МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНІЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ`ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕХНІЧНОГО ЗМІСТУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДЛЯ САМОСТІЙНОІ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
напрямів підготовки 6.050301 Гірництво, 6.050101 Комп’ютерні науки,
6.040103 Геологія, 6.050502 Інженерна механіка

Дніпропетровськ
НГУ
2012

Застосування методів диференціального та інтегрального числення до розв'язання задач технічного змісту. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів напрямів підготовки 6.050301 Гірництво, 6.050101 Комп'ютерні науки, 6.040103 Геологія, 6.050502 Інженерна механіка / Л.Й. Бойко, В.І. Павліщев. – Д.: Національний гірничий університет, 2012 – 46 с.

Автори: Л.Й. Бойко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

В.І. Павліщев, канд. техн. наук, доц.

Рекомендовано методичною комісією з напряму підготовки (протокол № 4 від 26.09.2012) за поданням кафедри вищої математики (протокол № 14–12 від 06.09.2012).

Мета методичних вказівок – конкретизувати приклади, які розв'язуватимуть студенти при вивченні розділу "Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної", а також надати допомогу їм у засвоєнні методів математичного дослідження прикладних задач, що дуже важливо для майбутніх інженерів.

Наведено 80 задач технічного змісту. Всі вони забезпечені відповідями та вказівками до їх розв'язання. Необхідні відомості з теорії подано у довідковій формі.

Можуть бути використані студентами для самостійної роботи, а також викладачами для проведення практичних й індивідуальних занять та занять студентського математичного гуртка.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Довідковий матеріал з диференціального числення

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у проміжку $[a,b]$. Різниця $\Delta x = x - x_0$ називається приростом аргументу x у точці $x_0 \in (a,b)$. Різниця $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається приростом функції в точці $M(x_0, y_0)$ (рис.1).

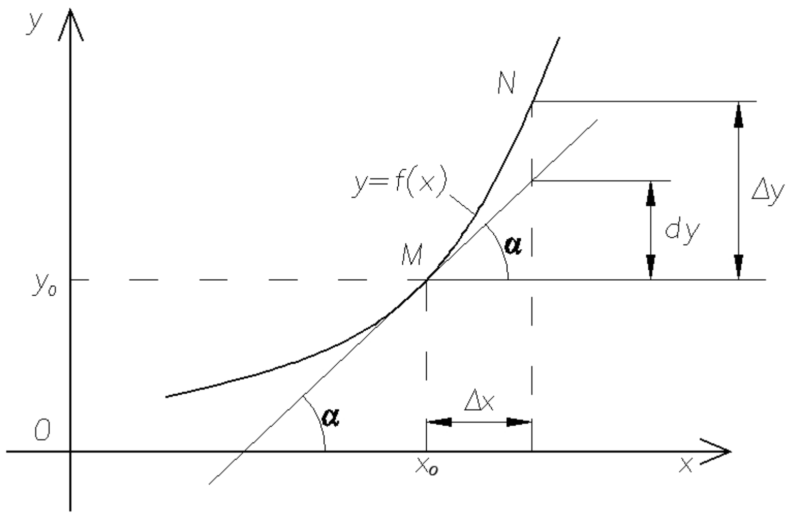

Рис. 1

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_o називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли останній довільно прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \quad (1)$$

Функція, яка має похідну в кожній точці інтервалу (*a, b*), називається диференційованою у цьому інтервалі.

Похідна в довільній точці функція має такі позначення:

$$y',\ y'_x,\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

З геометричної точки зору похідна $f'(x_0)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_o, тобто $f'(x_0) = tg\alpha$. Тому рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ можна записати так:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

Похідна $f'(x_0)$ характеризує швидкість зміни функції $y = f(x)$ в точці x_o у напрямі осі 0_x. Якщо відомий закон руху $S = S(t)$, то швидкість руху у момент t_0 є похідна від шляху за часом: $\vartheta = s'(t_0)$.

Складену функцію $y = f(u)$, де $u = u(x)$, диференціюють за правилом $y'_x = f'_u \cdot u'_x$, при цьому вважається, що функції $f(u)$ і $u(x)$ мають похідні.

Диференціал функції $y = f(x)$ являє собою головну частину приросту функції Δy, лінійну відносно приросту аргументу Δx, і обчислюється за формулою $dy = y'dx$. Диференціал аргументу дорівнює його приросту: $dx = \Delta x$ З геометричної точки зору диференціал функції – це приріст ординати дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ (рис.1).

Якщо Δx малий за абсолютною величиною, то $\Delta y \approx dy$ і

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{3}$$

Формула (3) широко застосовується для наближених обчислень. Якщо незалежна змінна x визначена з граничною абсолютною похибкою Δx, то Δy і δ_y – граничні похибки функції $y = f(x)$ відповідно абсолютна і відносна – наближено виражатимуться такими формулами:

$$\Delta_y = |y'|\Delta_x, \quad \delta_y = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x. \tag{4}$$

Похідною другого порядку функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної першого порядку. Для позначення другої похідної використовують символи $y'', f''(x_0), d^2y/dx^2$. За допомогою другої похідної визначається кривина K лінії $y = f(x)$ в точці x_o і радіус кривини R:

$$K = \frac{|y''(x_0)|}{\left[1 + (y'(x_0))^2\right]^{3/2}}, R = \frac{1}{K}. \tag{5}$$

З механічної точки зору друга похідна від шляху за часом є прискорення руху: $a = s''(t) = \vartheta'(t)$

Для параметрично заданої функції $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ похідні першого і другого порядків обчислюють за формулами:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \tag{6}$$

При дослідженні властивостей функції за допомогою похідної рекомендують використовувати такі правила.

Якщо функція $y = f(x)$ в усіх точках проміжку (*a, b*) має додатну похідну $f'(x)$ то функція зростає на цьому проміжку , а якщо має від’ємну похідну, то функція спадає на цьому проміжку.

Точка x_0 є точка максимуму функції $f(x)$, якщо $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує і є такий $\delta-$ окіл точки x_0 , що $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (або $f''(x_0) < 0$). Якщо ж $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (або $f''(x_0) > 0$), то x_0 – точка мінімуму. Точки екстремуму відділяють інтервали зростання та спадання (інтервали монотонності) функції.

Якщо в усіх точках інтервалу (*a, b*) $f''(x_0) > 0$, то графік функції $y = f(x)$ на цьому інтервалі угнутий (опуклий вниз), якщо ж $f''(x_0) < 0$, то на цьому інтервалі графік функції опуклий (опуклий вгору). Точка з абсцисою x_0 є точка перегину графіка функції $y = f(x)$, якщо $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, і при переході через цю точку друга похідна $f''(x)$ змінює знак. Точки перегину відділяють інтервали опуклості і угнутості графіка функції.

Найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ знаходять серед чисел $f(a), f(x_1),..., f(x_k), f(b)$ де $x_1, x_2,..., x_k$ – критичні точки функції $f(x)$ на інтервалі (*a, b*) тобто точки, в яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.

У задачах прикладного змісту на відшукання найбільшого і найменшого значень змінної величини треба правильно вибрати аргумент, встановити границі його зміни, скласти функцію, залежну від цього аргументу, і дослідити її на екстремум.

1.2. Похідна та диференціал функції

Задача 1. Під струмом розуміють кількість електрики, що протікає у колі за одиницю часу. Дати визначення струму в момент часу t (миттєвий струм), якщо кількість електрики, що протікає у колі за проміжок Δt, дорівнює $q(t)$.

Відповідь: $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Вказівка. Кількість електрики, що протікає у колі за проміжок часу від t до $t + \Delta t$, $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$. Середній струм за цей час $I_{сер} = \Delta q / \Delta t$. Миттєвий струм у момент часу t є границя середнього струму, коли $\Delta t \to 0$ тобто $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{сер} = q'(t)$.

Задача 2. При нагріванні стержня його довжина є функція температури $\theta : l = l(\theta)$.Визначити коефіцієнт лінійного розширення α при температурі θ.

Відповідь: $\alpha = l'(\theta)$.

Вказівка. Середній коефіцієнт лінійного розширення при нагріванні стержня від θ до $\theta + \Delta\theta$ виражається формулою $\alpha_{сер} = \dfrac{l(\theta + \Delta\theta) - l(\theta)}{\Delta\theta}$.

Тоді $\alpha = \lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \alpha_{сер} = l'(\theta)$.

Задача 3. Напруга конденсатора змінюється по синусоїдальному закону $U = U_m \sin \omega t$. Обчислити величину зарядного струму i, що протікає через конденсатор, якщо $i = \dfrac{dq}{dt}$; $q = cU$; c, U_{m} – сталі.

Відповідь: $i = cU_m \omega \sin(\omega t + 90^\circ)$.

Задача 4. При зарядженні конденсатора зв'язок між його зарядом і напругою визначається залежністю $q = 0,4 \cdot 10^{-6} U^4 - 10^{-12} U^2$, де q – заряд (Кл); U – напруга конденсатора (В).

Знайти динамічну ємність конденсатора $c = q'(U)$, якщо напруга дорівнює 50 кВ.

Відповідь: c=0,3 мкФ.

Задача 5. Рівняння стисливості газу має вигляд $P = P_0(\rho / \rho_0)^\gamma$, де ρ – густина; $\gamma = const$.

Знайти: 1) швидкість звуку $c = \sqrt{dP / d\rho}$ у газовому середовищі з тиском P; 2) швидкість поширення слабких звукових збурень у газі з початковим тиском $P_{o.}$.

Відповідь: $c = \sqrt{\gamma \rho_o^{-\gamma} \rho^{\gamma - 1} P_o}$; $c_o = \sqrt{\gamma \rho_o^{-1} P_o}$.

Вказівка. Слабкі збурення спостерігаються, коли тиск мало відрізняється від початкового, тобто за умови $P \to P_0$ (при цьому $\rho \to \rho_0$, $c \to c_0$).

Задача 6. Рівняння стисливості i-тої компоненти багатокомпонентного середовища має вигляд

$$P = P_0 \left(\frac{V_i}{V_{i0}} \right)^{-\gamma i}, \quad \text{де об'єм } V_i = \frac{\rho_{i0} V_{i0}}{\rho_i}.$$

Знайти швидкість поширення звуку c_i i-тої компоненти багатокомпонентного середовища з тиском P, якщо $c_i = \sqrt{(dP / d\rho_i)}$.

