x^2}}=\frac{d^2-x^2-x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}.$$

$$S''(x)=\frac{-4x\sqrt{d^2-x^2}-(d^2-2x^2)\dfrac{-2x}{\sqrt{d^2-x^2}}}{d^2-x^2}=\frac{-4x(d^2-x^2)+x(d^2-2x^2)}{(d^2-x^2)\sqrt{d^2-x^2}}=$$

$$=\frac{x(2x^2-3d^2)}{(d^2-x^2)^{3/2}}.$$

$S'(x)=0$ при $x=\pm\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ и не существует при $x=\pm d$. Поскольку функция $S(x)$ определена на интервале (0;*d*), то она имеет единственную критическую точку $x=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Найдем вторую производную и определим ее знак в этой точке.

$$S''(x)=S''(\frac{d}{\sqrt{2}})=\frac{\frac{d}{\sqrt{2}}(2\frac{d^2}{2}-3d^2)}{(d^2-\frac{d^2}{2})^{3/2}}=\frac{\frac{d}{\sqrt{2}}(-2d^2)}{\left(\frac{d^2}{2}\right)^{3/2}}=-\frac{2d^3}{\sqrt{2}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{3/2}}<0.$$

Функция $S(x)$ достигает максимума в этой точке. Тогда $y=\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{2}}=\frac{d^2}{\sqrt{2}}$, а $S_{\max}=\frac{d^2}{2}$. Итак, наибольшая нагрузка воспринимает квадратный стояк со стороной сечения, равной $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Пример 103. Определить размеры консервной банки объемом *V*, при которых на ее изготовление пойдет меньше всего материала.

Решение:

Пусть банка имеет форму цилиндра с радиусом основания *r* и высотой *h*. Тогда полная поверхность банки $S=2\pi r^2+2\pi rh$. Так как объем банки известный: $V=\pi r^2 h$, то $h=\frac{V}{\pi r^2}$, а $S=S(r)=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2(\pi r^2+\frac{V}{r})$. Найдем наименьшее значение функции $S(r)$:

$\frac{dS}{dr}=2(2\pi r-\frac{V}{r^2})=2(\frac{2\pi r^3-V}{r^2})$. $\frac{dS}{dr}=0$ при $2\pi r^3-V=0$, т.е. точка экстремума: $r=r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Определим вторую производную. $\frac{d^2S}{dr^2}=2(2\pi+\frac{2V}{r^3})$. При $r=r_0$

$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_0}=2(2\pi+\frac{2V}{r_0^3})=2(2\pi+\frac{2V2\pi}{V})=12\pi>0$. Итак, при значении $r=r_0$ функция $S(r)$ имеет минимум. Это значение наименьшее на промежутке $(0;\infty)$, поскольку $\lim\limits_{r\to 0}S(r)=\infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty}S(r)=\infty$. Вычислим высоту $h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{2\pi r^3}{\pi r^2}=2r$.

Таким образом, для того чтобы при заданном объеме цилиндра банка имела наименьшую поверхность, ее высота должна равнять диаметру.

Пример 104. Сосуд с вертикальной стенкой высотой h стоит на горизонтальный плоскости (рис. 25). На какой глубине надо проделать отверстие, чтобы дальность вылета воды из отверстия была наибольшей (скорость жидкости, которая выливается по закону Торричелли, равняется $\sqrt{2gx}$, где x – глубина размещения отверстия; g – ускорение свободного падения)?

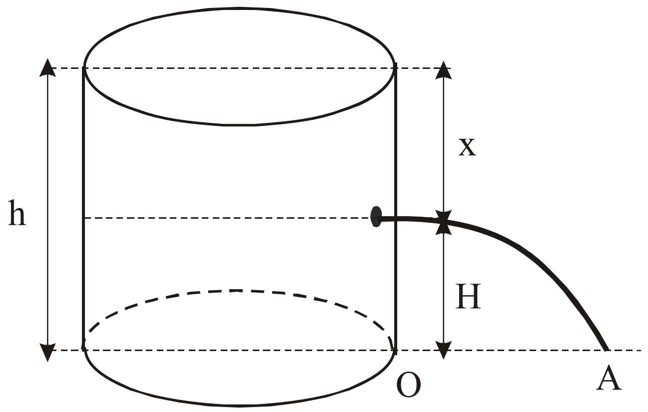


Рис. 25

Решение:

