Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТРИГОНОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
слушателям подготовительного отделения
для иностранных граждан

Днепропетровск
2012

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТРИГОНОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

слушателям подготовительного отделения

для иностранных граждан

Днепропетровск
НГУ
2012

Тригонометрия. Методические указания по элементарной математике слушателям подготовительного отделения для иностранных граждан) / С.Є. Тимченко, С.Н. Подольская, З.И. Бондаренко, Д.В. Клименко. – Д.: Национальный горный университет, 2012. – 45 с.

Авторы:
С.Е. Тимченко, канд. техн. наук, доц.;
С.М. Подольская, ст. препод.;
З.И. Бондаренко, ст. препод.;
Д.В. Клименко, ассист.

Утверждено методической комиссией университета по представлению кафедры высшей математики (протокол № 7-12 от 23.04.2012).

Данное методическое указание разработано согласно программе подготовительного отделения для иностранных граждан, которые прибыли в Украину с целью получения высшего образования.

Содержит элементы теории, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Ответственная за выпуск заведующая кафедрой высшей математики Е.А. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Тригонометрия

1. Углы, дуги, их измерение

Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые имеют общее начало, то есть, выходят из одной точки – вершины угла (рис. 1).

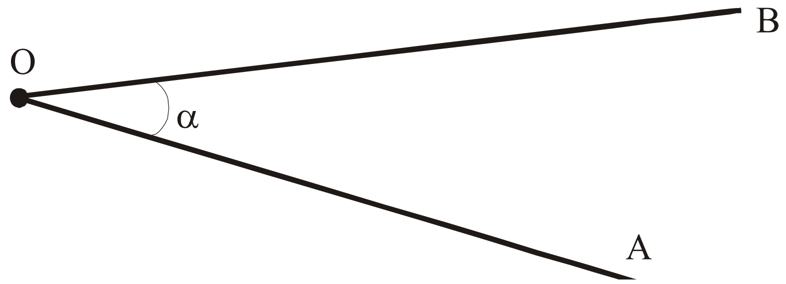


Рис. 1. – Понятие угла

Обозначают угол следующим образом: $\angle AOB = \angle BOA = \angle\alpha = \alpha$.

Угол можно рассматривать как фигуру, образованную вращением луча вокруг своей начальной точки O. Направление вращения против часовой стрелки договорились называть **положительным**, по часовой стрелке – **отрицательным** (рис. 2).

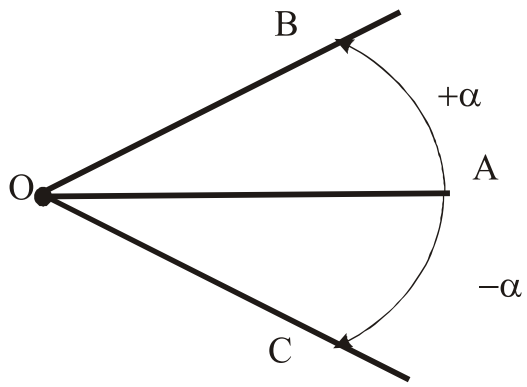


Рис. 2. – Поворот точки на угол α

Если луч делает полный оборот вокруг своей начальной точки, то этот угол имеет название **полного угла**. Оси абсцисс (Ox) и ординат (Oy) делят полный угол на четыре четверти или четыре квадранта (рис.3).

Углы измеряются в градусах и радианах. Полный угол равен 360° или 2π радиан, то есть $2\pi = 360°$. Отсюда 1 радиан = $\frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ$. От градусов можно перейти к радианам и наоборот.

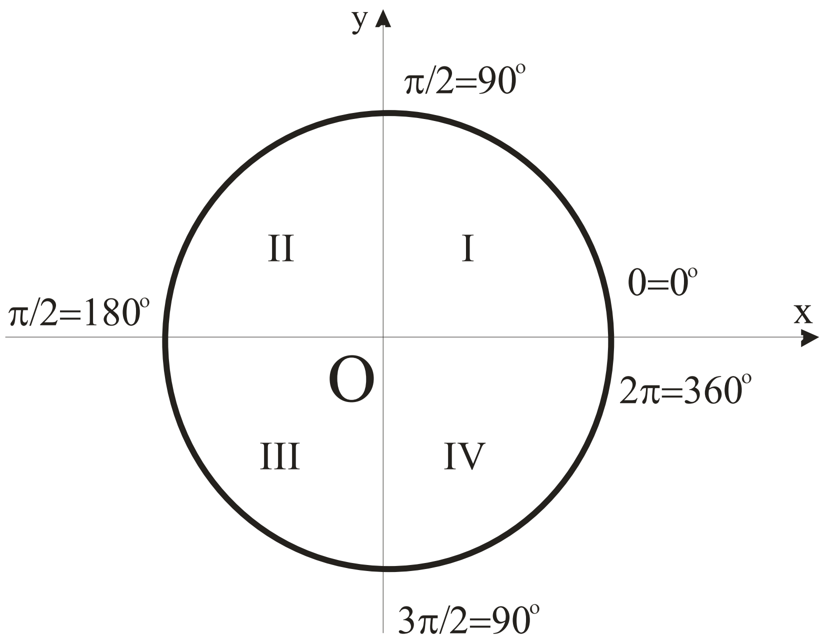


Рис. 3 – Измерение углов

Пример 1. Выразить в радианах угол в 30°.
Составим пропорцию: π = 180°

$$x = 30°. \text{ Отсюда } x = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Выразить в градусах угол в 2 радиана.
Составим пропорцию: π = 180°

$$2 = x. \text{ Отсюда } x = \frac{2 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 114{,}6^\circ.$$

Приведем таблицу перехода от градусов к радианам для некоторых углов:

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. Определение тригонометрических функций

Введем понятие тригонометрических функций с помощью прямоугольного треугольника (рис.4).

$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}$ - отношение противолежащего катета к гипотенузе.

$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$ - отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$tg\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$ - отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

$ctg\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$ - отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

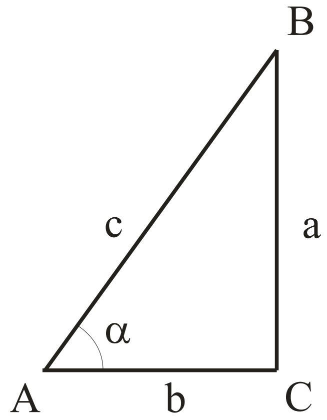


Рис. 4 – Введение понятия тригонометрических функций с помощью прямоугольного треугольника

Тригонометрические функции являются функциями только угла α, то есть не зависят от длины гипотенузы. Тогда мы можем ввести прямоугольную систему координат XOY на плоскости и круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 5). Такой круг имеет название **единичного** или **тригонометрического круга**.

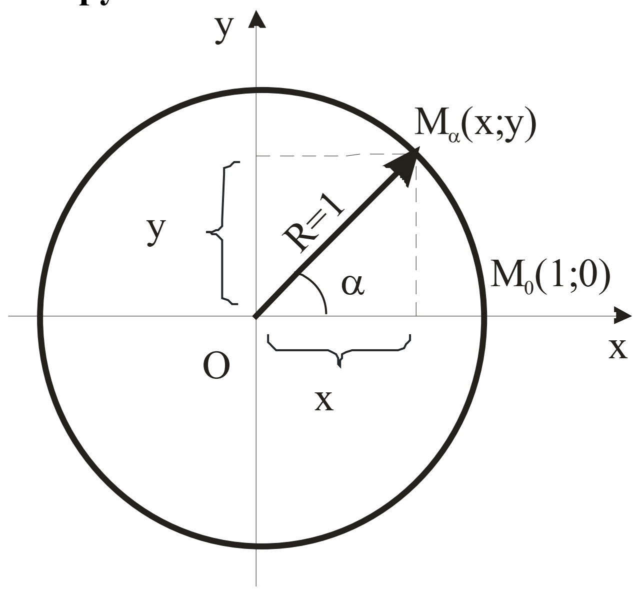


Рис. 5 – Единичный круг

От начального радиуса OM_0 отложим в положительном направлении угол α и точка $M_0(1;0)$ перейдет в точку $M_\alpha(x;y)$. Тогда, согласно определениям, приведенным выше, $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$. Так как R=1, получим, что синус угла α равен ординате, а косинус - абсциссе точки $M_\alpha(x;y)$.

Также $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x}$ - отношение ординаты точки $M_\alpha x;y)$ к ее абсциссе; $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{y}$ - отношение абсциссы точки к ее ординате. Таким образом, в тригонометрическом круге:

- ордината точки $M_\alpha x;y)$ – линия синусов угла α;
- абсцисса точки $M_\alpha x;y)$ – линия косинусов угла α;
- прямая $x = 1$ – ось тангенсов;
- прямая $y = 1$ – ось котангенсов (рис.6).

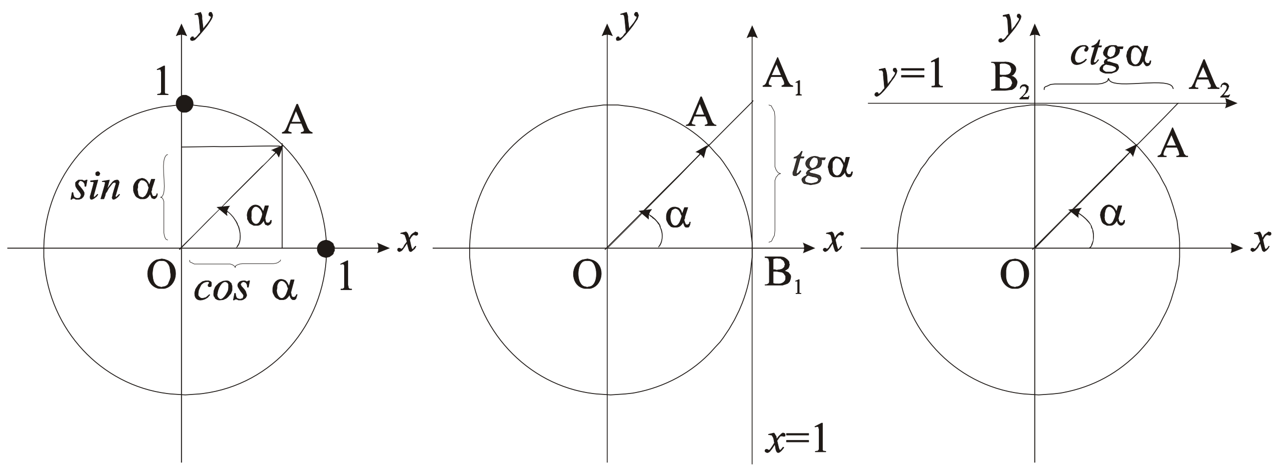
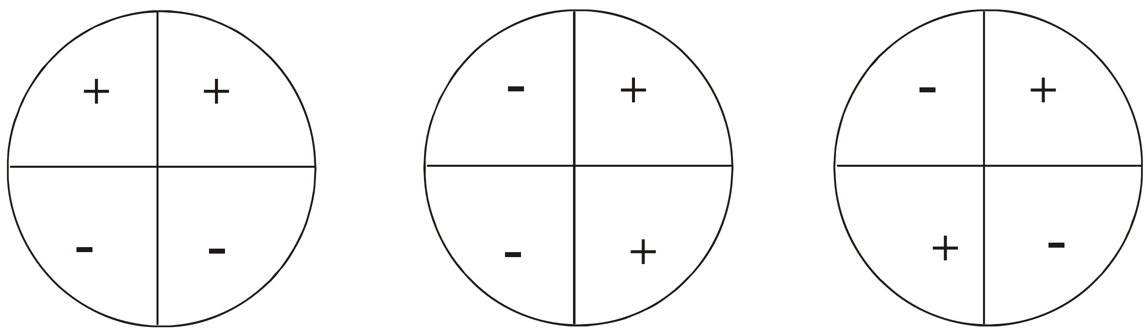


Рис. 6 – Тригонометрические функции в единичном круге

Теперь легко определить знаки тригонометрических функций в разных четвертях (квадрантах). Знаки каждой функции изобразим на рисунке 7.



