УДК 622.013.2

Шаповал В.Г. д.т.н., проф. каф. СГГМ, Прошин С.Л., асп. каф. СГГМ, Трофимец Р.О., Высторοп Е.С., студ. гр. ПБм-13-1, Государственный ВУЗ «НГУ», Днепропетровск, Украина

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНДАМЕНТА С РАСПОЛОЖЕННОЙ НА НЁМ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА-ФУССА

В промышленном строительстве широкое применение получили массивные фундаменты под машины с динамическими нагрузками из-за универсальности и простоты.

Вместе с тем, такие фундаменты отличаются высокой материалоемкостью и далеко не лучшей способностью к восприятию динамических нагрузок.

Наиболее эффективными с точки зрения динамики являются плитные фундаменты под машины. Однако плиты обладают повышенной деформативностъю. Это не удовлетворяет ряду технологических требований при монтаже машин, а ограничение размеров в плане не позволяет полностью реализовать их преимущества. Поэтому плитные фундаменты и не столько распространены.

В настоящее время появились новые конструкции фундаментов, а именно массивно-плитные фундаменты, конструктивное решение которых позволяет использовать все преимущества плитных фундаментов, в особенности как фундаментов под машины и оборудование [1]. Расчет таких конструкций требует определения амплитудно-частотных характеристик колебаний фундаментной плиты.

Анализ последних исследований и публикаций показал, что решение проблемы расчета фундаментной плиты сводится к решению задачи о вынужденных стационарных колебаниях бесконечной плиты. Решение данной задачи, полученное в работе [1], содержит в себе некоторые неточности, нашедшие частичное решение в работе [2]. Однако, проблема расчета, находящихся под динамической нагрузкой массивно-плитных фундаментов под машины и оборудование, остается актуальной и требует своего решения.

Цель исследований – аналитическое решение задачи о вынужденных стационарных колебаниях и вывод формул для определения прогибов бесконечной плиты на упругом основании Винклера-Фусса, с учетом расположенной на ней точечной массы.

Задача исследований была сформулирована следующим образом. Упругие свойства грунтового основания описываются с использованием коэффициента постели *C*. Плита неограниченных размеров имеет толщину h, а плотность ее материала равна ρ. В центре плиты приложена вертикальная сосредоточенная сила *P*, которая совершает гармонические колебания с частотой ω, и масса *M*. Требуется определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний плиты W в точке с координатой r от времени t.

Изложение основного материала исследования.

Согласно [3, 5, 6] зависимость перемещения гладкой плиты, с расположенной в ее центре массой М, от времени t в точке с координатой r в полярной системе координат имеет вид:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 W + CW + \rho h\frac{d^2W}{dt^2} = P\frac{\delta(r)}{2\pi r}\cdot e^{i\omega t} - M\frac{\delta(r)}{2\pi r}\cdot\frac{d^2}{dt^2}W_0 \quad (1)$$

Здесь, $\delta(r)$ - дельта-функция Дирака [3].

Решение дифференциального уравнения (1), для нахождения прогиба плиты *W*, ищем в виде

$$W = e^{i\omega t}\int_0^\infty A(\alpha)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha, \quad (2)$$

где $A(\alpha)$ – подлежащая определению функция параметра α, а $J_0(\alpha\cdot r)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [3].

Запишем выражение (1) в виде:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)W + CW - \omega^2\rho hW = P\frac{\delta(r)}{2\pi r} + \omega^2 M\frac{\delta(r)}{2\pi r}W_0 \quad (3)$$

С учетом (2), рассмотрим составляющие правой части выражения (3):

$$\left.\begin{aligned} P\frac{\delta(r)}{2\pi r} &= \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)d\alpha \\ \omega^2 M\frac{\delta(r)}{2\pi r}W_0 &= \omega^2 M\frac{W_0}{2\pi}\int_0^\infty \alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и получим:

$$\int_0^\infty\left\{(D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2)A(\alpha) - \frac{P - W_0M\omega^2}{2\pi}\alpha\right\}J_0(\alpha\cdot r)d\alpha = 0 \quad (5)$$

Из (5) необходимо выразить искомую функцию $A(\alpha)$. Тогда получим

$$A(\alpha) = \frac{P - W_0M\omega^2}{2\pi}\alpha\cdot\frac{1}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2} \quad (6)$$