Відповідь: $c_i = \sqrt{\gamma_i \rho_{i0}^{-\gamma i} \rho_i^{\gamma i - 1} P_0}$.

Вказівка. Застосувати правило диференціювання складної функції

$$\frac{dP}{d\rho_i} = \frac{dP}{dV_i}\frac{dV_i}{d\rho_i}.$$

Зауваження. У задачах 5 і 6 величини, що відповідають початковому тиску $P_{o.}$, позначені літерами з індексом «*о*». Літерами без індексу «*о*» позначені величини, що відповідають тиску $P \neq P_0$.

Задача 7. Рівняння зігнутої осі балки має вигляд

$$y = Q(3lx^2 - x^3) / (6EJ),$$

де Q – вага вантажу; l – довжина балки; E – модуль пружності; J – момент інерції перерізу балки.

Визначити: 1) згинальний момент $M(x) = Ejy''(x)$;

2) перерізне зусилля $S(x) = M'(x)$;

3) інтенсивність навантаження $q(x) = S'(x)$.

Відповідь: 1) $M = q(l-x)$; 2) $S = -Q$; 3) $q = 0$.

Задача 8. Проникливість ґрунту для забитої палі, діаметр якої D, вага Q і швидкість заглиблення ϑ, визначається за формулою

$$P = TQ^{5/7}\vartheta^{10}D^{3,75} \quad , R = \text{const}.$$

Знайти $p'(\vartheta)$ і визначити, на скільки відсотків збільшиться проникливість ґрунту, якщо швидкість заглиблення збільшити на 1%.

Відповідь: $p'(\vartheta) = \dfrac{10p}{7\vartheta}$; проникливість ґрунту збільшиться на 1,43 %.

Вказівка. Змінювання проникливості ґрунту можливо визначити, замінюючи приріст функції її диференціалом. Тоді за формулою (3)

$$\Delta p \approx p'(v)\Delta v,$$

де $\Delta v = 0,01v$.

Звідси

$$\Delta p = \frac{10p}{7v} \cdot 0,01v = 0,0143p.$$

Отже, проникливість ґрунту збільшиться на 1,43 %.

Задача 9. Якщо довжина тросу дорівнює *2S*, півпроліт l, а стріла провисання f , то має місце наближена рівність

$$S = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{l^2}{f^2}\right).$$

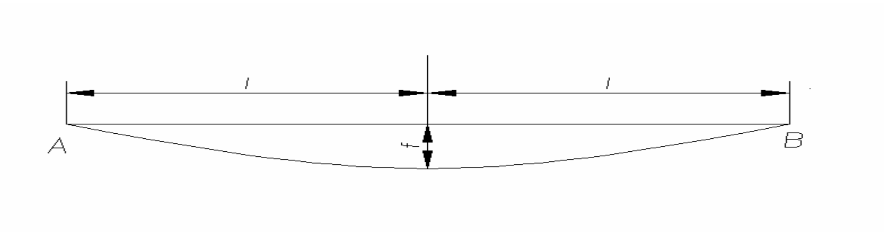

Рис. 2

Як зміниться стріла провисання, якщо змінити довжину троса на величину dS?

Відповідь: змінювання стріли провисання $df = \frac{3l}{4f}dS$.

Вказівка. $\Delta S = dS = S'(f)df$. Звідси $df = \frac{dS}{S'(f)}$.

Задача 10. З якою відносною похибкою δ_R можна допустити вимірювання радіуса *R* сферичної ємкості, щоб її об'єм можна було визначити з точністю до 1%.

Відповідь: $\delta_R \le 0,33\%$.

Вказівка. Об'єм ємкості $\vartheta = \frac{4\pi R^3}{3}$. Оскільки за формулою (4)

$$\delta_{\vartheta} = \frac{\vartheta'}{\vartheta}\Delta R \le 0{,}01, \text{ то } \delta_R = \frac{\Delta R}{R} \le \frac{0{,}01}{R}\left|\frac{\vartheta}{\vartheta'}\right|.$$

1.3. Геометричне та механічне застосування похідної

Задача 11. Профіль підйому шосе має форму кривої, яка описується рівнянням $y = x/(1+x)$. Визначити кут α нахилу підйому в його початку.

Відповідь: 45°.

Вказівка. $\alpha = arctg\, y'(0)$.

Задача 12. Канат висячого мосту розміщується вздовж дуги параболи, яка описується рівнянням $x^2 = 2py$. Проліт мосту $AB = 2l = 50$ м, стріла провисання $OC = f = 5$ м ($AC = CB$).

Визначити кут провисання канату в точці A (рис. 3).

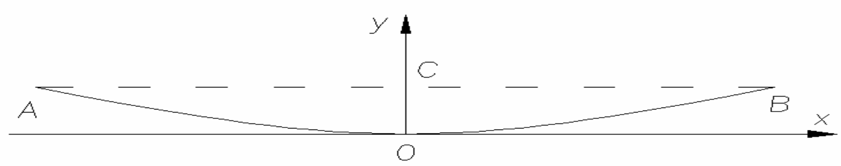

Рис. 3

Відповідь: $\alpha \approx 158^{\circ}$.

Вказівка. $y = x^2/(2\rho)$, $\rho = 62{,}5$, $\alpha = \pi + arctg\, y'(-25)$.

Задача 13. Шосе проходить через річку (рис. 4). Міст має форму параболи, яка описується рівнянням $x^2 = 2py$. Яким треба зробити схил до мосту, щоб перехід з мосту на схил був плавним? Проліт мосту $2l = 20$ м, стріла провисання $f = 0{,}5$ м.

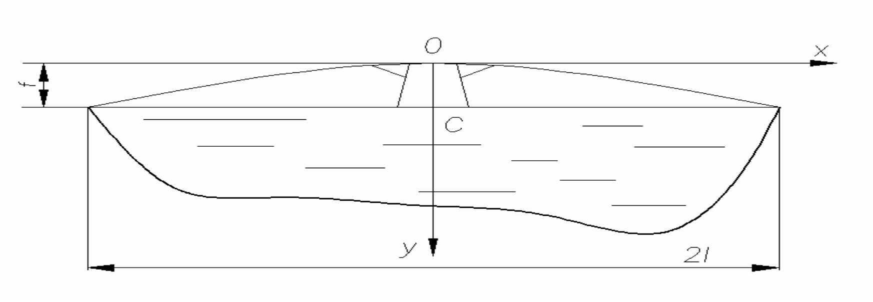

Рис. 4

Відповідь: $\alpha = arctg\ y'(10) \approx 5^o 43'$.

Вказівка. Напрям підходу повинен продовжувати напрям дотичної до профілю мосту на його кінці.

Задача 14. Проліт між опорами високовольтної лінії передачі електричного струму дорівнює 80 м. Рівняння лінії проводу має вигляд $y = 0,001x^2$. Який кут утворюють між собою проводи в кожній опорі?

Відповідь: $170^o 40'$.

Вказівка. У системі координат XOY з початком у середній частині проводу між опорами і віссю OC, паралельної до земної поверхні , лінія проводу буде симетричною відносно осі OY (рис. 3). Права опора при цьому опиниться в точці з абсцисою $x = 40$.

Користуючись геометричним змістом похідної, знайти кут β, утворений дотичною до параболи $y = 0,001x^2$ в точці з абсцисою $x = 40$.

$$\beta = \frac{\pi}{2} - arctg\ y'(40) = \frac{\pi}{2} - arctg 0,08.$$

Шуканий кут $\alpha = 2\beta$.

Задача 15. Траєкторія руху вантажу, що переміщується підйомним краном, в площині XOY описується рівнянням $16x^2 + 9y^2 = 400$. В яких точках траєкторії проекції швидкості ϑ_x і ϑ_y мають однакові значення з протилежними знаками?

Відповідь: $M_1\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$; $M_2\left(-3;\dfrac{-16}{3}\right)$.

Вказівка. Вектор швидкості повинен бути паралельним до прямої $y=-x$ в якій кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює -1.

Маємо

$$32x+18yy'=0, \qquad y'=-\frac{16x}{9y}=-1..$$

Звідси $y=(16/9)x$. Підставляючи цей вираз у рівняння траєкторії, а потім розв'язуючи його, знаходимо $x_1=3$, $x_2=-3$.

Задача 16. Рух точкової маси m описується таким законом згасаючих коливань: $S=Ae^{-kt}\sin\omega t(A,k,\omega>0)$.

Знайти швидкість руху v, прискорення a і силу F, під дією якої відбувається цей рух.

Відповідь: $v=Ae^{-kt}(\omega\cos\omega t-k\sin\omega t)$;

$a=-(\omega^2+k^2)s-2kv$;

$F=ma$.

Вказівка. $v=S_t',a=v_t'=Ae^{-kt}(\omega^2\sin\omega t+2\omega k\cos\omega t-k^2\sin\omega t)$.

Ввести у вираз, що стоїть у дужках, члени $\pm k^2\sin\omega t$ і перетворити величину a до вигляду $a=-(\omega^2+k^2)S-2kv$.

Задача 17. Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε валу, якщо кут повороту змінюється за таким законом:

$$\varphi=2+30t+5t^2/2.$$

Відповідь: $\omega=\varphi_t'=30+5t$, $\varepsilon=\omega_t'=5$.

Задача 18. Бетонний блок, скинутий у ставок, породжує ряд концентричних хвиль. З якою швидкістю збільшується площа, на яку поширюється хвиля в кінці другої секунди, якщо радіус зовнішньої хвилі збільшується зі швидкістю 2 м/с.

Відповідь: $16\pi \approx 50{,}3$ м/с.

Вказівка. Площа, на яку поширюється хвиля,

$$S = \pi(r(t))^2,$$

$$s'_t = 2\pi r r'(t), \quad \begin{cases} r'(t) = 2м/c \\ r(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad r(t) = 2t + c, c = 0 \Rightarrow \quad r(t) = 2t,$$

$$v = S'(t) = 8\pi t, \quad v(2) = 16\pi \approx 50{,}3 \; м^2/\text{с}.$$

Задача 19. Насос подає воду в циліндричний бак, діаметр якого 6 дм. Висота підйому води збільшується на 1 дм за секунду. Знайти швидкість наповнення бака.

Відповідь: $9\pi \approx 28{,}3$ дм^3/с.

