

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ



**І.М. Мацюк**  
**Е.М. Шляхов**  
**К.А. Зіборов**

## **КІНЕМАТИЧНЕ І ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник  
для студентів напряму підготовки 6.050301 Гірництво,  
6.050303 Переробка корисних копалин**

**Днепропетровск**  
**НГУ**  
**2009**

УДК 621.01.  
ББК  
ДС

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напрямку підготовки 6.050301 Гірництво, 6.050303 Переробка корисних копалин (лист № від )*

Рецензенти:

*В.І. Дирда*, д-р техн. наук, професор (Дніпропетровський державний аграрний університет, завідувач кафедри надійності та ремонту машин);

*С.В. Ракша*, д-р техн. наук, професор (Дніпропетровський національний технічний університет залізничного транспорту, завідувач кафедри прикладної механіки).

**Мацюк І.М.**

**Д21** Кінематичне і динамічне дослідження плоских важільних механізмів: Навчальний посібник. / І.М. Мацюк, Е.М. Шляхов, К.А. Зіборов. – Д.: Національний гірничий університет, 2009. – 99 с.

Зміст навчального посібника відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів з напрямку підготовки гірництво та **переробка корисних копалин** (галузевий стандарт вищої освіти України ГСВО ОПП – 04) зокрема - програмі дисципліни «Прикладна механіка».

Настоящее учебное пособие посвящено одной из задач теории механизмов и машин – анализу плоских рычажных механизмов второго класса.

В пособии параллельно рассмотрены графический (метод планов) и аналитический методы исследования механизмов. Особенностью аналитического метода является то, что его содержание и алгоритм полностью совпадают с этими качествами графического метода планов. Для реализации аналитического метода применяется многофункциональный пакет прикладных программ Mathcad.

Основная цель: научить студента использованию современной компьютерной технологии для решения конкретных задач теории механизмов и машин.

**УДК 621.01.**

**ББК**

© І.М. Мацюк, Е.М. Шляхов, К.А. Зіборов, 2009

**ISBN 966-8271-77-7**

© Національний гірничий університет, 2009

Кинематическое и динамическое исследование плоских рычажных механизмов

Содержание

1. Введение .....	4
2. Некоторые сведения из Mathcad .....	6
3. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов .....	9
3.1. Общие положения .....	9
3.2. Геометрический анализ механизмов .....	10
3.2.1. Кривошипно-ползунный механизм .....	11
3.2.2. Кривошипно-коромысловый механизм .....	13
3.2.3. Кривошипно-кулисный механизм .....	16
3.2.4. Частные задачи геометрического анализа механизмов .....	18
3.2.5. Пример геометрического анализа плоского рычажного шестизвенника .....	22
3.3. Определение скоростей и ускорений .....	29
3.3.1. Кривошипно-ползунный механизм .....	30
3.3.2. Кривошипно-коромысловый механизм .....	35
3.3.3. Кривошипно-кулисный механизм .....	41
3.3.4. Пример определения скоростей и ускорений плоского рычажного шестизвенника .....	46
4. Динамическое исследование плоских рычажных механизмов .....	57
4.1. Общие положения .....	57
4.2. Определение реакций в кинематических парах и уравновешивающих нагрузок .....	58
4.2.1. Силовой анализ кривошипно-ползунного механизма .....	58
4.2.2. Силовой анализ кривошипно-коромыслового механизма .....	65
4.2.3. Силовой анализ кривошипно-кулисного механизма .....	73
4.2.4. Пример силового анализа плоского рычажного шестизвенника ...	77
5. Исследование кинематики и динамики механизма привода качающегося конвейера .....	87
Список литературы .....	99

## 1. Введение

Настоящее учебное пособие посвящено одной из задач теории механизмов и машин (ТММ) – анализу плоских рычажных механизмов второго класса.

Из различных методов анализа механизмов предпочтение отдается аналитическим методам, которые имеют наибольшую точность и легко могут быть реализованы с помощью современных компьютеров.

Однако, в процессе изучения ТММ невозможно обойтись без рассмотрения классических графических методов, обладающих наибольшей простотой и наглядностью. Кроме того, освоение аналитических методов всегда сопровождается параллельным использованием графических методов. Главным образом графика используется в процессе отладки аналитических программ исследования механизмов для контроля правильности последних.

В данном пособии излагается аналитический метод исследования механизмов, сохраняющий алгоритм графического метода и присущую последнему наглядность. Это достигается использованием программного продукта Mathcad.

Основная цель данного пособия – научить студента использованию современной компьютерной технологии для решения конкретных задач теории механизмов и машин.

Большинство механических параметров суть векторные величины, поэтому задачи механики наиболее логично решать методами векторной алгебры. Аналитическое решение векторных уравнений по наглядности не уступает графическому решению, поскольку положение в пространстве трехмерного вектора, заданного своими координатами, легко представляемо.

Для решения векторных уравнений использована программа Mathcad, известная простотой своего интерфейса. Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих ТММ, знакомых с программой Mathcad и желающих приобрести навыки в его применении для решения кинематических и динамических задач теории механизмов в курсовом проектировании и при выполнении домашних заданий.

В пособии подробно рассмотрен кинематический и силовой анализ трех простейших механизмов, включающих структурные группы второго класса. В зависимости от комбинации в группе видов трех кинематических пар пятого класса (вращательная либо поступательная), группе приписывают соответствующую аббревиатуру. Например, ВПВ означает, что внутренняя кинематическая пара в группе – поступательная, а внешние – вращательные. В пособии рассматриваются механизмы с группами ВВВ, ВВП и ВПВ.