Обозначим через H расстояние отверстия в сосуде от горизонтальной плоскости, а через l - ее дальность вылета. Тогда $l = vt = \sqrt{2gx}\,t$, где t – время вылета воды из отверстия на плоскость. Из курса физики известно, что $H = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$, т.е. $l = l(x) = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}$, $0 < x < h$. Найдем наибольшее значение функции $l(x)$: $l'(x) = \frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$, $l'(x) = 0$ при $x = \frac{h}{2}$. Поскольку функция $l(x)$ имеет только одну критическую точку $x = \frac{h}{2}$, а по условию задачи существует такое положение отверстия, при котором дальность вылета воды из отверстия наибольшая, то эта критическая точка и есть искомой.

Пример 105. Пусть электрическая лампочка движется вдоль вертикальной прямой OB (рис. 26). На какой высоте от горизонтальной плоскости надо разместить лампочку, чтобы в данной точке A плоскости ($OA = a$) освещенность была наибольшей.

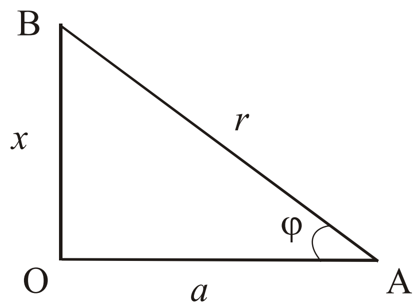


Рис. 26

Решение:

Из физики известно, что освещенность определяется как: $I = k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$,

где k - коэффициент пропорциональности, который зависит от силы света лампочки; r - BA - расстояние от лампочки до точки A. Пусть искомая высота OB $= x$, тогда $\sin\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, а $I = I(x) = k\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} = \; = \dfrac{kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, причем по смыслу задачи $x \in (0;\infty)$.

Имеем

$$I'(x) = \frac{k(x^2+a^2)^{3/2} - kx\dfrac{3}{2}(x^2+a^2)^{1/2}2x}{(x^2+a^2)^3} = \frac{k(x^2+a^2)^{1/2}(x^2+a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^3} =$$

$$= \frac{k(a^2-2x^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}}. \quad I'(x) = 0 \text{ при } x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Других критических точек функция $I(x)$ не имеет. Поскольку в интервале $(0;\infty)$ лежит лишь одна критическая точка $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и по условию задачи существует положение лампочки, при котором освещенность в точке A наибольшая, то искомая высота $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Задания

194. Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $S = \ln(1+t^2)$. Найти кинетическую энергию тела через 2 сек. после начала движения.

195. Число 18 разбить на две такие составные части, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

196. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

197. Окно имеет форму прямоугольника, который завершается полукружием. Периметр окна равняется Р. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

Ответы

194. 10 Дж; 195. $a = 9, b = 9$; 196. $a = \sqrt[3]{64}, h = 2\,\text{м}$;

197. $a = \dfrac{P}{2(1-\frac{\pi}{4})}, b = \dfrac{1}{2}\left(P - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{P}{2(1-\frac{\pi}{4})} - \dfrac{P}{1-\frac{\pi}{4}}\right)$.

IX. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

<u>Вариант 1</u>

Найти производные заданных функций:

1. $y = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$;

2. $y = \sqrt{1 + 2tg\sqrt{x}}$;

3. $y = \cos\dfrac{x}{3}(1+\sin^2 3x)^{-1}$;

4. $y = (\cos x)^{\sin 2x}$;

5. $y^2 - 2xy + x^2$;

6. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = 1/t^2 \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \frac{4x - x^2}{4}$, $x_0 = 2$; 2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$; 3. $\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 4 - x - \frac{4}{x^2}; \quad x \in [1;4].$$

Найти экстремумы функции: $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{8}{x^2 - 4}$.

Решить задачу: тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $S = \ln(1 + t^2)$. Найти кинетическую энергию тела через 2 сек. после начала движения.