Вказівка. Шукана швидкість є швидкість змінювання об'єму води за секунду:

$$v = \pi r^2 h(t), \quad v'(t) = v'_h \cdot h'_t \qquad (h'_t = 1, v'_h = \pi r^2).$$

Задача 20. На конічну поверхню сиплеться пісок з такою швидкістю, що коли діаметр основи конуса дорівнює 2 м, край основи переміщується зі швидкістю 0,5 м/с. Відношення висоти конуса до діаметра його основи залишається сталим і дорівнює 5/4. З якою швидкістю у зазначений момент збільшувалася площа поверхні конуса?

Відповідь: $\frac{\sqrt{29}}{2}\pi \approx 8{,}46$ м/с.

Вказівка. Шукана швидкість являє собою швидкість змінювання площі бокової поверхні

$$S = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi r^2 \sqrt{1 + (h/r)^2}.$$

Оскільки $h/r = 10/4 = 5/2$ то $S = \sqrt{29}\pi r^2/2$. Враховуючи, що $S'_t = S'_r r'_t$, $r'_t = 0,5$, $S'_r = \sqrt{29}\pi r$, маємо $S'_t = \sqrt{29}\pi r/2$, де $r = 1$.

Задача 21. Резервуар для води має форму перевернутого колового конуса, висота якого 3,6 м і діаметр 1,8 м. Коли висота води у резервуарі була 2,4 м, вода продовжувала підніматися зі швидкістю 75 м/с. Визначити, з якою витратою надходила вода в цей момент у резервуар.

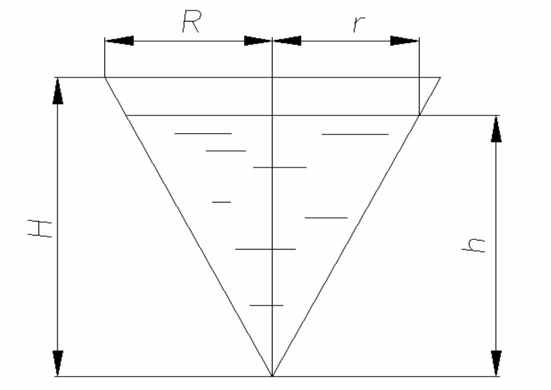

Рис. 5

Вказівка. Шукана витрата є швидкість змінювання об'єму V води у резервуарі $V = \left(\pi r^2 h\right)/3$ (рис. 5). Оскільки $\dfrac{r}{h} = \dfrac{R}{H} = \dfrac{0,9}{3,6}$, то $r = \dfrac{h}{4}$, отже, $V = \pi h^3/48$. Звідси $V'_t = \dfrac{\pi}{15} h^2 h'_t$ ($h = 2,4$; $h'_t = 75$).

Відповідь: 84,8 м^3/с.

Задача 22. Кінець А рейки АВ довжиною 5 м піднімається краном зі швидкістю 5 м/с. Другий кінець волочиться по землі. Знайти швидкість руху кінця В у той момент, коли кінець А підніметься на висоту 2,8 м?

Відповідь: – 3,38 м/с.

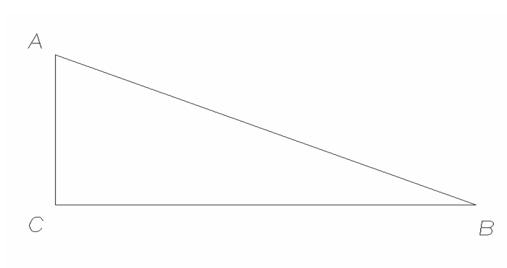

Рис. 6

Вказівка. Нехай А – точка, в якій знаходиться крюк крана; *t* - час, що проходить від початку підйому кінця А рейки з положення С; *x(t)* – відстань від кінця В до точки С (рис. 6).

Тоді АС=5 *t*, $x = \sqrt{5^2 - 25t^2}$. Звідси знаходиться x'_t, коли $t = 56$ с.

Задача 23. Важку балку довжиною 13 м опускають на землю так, що нижній її кінець прикріплено до вагонетки, а верхній стримується канатом, який намотаний на воріт (рис. 7). Канат змотується зі швидкістю 2 м/с. З яким прискоренням відкочується вагонетка в момент, коли вона знаходиться на відстані 5 м від точки 0?

Відповідь: – 5,408 м/с^2.

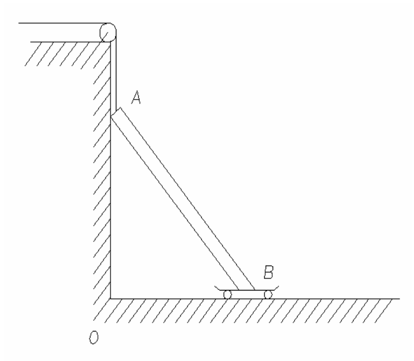

Рис. 7

Вказівка. Нехай A – точка, в якій знаходиться верхній кінець балки; t – час, що проходить від початку спуску балки; $x(t)$ – відстань від кінця B балки до точки 0. Тоді ОА=13–2t,

$$x = \sqrt{13^2 - (13 - 2t)^2} = \sqrt{25t - t^2}.$$

Звідси $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{-676}{(52t - 4t^2)^{3/2}}$ м/хв^2, коли $52t - 4t^2 = 5^2$.

Задача 24. Перехідною кривою називається ділянка залізничної колії, на якій відбувається з'єднання прямої з колом або двох суміжних кіл різних радіусів. Перехідною кривою, коли поїзд рухається по закругленню, є кубічна парабола $y = \dfrac{x^3}{6q}$, де $q = const$. Визначити радіус кривизни перехідної кривої.

Відповідь: $R = \dfrac{q}{x}(1 + \dfrac{x^4}{4q^2})^{3/2}$.

Вказівка. Скористатися формулою (5).

На практиці довжина перехідної кривої рідко перевищує 100м, а q завжди >10000 м і дріб $\dfrac{x^4}{4q^2}$ є дуже малою величиною. Тому $R \approx \dfrac{q}{x}$.

1.4. Екстремум функції

Задача 25. У конічній посудині, що заповнена водою, напруги σ і τ, які намагаються розірвати її за твірною до кола, паралельного до основи,

$$\sigma = ay(h-y), \quad \tau = b(h-y)(h+4y),$$

де a, b – сталі; y – відстань від рівня рідини; h – висота посудини.

На якій глибині ці напруги будуть найбільшими?

Відповідь: $\sigma = ah^2/4$, $y = h/2$, коли $\tau = 9bh^2/b$, $y = h/4$.

Задача 26. Сила дії колового електричного струму на невеликий магніт, вісь якого розташована на перпендикулярі до площини кола, що проходить через його центр, визначається формулою

$$F = \frac{cx}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

де $c=const$; x – відстань від центру кола до магніту, $0 < x < \infty$, a – радіус кола.

При якому значенні x величина F буде найбільшою?

Відповідь: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $F_{\max} = \frac{2c}{3\sqrt{3}a^2}$.

Задача 27. Якщо джерелом струму є електричний магніт, то ефект $P_{(\text{вт})}$ від підключення в ланцюг опору $R_{(\text{ом})}$ виражається формулою

$$P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2},$$

де E – e.g.c., r – внутрішній опір.

Знайти найбільший ефект, який можна отримати при даних E та r.

Вказівка. Дослідимо функцію *P=P(R)* на екстремум. За необхідною умовою *P'(R)=0* знаходимо критичне значення

$$P' = \left(\frac{E^2 R}{(R+r)^2} \right)' = \frac{E^2 (R+r)^2 - 2(R+r)RE^2}{(R+r)^4} = \frac{E^2 R + E^2 r - 2RE^2}{(R+r)^3} =$$

$$= \frac{E^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0 \Rightarrow R = r.$$

Оскільки $P'(R<r)>0$, а $P'(R>r)<0$, тобто похідна змінює знак з плюса на мінус, то функція $P = P(R)$ набуває найбільшого значення при $R = r$:

$$P_{\max} = P(r) = \frac{E^2 r}{(2r)^2} = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}.$$

Відповідь: $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4r}$.

Задача 28. В електродвигуні з внутрішнім опором R збиток холостого ходу дорівнює a (вт) при напрузі U. Чому дорівнює його найбільша корисна потужність, якщо вона визначається формулою $P = UI - I^2 R - a$?

Вказівка: дослідимо функцію $P = P(I)$ на екстремум. Знайдемо P': $P' = U - 2IR$. За необхідною умовою екстремуму маємо:

$$U - 2IR = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{2R}.$$

Перевіримо, що при знайденому значенні I корисна потужність буде найбільшою, застосовуючи другу достатню умову:

$P'' = -2R$, $P''\left(\dfrac{U}{2R}\right) < 0$, то функція P набуває найбільшого значення при $I = \dfrac{U}{2R}$:

$$P_{\max} = P\left(\frac{U}{2R}\right) = U \cdot \frac{U}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} \cdot R - a = \frac{U^2}{4R} - a.$$

Відповідь: $P_{\max} = \dfrac{U^2}{4R} - a$ при $I = \dfrac{U}{2R}$.

Задача 29. Струмопровідний кабель являє собою мідний дріт з ізоляцією. Якщо через x позначити відношення радіуса мідного дроту до товщини ізоляції, то швидкість телеграфування визначатиметься формулою $V = A \cdot x \cdot \ln\frac{1}{x}$, A – стала. При якому значенні x швидкість буде найбільшою?

Відповідь: $x = e^{-1}$.

Задача 30. Витрачання електропровідника на кілометр виражається формулою $W = Ar + \frac{B}{r}$, де r – опір (ом), A і B – сталі.

При якому значенні опору провідник буде найбільш економним ?

Відповідь: $r = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

Задача 31. Яким повинен бути опір R електронагрівального приладу, ввімкнутого в коловий ланцюг опору r, щоб в ньому виділялася максимальна кількість тепла, якщо $Q = RI^2$, $I = \frac{E}{R+r}$?

Відповідь: $R = r$.

Задача 32. Якщо до активного двополюсника підключено опір R, то через нього піде струм $I = \frac{U_{вх}}{R / R_{вх}}$ і в ньому буде виділятися потужність $P = I^2 R$. Яким повинно бути співвідношення між опором R та вхідним опором двополюсника $R_{вх}$, щоб виділялася найбільша потужність?

Відповідь: $P_{вх} = \frac{(U_{вх})^2}{4R_{вх}}$ при $R = R_{вх}$.