а) Синус

б) Косинус

с) Тангенс и котангенс

Рис. 7 - Знаки тригонометрических функций

3. Основные тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \qquad (2)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (3)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (4)$$

Пример 3. Определить знаки выражений: а) $\sin 2$; б) $\cos 6$.

Решение. Изобразим углы в 2 и 6 радиан на тригонометрическом круге (рис. 8).

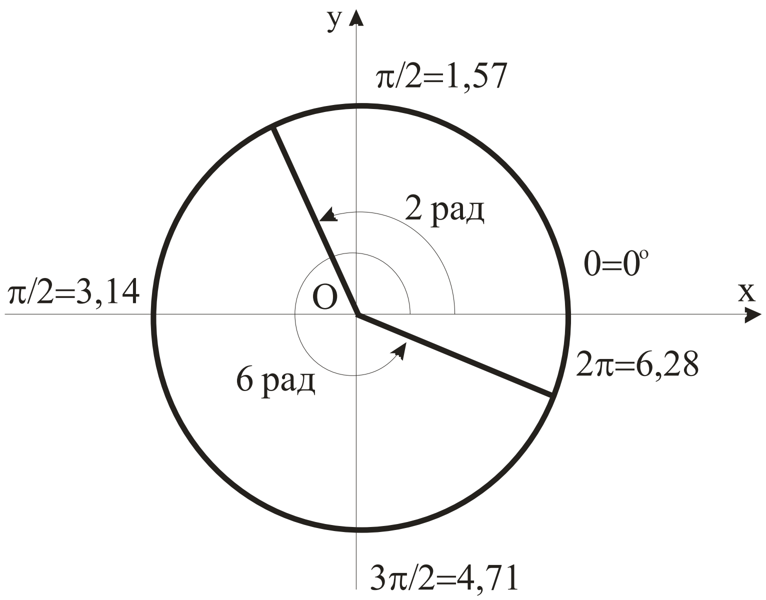


Рис. 8 – Углы 2 и 6 радиан на единичном круге

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, поэтому угол $\alpha = 2$ заканчивается во второй четверти, а $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, угол $\alpha = 6$ - в IV четверти. Тогда $\sin 2 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Ответ: $\sin 2 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Пример 4. Найти $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $90° < \alpha < 180°$.

Решение. Из формулы (1): $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. В этой формуле знак «+» или «–» выбирается в зависимости от того, в какой координатной четверти заканчивается угол. По условию угол α заканчивается во второй четверти, поэтому $\cos\alpha < 0$ (рис. 7б). Значит перед радикалом берем знак «–».

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}; ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $tg\alpha = -\frac{4}{3}$; $ctg\alpha = -\frac{3}{4}$.

Пример 5. Найти $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ ctg\alpha$, если $tg\alpha = \frac{1}{3}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из формулы (3): $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$;

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$. Так как угол заканчивается в III четверти, то $\cos\alpha < 0$ (рис.7б). Тогда

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{9+1}{9}}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Из рис.7, $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$;

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha} = 1:\frac{1}{3} = 3.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}; \cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $ctg\alpha = 3$.

Пример 6. Упростить выражение: $A = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^2\alpha$.

Решение. Применим формулу (1)

$$A = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Ответ: A=1.

Далее рассмотрим примеры на доказательства тригонометрических тождеств.

Пример 7. Доказать, что $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha} = 2tg^2\alpha$.

Доказательство. Будем упрощать левую часть тождества, используя формулы сокращенного умножения и формулы (1) - (4).

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg^2\alpha\ .$$

Таким образом $2tg^2\alpha = 2tg^2\alpha$, тождество доказано.

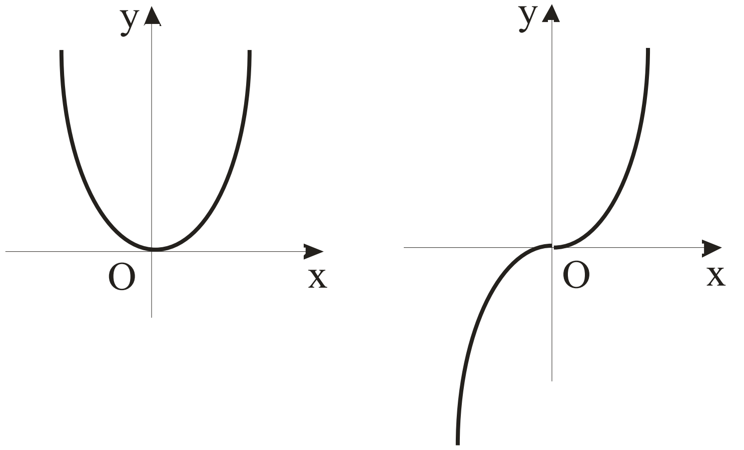
Пример 8. Доказать, что $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Доказательство. Это тождество можно рассматривать как пропорцию. Чтобы доказать справедливость пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, достаточно доказать, что $ad=cb$. Поэтому $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$. Для преобразования в правой части применим формулу разности квадратов: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ и получим $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$; $\sin^2\alpha=\sin^2\alpha$. Тождество доказано.

4. Свойства тригонометрических функций

4.1. Четность и нечетность тригонометрических функций

Напомним, что если функция четная, то $f(-x)=f(x)$. График такой функции симметричен относительно оси OY (рис. 9а).



а) четная функция б) нечетная функция

Рис. 9 – График четной и нечетной функции

Из тригонометрических функций четной является $y=\cos x$, все остальные – нечетные. Для нечетной функции $f(-x)=-f(x)$ и график ее симметричен относительно начала координат(рис 9б). Таким образом, $\cos(-x)=\cos(x)$;
$\sin(-x)=-\sin(x)$; $tg(-x)=-tg(x)$; $ctg(-x)=-ctg(x)$.

Пример 9 . Исследовать на четность функции: а) $y=\sin x\cdot\cos x$; б) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; в) $y=tgx+ctgx$; г) $y=\sin x-\cos x$.

Решения. а) $y(x)=\sin x\cdot\cos x$

$y(-x)=\sin(-x)\cdot\cos(-x)=-\sin x\cdot\cos x=-y(x)$. Таким образом, $y(-x)=-y(x)$, следовательно, функция $y=\sin x\cdot\cos x$ – нечетная.

б) $y(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

$y(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=y(x)$. Получим $y(-x)=y(x)$, то есть функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ - четная.

в) $y(x)=tgx+ctgx$;

$y(-x)=tg(-x)+ctg(-x)=-tgx-ctgx=-(tgx+ctgx)=-y(x)$. Значит функция – нечетная.

г) $y(x)=\sin x-\cos x$

$y(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$;

$y(-x)\neq -y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$, следовательно функция не является ни четной ни нечетной, то есть это функция общего вида.

4.2. Периодичность тригонометрических функций

Функция $f(x)$ – **периодическая**, если выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$, где T – период функции. Каждая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, так как, если T – период, то nT – тоже период, где $n\in Z$. Говоря о периоде, имеют в виду наименьший положительный период, который называется **основным**. Основными периодами для тригонометрических функций будут: $T=360°=2\pi$ для функций $y=\sin x$; $y=\cos x$; $T=180°=\pi$ для функций $y=tgx$; $y=ctgx$.

Если период функции $y=f(x)$ равен T_1, а период функции $y=\varphi(x)$ равен T_2, то периоды функций $y=f(x)+\varphi(x)$ и $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ равны наименьшему общему кратному (НОК) чисел T_1 и T_2, причем при делении его на T_1 и T_2 будут целые числа. Напомним, что периоды функций $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ и $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ вычисляются по формуле $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, а периоды функций $y=Atg(\omega x+\varphi)$ и $y=Actg(\omega x+\varphi)$ - по формуле $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Пример 10. Найти периоды функций: а) $y=5\sin 2x+2ctg3x$;

б) $y=9\sin(5x+\dfrac{\pi}{3})-4\cos(7x+2)$; в) $y=3\sin(\pi x)+8tg(x+5)$.

Решение. а) Период функции $y = 5\sin 2x$ будет $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, период функции $y = 2ctg 3x$ - $T_2 = \frac{\pi}{3}$. НОК чисел π и $\frac{\pi}{3}$ равно π, поэтому период заданной функции $T = \pi$.

б) Найдем периоды слагаемых. Период функции $y = 9\sin(5x + \frac{\pi}{3})$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, а период функции $y = 4\cos(7x + 2)$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{7}$. Ясно, что период заданной функции $T = 2\pi$. Действительно, $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5$; $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$ - целые числа.

в) Период функции $y = 3\sin(\pi x)$ будет $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, а период функции $y = 8tg(x + 5)$ - $T_2 = \frac{\pi}{1} = \pi$. Ясно, что нет такого числа, результатом деления которого на 2 и на π одновременно были бы целые числа. То есть, заданная функция не периодическая.

5. Формулы приведения

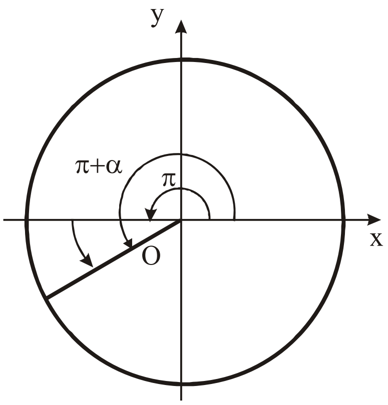
Формулами приведения называют отношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ выражают через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$. Для лучшего запоминания формул приведения можно использовать такие правила:

1) Если угол α откладывается от вертикальной оси (углы $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то название приводимой функции меняется на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот); если же угол α откладывается от горизонтальной оси (углы $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$), то название приводимой функции сохраняется.