Вариант 2

Найти производные заданных функций:

1. $y = \frac{3x^2 + 1}{(x+1)^2}$;

2. $y = \ln(x^2 - 4x) + ctg^9 \frac{x}{5}$;

3. $y = \cos^3 \frac{x}{5} (arcctg 3x^5)^6$;

4. $y = (x^5)^{\sin 2x}$;

5. $\cos(xy) = x$;

6. $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = x - x^3, \; x_0 = -1$; 2. $x^2 + y^2 - xy = 3,$ $x_0 = 1$; 3. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), t_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1; \quad x \in [0;6].$$

Найти экстремумы функции: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Решить задачу: тело движется прямолинейно со скоростью $V = \sqrt[3]{1+t}$. Найти путь, который тело прошло за первые 7 мин.

Вариант 3

Найти производные заданных функций:

1. $y = (\sqrt{x}+1)(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1);$
2. $y = \sin 2x - \dfrac{1}{3}\cos^3 \dfrac{x}{2};$
3. $y = \ln^2(x + \cos x) - \dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x};$
4. $y = (x+1)^{ctg\sqrt{x}};$
5. $y^3 - 3axy + x^3;$
6. $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \; x_0 = 4;$
2. $x^2 + y^2 + xy = 6, \; x_0 = 0;$
3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 2\sqrt{x} - x; \quad x \in [0;4].$$

Найти экстремумы функции: $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{8}{16 - x^2}$.

Решить задачу: число 18 разбить на две такие составные части, чтобы сума их квадратов была наименьшей.

Вариант 4

Найти производные заданных функций:

1. $y = \sin^3(2x+3) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - tgx^3;$

2. $y = e^{\arccos 6x^2} \cdot \ln^4(\sin\sqrt{2x});$

3. $y = \dfrac{\sqrt[5]{arctg 2^{4x}}}{\sin^3(3x^2)};$

4. $y = (arctg^2 2x^3)^{\sin^2 8x};$

5. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0;$

6. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1;$

2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x_0 = \dfrac{a}{8};$

3. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3, t_0 = 1 \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = -3x^4 + 6x^2; \quad x \in [-2;2].$$

Найти экстремумы функции: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}.$

Исследовать функцию и построить график: $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}.$

Решить задачу: тело движется прямолинейно по закону $S = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

Вариант 5

Найти производные заданных функций:

1. $y = \sin(\cos^2(tg^3 x)) + 2^{tg 2x} - (2x^3+5)^4;$

2. $y = 5\sqrt[3]{\arccos 6x^4} \cdot 5^{tg^3 e^{x^2}};$

3. $y=\dfrac{\ln^4(\sin^3 2x^2)}{arctg(e^{2x})}$;

4. $y=(arcctg^3 x^3)^{\sin\sqrt{\ln x^5}}$;

5. $x^{y^2}+y^2\ln x-4=0$;

6. $\begin{cases} x=a\cos t\sqrt{2\cos 2t} \\ y=a\sin t\sqrt{2\cos 2t} \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{3x-2x^3}{3}$, $x_0=3$;

2. $3x-x^2+y+2y^2=0,$ $x_0=3$;

3. $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2 \end{cases}$, $t_0=-2$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=x^4-8x^2+3;\quad x\in[-1;2].$$

Найти экстремумы функции: $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y=-\dfrac{4x}{x^2+4}$.

Решить задачу: движение двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $S_1=3t^2+4t-1$ и $S_2=4t^2+2$. Найти скорости движения точек в тот момент времени, когда пройденные ими расстояния равны между собою.

Вариант 6

Найти производные заданных функций:

1. $y=arctg\dfrac{\ln x}{3}+e^{x^3}-\arcsin e^{5x}-\ln\sqrt{e^{7x}}$;

2. $y=e^{\sqrt{2x}}\cdot(\sqrt{3x^2-1})^3$;

3. $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}+(\dfrac{\sin 3x}{1+\cos 3x})^2$;

4. $y=x^{x^2}$;

5. $y^3-x^3-3xy+tg\dfrac{x}{y}=0$;

6. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{1}{3x+2}, \quad x_0=2;$ 2. $\begin{array}{l} x^2+3y-2x^3y=1, \\ x_0=1 \end{array};$ 3. $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t} \\ y=\dfrac{t-1}{t} \quad , t_0=-1 \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}; \quad x\in[-1;5].$$

Найти экстремумы функции: $y=x+\sqrt{3-x}.$

Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}.$

Решить задачу: Движение двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $S_1=2t^3-3t^2-11t+7$ та $S_2=2t^3-5t^2-3t.$ Найти ускорения точек в тот момент времени, когда скорости их равны между собой.