Задача 33. Дві електростанції постачають струмом лінію послідовно з'єднаних рівних навантажень. На якій відстані x від першої електростанції необхідно розірвати коло, щоб на лінії досягався мінімум витрат потужності? Відомі лінійна густина струму $i_0 = I / L$ (*A/v*), погонний опір (на одиницю довжини) r_o (Ом/м), спільна довжина лінії L (м).

При послідовному з'єднанні навантажень витрати потужності $P = \sum I^2 r$.

Відповідь: $x = L / 2$.

Вказівка: Подати витрати потужності на лінії у вигляді суми витрат на двох ділянках: до точки розриву відповідно від першої та другої електростанції, тобто у вигляді

$$P = P_1 + P_2 = (i_o x)^2 r_o x + \left[i_0 (L - x)\right]^2 r_0 (L - x) = i_0^2 r_0 x^3 + i_0 r_0 (L - x)^3.$$

і дослідити отриману функцію на екстремум за змінною *x*.

Задача 34. Об'єм шкідливих газів, що відводяться через димову трубу завдяки тязі, можна виразити формулою

$$V = a\sqrt{\frac{T_0}{T} - \frac{T_0^2}{T^2}},$$

де a – стала; T_0 – температура повітря зовні; T – середня температура газів у трубі.

При якому значенні T тяга буду найвигіднішою?

Відповідь: $T = 2T_0$.

Задача 35. Обчислити швидкість течії газу, при якій питомі витрати газу досягають мінімуму. Питома витрата газу задовольняє співвідношенню

$$q(V) = \rho_0 V (1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2})^{\frac{1}{k-1}},$$

де ρ_0 – густина газу; V – швидкість течії газу; $V_{\max}$ – максимальна швидкість течії газу; k – стала.

Відповідь: $V = V_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$

Задача 36. Вимірювання, які здійснювались у різних місцях річки, покритої льодом, показали, що швидкість води для різної глибини h річки змінюється за законом

$$V = a + Ml\ n\left[h^n (t-h)^k\right],$$

де – a, M, l, n, k – сталі. Визначити, на якій глибині швидкість течії найбільша.

Відповідь: $h = \dfrac{nt}{k+n}$.

Задача 37. З пункту A, що знаходиться на суші, вантаж доставляється зі швидкістю v_1 до пристані C, а потім з пункту B по воді зі швидкістю v_2. Пункти A і B знаходяться відповідно на відстані a і b від берега (рис. 8).

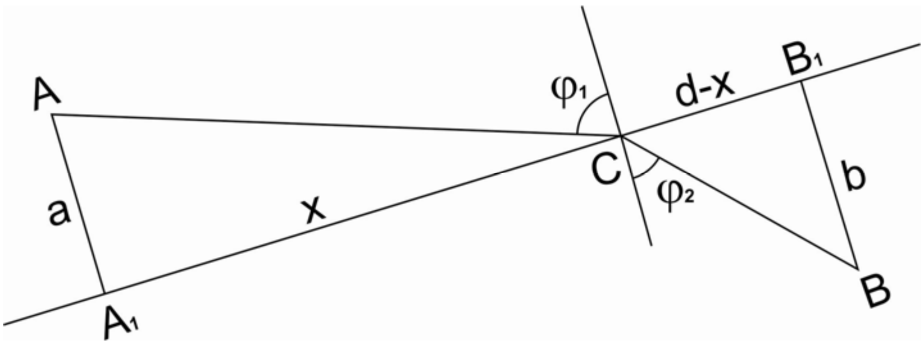

Рис. 8

Віддаль між проекціями цих пунктів на берегову лінію $A_1B_1 = d$.

В якому місці необхідно розташувати пристань *C*, щоб час доставки вантажу з пункту *A* в пункт *C* і далі в пункт *B* був найменшим?

Відповідь: $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Вказівка. Час проходження шляху *AC*+*CB*

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2},$$

де $x = A_1C$. При дослідженні цієї функції на екстремум скористатися співвідношеннями

$$\sin\varphi_1 = x / \sqrt{a^2 + x^2}\ , \quad \sin\varphi_2 = (d-x) / \sqrt{(d-x)^2 + b^2}\ .$$

Задача 38. Опір дороги руху автомобілів при швидкості v км/год., виражається такими формулами:

1) на асфальті $f_1 = 14,5 + 0,25v$;

2) на хорошому шосе $f_2 = 24 - 2v/3 + v^2/30$;

3) на поганому шосе $f_3 = 28 + 0,25v + 0,02v^2$;

4) на бруківці $f_4 = 29 - 2v/3 + v^2/15$;

5) на м'якій ґрунтовій дорозі $f_5 = 36,5 - 3v/4 + v^2/30$.

І. Для вказаних випадків, де це можливо, визначити:

а) швидкість, при якій опір повинен бути найменшим;

б) величину цього найменшого опору.

ІІ. При якій швидкості опір буде однаковим як на поганому, так і на хорошому шосе?

Відповідь: І. 1) функція лінійна, екстремуму немає;

2) $v = 10$, $f_{2\min} = 20,7$;

3) $v = 6,25$, $f_{3\min} = 27,2$;

4) $v = 5$, $f_{4\min} = 27,3$;

5) $v = 11,25$, $f_{5\min} = 32,3$;

ІІ. $v = 38,9$ км/год.

Вказівка. Для останнього запитання ІІ використати умову $f_2 = f_3$.

Задача 39. Вантаж вагою *P*, що лежить на горизонтальній шорсткій площині, треба зсунути з місця прикладеною силою *F*.

При якому нахилі φ цієї сили до горизонту величина її буде найменшою, якщо коефіцієнт тертя вантажу дорівнює k?

Відповідь: $\varphi = arctg\ k$.

Вказівка. З умови рівноваги системи сил, прикладених до вантажу, в проекціях на осі *0X* і *OY* (рис. 9)

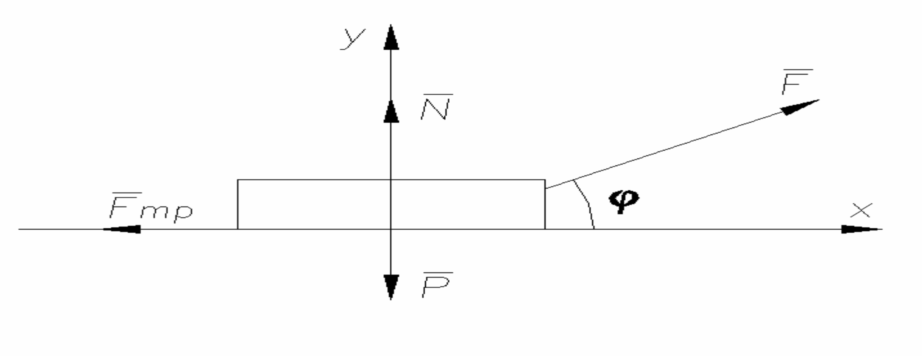

Рис. 9

$$\sum F_{xi} = F\cos\varphi - F_{mp} = 0\,;$$

$$\sum F_{yi} = N + F\sin\varphi - P = 0\,,$$

а також, враховуючи, що $F_{mp} = kN$, знайти функцію $F(\varphi) = kP/(k\sin\varphi + cos\varphi)$ та дослідити її на екстремум.

Задача 40. Поперечний переріз відкритого каналу має форму рівнобічної трапеції. При якому нахилі a боків змочений периметр перерізу буде найменшим, якщо площа «живого перерізу» води у каналі дорівнює *S*, а рівень води $-h$?

Відповідь: $a = \pi/3$.

Вказівка. Змочений периметр р визначається за формулою (рис. 10) $p = a + 2h/\sin\alpha$.

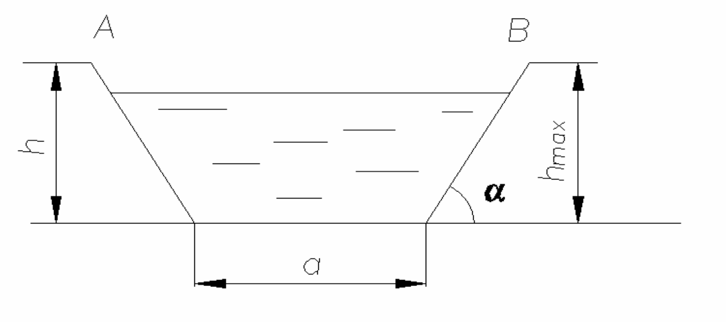

Рис. 10

Площа «живого перерізу» води $S = h(a + hcg\alpha)$. З цих рівнянь визначається p як функція кута і досліджується на екстремум.

Задача 41. Канал, що підводить воду до турбіни, являє собою у перерізі рівнобічну трапецію (рис. 10). Площа його перерізу ω. Визначити гідравлічну найвигіднішу форму перерізу, тобто форму, при якій змочений периметр р найменший, а глибина h – найбільша ($h = h_{max}$).

Відповідь: переріз – половина правильного шестикутника, $a = \pi / 3$.

Вказівка. Маємо:

$$AB = a + 2hctgd, \omega = (a + hctg\alpha)h, a = \omega / h - hctg\alpha,$$

$$p = \omega / h + h(2\cos\alpha) / \sin\alpha.$$

З умови $p'(h) = 0$ визначається критичне значення $h = \sqrt{\omega \sin\alpha / (2 - \cos\alpha)}$, яке досягає максимуму тоді, коли і функція $z = \sin\alpha / (2 - \cos\alpha)$, тобто при $a = \dfrac{\pi}{3} h_{\max}^2 = \sqrt{3}\omega / 3$. Отже, h – апофема правильного шестикутника.

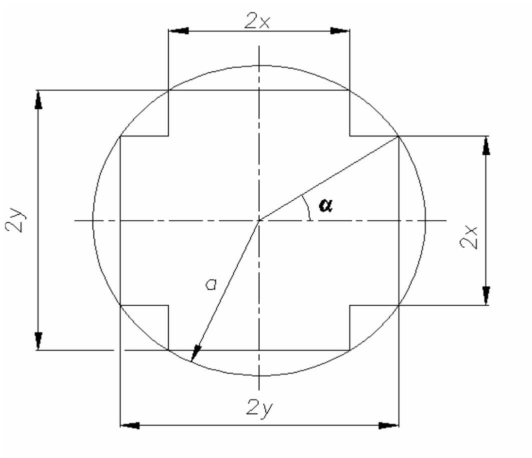

Рис. 11

Задача 42. Форма поперечного перерізу магнітопроводу силового трансформатора, за умовами технологічності його виготовлення, повинна мати вигляд, показаний на рис.11.