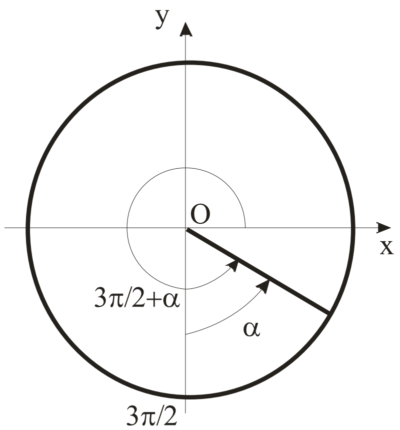
2) Чтобы определить знак в правой части формулы («+» или « - »), достаточно, считая угол α острым, определить знак выражения стоящего в левой части формулы, при этом перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов ($\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$).

Пример 11. Привести к тригонометрической функции острого угла:

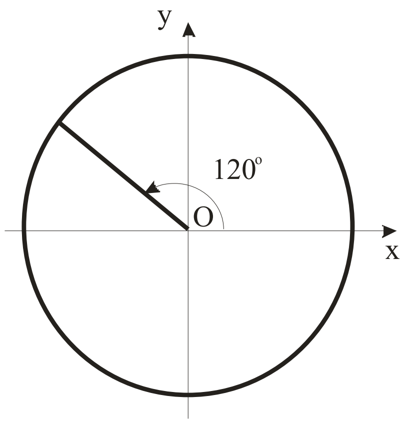
а) $\sin(\pi + \alpha)$; б) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$; в) $tg120°$; г) $\cos 315°$.



Решение. а) $\sin(\pi+\alpha)$ - острый угол откладывается от горизонтального диаметра (смотри рисунок), то есть название функции не изменяется. Угол $(\pi+\alpha)$ находится в III четверти, в которой функция синус имеет отрицательное значение. Тогда $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.



б) $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ - острый угол откладывается от вертикального диаметра, то есть косинус изменяется на синус. Угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ - в IV четверти (смотри рисунок), где косинус положительный. Следовательно, $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$.



в) $tg120°=tg(90°+30°)=-ctg30°=-\sqrt{3}$ - так как острый угол 30° откладывается от вертикального диаметра и тангенс во II четверти отрицательный.

г) $\cos 315°=\cos(270°+45)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Для удобства запоминания сведем результаты в таблицу:

Формулы приведення

Функция	Аргумент t						
	π/2 - α	π/2 + α	π - α	π + α	3π/2 -α	3π/2 +α	2π -α
sin t	cos α	cos α	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α
cos t	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α	cos α
tg t	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α	ctg α	- ctg α	- tg α
ctg t	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α	tg α	- tg α	- ctg α

Пример12. Вычислить А= $\cos 105° - \sin 195° + \sin(-135°)$.

Решение. Вычислим каждое слагаемое:

$\cos 105° = \cos(90° + 15°) = -\sin 15°$; $\sin 195° = \sin(180° + 15°) = -\sin 15°$;

$\sin(-135°) = -\sin 135° = -\sin(180° - 45°) = -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

А=$-\sin 15° \ -(-\sin 15°) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: А=$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 13. Вычислить А= $\sin\dfrac{8\pi}{3} ctg\dfrac{11\pi}{6} + \cos\dfrac{29\pi}{6} tg\dfrac{4\pi}{3}$.

Решение. Используя периодичность функций и формулы приведения, имеем: $\sin\dfrac{8\pi}{3} = \sin\dfrac{6\pi + 2\pi}{3} = \sin(2\pi + \dfrac{2\pi}{3}) = \sin\dfrac{6\pi + 2\pi}{3} = \sin(2\pi + \dfrac{2\pi}{3}) =$

$=\sin\dfrac{3\pi - \pi}{3} = \sin(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (угол $\dfrac{2\pi}{3}$ принадлежит II четверти);

$ctg\dfrac{11\pi}{6} = ctg\dfrac{12\pi - \pi}{6} = ctg(2\pi - \dfrac{\pi}{6}) = -ctg\dfrac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

$\cos\dfrac{29\pi}{6} = \cos\dfrac{30\pi - \pi}{6} = \cos(5\pi - \dfrac{\pi}{6}) = \cos(2 \cdot 2\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6}) =$

$= \cos(\pi - \dfrac{\pi}{6}) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (угол $(\pi - \dfrac{\pi}{6})$ принадлежит II четверти, в которой функция косинус отрицательная); $tg\dfrac{4\pi}{3} = tg(\pi + \dfrac{\pi}{3}) = tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

А=$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) + (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \sqrt{3} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = -3$. Ответ: А = – 3.

6. Основные формулы тригонометрии

Приведем восемь основных групп формул тригонометрии (часть их была приведена выше).

6.1. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, (\alpha \neq \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z);$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z);$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, (\alpha \neq n\pi, \quad n \in Z).$$

6.2. Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\ tg\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z;$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\ tg\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z;$$
$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\ ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq k\pi,\quad k\in Z;$$
$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\ ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq k\pi,\quad k\in Z.$$

6.3. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$
$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};\quad \alpha,\ 2\alpha\neq\pi/2+\pi n,\ n\in Z;$$
$$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha};\quad \alpha,\ 2\alpha\neq\pi n,\ n\in Z;$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$
$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$$

6.4. Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

6.5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];\qquad \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

6.6. Формулы преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha);$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha);$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\quad \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z;$$

$$ctg\alpha-ctg\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\quad \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z.$$

6.7. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha\neq\pi+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha\neq\pi+\pi k,\ k\in Z;$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

6.8. Формулы тригонометрических функций половинного аргумента

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha; \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha;$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \quad \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \quad \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \alpha\neq\pi n,\ n\in Z;$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}; \quad \alpha\neq 2\pi n,\ n\in Z;$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}; \quad \alpha\neq 2\pi n,\ n\in Z;$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \alpha\neq\pi n,\ n\in Z.$$

7. Решение примеров и тождественные преобразования тригонометрических выражений

Пример 14. Найти $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Решение. Используем формулы 6.1.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Поскольку угол α находится в I четверти, то $\cos\alpha>0$ (а также $tg\alpha>0$ и $ctg\alpha>0$). Поэтому выбираем знак « + ».

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}==\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{9-1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

(Нужно следить, чтобы выполнялись неравенства $|\cos\alpha|\leq 1$ и $|\sin\alpha|\leq 1$). Теперь, применяя формулы этой же группы 6.1, находим

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}. \quad ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Пример 15. Вычислить $\cos\alpha, \sin\alpha, ctg\alpha$, если $tg\alpha=-\sqrt{15}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. Согласно формулам 6.1. $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ (так как угол α находится в II четверти, то $ctg\alpha < 0$). Из формулы $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$ $\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$. Поскольку во II четверти $\cos\alpha < 0$, то $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+(-\sqrt{15})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+15}} = -\frac{1}{4}$. Из формулы $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, найдем $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$ т.к. во II четверти $\sin\alpha > 0$, то

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = = \frac{1}{\sqrt{1+(-\frac{1}{\sqrt{15}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{15}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15+1}{15}}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Пример 16. Упростить выражение $\cos 19°\cos 41° - \sin 19°\sin 41°$.

Решение. Обратимся к формулам группы 6.2. Используя вторую формулу этой группы, получим $\cos 19°\cos 41° - \sin 19°\sin 41° = \cos(19° + 41°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Пример 17. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}$.

Решение. Перегруппируем слагаемые в числителе и знаменателе и затем применим формулы группы 6.6.

$$\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \frac{(\sin\alpha - \sin 3\alpha) - (\sin 5\alpha - \sin 7\alpha)}{(\cos\alpha - \cos 3\alpha) + (\cos 5\alpha - \cos 7\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2} - 2\sin\frac{5\alpha-7\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha+7\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2} + 2\sin\frac{5\alpha+7\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha-7\alpha}{2}} =$$

$= \frac{2\sin(-\alpha)\cos 2\alpha - 2\sin(-\alpha)\cos 6\alpha}{-2\sin 2\alpha\sin(-\alpha) + 2\sin 6\alpha\sin(-\alpha)} =$ (выносим общий множитель из числителя и знаменателя)

$$= \frac{2\sin(-\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{-2\sin(-\alpha)(\sin 2\alpha - \sin 6\alpha)} = = \frac{-2\sin\frac{2\alpha+6\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-6\alpha}{2}}{-2\sin\frac{2\alpha-6\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+6\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha\sin(-2\alpha)}{\sin(-2\alpha)\cos 4\alpha} = tg 4\alpha.$$

Пример 18. Вычислить значения $\cos\alpha, \sin\alpha, ctg\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=-3$.

Решение. Используя формулы 6.7, получим:

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(-3)}{1+(-3)^2}=\frac{-6}{1+9}=-0{,}6;$$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(-3)^2}{1+(-3)^2}=\frac{1-9}{1+9}=-0{,}8;$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Пример 19. Вычислить значение выражения $\frac{2+3\cos 2\alpha}{4-5\sin 2\alpha}$, если $tg\alpha=-\frac{2}{3}$.

Решение. Используя формулы 6.7, и считая аргумент α половинным относительно 2α, найдем:

$$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}}=-\frac{12}{13};$$

$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{13}{9}}=\frac{5}{13}$. Подставим найденные значения в выражение: $\frac{2+3\cos 2\alpha}{4-5\sin 2\alpha}=\frac{2+3\cdot\frac{5}{13}}{4-5\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)}=\frac{2+\frac{15}{13}}{4+\frac{60}{13}}=\frac{\frac{26+15}{13}}{\frac{52+60}{13}}=\frac{41}{112}$.

8. Графики и некоторые свойства тригонометрических функций

8.1. График функции *y = sin x*

График функции $y=\sin x$ называется **синусоидой** (обыкновенной). Для построения графика можно взять значения аргумента x с определенным интервалом и составить таблицу значений $y=\sin x$, соответсвующих выбранным значениям *x*, а затем по точкам построить график. Пользуясь периодичностью функции $\sin x$ легко продолжить график этой функции на всю числовую ось (рис. 10).