Вариант 7

Найти производные заданных функций:

1. $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos^2 x}+\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos 2x}-\dfrac{1}{2}tg^2\sqrt{e^{7x}};$ 2. $y=\sin(\ln\dfrac{x}{4})\cdot\cos(ctg\dfrac{x^2}{5});$

3. $y=\dfrac{\arccos(2e^{2x}-1)}{arctg\sqrt[3]{2x^2+3x}};$ 4. $y=(\sin^2 5x)^{tg 3x};$

5. $e^x+e^y-2^{xy^2}-1=0;$ 6. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin 3t \\ y=\sin t-t\cos 2t \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0=1;$ 2. $\begin{array}{l} e^{-3x}+e^{xy}-2y=0, \\ x_0=0 \end{array};$ 3. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin t \quad , t_0=\pi/4 \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=\frac{10x}{1+x^2}; \quad x\in[0;3].$$

Найти экстремумы функции: $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

Решить задачу: тело движется прямолинейно по закону $X = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Найти скорость и ускорение движения. В какой момент времени тело изменяет направление движения ?

Вариант 8

Найти производные заданных функций:

1. $y = \ln\dfrac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{\sin 3x}}} + e^{\sin^2 x}\ln\cos\dfrac{1}{x}$;
2. $y = \arcsin\dfrac{2x}{3} - \sqrt[4]{x - tgx^4}$;
3. $y = 4arctg(\cos x^3) - \cos^2 3x^5$;
4. $y = (\ln 3x)^{tg 2x^3}$;
5. $\sin xy + \cos xy = tg(x+y)$;
6. $\begin{cases} x = (1+t^3)/(t^2-1) \\ y = t/(t^2-1) \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \sqrt[4]{x} - 70,\ x_0 = 16$;
2. $x^3 + y^3 - 3xy = 1$, $x_0 = 0$;
3. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 1\sin t) \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \\ t_0 = \pi/4 \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}; \quad x \in [-1;2].$$

Найти экстремумы функции: $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = -15 + 8x + 4/x^2$

Решить задачу: определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^2 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Вариант 9

Найти производные заданных функций:

1. $y = \ln^3 \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} + 2e^{\cos^2 5x}$;
2. $y = 3^{arctg 3x} - \sqrt[4]{\ln 7x - ctg x^5}$;
3. $y = (4tg(\sin x^3) \quad \arccos^2 x/2)^4$;
4. $y = (2x)^{\sin\sqrt{5x-3}}$;
5. $y = 2^{\arcsin 3y} + (1-\arccos 3x)^2$;
6. $\begin{cases} x = e^{2t} + t^5 \\ y = e^{-t} - t^2/3 \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, x_0 = 3$; 2. $x^2 + 2y^2 = 36, x_0 = 2$ 3. $\begin{cases} x = 3at/1+t^2 \\ y = 3at/1+t^2, t_0 = 2 \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}; \quad x \in [-1;6].$$

Найти экстремумы функции: $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = x^4/x^3 - 1$.

Решить задачу: Заданы точки А (0;3) и В (4;5). На оси ОХ найти точку М такую, чтобы расстояние $S = |AM| + |MB|$ было наименьшим.

Вариант 10

Найти производные заданных функций:

1. $y = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} + \dfrac{3}{(x+1)^3} - 5^{\sin^5 2x}$;
2. $y = (\ln\arccos\sqrt{4x+1} + \sin\ln x/2)^2$
3. $y = \cos^3(x/2) \quad e^{arctg\sqrt{x^2-1}}$
4. $y = (\sin^3 x^2)^{2arcctg\, x/2}$;

5. $6x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0;$

6. $\begin{cases} x = 3\cos t^2 + t/3 \\ y = 3\sin t^2 - t/2 \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, x_0 = 2;$ 2. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = -3,$ $y_0 = 0;$ 3. $\begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^4 \\ y = (1/2)t^2 + (1/3)t^3 \\ t_0 = 0 \end{cases},.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}; \quad x \in [1;4].$$

Найти экстремумы функции: $y = x - \dfrac{2}{x}.$

Исследовать функцию и построить график: $y = 10x/(1 + x^2).$

Решить задачу: при каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка объемом V будет иметь наименьшую полную поверхность?