З метою зменшення загальних розмірів трансформатора треба якомога більше заповнити середину трансформатора залізним сердечником. Обчислити x і y, якщо радіус поперечного перерізу магнітопроводу дорівнює α.

Відповідь: $x = 0{,}526\alpha$, $y = 0{,}851\alpha$.

Вказівка. $S_M = 4(2xy - x^2)$, $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$;
$S_M = 4a^2(\sin 2\alpha - \sin^2\alpha)$.

З умови $S'_M(\alpha) = 0$ визначають критичне значення $\alpha = 0{,}5 arctg 2 = 31{,}7^\circ$.

Задача 43. Треба огородити плитами майданчик, який прилягає до стіни. Маємо 400 плит довжиною 0,5 м. Огорожа робиться у вигляді прямокутника. Якими повинні бути розміри майданчика, щоб його площа *S* була найбільшою?

Відповідь: ширина – 50 м, довжина – 100 м.

Вказівка. $S=xy$, x – ширина, y – довжина майданчика;

$$2x+y=400 \cdot 0{,}5=200,\ y=200-x,\ \ S=200x-2x^2.$$

З умови $S'_x = 0$ визначається шукана ширина майданчика.

Задача 44. Потрібно побудувати складське приміщення, висота якого *h* м, а площа – *S* м^2, з найменшими витратами матеріалу на зовнішні стіни. Визначити довжину і ширину стін.

Відповідь: $\sqrt{S}$ (довжина дорівнює ширині).

Вказівка. Площа зовнішніх стін σ повинна бути найменшою:

$$\sigma = 2h(x+y), \quad S = xy, \quad \sigma = 2h(\frac{S}{y} + y).$$

Задача 45. Бджолина чашечка має форму тіла, яке можна отримати, якщо через діагоналі основи *AC, CE, EA* (рис. 12) прямої правильної шестикутної призми провести три взаємно пересічні площини, нахилені до основи під рівними кутами. Ці площини перетинаються в одній точці K так, що верхню поверхню чашечки утворюють три ромби, одним з яких є ромб *AKCQ*, $\angle AQC = \beta$ чашечки приблизно дорівнює 109°. Довести, що така величина цього кута задовольняє вимогу, щоб повна поверхня чашечки при даному об'ємі була найменшою.

Відповідь: $\beta = 109^\circ 28' 16''$.

Вказівка. Нехай сторона шестикутника дорівнює $a, BQ = x$ діагоналі ромба $AC = d_1$, $QK = d_2$. тоді сторона ромба $QC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $d_1 = 2a\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$. Оскільки для ромба $d_1^2 + d_2^2 = 4(QC)^2$, то $d_2 = \sqrt{4x^2 + a^2}$ і, отже, площа ромба $S = \frac{d_1 d_2}{2} = a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

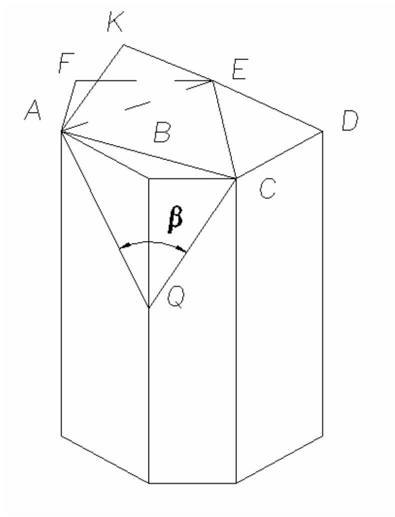

Рис. 12

В результаті перерізу площа поверхні первинної призми зменшиться на величину $\delta = 3S_{\Delta QBC} + 3_{\Delta ABC} - 3S$, тобто на величину

$$f(x) = 3ax + 3\sqrt{3}\,\frac{a^2}{4} - 3\sqrt{3}a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

З умови $f'(x) = 0$ можна визначити $x = \sqrt{2}a/4$.

Тоді

$$\cos\frac{\beta}{2} = d_2/(2QC) = \sqrt{3}/3.$$

Задача 46. Довести, що конічне шатро даної місткості потребує найменшої кількості матеріалу, коли його висота у $\sqrt{2}$ рази більше радіуса основи.

Вказівка. Нехай r – радіус основи шатра, h – його висота, l – довжина твірної. Об’єм шатра V. Тоді площа поверхні шатра

$$S = \pi r l = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}.$$

Оскільки $h = 3V/(\pi r^2)$, то

$$S = \frac{1}{r}\sqrt{9V^2 + \pi^2 r^6}.$$

З умови $S'(r) = 0$ можна знайти екстремальне значення $r = \sqrt[6]{4{,}5V^2/\pi^2}$.

Для нього обчислюється значення h, а потім відношення h/r.

Задача 47. До річки шириною a = 64 м. побудовано під прямим кутом канал шириною b = 27 м (рис. 13). Чи зможе баржа довжиною $l = 100$ м пройти по цій системі канал-річка?

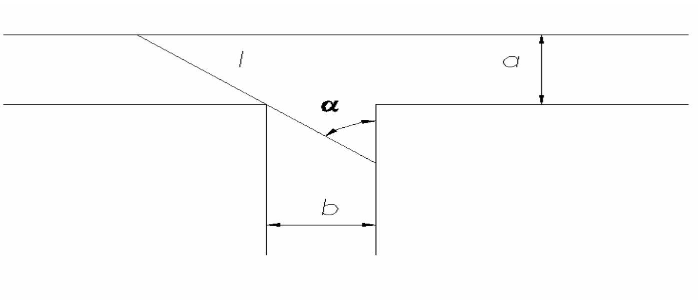

Рис. 13

Відповідь: зможе.

Вказівка. Маємо

$$l = a / \cos\alpha + b / \sin\alpha, \;\; 0 < \alpha < \pi / 2.$$

З умови $l'(\alpha) = 0$ визначають критичне значення α : $tg\alpha = 3/4$.

Тоді $\sin\alpha = tg\alpha / \sqrt{tg^2\alpha} = 3/5$, $\cos\alpha / \sqrt{1 + tg^2\alpha} = 4/5$

і, отже, максимально можлива довжина баржі $64 \cdot 5/4 + 27 \cdot 5/3 = 125$ м.

Задача 48. Залежність управлінських витрат на домобудівельному комбінаті від об'єму виготовленої продукції V виражається формулою $\rho = aV + b/(c+V) + d$, де a, b, c, d – сталі.

Показати, що ρ має максимум, коли $V = \sqrt{b/a} = c$.

Задача 49. Прямо під центром площини, яка має форму кола радіуса R, треба повісити ліхтар (рис. 14). На якій висоті треба його повісити, щоб він якнайкраще освітлював дорогу, яка прокладена по межі площини.

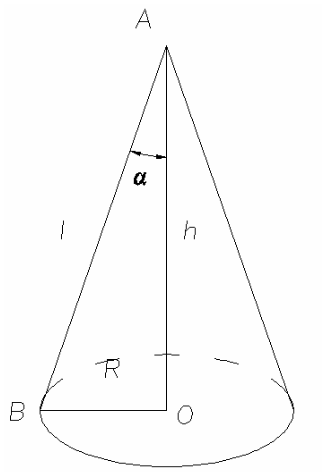

Рис. 14

Зауваження. Ступінь освітлення деякої площини прямо пропорційний косинусу кута α падіння променів і обернено пропорційний квадрату відстані від джерела світла.

Відповідь: на висоті $\sqrt{2}R/2$.

Вказівка. Освітленість $\omega = k\cos\alpha / l^2$, де $k = const$, $l = \sqrt{h^2 + R^2}$. Оскільки $\cos\alpha = h/l$, то $\omega = kh(h^2 + R^2)^{-3/2}$. З умови $\omega'(h) = 0$ визначається шукане значення h.

Задача 50. На відстані $AB = b$ від прямолінійної магістралі *ON* водопроводу знаходиться будинок *B*. Точка *A* є проекція точки *B* на пряму *ON*, $OA = a$ (рис. 15). До якого пункту *P* частини *OA* магістралі треба зробити прямолінійне освітлення *PB*, щоб провести воду в будинок *B* якнайдешевше, вважаючи, що вартість одиниці довжини водопроводу за напрямами *OP* і *PB* буде відповідно k_1 і k_2 карбованців ($k_1 > k_2$).

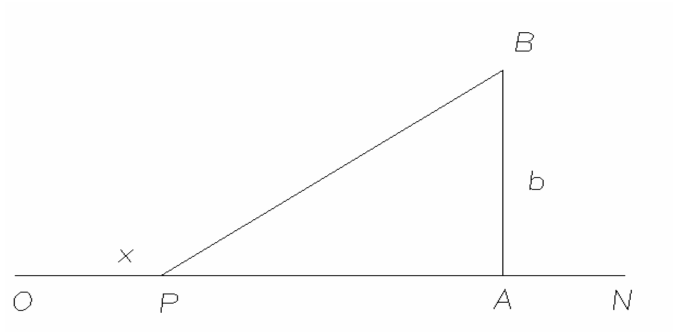

Рис. 15

Відповідь: $x - a - k_1 b / \sqrt{k_2^2 - k_1^2}$.

Вказівка. Вартість водопроводу

$$m = OP \cdot k_1 + PB \cdot k_2 = x \cdot k_1 + \sqrt{b^2 + (a - x)^2} \cdot k_2.$$

З умови $m'(x) = 0$ визначається шукане значення x.

Задача 51. Вартість перевезення вантажу на відстань 1 км по залізничній колії - k_1 крб., по шосе - k_2 крб. ($k_1 < k_2$). Завод побудовано у селищі С, до якого немає ніяких під'їзних шляхів. Найближча відстань до залізничної колії *AM* дорівнює a км (рис.16). Вантаж прибуває на станцію *A*. Під яким кутом до залізничної колії і на якій відстані x від проекції *B* точки *C* на *AM* треба розташувати будівництво шосе, щоб вартість доставки вантажу на завод була найменшою, якщо $AB=b$.