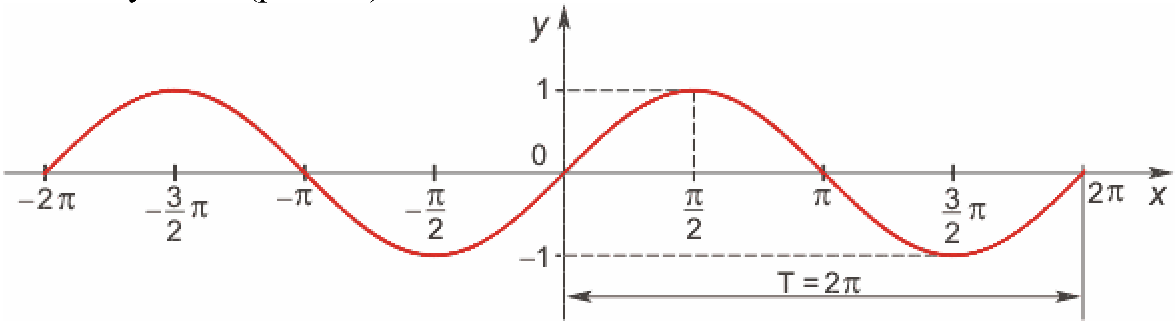


Рис.10 – График функции $y = \sin x$

Некоторые свойства функции $y = \sin x$:

1. Функция $y = \sin x$ существует при всех действительных значениях *x*, причем график ее является сплошной кривой линией, то есть функция непрерывна.
2. Функция $y = \sin x$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.
3. Все возможные значения функции $y = \sin x$ ограничены неравенствами $-1 \le \sin x \le 1$, причем $\sin x = 1$, если $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\sin x = -1$, если $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$.
4. Нули функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс): $\sin x = 0$, если $x = \pi n, \quad n \in Z$.
5. Интервалы монотонности (возрастания и убывания). Функция $y = \sin x$ возрастает, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции, на интервалах $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$, и убывает, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, на интервалах $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

8.2. График функции *y = cos x*

График функции $y = \cos x$ легко получить из графика функции $y = \sin x$. При любом *x*, согласно формулам приведения (п. 5), имеем: $y = \cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$.

Следовательно, вместо значения косинуса можно взять значения синуса, увеличив аргумент на $\frac{\pi}{2}$, то есть графиком функции $y = \cos x$ служит та же синусоида, но передвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево по оси абсцисс (рис. 11). График функции $y = \cos x$ называют **косинусоидой**.

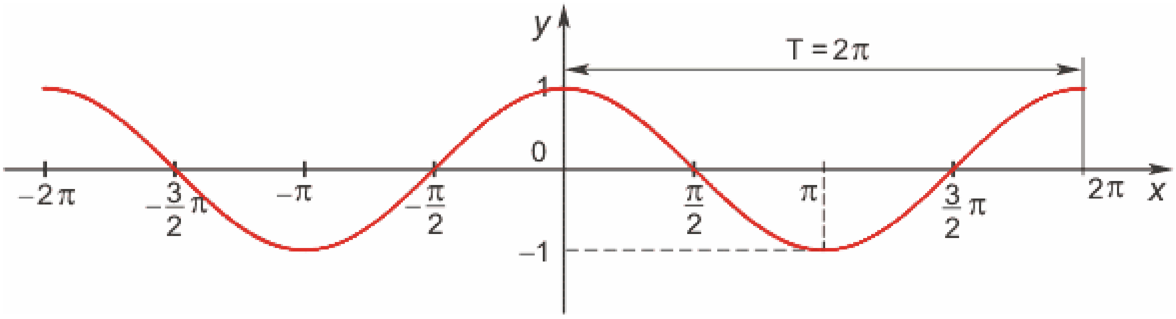


Рис.11 – График функции $y = \cos x$

Некоторые свойства функции $y = \cos x$:

1. Функция $y = \cos x$ определена и непрерывна при всех действительных значениях x.
2. Функция $y = \cos x$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат.
3. Функция $y = \cos x$ ограниченная: $-1 \le \cos x \le 1$, причем $\cos x = 1$, если $x = 2\pi n$ и $\cos x = -1$, если $x = (2n+1)\pi, \quad n \in Z$.
4. Нули функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс): $\cos x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z$.
5. Функция $y = \cos x$ возрастает на интервалах $\pi + 2\pi n \le x \le 2\pi(n+1), \quad n \in Z$, и убывает на интервалах $2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

8.3. График функции *y = tg x*

Подобно тому, как была построена синусоида, может быть построен график функции $y = tgx$ (рис. 12). График функции $y = tgx$ называют **тангенсоидой**.

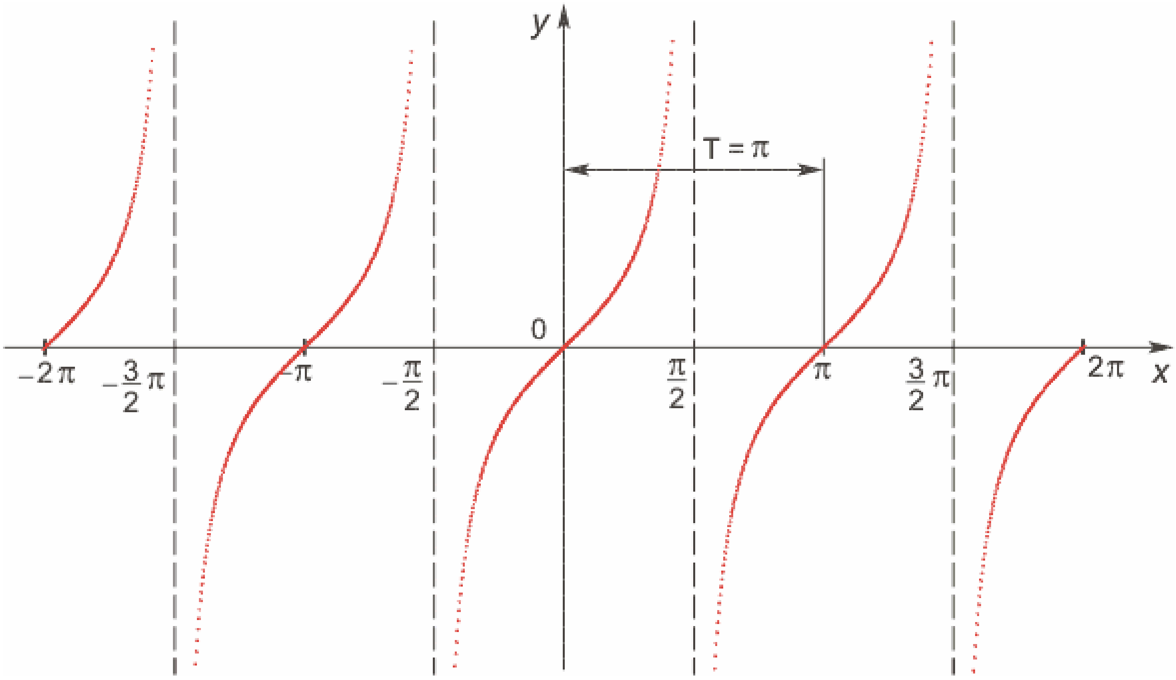


Рис.12 – График функции $y = tgx$

Некоторые свойства функции $y = tgx$:

1. Функция $y = tgx$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z$ или на промежутках $\frac{\pi}{2}(2n-1) < x < \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z$. В точках $x = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z$ функция не существует ($tgx \to \pm\infty$), и говорят, что в этих точках функция не является непрерывной. Ее график сплошной (непрерывный) только на промежутках ее определения, а не на всей числовой оси.
2. Функция $y = tgx$ – нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.
3. Функция $y = tgx$ – неограниченная, наибольшего и наименьшего значений не имеет.
4. Нули функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс): $tgx = 0$, если $x = \pi n, \quad n \in Z$.
5. Функция $y = tgx$ возрастает на всех промежутках определения.

8.3. График функции *y = ctg x*

График функции $y = ctgx$ можно получить из графика функции $y = tgx$, пользуясь формулой (п. 6.2) $ctgx = -tg(x + \frac{\pi}{2})$. График функции $y = ctgx$ получается из графика функции $y = tgx$ сдвигом последнего влево в направлении оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ и последующего отображения его (перевертывания) относительно этой оси (рис. 13). График функции $y = ctgx$ **котангенсоидой**.

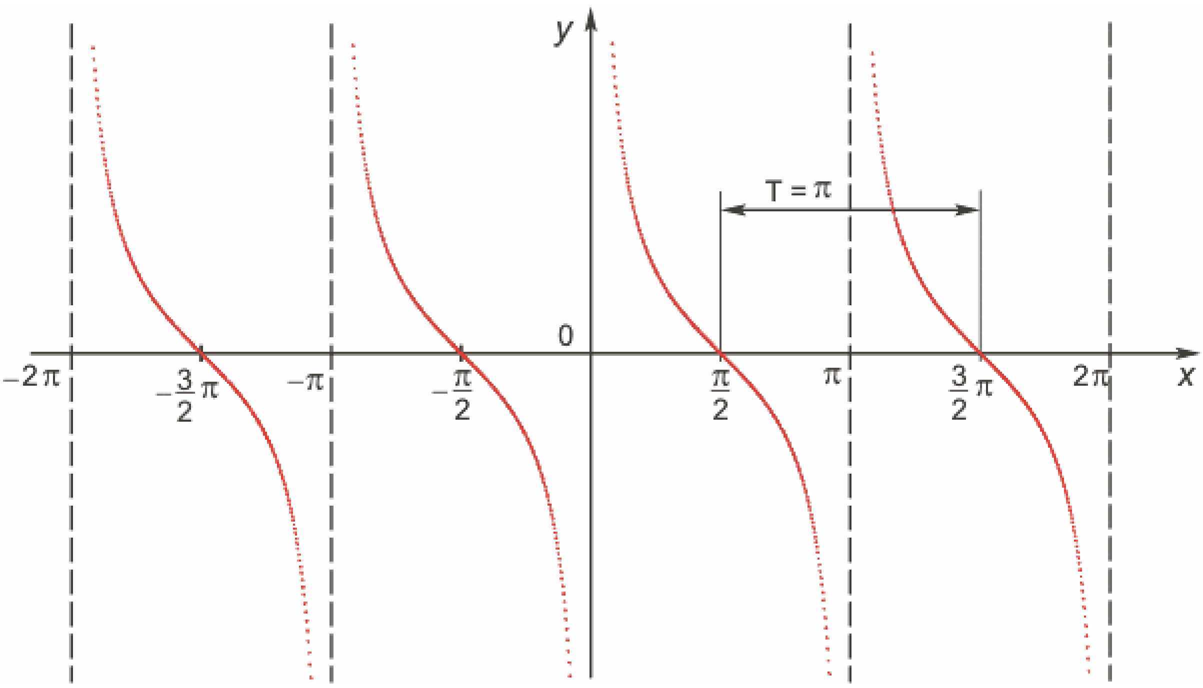


Рис.13 – График функции $y = ctgx$

Некоторые свойства функции $y = ctgx$:

1. Функция $y = ctgx$ определена при $x \neq \pi n,\quad n \in Z$ или на промежутках $\pi n < x < \pi(n+1),\quad n \in Z$. В точках $x = \pi n,\quad n \in Z$ функция не существует ($ctgx \to \pm\infty$), и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв.
2. Функция $y = ctgx$ – нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.
3. Функция $y = ctgx$ – неограниченная, наибольшего и наименьшего значений не имеет.
4. Нули функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс): $ctgx = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in Z$.
5. Функция $y = ctgx$ убывает на всех промежутках определения.