Вариант 11

Найти производные заданных функций:

1. $y = -\dfrac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{\cos 2x}}};$

2. $y = (tg^7 2x - \sqrt{4\ln x^3 + 5x} + \sin(x/2))^5;$

3. $y = \arccos^3(2/x) \quad e^{arctg \sin 3x};$

4. $y = (\ln(x^2 + 2))^{\cos^2 4x};$

5. $y = arcctg \ln 2x + 6\sin xy^2;$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = (t - 1)/\sqrt{t^2 + 1} \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, x_0 = 1;$ 2. $x^2 + 4y^2 = 16, x_0 = 4;$ 3. $\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t, t_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = x - 4\sqrt{x+2} - 8; \quad x \in [-1;7].$$

Найти экстремумы функции: $y = x + \dfrac{4}{x^2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = 2x/(1+x^2)$.

Решить задачу: окно имеет форму прямоугольника, который оканчивается полукругом. Периметр окна равен Р. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

<u>Вариант 12</u>

Найти производные заданных функций:

1. $y = -\dfrac{arctg^3\sqrt{3x}}{\sin^4(2x-1)}$;

2. $y = 2^{\arcsin 3x} + \sqrt[4]{2\cos 5x - \ln x^2}$;

3. $y = \ln\dfrac{x^2+3}{2x} \quad e^{\sin^2 3x}$

4. $y = (\arccos 5x)^{\cos^2 3x}$;

5. $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{y^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$;

6. $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = 2x + \dfrac{1}{x}, x_0 = 1$;

2. $x^3 + y^2 + 2x = 6,$ $x_0 = -1;$

3. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t, t_0 = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}; \quad x \in [1;5].$$

Найти экстремумы функции: $y = (1-x^2)^3$.

Исследовать функцию и построить график: $y = (x-1)/x^2$.

Решить задачу: Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени t = 5с.

Вариант 13

Найти производные заданных функций:

1. $y=\dfrac{\sin^3\sqrt{4x}}{\cos^4(5x-6)}-\ln\arcsin 8x^6+2^{2x^2}$; 2. $y=(6^{\ln x^4}+\sqrt[4]{arctg5x-e^{2x}})^6$;

3. $y=\cos\dfrac{3x^2+tgx}{x^4}\quad e^{-\sin^2 3x^6}$ 4. $y=(\sin^2 5x)^{arcctg\,x/4}$;

5. $y=2^{\arcsin 3y}+(1-\arccos 3x)^2$; 6. $\begin{cases}x=2^{t-1}\\ y=4(t^3+1)\end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=-\dfrac{2(x^8+2)}{3(x^4+1)}, x_0=1$; 2. $x^2+y^2-2xy=4,$ $x_0=1$; 3. $\begin{cases}x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}\\ y=\dfrac{3+2\ln t}{t}, t_0=1\end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=4x\big/(4+x^2);\quad x\in[-4;2].$$

Найти экстремумы функции: $y=x^3/(x-2)(x+3)$.

Исследовать функцию и построить график: $y=(x^2-x-6)\big/x-2$.

Решить задачу: найти ускорение точки, которая совершает простые гармонические колебания по закону $S=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Вариант 14

Найти производные заданных функций:

1. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; 2. $y=(6^{\sin 2x^5}+arctge^{\cos 2x-4})^7$;

3. $y=\dfrac{1}{8}\arccos\dfrac{3+tg2x}{2-\ln x^3}\quad e^{3x^8-ctgx^5}$ 4. $y=(x^2-1)^{\cos^5 x}$;

5. $2y^3+3\sqrt{xy}=x$; 6. $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=(t-arctgt)\end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}, x_0=1;$ 2. $e^y-e^x+xy=0,$ $x_0=0;$ 3. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^2} \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}, t_0=2 \end{cases}.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8; \quad x\in[-4;-1].$$

Найти экстремумы функции: $y=(x^2+x+2)(x^2+x-2).$

Исследовать функцию и построить график: $y=x^4-2x^2+3.$

Решить задачу: необходимо сделать цилиндрический сосуд заданного объема V, открытый сверху. Определить его радиус и высоту так, чтобы поверхность его была наименьшей.