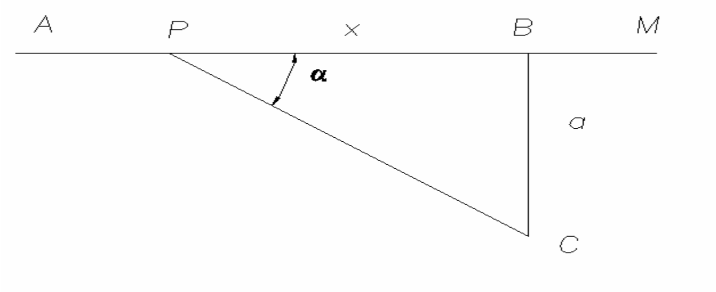

Рис. 16

Відповідь: $\alpha = \arccos(k_1 / k_2)$, $x = actg\alpha$.

Вказівка. Вартість доставки вантажу

$$m = APk_1 + PCk_2 = (b-x)k_1 + ak_2 / \sin\alpha \, .$$

Оскільки $x = actg\beta$, то $m = (b - actg\alpha)k_1 + ak_2 / \sin\alpha$.

З умови $m'(a) = 0$ можна знайти кут α .

1.5. Дослідження функції

Задача 52. Нехай $u(t)$ – число наявних у момент t механізмів нової конструкції, а $v(t)$ – число механізмів старої конструкції, що поступово замінюються новими. Момент, коли число нових механізмів дорівнюватиме числу старих, визначається рівністю $u(t) = v(t)$. Чи будуть дорівнювати похідні цих функцій?

Відповідь: ні, тому що $u' > 0$, $v' < 0$.

Задача 53. Рівняння меридіональної кривої барабану підйомної машини має вигляд

$$y=\left[\frac{1}{r^2}-\frac{x}{l}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)\right]^{-1}(x>0),$$

де $R,\ r$ – радіуси барабану відповідно найбільший і найменший, на який намотується канат; l – довжина барабану.

Дослідити криву.

Відповідь: область визначення $0<x<R^2l/(R^2-l^2)$. Крива не має екстремумів, вона угнута по всій області визначення.

2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл

2.1. Довідковий матеріал з інтегрального числення

Дією, оберненою до диференціювання, є інтегрування, тобто відшукання такої функції (первісної), для якої задана функція є похідною.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку $[a,b]$, якщо $F(x)=f(x)$, де $\forall x\in[a,b]$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається сукупність всіх первісних від цієї функції, тобто вираз

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\quad C\in R.$$

Дамо поняття визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$, $a=x_0<x_1<x_2...<x_n=b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частин, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,3,...n)$ – довжина відрізків розбиття, $\lambda=\max\Delta x_i\ \ (1\le i\le n)$ – максимальна з довжин цих відрізків, то сума

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n,\ \xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$$

називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, а скінчена границя цієї суми при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ називається визначеним інтегралом і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to \infty, (n \to \infty)} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i .$$

В цьому випадку говорять, що $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$.

Теорема (достатня умова інтегрованості). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку, тобто визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від невід'ємної функції $f(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[a,b]$ осі *OX*, графіком функції $y = f(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$ які паралельні до осі OY (рис. 17): $S = \int_a^b f(x)dx$.

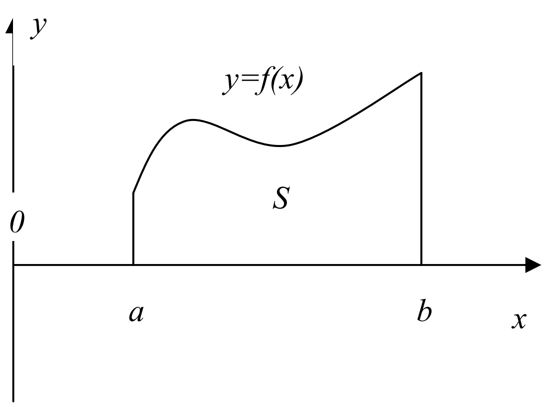

Рис. 17

Основні властивості визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$. Тоді :

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$ і т.д.;

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b dx = b - a$;

4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

де c – довільне дійсне число (**властивість адитивності**);

6) $\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$,

де $c_1, c_2 = const$; $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – інтегровані на відрізку $[a,b]$ функції (**властивість лінійності**);

7) $\int_a^b f(x)dx - \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ якщо } f(-x) = f(x); \\ 0, \text{ якщо } f(-x) = -f(x). \end{cases}$

8) **Теорема про середнє.** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує точка $c \in (a,b)$ така, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Звідки значення $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ – називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Заміна змінної у визначеному інтегралі здійснюється за такими схемами:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} \text{заміна}: & x = \varphi(t), & dx = \varphi'(t)dt; \\ & a = \varphi(\alpha); & b = \varphi(\beta) \end{bmatrix} = \int\limits_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

$$\int_a^b f\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx = \begin{bmatrix} \text{Підстановка}: \psi(x) = t, \psi'(x)dx = dt; \\ \text{при } \; x = a \;\; t = \psi(a) = \alpha; \\ \text{при } \; x = b \;\; t = \psi(b) = \beta \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du \,.$$

Схеми застосування визначеного інтеграла

Визначений інтеграл часто застосовують для розв'язання багатьох задач геометрії, фізики, механіки.

Нехай треба знайти деяку величину *Q*, яка визначена на відрізку $\left[a,b\right]$. Причому Q – адитивна. Це означає, що відрізку $\left[a,b\right]$, довжина якого $\left|b-a\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$, відповідає величина $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta Q_i$; тут ΔQ_i – значення величини Q на відрізку Δx_i.

Існують такі схеми для обчислення величини *Q*:

Схема 1.

1) Виражаємо кожний доданок ΔQ_i у вигляді добутка $\Delta Q_i = f(z_i)\Delta x_i$, де $f(x)$ визначається за умовою задачі $z_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2) Наближене значення *Q* записуємо у вигляді інтегральної суми:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i.$$

3) Шукана величина *Q* виражається визначеним інтегралом

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Схема 2.

1) Розглянемо довільне значення $x \in (a,b)$ і приріст Δx в цій точці. Обчислюємо значення $\Delta Q \approx f(z)\Delta x$ що відповідає Δx.

2) Тоді диференціал $dQ = f(x)dx$. Інтегруючи останню рівність, отримаємо $Q = \int_a^b f(x)dx$.

2.2. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача 54. Змінний струм *i* є загальною функцією часу $i = i(t)$. Визначити (наближено – сумою та точно – інтегралом) кількість *q* електрики, що протікає через поперечний переріз провідника за час *T*.

Відповідь : $q_n \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} i(t_k)(t_{k+1} - t_k)$, $t_0 = 0$, $t_n = T$,

$$q = \int\limits_0^T i(t)dt.$$

Задача 55. Напруга *E* змінного струму являється заданою функцією часу $E = \varphi(t)$, струм i – є також заданою функцією часу $i = \psi(t)$.

Виразити роботу A струму за час від моменту T_0 до моменту T_1:

а) наближено – сумою;

б) точно – інтегралом.

Відповідь: а) $A \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(z_i)\psi(z_i)(t_{i+1} - t_i)$;

$t_0 = T$; $t_n = T_1$; $z_i \in (t_i, t_{i+1})$;

б) $A = \int\limits_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)dt$.

2.3. Теорема про середнє

Задача 56. Визначити середню величину е.д.с. E_m за один період, тобто $0 \le t \le T$, якщо $E = E_o \sin\frac{2\pi t}{T}$, де T – період; E_0 – максимальне значення е.д.с., що відповідає значенню $t = 0,25T$.

Дріб $\frac{2\pi t}{T}$ називається фазою.

Розв'язання.

$$E_m = \frac{E_0}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}dt = \frac{E_0 T}{T2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi t}{T}\right]\Bigg|_0^T = 0$$

(застосовано теорему про середнє: $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$).

Задача 57. Знайти середнє значення квадрата е.д.с. $(E_m)^2$ на проміжку $0 \le t \le \frac{T}{2}$.

Розв'язання. $E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$. Використаємо теорему про середнє:

$$\left(E_m\right)^2 = \frac{2}{T}E_0^2\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2\frac{2\pi t}{T}dt = \frac{2}{T}E_0^2\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1-\cos\frac{4\pi t}{T}}{2}dt = \frac{E_0^2}{T}\left(t - \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E_0^2}{2}.$$

Задача 58. Якщо функція *f(x)* визначена на інтервалі $[0,\infty)$, то середнє значення $\mu = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx$, якщо ця границя існує. Знайти середню споживаючу потужність в ланцюзі змінного струму, якщо струм i та напруга u виражаються формулами

$$i = I_0 cos(\omega t + \alpha) \quad \text{та} \quad u = U_0\cos(\omega t + \alpha + \varphi),$$

де φ – постійний зсув фази напруги в порівнянні з силою струму.

Розв'язання.

$$W_{cp} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T I_0\cos(\omega t+\alpha)U_0\cos(\omega t+\alpha+\varphi)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{I_0U_0}{2T}\int_0^T\left[\cos\left(2\omega t+2\alpha+\varphi\right)+\cos\varphi\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{I_0U_0}{4\omega}\frac{\sin(2\omega T+2\alpha+\varphi)-\sin(2\alpha+\varphi)}{T}+\frac{I_0U_0}{2}\cos\varphi\right]=\frac{I_0U_0}{2}\cos\varphi.$$

Величина $\cos\varphi$ – дуже важлива характеристика в електротехніці.

Задача 59. Знайти середнє значення I_m сили змінного струму $i = I_0\cos(\omega t+\varphi)$ на проміжку $0 \le t \le \dfrac{\pi}{\omega}$.

Відповідь: $I_m = \dfrac{2I_0}{\pi}$.

Задача 60. При дослідженні згасаючого струму, який отримають при розряді, іноді використовують «балістичні» прилади, показники яких пропорціональні «інтегральній величині струму» $q = \int\limits_0^\infty i dt$ або «інтегральному квадрату струму» $S = \int\limits_0^\infty i^2 dt$, де t – час відліку від початку розряду; $i = i(t)$ – величина змінного струму.

Обчислити q і S для наступних процесів:

а) $i = I_0 e^{-kt}$ (простіший аперіодичний процес), де k – сталий коефіцієнт, k>0;

б) $\sin\omega t$ ($i = I_0 e^{-kt}$ простіший коливальний процес), де k і ω – сталі.