9. Обратные тригонометрические функции

9.1. Функция *y = Arcsin x*

При изучении функции, обратной синусу, выбираем отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y=\sin x$ возрастает и рассматриваем соответствующую этому отрезку обратную функцию $y=\arcsin x$, которую называют главным значением функции $y = Arc\sin x$.

Обратной тригонометрической функцией $y=\arcsin x$ называют дугу (угол) *y*, взятую на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен *x*. Другими словами, равенства $y=\arcsin x$ и $\sin y = x$ эквивалентны.

Основные свойства функции $y=\arcsin x$:

1. Функция $y=\arcsin x$ определена на отрезке $-1\le x\le 1$.
2. На отрезке $-1\le x\le 1$ функция возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то есть $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$.
3. $y=\arcsin x$ функция нечетная, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.
4. Все значения дуг (углов), синус которых равен *x*, определяют формулой $Arc\sin x=(-1)^n\arcsin x+\pi n,\quad n\in Z$.

График функции $y=\arcsin x$ приведен на рис.14, а график функции $y = Arc\sin x$ на рис. 15.

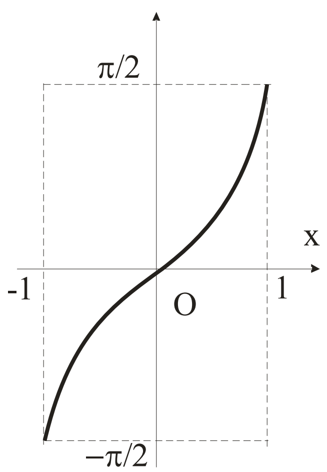


Рис. 14 - График функции $y=\arcsin x$

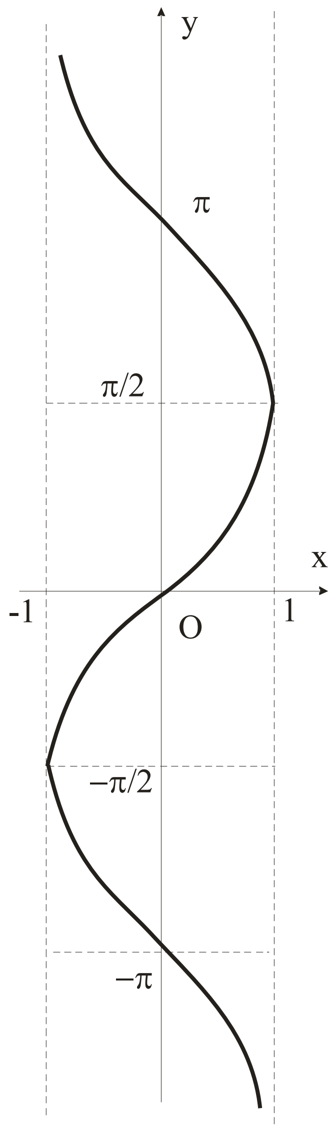


Рис. 15 - График функции $y = Arc\sin x$

9.2. Функция *y = Arccos x*

Обратной тригонометрической функцией $y = \arccos x$ называют дугу (угол) *y*, взятую на отрезке $[0;\pi]$, косинус которой равен *x*, то есть равенства $y = \arccos x$ и $\cos y = x$ эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \arccos x$:

1. Функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $-1 \le x \le 1$.
2. На отрезке $-1 \le x \le 1$ функция убывает от π до 0, то есть $0 \le \arccos x \le \pi$.
3. Для $\arccos x$ имеет место равенство: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, то есть свойством четности или нечетности эта функция не обладает.
4. Функция $y = \arccos x$ называется главным значением функции $y = Arc\cos x$.

Все значения дуг (углов), косинус которых равен x, определяются формулой $Arc\cos x = \pm\arccos x + 2\pi n, \quad n \in Z$. График функции $y = \arccos x$ приведен на рис.16, а график функции $y = Arc\cos x$ на рис. 17.

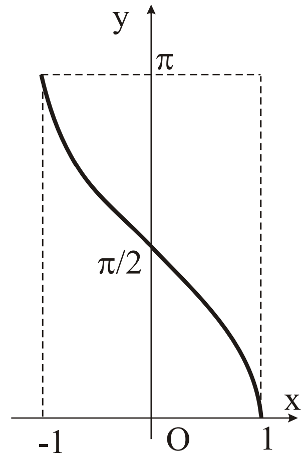


Рис. 16 - График функции $y = \arccos x$

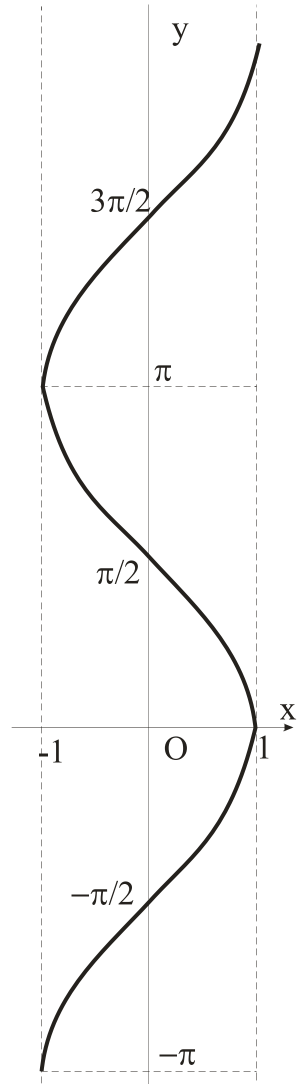


Рис. 17 - График функции $y = Arc\cos x$

9.3. Функция $y = Arctg\ x$

Обратной тригонометрической функцией $y = arctgx$ называют дугу (угол), взятую в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен *x*, то есть равенства $y = arctgx$ и $tgy = x$ эквивалентны.

Основные свойства функции $y = arctgx$

1. Функция определена на множестве всех действительных чисел.
2. В интервале $x \in (-\infty;+\infty)$ функция возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то есть $-\pi/2 < arctgx < +\pi/2$.
3. $y = arctgx$ - функция нечетная, $arctg(-x) = -arctgx$.
4. Функция $y = arctgx$ называется главным значением функции $y = Arctgx$. Все значения дуг (углов), тангенс которых равен *x*, определяются формулой $Arctgx = arctgx + \pi n$, $n \in Z$. Графики функций $y = arctgx$ и $y = Arctgx$ приведены на рис. 18 и 19.

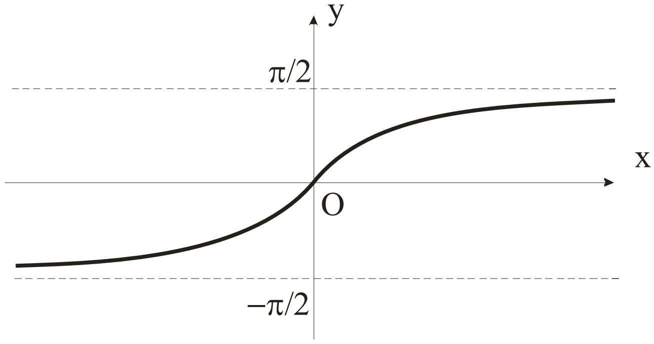


Рис. 18 - График функции $y = arctgx$

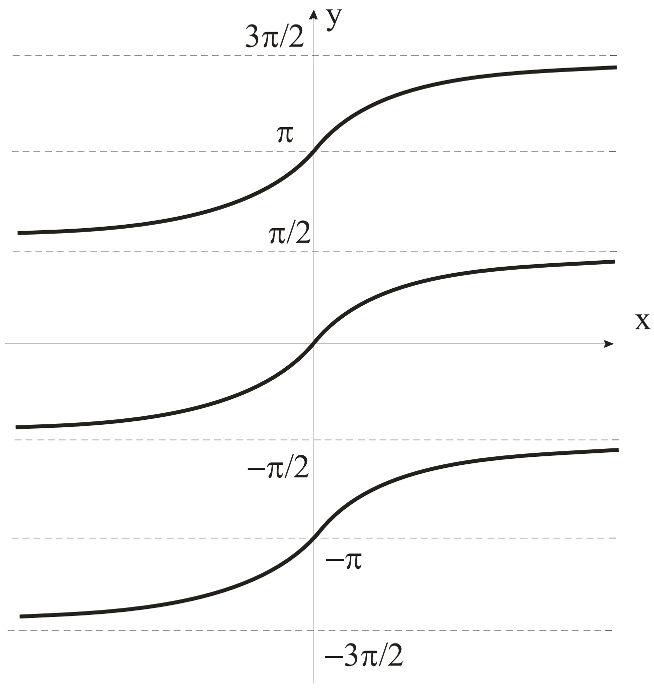


Рис. 19 - График функции $y = Arctgx$

9.4. **Функция *y = Arcctg x***

Обратной тригонометрической функцией $y = arcctgx$ называется дуга (угол), взятая в промежутке $(0;\pi)$, котангенс которой равен *x*, то есть равенства $y = arcctgx$ и $ctgy = x$ эквивалентны.

Основные свойства функции $y = arcctgx$

1. Функция определена на множестве всех действительных чисел, то есть $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. В интервале $x \in (-\infty;+\infty)$ функция убывает от π до 0, то есть $0 < arctgx < \pi$.
3. Функция $y = arctgx$, как и функция $y = \arccos x$ не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, но для нее справедливо $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

4. Функция $y = arcctgx$ называется главным значением функции $y = Arcctgx$. Все значения дуг (углов), котангенс которых равен *x*, определяются формулой $Arcctgx = arcctgx + \pi n,\quad n \in Z$. Графики функций $y = arcctgx$ и $y = Arcctgx$ приведены на рис. 20 и 21.