Вариант 15

Найти производные заданных функций:

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}-4\sqrt[3]{e^{2x}+2^{3x}};$ 2. $y=(6^{\cos 2x}+arcctg\ln x^5)^3;$

3. $y=\arcsin tg\dfrac{1}{x} \quad \sin 2x^4$ 4. $y=(\sin^2 x)^{\cos 7x};$

5. $xe^{-\frac{y}{2}}+ye^{-\frac{x}{2}}=2;$ 6. $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t^2+2t \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, \ x_0=1;$ 2. $y^2+\ln(xy)=1,$ $x_0=1;$ 3. $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t) \\ y=a(\sin t-t\cos t),. \\ t_0=2 \end{cases}$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)};\quad x\in[-2;4].$$

Найти экстремумы функции: $y=(x^2+1)/(x-1)^2$.

Исследовать функцию и построить график: $y=4x^3/(x^3-1)$.

Решить задачу: необходимо изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Вариант 16

Найти производные заданных функций:

1. $y=x\cdot\arcsin^2 5x-\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{x^2+1}};$
2. $y=(2^{\arccos 5x}+\ln e^{5\sin^2 x})^3;$
3. $y=\ln^2\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\cos x}-x^2}$
4. $y=(arctg 2x)^{\sin^3(3x^2+2)};$
5. $y=\ln\sqrt{\sin x}+2arctg\sqrt{\cos y};$
6. $\begin{cases}x=\ln(t+1)\\ y=t^2+2t\end{cases},\quad \dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{1}{3x+2},\ x_0=2;$
2. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1, y_0=3;$
3. $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3,.\\ t_0=2\end{cases}$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=-\frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5};\quad x\in[-2;1].$$

Найти экстремумы функции: $y=2x^2/(1-x^2)$.

Исследовать функцию и построить график: $y=-x^3/(x^2-1)$.

Решить задачу: Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром 2P имеет наибольшую площадь ?

Вариант 17

Найти производные заданных функций:

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$;

2. $y=\ln^4(\sqrt{1+2^{5x^2}}+e^{\cos x^2})$;

3. $y=\dfrac{\sqrt[5]{ctg\,2x}\cdot\cos^2 18x}{35\sin 18x^4}$

4. $y=(\sin^3 3x)^{\ln^2(8x+2)}$;

5. $y=\ln\arcsin x-\cos^2 y+arctg\ln x$;

6. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}),\ x_0=1$; 2. $x^2+3y-2x^3y=1,\ x_0=1$; 3. $\begin{cases} x=(t+1)/t \\ y=(t-1)/t, \\ t_0=2 \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5};\quad x\in[-5;1].$$

Найти экстремумы функции: $y=x^2/(x^3-4)$.

Исследовать функцию и построить график: $y=x/(x^2+1)$.

Решить задачу: какие размеры должен иметь цилиндр, поверхность которого равна S, чтобы его объем был наибольший?

Вариант 18

Найти производные заданных функций:

1. $y=(arctg^3 5x-2\cos^7 2x^3)^{10}$;

2. $y=5\ln^4(\sin 2x^2)\cdot 4^{-\arccos 8x^2}$;

3. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x^3-1}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{3x^2+7}}$;

4. $y=(\ln^8 3x)^{\arccos 5x^2}$;

5. $y = x^3 - x^y$;

6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t} \\ y = (\dfrac{t}{1+t})^2 \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{x}{x^2+1}, \ x_0 = -2$;

2. $x^2 + 2x - y^2 = 0, \ x_0 = 1$;

3. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt, . \\ t_0 = 1 \end{cases}$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}; \quad x \in [0;4].$$

Найти экстремумы функции: $y = x^2 / (x-2)$.

Исследовать функцию и построить график: $y = 8/(16 - x^2)$.