Розв'язання.

$$a)\qquad q=\int_0^\infty I_0e^{-kt}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A I_0e^{-kt}dt=I_0\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-e^{-kt}}{k}\right)_0^A=\frac{I_0}{k};$$

$$S=\int_0^\infty I_0^2e^{-2kt}dt=\frac{I_0^2}{2k};$$

$$б)\qquad q=\int_0^\infty I_0e^{-kt}\sin\omega t dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A I_0e^{-kt}\sin\omega t dt=$$

$$=-\frac{I_0}{\omega^2+k^2}\lim_{A\to\infty}\Big[\big(\omega\cos\omega t+k\sin\omega t\big)e^{-kt}\Big]\Big|_0^A=\frac{I_0\omega}{\omega^2+k^2};$$

$$S=\int_0^\infty I_0^2e^{-2kt}\,\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt=\frac{I_0^2\omega^2}{4k(\omega^2+k^2)}.$$

Задача 61. Визначити коефіцієнт форми кривої для е.д.с., яка змінюється періодично (рис.18).

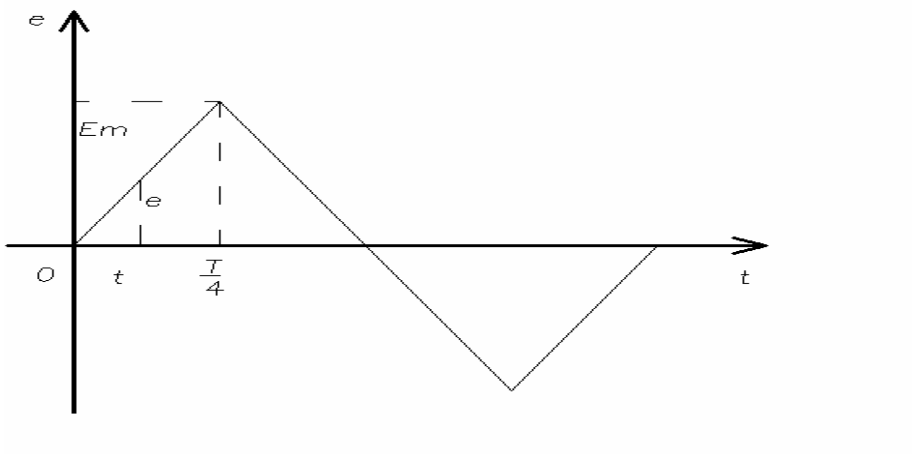

Рис. 18

Розв'язання. В даному випадку з прямокутного трикутника можна скласти відношення: $\dfrac{e}{t}=\dfrac{E_m}{T/4}\Rightarrow\quad e=\dfrac{4}{T}E_mt.$

Тоді значення е.д.с., що діє буде $E=\sqrt{\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{4}}e^2dt}=\dfrac{E_m}{\sqrt{3}}.$

Середнє значення е.д.с. $E_{cp} = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{T}{4}} \frac{4E_m}{T} t dt = \frac{E_m}{2}.$

Коефіцієнт форми кривої $K = \frac{E}{E_{cp}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,157.$

Задача 62. Знайти коефіцієнт форми періодичної кривої е.д.с., яку зображено на рис.19, якщо амплітуда її дорівнює 200 В.

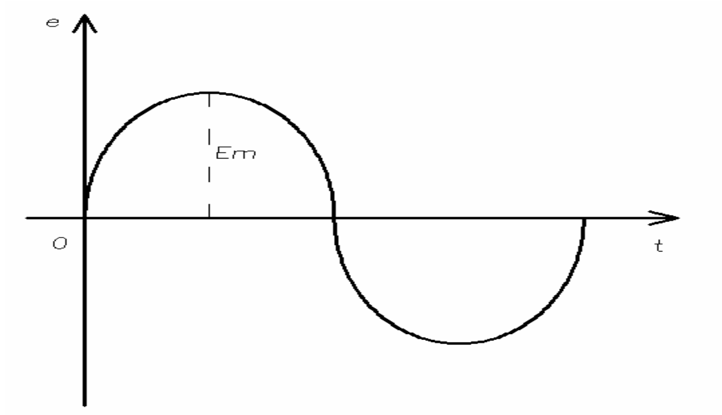

Рис. 19

Розв'язання. Крива е.д.с., яку зображено на рис. 19, складається з півкіл. Внаслідок симетричності цієї кривої можна розглядати лише чверть кола $x^2 + y^2 = r^2$, а саме, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Позначимо m_y – середнє квадратичне значення ординат.

Тоді

$$m_y = \sqrt{\frac{1}{r}\int\limits_0^r y^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{r}\int\limits_0^r (r^2 - x^2) dx} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} \approx 0,815r;$$

m_c – середнє значення ординат даної кривої за чверть періоду

$$m_c = \frac{1}{r}\int\limits_0^r y dx = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Табличний інтеграл

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^r = \frac{\pi r^2}{4};$$

$$m_c = \frac{1}{r}\int_0^r y dx = \frac{1}{r}\frac{\pi r^2}{4} = 0,785r; \qquad r = E_m;$$

$$E = 0,815E_m = 163B; \qquad m_y = E;$$

$$E_{cp} = 0,785E_m = 157B; \qquad m_c = E_{cp};$$

$$K = \frac{E}{E_{cp}} = 1,039.$$

Задача 63. Обчислити активну потужність $P = \frac{1}{T}\int_0^t iudt$ ланцюгу за період T, якщо струм $i = I_m \sin(2\omega t + \varphi_1)$, напруга ланцюгу $U = U_m \sin(2\omega t + \varphi_2)$, де I_m, U_m – амплітудні значення струму та напруги.

Відповідь. $P = I_m U_m cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Задача 64. Обчислити активну потужність змінного струму за період T, якщо величина напруги джерела енергії $U = U_m \sin\omega t$, а струм у ланцюзі $i = I_m \sin(2\omega t - \varphi)$, де I_m, U_m – амплітудні значення струму та напруги; φ – початкова фаза.

Відповідь. $P = I_m U_m cos\varphi$.

Задача 65. Обчислити діюче значення $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$ змінного струму $i = I_m \sin\omega t$ за період T.

Відповідь: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Задача 66. Обчислити діюче значення змінного струму

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Задача 67. Визначити діюче значення напруги $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T U^2 dt}$ синусоїдального струму за період T, якщо $U = U_m \sin \omega t$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Задача 68. Напруга та струм в ланцюзі виражаються відповідно формулами $U = U_m \sin \omega t$ та $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, де U_m, I_m – амплітудні значення напруги та струму. Визначити коефіцієнт потужності $\cos\varphi$, якщо активна потужність за період T дорівнює P.

Відповідь: $\cos\varphi = \dfrac{2P}{U_m P_m}$**.**

Задача 69. Напруженість електромагнітного поля, що утворюється антеною, виражається інтегралом

$$H = \frac{2\sqrt{2}\omega I_0}{cr}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)\sin Q \int_0^l \cos\frac{\pi z}{2l}\cos(\frac{\pi z}{2l}\cos Q)dz.$$

Обчислити значення інтеграла.

Відповідь: $H = \dfrac{4\sqrt{2} l \omega I_0}{\pi c r}\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi r}{\lambda}\right)\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos Q\right)}{\sin Q}$.

2.4. Застосування визначеного інтеграла

Задача 70. При зміні температури опір металевих провідників змінюється за законом $R = R_0(1-0,004Q)$ (R_0 – опір при 0° С, Q – температура за Цельсієм.)

Провідник, опір якого при 0° C дорівнює R_0 = 10 Ом, рівномірно нагрівається від $Q_1 = 20^{\circ}$ до $Q_2 = 200^{\circ}$ протягом 10 хвилин, і по ньому протікає струм під напругою U = 120 В . Скільки кулонів електрики протече за цей час через провідник?

Розв'язання. За умовою задачі швидкість зміни температури

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{200^{\circ} - 20^{\circ}}{600} = 0,3 \text{ град/с.}$$

Отже температура провідника змінюється за законом

$$Q = Q_1 + 0,3t = 20 + 0,3t\,.$$

При цьому опір провідника

$$R = R_0(1+0,004Q) = 10\left[1+0,04(20+0,3t)\right] = 10,8+0,012t\,.$$

Струм $I = \dfrac{120}{10,8+0,012t}$.

Тоді

$$q = \int_0^{600} I(t)dt = \int_0^{600} \frac{120dt}{10,8+0,012t} = \frac{120}{0,012}\ln\left|10,8+0,012t\right|_0^{600} \approx 5110\,Кл.$$

Відповідь: q = 5110 Кл.

Задача 71. Струм I у провіднику змінюється з часом за законом $I = 2+3t^2$ (I – в амперах, t – у секундах).

Знайти: 1) Яка кількість електрики проходить через поперечний переріз провідника за час від t_1 = 2 с до t_2 = 5 с;

2) При якому постійному струмі через поперечний переріз провідника за цей час пройде та ж сама кількість електрики?

Відповідь: 1) q = 123 Кл; $I = 41$ А.

Задача 72. Звичайний змінний (місцевий) струм, який має 50 коливань в секунду, змінюється з часом t за законом

$$I = I_m \sin 100\pi t.$$

Знайти кількість електрики, що протікає через поперечний переріз провідника за час від $t_1 = 0$ с до $t_2 = 0{,}01$ с (на протязі половини періоду).

Відповідь: $Q = \dfrac{I_0}{50\pi}$ Кл.

Задача 73. Напруга на клемах електричного ланцюга $U = 120$ В. В ланцюг рівномірно вводиться опір зі швидкістю 0,1 Ом/с. Крім того, в ланцюг включено постійний опір $R_o = 10$ Ом .

Скільки кулонів електрики пройде через ланцюг протягом двох хвилин?

Відповідь: $q = 1200 \cdot \ln 2{,}2 \ln 2{,}2 \approx 946$ Кл.

Задача 74. Напруга синусоїдального струму визначається формулою $U = U_0 \sin \dfrac{2\pi t}{T}$, а струм – за формулою $I = I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$. Обчислити роботу струму за час від $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ і знайти її найбільше значення.

Відповідь: $A = \dfrac{U_0 I_0}{2} T \cos\varphi_0$; $A_{\max} = \dfrac{U_0 I_0}{2} T$.

Вказівка: Робота $A = \int\limits_0^T UIdt$.

Задача 75. Нескінчена пряма заряджена додатною електрикою (лінійна густина електрики σ).

З якою силою діє ця пряма на одиничний заряд, який знаходиться точці A на відстані a від неї?