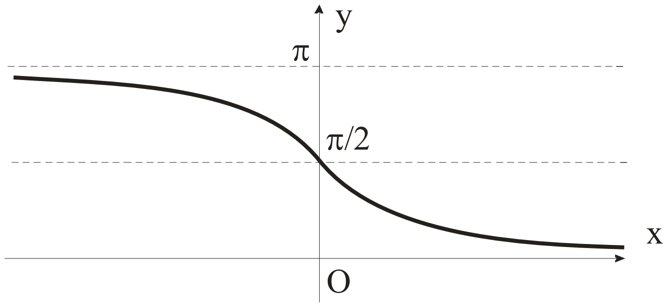


Рис. 20 - График функции $y = arcctgx$

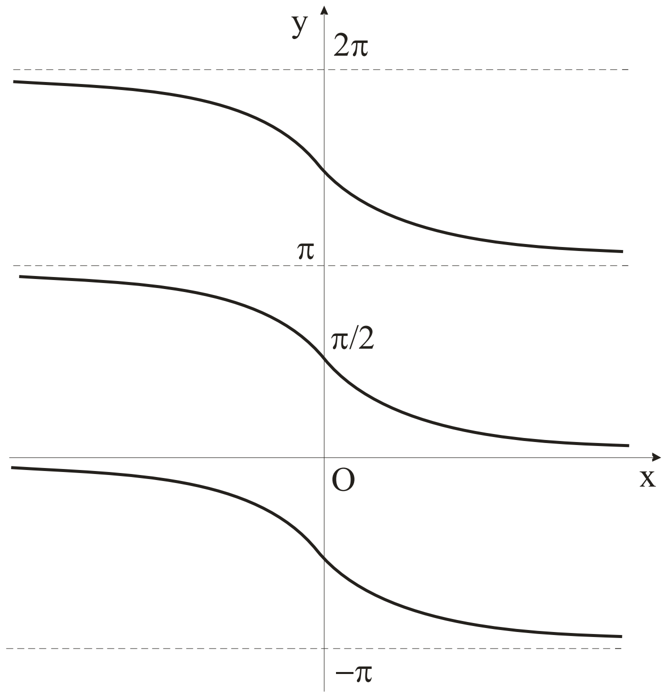


Рис. 21 - График функции $y = Arcctgx$

9.5. Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

1) $\sin(arcsin\ a) = a; \quad a \in [-1; 1]$;

$\cos(arccos\ a) = a; \quad a \in [-1; 1]$;

$tg(arctg\ a) = a;\ a \in (-\infty; \infty)$;

$ctg(arcctg\ a) = a;\ a \in (-\infty; \infty)$;

2) $arcsin(\sin \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$;

$arccos(\cos \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in [0; \pi]$;

$arctg(tg\ \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$;

$arcctg(ctg\ \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in (0; \pi)$;

3) $arcsin\ a + arccos\ a = \frac{\pi}{2}; \quad a \in [-1; 1]$;

$arctg\ a + arcctg\ a = \frac{\pi}{2}; \quad a \in (-\infty; \infty)$;

4) $arcsin(-a) = -arcsin\ a; \quad a \in [-1; 1]$;

$arccos(-a) = \pi - arccos\ a; \quad a \in [-1; 1]$;

$arctg(-a) = -arctg\ a; \quad a \in (-\infty; \infty)$;

$arcctg(-a) = \pi - arcctg\ a; \quad a \in (-\infty; \infty)$.

10. Примеры построения графиков тригонометрических функций

Пример 20. Построить график функции $y = 2\sin x$.

Решение. График функции $y = 2\sin x$ получается из графика функции $y = \sin x$ умножением каждой его ординаты на 2. Нули же функции $y = \sin x$ совпадают с нулями функции $y = 2\sin x$. График функции изображен на рис. 22.

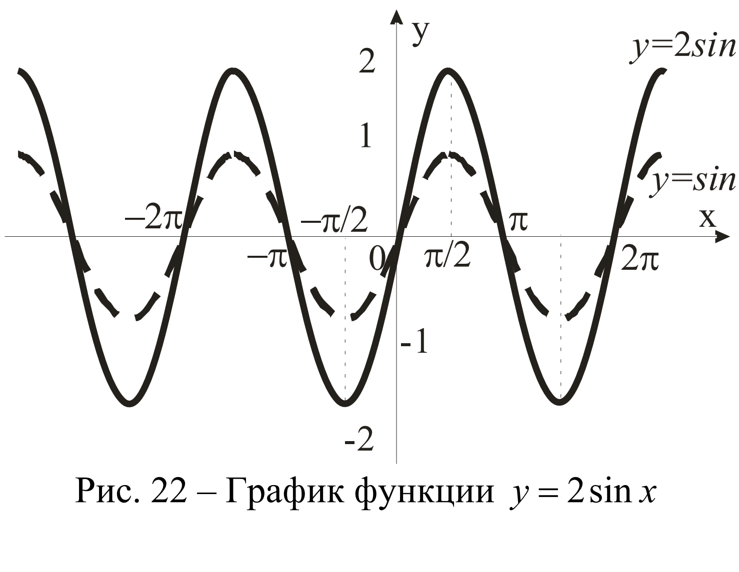


Рис. 22 – График функции $y = 2\sin x$

Пример 21. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Решение. График функции $y = \sin 2x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сжатием по оси OX в два раза. Основным периодом для функции $y = \sin 2x$ будет уже число π. График функции показан на рис. 23.

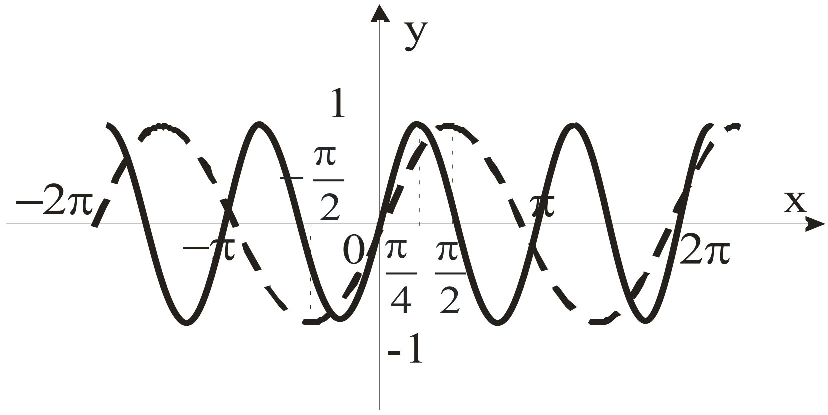


Рис. 23 – График функции $y = \sin 2x$

Пример 22. Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$.

Решение. График функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получим из графика функции $y = \sin x$ растяжением вдоль оси OX в два раза. Основным периодом для функции $y = \sin\frac{x}{2}$ будет число 4π. График функции показан на рис. 24.

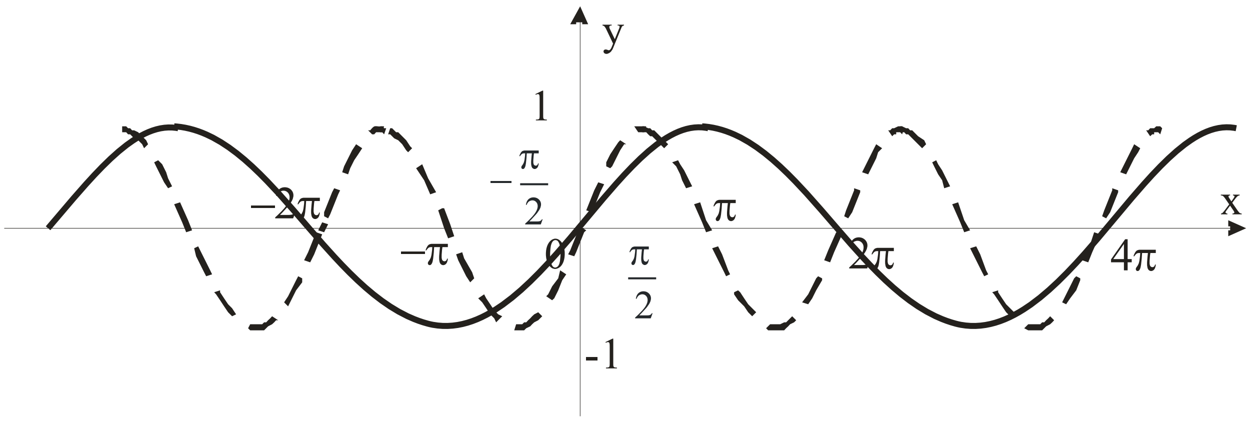


Рис. 24 – График функции $y = \sin\frac{x}{2}$

11. Вычисления выражений, содержащих *arcsina, arccosa, arctga, arcctga*

Пример 23. Вычислить выражение $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} + arctg\sqrt{3} + \arcsin\frac{1}{2}$.

Решение. Найдем значение каждого слагаемого:

$arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$ - это угол, котангенс которого равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$;

$arctg\sqrt{3}$ - это угол, тангенс которого равен $\sqrt{3}$, значит $arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$;

$\arcsin\frac{1}{2}$ - это угол, синус которого равен $\frac{1}{2}$, то есть $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi+2\pi+\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Пример 24. Вычислить выражение $arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})+arcctg(-\sqrt{3})+\arcsin(-\frac{1}{2})$.

Решение. Учитывая четность тригонометрических функций имеем:

$$arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})+arcctg(-\sqrt{3})+\arcsin(-\frac{1}{2})=-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+(\pi-arcctg\sqrt{3})-\arcsin\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{3\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 25. Вычислить выражение $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+arctg(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$.

Решение.

$$2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+arctg(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)=$$

$$=-2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-arctg1+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}(\pi-\arccos 1)=-2\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\pi-0)=$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi-4\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}.$$

Пример 26. Вычислить выражение $\sin(3arctg\sqrt{3}-\arccos 0)$.

Решение. $\sin(3arctg\sqrt{3}-\arccos 0)=\sin(3\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=\sin(\pi-\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Пример 27. Вычислить выражение $\cos(2\arccos(-1)-\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$.

Решение.

$$\cos(2\arccos(-1)-\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=\cos(2(\pi-\arccos 1)-(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}))=$$

$$=\cos(2(\pi-0)-(\pi-\frac{\pi}{6}))=\cos(2\pi-\frac{5\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 28. Вычислить выражение $arcctg(tg(-37°))$.

Решение. $arcctg(tg-37°)=arcctg(-tg37°)=180°-arcctg(tg37°)=$

Используя, формулы приведения, имеем:

$=180°-arcctg(tg(90°-53°))=180°-arcctg(ctg53°)=180°-53°=127°$.

Ответ: $127°$.

Пример 29. Вычислить выражение $\arccos(\cos(-\frac{17\pi}{5}))$.

Решение. С учетом четности косинуса, имеем: $\arccos(\cos(-\frac{17\pi}{5}))=$

$= \arccos(\cos(\frac{17\pi}{5})) = \arccos(\cos(3\pi+\frac{2\pi}{5}) = \arccos(\cos(2\pi+\pi+\frac{2\pi}{5}) =$

$= \arccos(\cos(\pi+\frac{2\pi}{5}) = \arccos(-\cos\frac{2\pi}{5}) = \pi - \arccos(\cos\frac{2\pi}{5}) = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{5}$.

12. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций и справедливое лишь при некоторых определенных значениях неизвестной. Эти значения называются **корнями** (решениями) **уравнения**.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения вида $\sin x=m$; $\cos x=m$; $tgx=m$; $ctgx=m$.