Решить задачу: определить размеры открытого бассейна с квадратним дном так, чтобы при заданной общей площади 147 м^2 его стен и дна объем бассейна был наибольшим.

Вариант 19

Найти производные заданных функций:

1. $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x + 1}$;

2. $y = \sqrt{1 + 2tg\sqrt{x}}$;

3. $y = \cos x (1 + \sin^3 \dfrac{x}{3})^{-1}$;

4. $y = (\cos 3x)^{2\sin x}$;

5. $y^3 - 3xy - x^2$;

6. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = 1/3t^3 \end{cases}, \quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=\dfrac{x^2+4x}{4}$, $x_0=2$; 2. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\quad x_0=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; 3. $\begin{cases} x=a\sin^3 2t \\ y=a\cos^3 2t, \quad t_0=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=4+x+\frac{4}{x^2};\quad x\in[1;4].$$

Найти экстремумы функции: $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{3}{x^2-9}$.

Решить задачу: тело массой 15 кг движется прямолинейно по закону $S=\ln(1+2t^3)$. Найти кинетическую энергию тела через 1 сек. после начала движения.

Вариант 20

Найти производные заданных функций:

1. $y=\dfrac{2x^3+1}{(x+4)^2}$;
2. $y=\ln(x^2-4x)+ctg^9\dfrac{x}{5}$;
3. $y=\cos^2\dfrac{x}{7}(arcctg 8x^6)^4$;
4. $y=(x^5)^{\sin 2x}$;
5. $\cos(xy^2)=5x^3$;
6. $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\ln(1+5t^3)\end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=2x^3-9$, $x_0=-1$ 2. $x^2-y^2-2xy=3$, $x_0=1$; 3. $\begin{cases} x=a(t+\sin t) \\ y=a(t-\cos t), \; t_0=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=\sqrt{2(x-2)^{33}(8-x)}-1;\quad x\in[0;13].$$

Найти экстремумы функции: $y=\dfrac{3x}{x^2-1}$.

Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{5x^2}{x+5}$.

Решить задачу: тело движется со скоростью $V=\sqrt{1+5t}$. Найти путь, который тело прошло за первые 5 минут.

Вариант 21

Найти производные заданных функций:

1. $y=(\sqrt[3]{x}+1)(\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}-1)$; 2. $y=\sin^2 3x+\dfrac{1}{4}\cos^3\dfrac{x}{2}$;

3. $y=\ln^3(2x+3\cos x)-\dfrac{\cos^2 5x}{4\sin 20x}$; 4. $y=(x^2+1)^{tg\sqrt{x}}$;

5. $2y^2-3ax^2y+x^3$; 6. $\begin{cases}x=2t^3+2\\ y=t^2-3t\end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=x^2-2\sqrt{x}-32,$ $x_0=2$; 2. $x^2+3y^3+x^2y=6,$ $x_0=0$; 3. $\begin{cases}x=\sqrt{3}\sin t\\ y=\cos 2t,\quad t_0=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=2x-3x^2;\quad x\in[0;4].$$

Найти экстремумы функции: $y=3x^2-\dfrac{1}{x}$.

Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{3}{x^3-8}$.

Решить задачу: число 25 разбить на две такие составные части, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Вариант 22

Найти производные заданных функций:

1. $y=\sin^2(3x+5)-\ln^3(3x+\sqrt{x^2+1})$; 2. $y=e^{\arcsin 6x^3}\cdot\ln^2(\sin\sqrt{3x})$;

3. $y=\dfrac{\sqrt[5]{arctg 3^{6x}}}{\sin^4(3x^4)}$;

4. $y=(arctg^2 2x^3)^{\sin^2 8x}$;

5. $\dfrac{y}{x^2}+2e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y^3}{x}}=0$;

6. $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+2t^2}}{t} \\ y=\dfrac{3t}{\sqrt{1+2t^2}} \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y=x^2+2\sqrt{x^3}$, $x_0=1$;
2. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;
3. $\begin{cases} x=2t-2t^2 \\ y=t-3t^3,\ t_0=1 \end{cases}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=-x^2+2x;\quad x\in[-2;2].$$

Найти экстремумы функции: $y=\dfrac{x^2-4}{2x^3}$.