Діелектрична проникливість середовища дорівнює одиниці.

Відповідь: $F = \dfrac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$.

Задача 76. По прямолінійному провіднику з довжиною $l = 20$ см проходить струм $I = 12$ А.

Знайти напругу магнітного поля в точці, яка є рівновіддаленою від кінців провідника і знаходиться на відстані d =8 см від його осі (рис. 20).

Як зміниться напруга поля в цій точці, якщо провідник буде мати нескінчену довжину?

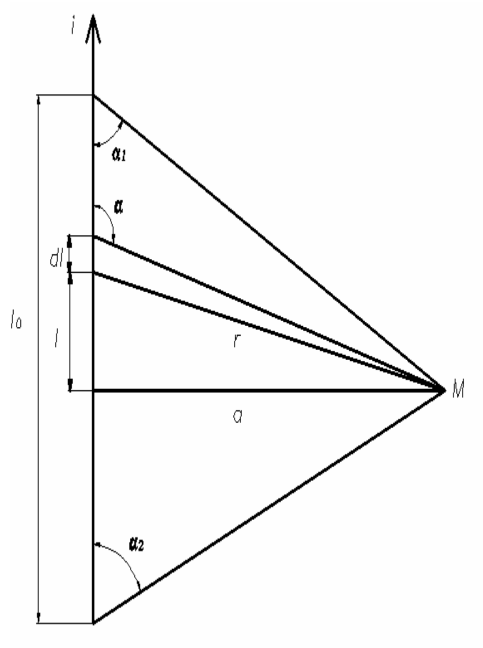

Рис. 20

Розв'язання. Напруга магнітного поля в точці *M* від елемента *dl* провідника з током визначається за формулою

$$dH = \frac{Idl}{4\pi r^2}\sin\alpha .$$

З рис.20 видно, що

$$l = actg(\pi - \alpha) = -actg\alpha;$$

$$\alpha = r\sin(\pi - \alpha) = r\sin\alpha .$$

Звідси

$$dl = \frac{a}{\sin^2\alpha}d\alpha; \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2};$$

$$dH = \frac{Ia\sin^3\alpha}{4\pi a^2\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{1}{4\pi\alpha}\sin\alpha d\alpha.$$

Елементарні складові *dH* в точці *M* мають один і той самий напрямок, тому величину *H* можна отримати складанням величин *dH*, тобто

$$H = \int_{\alpha_2}^{\pi-\alpha_1}\frac{1}{4\pi\alpha}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\alpha(-\cos\alpha)}\Bigg|_{\alpha_2}^{\pi-\alpha_1} = \frac{1}{4\pi\alpha}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

Тут $\alpha_1 = \alpha_2$; $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 2\cos\alpha_1$.

$$H = \frac{1}{2\pi\alpha}\cos\alpha_1 = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\frac{1}{2}l_0}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}l_0\right)^2}} = 0{,}187 \text{ А/см} = 0{,}234 \text{ (е).}$$

Якщо $l \to \infty$, $I = 12$ А, $\alpha_1 = 1$, $H = \dfrac{I}{2\pi\alpha} = \dfrac{12}{2\pi\alpha\cdot 8} = 0{,}239(e)$.

Задача 77. Двопровідникова лінія і прямокутна рамка лежать в одній площині.

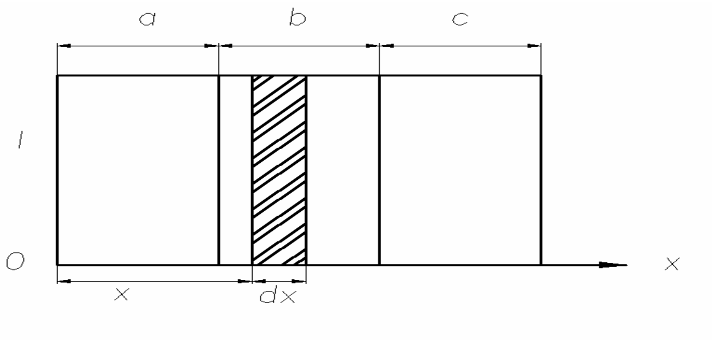

Рис. 21

Визначити потік, який протікає через рамку, якщо $a = b = c = 10$ см; $I = 100$ А; $l = 10$ см (рис. 21).

Розв'язання. Магнітне поле двопровідникової лінії неоднорідне. Тому виділимо з внутрішньої сторони рамки площадку $ls = ldx$ і визначимо магнітний потік, який проходить через неї і утворюється струмом лівого провідника (рис. 21).

$$d\varPhi_1 = B_1 ldx = \mu_o \frac{I}{2\pi x} ldx.$$

Магнітний потік всієї рамки від лівого провідника

$$\varPhi_1 = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 Il}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Магнітний потік всієї рамки від правого провідника визначається аналогічно:

$$\varPhi_2 = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{b+c}{c}.$$

Загальний магнітний потік

$$\varPhi = \varPhi_1 + \varPhi_2 = \frac{\mu_0 lI}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ac} = 2,77 \cdot 10^{-4}\, Вб = 27700 Мкс.$$

Задача 78. В магнітному полі струму I=60 A, що протікає по прямому проводу розміщена прямокутна рамка з розмірами $b \times h = 3 \times 20$ см (рис.22). Рамка розташована в площині, що проходить через вісь провода, причому її сторона паралельна осі провода і знаходиться від неї на відстані a = 2 см.

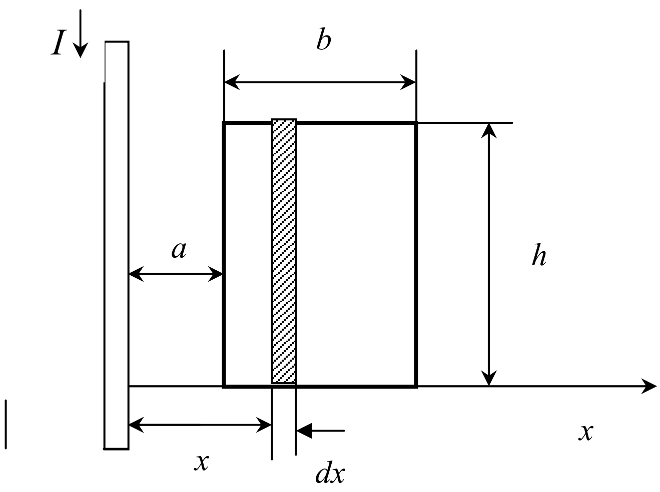

Рис. 22

Визначити магнітний потік, який пронизує рамку.

Розв'язання. Оскільки площадку рамки $h \times dx$ пронизує магнітний потік $B\,h\,dx = \frac{M_o I}{2\pi x} h\,dx$, то магнітний потік, що пронизує всю рамку буде визначатися формулою

$$\Phi = \int_a^{a+b} Bhdx = \int_a^{a+b} \frac{\mu_o Ih}{2\pi x} dx \approx 0,4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} \frac{60 \cdot 0,2}{2 \cdot 3,14} \cdot \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} =$$

$$= 2,4 \cdot 10^{-6} \ell n \left|x\right| \Big|_a^{a+b} = 2,4 \cdot 10^{-6} \ell n \frac{5}{2} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \, Вб.$$

Задача 79. Електричний заряд E, який зосереджено на початку координат відштовхує заряд e з точки (a, 0) в точку (b, 0). Визначити роботу A сили відштовхування F (рис.23).

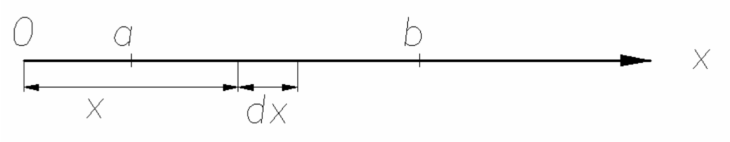

Рис. 23

Розв'язання. Диференціал роботи сили на відрізку dx дорівнює

$$dA = Fdx = = eE\,\frac{dx}{x^2}\,.$$

Звідки
$$A = eE \cdot \int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(-\frac{1}{x}\bigg|_a^b\right) = eE\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

При $\quad b \to \infty, \quad A \to \dfrac{eE}{a}\,.$

Задача 80. Знайти кількість тепла, що виділяється змінним синусоїдальним струмом $I = I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$ впродовж періоду T у провіднику з опором R.

Розв'язання. Для постійного струму, за законом Джоуля – Ленца, кількість тепла за одиницю часу дорівнює $Q = 0,24 I^2 R.$ При змінному струмі $dQ = 0,24 I^2(t) R dt.$ Звідки:

$$Q = 0,24R\int_{t_1}^{t_2} I^2 dt = 0,24 I_0^2 R \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)dt =$$

$$= 0,12 R I_0^2 \cdot \left[t - \frac{T \sin 2\left(\frac{2\pi}{T} - \varphi\right)}{4\pi} \right]_0^T = 0,12 RT I_0^2.$$

Список рекомендованої літератури

1. Борисов Ю.М., Липатов Д.Н. Общая электротехника. Учебное пособие для неэлектротехнических специальностей вузов. М., Высш. шк., 1974.

2. Марон И.А. Дифференнциальное и интегральное исчисления в примерах и задачах функции одной переменной. – М.: Наука, 1973.

3. Ноздрин И.Н., Степаненко И.М., Костюк Л.К. Прикладные задачи по высшей математике. – К.: Выща шк.,1976.

4. Пискунов Н.С. Дифференнциальное и интегральное исчисления. – Ч.1. – М.: Наука, 1978.

5. Подгорный А.Н. Основы и методы прикладной теории упругости. – К.: Выща шк., 1981.

6. Электрические системы: математические задачи энергетики / Под ред. В.В.Веникова. – М.: Энергия,1972.

ЗМІСТ

Павліщев Валентин Іванович
Бойко Любов Йосипівна

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ
ДО РОЗВ`ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕХНІЧНОГО ЗМІСТУ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДЛЯ САМОСТІЙНОІ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
напрямів підготовки 6.050301 Гірництво, 6.050101 Комп'ютерні науки,
6.040103 Геологія, 6.050502 Інженерна механіка

Друкується в авторській редакції.

Підп. до друку 25.07.12. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,7.
Обл.-вид.арк. 2,7. Тираж 30 пр. Зам. №

Державний вищий навчальний заклад
"Національний гірничий університет"
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.