12.1. Решение простейших тригонометрических уравнений

12.1.1. Уравнение *sin x = m*

Рассмотрим уравнение $\sin x=m$. Если $-1\le m\le 1$, то решение этого уравнения определяется формулой $\boldsymbol{x=(-1)^n arcsinm+\pi n,}\ n\in Z$. Действительно, на тригонометрическом круге показаны решения уравнения $\sin x=m$, то есть углы, синус которых равен числу m: $x_1=arcsinm$ и $x_2=\pi-arcsinm$ (рис.25). Объединение этих решений x_1 и x_2 в общее решение и дает формулу $x=(-1)^n arcsina+\pi n,\ n\in Z$.

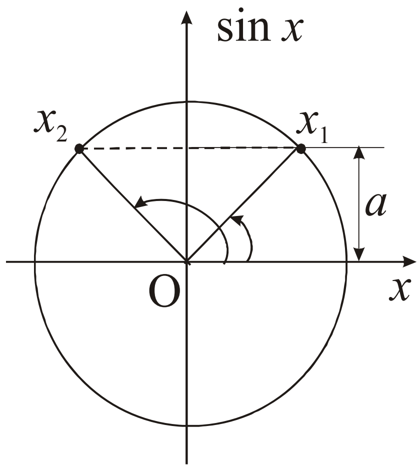


Рис. 25 – Решения уравнения $\sin x = m$

В частности, при: $m = 0 \quad x = \pi n,$

$$m = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$m = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (действительных) решений не имеет.

12.1.2. Уравнение $\cos x = m$

Если $-1 \le m \le 1$, то решения уравнения $\cos x = m$ на тригонометрическом круге, то есть углы, косинус которых равен числу m: $x_1 = arc\cos m$ и $x_2 = -arc\cos m$ (рис.26), то есть, $x = \pm arccos a + 2\pi n, \; n \in Z$.

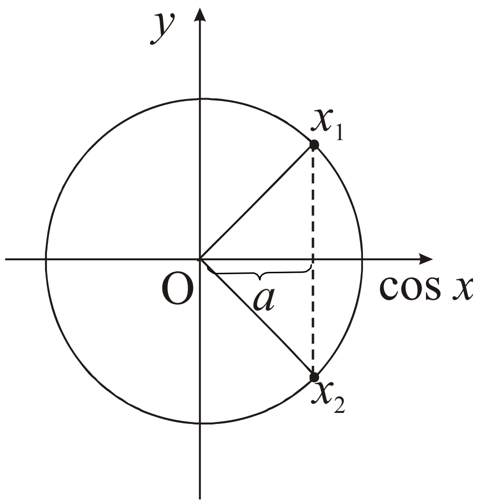


Рис. 26 – Решения уравнения $\cos x = m$

Частные случаи: $m = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$

$$m = 1 \quad x = 2\pi n,$$

$$m = -1 \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (действительных) решений не имеет.

12.1.3. Уравнение $tgx = m$

Уравнение $tgx = m$ имеет решения при любом действительном значении m. Эти решения определяются формулой $x = arctga + \pi n,\ n \in Z$. Изображения решений уравнения $tgx = m$ на тригонометрическом круге приведено на рис. 27.

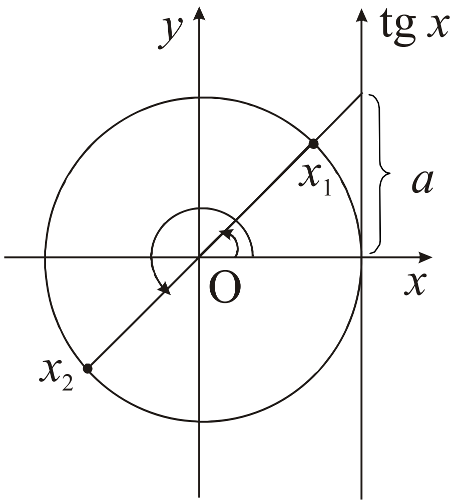


Рис. 27 – Решения уравнения $tgx = m$

Частные случаи: $m = 0 \quad x = \pi n,$

$$m = \pm 1 \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$m = \pm\infty \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

12.1.4. Уравнение $ctgx = m$

Уравнение $ctgx = m$ имеет решения при всех действительных значенях m. Эти решения определяются формулой $x = arcctga + \pi n,\ n \in Z$. Изображения решений уравнения $ctgx = m$ на тригонометрическом круге приведено на рис. 28.

Частные случаи: $m = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$$m = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$m = -1 \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,$$

$$m = \infty \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$m = -\infty \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

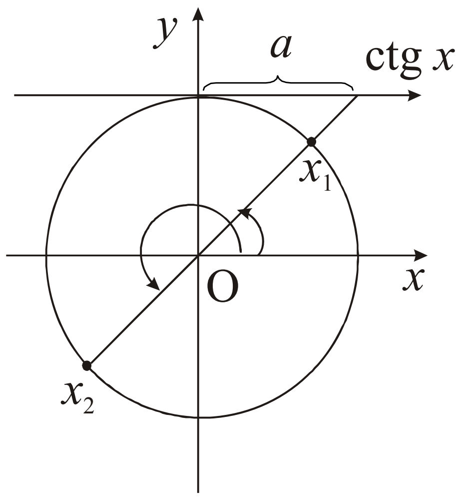


Рис. 28 – Решения уравнения $ctgx = m$

12.2. Простейшие тригонометрические уравнения и некоторые методы их решений

Пример 30. Решить уравнение $2\sin 3x - 1 = 0$.

Решение. Выразим функцию $2\sin 3x$ и применим формулу 12.1.1:

$$2\sin 3x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin 3x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z.$$

Пример 31. Решить уравнение $2\sin 6x + \sqrt{2} = 0$.

Решение.

$$2\sin 6x = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 6x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 6x = (-1)^n \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$6x = -(-1)^n \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \pi n, \quad n \in Z; 6x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}, \quad n \in Z.$$

Пример 32. Решить уравнение $\sin(8x - \frac{\pi}{4}) = -1$.

Решение. В этом задании $m = -1$, то есть мы имеем частный случай:

$$8x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad 8x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$8x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad x = -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z.$$

Пример 33. Решить уравнение $2\cos 5x = \sqrt{3}$.

Решение. $\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По формуле 12.1.2: $5x = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$; $5x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in Z$.

Пример 34. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

Решение. $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = \pm\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$3x = \pm(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n, \quad n \in Z$; $\quad 3x = \pm(\pi - \frac{\pi}{4}) + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in Z$.

Пример 35. Решить уравнение $\cos(\pi - x) = \frac{1}{2}$.

Решение. В силу четности косинуса, $\cos(\pi - x) = \cos(x - \pi)$. Тогда $\cos(x - \pi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x - \pi = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$x - \pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + (1 + 2n)\pi, \quad n \in Z$.

Пример 36. Решить уравнение $17tg2x = 0$.

Решение. $17tg2x = 0 \quad \Rightarrow \quad tg2x = 0$. Используя формулу 12.1.3, получим $2x = arctg0 + \pi n, \quad n \in Z$; $\quad 2x = \pi n, \quad n \in Z$; $\quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$.

Пример 37. Решить уравнение $ctg3x + \sqrt{3} = 0$.

Решение. Используя формулу 12.1.4 и учитывая четность котангенса, получим: $ctg3x = -\sqrt{3}$; $3x = arcctg(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in Z$;

$3x = \pi - arcctg\sqrt{3} + \pi n, \quad n \in Z$; $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$; $3x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$;

$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z$.

12.2.2. Решение тригонометрических уравнений, приводимых к простейшим

Пример 38. Решить уравнение $\sin 3x \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Умножив на 2 обе части уравнения, в левой его части получим формулу синуса двойного аргумента:

$$2\sin 3x\cos 3x=\frac{2\sqrt{3}}{4};\ \ \sin 6x=\frac{\sqrt{3}}{2};\ 6x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n,\quad n\in Z;$$

$$6x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z;\ x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{6},\quad n\in Z.$$

Пример 39. Решить уравнение $\sin^2 x-\cos^2 x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Умножив на (-1) обе части уравнения, получим в его левой части формулу косинуса двойного угла: $-\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad 2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\quad n\in Z;\qquad 2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Пример 40. Решить уравнение $tgx\cdot tg3x=0$.

Решение. Произведение двух сомножителей равно нулю, а это возможно, когда один из сомножителей равен нулю, то есть: $\left[\begin{array}{l} tgx=0, \\ tg3x=0; \end{array}\right.\ \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=arctg0+\pi n,\quad n\in Z; \\ 3x=arctg0+\pi n,\quad n\in Z; \end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=\pi n,\quad n\in Z; \\ 3x=\pi n,\quad n\in Z; \end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=\pi n,\quad n\in Z; \\ x=\frac{\pi n}{3},\quad n\in Z. \end{array}\right.$$

12.2.3. Уравнения, однородные относительно *sinx* и *cosx*

Однородные уравнения всегда имеем право делить на любое слагаемое уравнения, учитывая его порядок.

Пример 41. Решить уравнение $\sin x+\cos x=0$.

Решение. Данное уравнение является однородным первой степени, поэтому делим на $\cos x\neq 0$ (или на $\sin x\neq 0$) обе части уравнения, получим:

$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$; $tgx+1=0$. Приведем уравнение к простейшему: $tgx=-1$.

Тогда $x=arctg(-1)+\pi n,\quad n\in Z;\quad x=-arctg1+\pi n,\quad n\in Z;\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$.

Пример 42. Решить уравнение $2\sin 3x+5\cos 3x=0$.

Решение. $\frac{2\sin 3x}{\cos 3x}+\frac{5\cos 3x}{\cos 3x}=0$; $\qquad 2tg3x+5=0$; $\qquad 2tg3x=-5$;

$$tg3x=-\frac{5}{2};\qquad 3x=arctg(-\frac{5}{2})+\pi n,\quad n\in Z;\qquad 3x=-arctg(\frac{5}{2})+\pi n,\quad n\in Z;$$

$$x=-\frac{1}{3}arctg(\frac{5}{2})+\frac{\pi n}{3},\quad n\in Z.$$

Пример 43. Решить уравнение $\sin^2 x-3\cos^2 x=0$.

Решение. Уравнение является однородным второй степени; делим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$ (или на $\sin^2 x \neq 0$), получим: $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $tg^2 x - 3 = 0$; $tg^2 x = 3$; $tgx = \pm\sqrt{3}$; $x = arctg(\pm\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in Z$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$.

12.2.4. Уравнения, приводимые к квадратным

Пример 44. Решить уравнение $4\sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin 2x$.