Подставив (6) в (2), получим выражение

$$W(r)=\frac{P-W_0M\omega^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\cdot r)d\alpha}{D\alpha^4+C-h\rho\omega^2} \tag{7}$$

Найдем предел выражения (7) при r=0

$$\lim_{r=0} W(r)=\frac{P-W_0M\omega^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{D\alpha^4+C-h\rho\omega^2} \tag{8}$$

Тогда выражение прогиба в точке r=0 имеет вид

$$W_0=\frac{P-W_0M\omega^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\cdot r)d\alpha}{D\alpha^4+C-h\rho\omega^2} \tag{9}$$

Обозначим

$$\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\cdot r)d\alpha}{D\alpha^4+C-h\rho\omega^2}=I \tag{10}$$

при этом $J_0(\alpha\cdot r)=1$.

Подставив (10) в (9), получим

$$W_0=\frac{P-W_0M\omega^2}{2\pi}\cdot I \tag{11}$$

Приведем выражение (11) к виду

$$W_0=\frac{P}{1+\dfrac{M\omega^2}{2\pi}\cdot I} \tag{12}$$

Далее найдем решение интеграла (10):

$$I=\int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{D\alpha^4+C-h\rho\omega^2}=\frac{1}{D}\int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4+\dfrac{C-h\rho\omega^2}{D}}=$$
$$=\frac{1}{D}\int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4+a^4}=\frac{1}{D}\cdot\frac{\pi}{4a^2} \tag{13}$$

где

$$a=\sqrt[4]{\frac{C-h\rho\omega^2}{D}} \tag{14}$$

Подставив (13) в (11), получим

$$W_0 = \frac{P - W_0 M\omega^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4Da^2} \tag{15}$$

Преобразуя выражение (15) получим

$$W_0 = \frac{P}{2\pi\left(1 + \frac{M\omega^2}{8Da^2}\right)} = \frac{8PDa^2}{2\pi\left(8Da^2 + M\omega^2\right)} \tag{16}$$

Подставим полученное выражение (16) в (7). Тогда

$$W(r) = \frac{P}{2\pi D}\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r)d\alpha}{\alpha^4 + a^4} \tag{17}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{\zeta}{r}; \quad \zeta = \alpha r \\ &d\alpha = \frac{d\zeta}{dr} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и подставим (18) в (17)

$$W(r) = \frac{P \cdot r^4}{2\pi D}\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)\int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a^4 r^4} \tag{19}$$

Обозначим

$$a_1 = a \cdot r^4 \tag{20}$$

тогда

$$W^* = \frac{2\pi DW}{\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a_1^4} \tag{21}$$

Выражение (19) представляет собой искомую зависимость прогиба плиты от координаты и времени, тогда как выражение (21) есть зависимость относительного прогиба от параметра *a*, где *a* определяется выражением (14)**.**

Таким образом, в ходе исследований, проведенных в настоящей работе, было получено аналитическое решение о вынужденных стационарных колебаниях гладкой бесконечной плиты, с расположенной на ней точечной массой, представляющее собой зависимость амплитуды данных колебаний W в точке с координатой r от времени t.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Киричек Ю.А. Комбинированные массивно – плитные фундаменты. ПГАСА, Днепропетровск, 2001 – 207 с.

2. Шаповал В.Г., Нестерова Е.В., Рубан Н.Н. Вынужденные колебания бесконечной плиты на основании Винклера-Фусса. - Збірник наукових праць. – Вип. 4 (34). Том 1 – Полтава: ПолтНТУ, 2012. – с. 302-306.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.

4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

5. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960. - 491 с.

6. Тимошенко С. П., Войновский – Кригер С. Пластины и оболочки. - М: Наука, 1966. - 636 с.

7. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Київ. Мінрегіонбуд України, 2009-104 с.

8. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. Київ. Мінрегіонбуд України, 2006 - с. 9.

9. Гольдштейн М.Н., Царьков А.А., Черкасов И.И. «Механика грунтов, основания и фундаменты.»: Учебник для вузов ж.-д. трансп. М.: Транспорт, 1981. – 320 с.

10. Шаповал В.Г., Седин В.Л., Шаповал А.В., Моркляник Б.В., Андреев В.С. Механика грунтов. Учебник. Днепропетровск: Пороги, 2010-168 с.

11. Ухов С.Б. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты: Учебник . - М.: Изд. АСВ, 1994 - 527 с.