Исследовать функцию и построить график: $y=-\dfrac{3(x^2-3)}{x^2+x-6}$.

Решить задачу: тело движется прямолинейно по закону $S=6-t+12t^2-0{,}5t^4$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

<u>Вариант 23</u>

Найти производные заданных функций:

1. $y=\sin^2(\cos(tg^4 2x))-(3x^3+2)^4$;

2. $y=5\sqrt[3]{\arccos 2x^3}\cdot 5^{tg^2 e^{3x^2}}$;

3. $y=\dfrac{\ln^3(\sin^3 4x^2)}{arctg(e^{3x})}$;

4. $y=(arcctg^2 3x^3)^{\sin^2\sqrt{\ln x^5}}$;

5. $x^y+y^2\ln^3 2x-4=0$;

6. $\begin{cases} x=a\cos 3t\sqrt{2\cos t} \\ y=a\sin 2t\sqrt{\cos 2t} \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}-?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{2x^2 - 3x^3}{5}$, ; $x_0 = 3$ 2. $2x - 3x^2 + y - 2y^2 = 0$, ; $x_0 = 3$ 3. $\begin{cases} x = 2t^3 + t \\ y = 3t^2 \end{cases}$, $t_0 = -2$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 2x^3 - 8x^2 + 10x; \quad x \in [-1;2].$$

Найти экстремумы функции: $y = \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x - 2}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = -\dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

Решить задачу: движение двух материальных точек вдоль одной прямой задано уравнениями $S_1 = 2t^3 + 3t - 1$ и $S_2 = 4t^3 + 2t^2$. Найти скорости движения точек в момент времени, когда пройденные ими расстояния равны между собой.

Вариант 24

Найти производные заданных функций:

1. $y = arctg\dfrac{\ln x}{2} + \arcsin e^{3x} - \ln\sqrt{e^{4x}}$; 2. $y = e^{\sqrt{2x}} \cdot (\sqrt{3x^2 - 1})^3$;

3. $y = \ln\dfrac{x^6}{x^6 + 2} + (\dfrac{\sin 4x}{1 + \cos 4x})^3$; 4. $y = x^{x^2}$;

5. $y^3 - 2x^2 - 3x^2 y + tg\dfrac{x}{3y} = 0$; 6. $\begin{cases} x = a\cos^3 2t \\ y = a\sin^2 5t \end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx} - ?$

Написать уравнения касательной и нормали к данным кривым в указанных точках:

1. $y = \dfrac{1}{2x - 3}$, ; $x_0 = 2$ 2. $x^3 + 2y - 2xy^2 = 1$, ; $x_0 = 1$ 3. $\begin{cases} x = \dfrac{t + 1}{2t} \\ y = \dfrac{t - 1}{t} \end{cases}$, $t_0 = -1$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 1 + \sqrt[3]{2(x + 5)^2(x + 4)}; \quad x \in [-1;5].$$

Найти экстремумы функции: $y = x + \sqrt[3]{2 - x}$.

Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^3 - 8}{3x^2}$.

Решить задачу: движение двух материальных точек вдоль одной прямой задано уравнениями $S_1 = t^3 - 3t^2 - 9t + 7$ та $S_2 = 2t^3 + 6t^2 - 3t$. Найти ускорения точек в момент времени, когда скорости их равны между собой.

Список литературы

1. Овчинников П. П. Высшая математика. ч.1. – К.: Техника, 2003. - 598 с.
2. Гаврильченко Х. И. Высшая математика. Сборник задач. ч.1. – К.: Техника, 2004. - 280 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т.1, - М.: Наука, 1972. - 576 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - Г.: Наука, 1985. - 384 с.

Сдвижкова Олена Олександрівна
Бабець Дмитро Володимирович
Тимченко Світлана Євгенівна
Подольська Світлана Миколаївна
Бондаренко Зоя Іванівна
Клименко Діна Володимирівна

ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

слухачам підготовчого відділення для іноземних громадян

(Російською мовою)

Видано за редакцією авторів.

Підп. до друку 09.07.2013 р. Формат 30 × 42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,0.
Обл.-вид.арк. 5,0. Тираж 200 пр. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.