Решение. Данное уравнение приводится к однородному уравнению второй степени, если расписать $\sin 2x$ по формуле синуса двойного аргумента: $4\sin^2 x + \cos^2 x = 2 \cdot 2\sin x \cos x$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$ (или на $\sin^2 x \neq 0$, или на произведение $\sin x \cos x \neq 0$), получим: $\dfrac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{4\sin x \cos x}{\cos^2 x}$; $4tg^2 x + 1 = 4tgx$, то есть получим квадратное уравнение относительно tgx. Введя замену $tgx = t$, имеем $4t^2 - 4t + 1 = 0$, откуда $t_1 = t_2 = \dfrac{1}{2}$. Вернувшись к прежней переменной, имеем $tgx = \dfrac{1}{2}$, отсюда $x = arctg\dfrac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

Пример 45. Решить уравнение $3 - \cos^2 x - 3\sin x = 0$.

Решение. Заменив в уравнении $\cos^2 x$ на выражение $1 - \sin^2 x$, полученное из основного тригонометрического тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получим квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$3 - (1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0$; $3 - 1 + \sin^2 x - 3\sin x = 0$; $2 + \sin^2 x - 3\sin x = 0$. Для удобства введем новую переменную $\sin x = t$, тогда получим: $t^2 - 3t + 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$. Вернемся к прежней переменной:

а) $t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

б) $t_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin x \neq 2$, так как $-1 \leq \sin x \leq 1$.

12.2.5. Метод разложения на множители

Пример 46. Решить уравнение $2\sin x - \cos 2x \cdot \sin x = 0$.

Решение. Вынесем общий множитель за скобки: $\sin x(2 - \cos 2x) = 0$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ 2 - \cos 2x = 0; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ \cos 2x \neq 2, \quad |\cos 2x| \leq 1. \end{array}\right.$$

Пример 47. Решить уравнение $2\sin x + tgx = 0$.

Решение. Учитывая, что $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, получим уравнение $2\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$. Приведем выражение к общему знаменателю и вынесем в числителе общий множитель $\sin x$: $\dfrac{2\sin x\cos x + \sin x}{\cos x} = 0$; $\dfrac{\sin x(2\cos x + 1)}{\cos x} = 0$. При условии, что $\cos x \neq 0$, имеем $\sin x(2\cos x + 1) = 0$. Решение найдем из совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ 2\cos x + 1 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \pm\arccos(-\dfrac{1}{2}) + 2\pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \pm(\pi - \arccos\dfrac{1}{2}) + 2\pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \pm(\pi - \dfrac{\pi}{3}) + 2\pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Пример 48. Решить уравнение $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

Решение. Применим к выражению $\sin 5x + \sin x$ формулу суммы синусов (6.6.1) и воспользуемся тем, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ (формула 6.4). Тогда уравнение примет вид: $2\sin\dfrac{5x + x}{2}\cos\dfrac{5x - x}{2} + 1 - \cos 2x = 1$;

$2\sin 3x\cos 2x + 1 - \cos 2x - 1 = 0$; $2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0$;

$\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$. Сводим решение к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin 3x - 1 = 0; \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 3x = 1; \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n; \quad n \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = \dfrac{1}{2}; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \quad n \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = (-1)^n\arcsin\dfrac{1}{2} + \pi k, \quad k \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \quad n \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \quad n \in Z; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \quad n \in Z. \end{array}\right.$$

12.2.6. Универсальная тригонометрическая подстановка (выражение $\boldsymbol{sinx}$ и $\boldsymbol{cosx}$ через $\boldsymbol{tg\frac{x}{2}}$)

Эта подстановка используется лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, поэтому нужно проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

Пример 49. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Решение. Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$ по формулам (6.7) и заменяя $tg\frac{x}{2}$ на новую переменную t придем к рациональному уравнению:

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5; \quad 3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 5; \quad \frac{6t+4-4t^2-5-5t^2}{1+t^2} = 0;$$

$1+t^2 \neq 0$ значит $6t+4-4t^2-5-5t^2 = 0$. После упрощения(приведения подобных) получим: $-9t^2+6t-1=0$ или $9t^2-6t+1=0$. Решив это квадратное уравнение, получаем $t = \frac{1}{3}$.

Вернувшись к замене $t = tg\frac{x}{2}$, найдем решение простейшего уравнения $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$: $\quad \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in Z$; $\quad x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$. Проверкой убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не удовлетворяют заданному уравнению. Итак, получим ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример 50. Решить уравнение $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой, выражая через tgx функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$:

$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$; $\cos 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$. Получим уравнение: $3\frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} + 1 = 0$.

Полагая $tgx = t$, получим рациональное уравнение: $\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$;

$\frac{6t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = 0$. $\quad 1+t^2 \neq 0$, значит $6t+1-t^2+1+t^2 = 0$ или $6t+2=0$;

$t = -\frac{1}{3}$. Из уравнения $tgx = -\frac{1}{3}$ находим $x = arctg(-\frac{1}{3}) + \pi n, \quad n \in Z$.

Однако, нужно еще проверить, не удовлетворяют ли заданному уравнению те значения переменной, при которых $2x=\pi+2\pi n$, то есть значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. Имеем: $3\sin(\pi+2\pi n)+\cos(\pi+2\pi n)+1=3\sin\pi+\cos\pi+1=3\cdot 0-1+1=0$.

Проверка показывает, что значения $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ являются решениями уравнения. Значит, заданное уравнение имеет следующие решения:

$$\left[\begin{array}{l} x=arctg(-\frac{1}{3})+\pi n, \quad n\in Z; \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z. \end{array}\right.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение выражения $81\cos^2(6\alpha-\dfrac{3\pi}{2})$, если $\cos 3\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: 80.

2. Упростить выражение $\cos 50°\cos 40°-2\sin 50°\sin 20°\cos 20°$.

Ответ: 0.

3. Упростить выражение $\cos 20°-\sin 20° ctg 10°$.

Ответ: -1.

4. Упростить выражение $\sqrt{2}(\sin^4\dfrac{\pi}{8}-\cos^4\dfrac{\pi}{8})$.

Ответ: -1.

5. Упростить выражение $\left[\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45°-\alpha)}{2\sin(60°+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right]^6$.

Ответ: 8.

6. Вычислить выражение $\dfrac{\cos 70°\cos 10°+\cos 80°\cos 20°}{\cos 69°\cos 9°+\cos 81°\cos 21°}$.

Ответ: 1.

7. Вычислить выражение $\dfrac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}$.

Ответ: -1.

8. Вычислить выражение $\dfrac{\cos 68°\cos 8°-\cos 82°\cos 22°}{\cos 53°\cos 23°-\cos 67°\cos 37°}$.

Ответ: 1.

9. Упростить выражение $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{tg 2\alpha-ctg 2\alpha}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\sin 8\alpha$.

10. Вычислить выражение $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: 2.

11. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$.

Ответ: $tg 2\alpha$.

12. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha+\sin 4\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 4\alpha+\cos 7\alpha}$.

Ответ: $tg 4\alpha$.

13. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}$.

Ответ: $-tg 2\alpha$.

14. Вычислить $arctg\sqrt{2}+arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\pi/2$.

15. Вычислить $\sqrt{5\cos(arctg\,0{,}75)}$.

Ответ: 2.

16. Вычислить $\sin(2arcsin\frac{3}{5})$.

Ответ: 0,96.

17. Вычислить $\sin(\frac{3}{2}\pi-2arctg\frac{4}{3})$.

Ответ: 0,28.

18. Вычислить $\frac{1}{4}-\cos^4(\frac{5}{2}\pi+\frac{1}{2}arccos\frac{4}{5})$.

Ответ: 0,24.

Решить уравнения:

19. $\cos 2x=-1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

20. $\sin\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\pi+3\pi n$, $n\in Z$.

21. $ctg 3x=-1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$.

22. $tg(x-2)=-1$.

Ответ: $2-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

23. $2tg\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}n$, $n\in Z$.

24. $\sin 5x=-\sin x$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}k;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\right\}$, $n,k\in Z$.

25. $tg3x=tgx.$

Ответ: πn, $n\in Z.$

26. $tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=ctg3x$.

Ответ: $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi}{8}n$, $n\in Z$.

27. $tg3x=tgx$.

Ответ: πn, $n\in Z.$

28. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{2}x\right)=\sin\frac{3}{2}x.$

Ответ: $\left\{2\pi n;\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k\right\}$, $n,k\in Z$.

29. $\cos(3x-4\pi)=\sin(\pi-x).$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}k;-\frac{\pi}{4}-\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

30. $\cos 4x=\cos 6x$.

Ответ: $\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$.

31. $\sin x=\sin 130^\circ$.

Ответ: $\left\{130^\circ+360^\circ n;50^\circ+360^\circ n\right\}$, $n\in Z$.

32. $\sin^2 x=1/4$. Выбрать корни в градусах из интервала $[90°;270°]$.

Ответ: 150°; 210°.

33. $3tg^2 3x-1=0$. Выбрать корни в градусах из интервала $[0°;180°]$.

Ответ: 10°; 50°; 70°; 110°; 130°; 170°.

34. $\cos^2\left(\frac{x}{2}+60°\right)=1$.

Ответ: $-120^\circ+360^\circ n$, $n\in Z$.

35. $3\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{9}{4}$. Выбрать корни в градусах из интервала, $[0°;180°]$.

Ответ: 48°; 78°; 138°; 168°.

36. $4\cos^2\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{5}\right)-3=0$.

Ответ: $\frac{4\pi}{15}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}n$, $n\in Z$.

37. $\cos 3x\sin 7x=\cos 2x\sin 8x$.

Ответ: $\left\{\pi k;\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n\right\}$, $n,k\in Z$.

38. $\sin 5x\cos 2x=\cos 5x\sin 2x-1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in Z$.

39. $2\cos x\sin 3x=\sin 4x+1$.

Ответ: $\pi/4+\pi n$, $n\in Z$.

40. $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

Ответ: $\left\{\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

41. $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$, $n,k\in Z$.

43. $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;\pm\frac{\pi}{3}+\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

44. $1+\cos x+\cos 2x=0$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

45. $2\sin x\cos 2x-1+2\cos 2x-\sin x=0$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

46. $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2$.

Ответ: $\pi/12+\pi n$, $n\in Z$.

47. $3\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x+\cos^3 x=0$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

48. $2\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$.

Ответ: $\left\{arctg\frac{1}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

49. $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin 2x=0$.

Ответ: $\left\{arctg 3+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}$, $n,k\in Z$.

Приложение

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-
$\mathrm{ctg}\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$	-	0

Тимченко Світлана Євгенівна
Подольська Світлана Миколаївна
Бондаренко Зоя Іванівна
Клименко Діна Володимирівна

ТРИГОНОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

слухачам підготовчого відділення

для іноземних громадян

Друкується у редакційній обробці авторів.

Підписано до друку 14.06.12. Формат 30 x 42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,5.
Обл.-вид. арк. 2,5. Тираж 50 пр. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.