Изложению аналитического метода всегда предшествует описание графического метода, как основы для первого.

Представленные в пособии блоки аналитического решения для различных структурных групп второго класса могут быть непосредственно использованы учащимися для анализа механизмов более сложной структуры.

Изложение материала в пособии сопровождается примерами использования предлагаемого метода.

В конце пособия рассмотрено исследование кинематики и динамики шарнирного шестизвенника предлагаемым аналитическим методом.

## 2. Некоторые сведения из Mathcad

Предполагается, что учащийся знаком с основами работы в этом пакете прикладных программ. Укажем на некоторые приемы, необходимые для изучения данной темы.

Как уже указывалось, решение поставленных задач будем находить методами векторной алгебры. Для ввода векторов можно использовать кнопку



панели наборных математических элементов **Matrix**, которая, в свою очередь, включается нажатием соответствующей кнопки на панели **Math**. Но гораздо проще использовать сочетание клавиш **Ctrl+M** (здесь и далее используется английская раскладка клавиатуры). Оба вышеуказанных действия приводят к появлению диалогового окна **Insert Matrix**, в котором необходимо указать число строк и столбцов для вводимой матрицы (вектора). Для трехмерного вектора число строк – 3, число столбцов – 1. В результате в документе появляется шаблон вектора (например,  $\mathbf{l}$ )

$$\mathbf{l} := \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}.$$

Переход от символа к символу внутри шаблона совершается с помощью клавиши **Tab** (Табуляция).

Здесь и далее элементы документов **Mathcad** изображаются шрифтом меньшего размера.

Вектор  $\mathbf{l}(x, y, z)$  выглядит так

$$\mathbf{l} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем оперировать, в основном, с двухмерными векторами, у которых координата  $z = 0$ . Таким способом будем представлять векторы скорости, ускорения, силы и т.п. А такие векторы, как угловая скорость или крутящий момент, будут иметь отличной от нуля только координату  $z$ . Например, вектор угловой скорости с модулем  $15,6 \text{ с}^{-1}$ , направленный против хода часовой стрелки запишется так

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.6 \end{pmatrix}.$$

То же, но по ходу часовой стрелки

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.6 \end{pmatrix}.$$

Одинаковые, по сути, векторы, отличающиеся только значениями координат, будем обозначать одной буквой, но с разными номерами, которые вводятся с помощью нижнего индекса. Шаблон для этого индекса вводится нажатием клавиши  $\cdot$  (точка). Так, вектор  $\mathbf{l}_3(2, -3, 4)$  запишется так

$$l_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Можно обращаться к отдельным компонентам (координатам) вектора с помощью еще одного нижнего индекса, который вводится нажатием клавиши [ (квадратная скобка). По умолчанию координате  $x$  соответствует значение нижнего индекса равное нулю, координате  $y$  - единица и координате  $z$  - двойка. Для вектора  $l_3(2, -3, 4)$

$$l_{3_0} = 2 \quad l_{3_1} = -3 \quad l_{3_2} = 4$$

Последовательность нажатия клавиш для извлечения абсциссы этого вектора: буква  $l$ , точка, цифра 3, открывающая квадратная скобка [, цифра 0, знак равенства =.

Достаточно универсальным средством решения различных вычислительных задач является блок Given-Find (Дано-Найти).

Между ключевыми словами Given и Find записывается одно уравнение или уравнения системы, которые необходимо решить. При этом для знака равенства следует использовать «логическое равно» (набирается с помощью клавиш Ctrl+= или выбирается из панели логических символов). После ключевого слова Find в скобках указываются искомые величины. Ключевому слову Given предшествуют начальные приближения всех неизвестных. Например, решение системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x^2 - 5y + 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

выглядит так

$$x := 1 \quad y := 1 \quad \text{Given}$$

$$x^2 - 5y + 6 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

При решении векторных уравнений кинематики и динамики механизмов возникает необходимость в записи векторов, параллельных или перпендикулярных данному вектору. Так, например, если задан вектор  $l_1(x_1, y_1, 0)$  в виде

$$l_1 := \begin{pmatrix} l_{1_0} \\ l_{1_1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

то параллельный ему вектор  $l_2$  будем записывать так

$$l_2 := l_{2_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{1_1} \\ l_{1_0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модуль этого вектора будет определяться значением абсциссы  $l_{2_0}$ . Вектор  $l_3$ , перпендикулярный вектору  $l_1$  можно записать таким образом

$$l_3 := l_{3_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{1_0} \\ l_{1_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модуль этого вектора будет определяться значением абсциссы  $l_{3_0}$ .

Используя эти варианты представления параллельных или перпендикулярных векторов, можно составлять векторные уравнения, в которых неизвестными будут скалярные величины, и которые легко решаемы средствами Mathcad.

Mathcad позволяет непосредственно использовать возможности векторного исчисления. Так, например, если какую-либо точку представить вектором

$$l := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а угловую скорость этого вектора

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.6 \end{pmatrix},$$

то линейная скорость этой точки определится как векторное произведение указанных векторов

$$v := \omega \times l \quad v = \begin{pmatrix} 31.2 \\ -46.8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v| = 56.247 \text{ м/с}$$

Знак векторного умножения вводится одновременным нажатием клавиш Ctrl и \* (звездочка).

Аналогично, нормальное ускорение этой точки определяется, как векторное произведение векторов угловой и линейной скоростей. Например,

$$a_n := \omega \times v \quad a_n = \begin{pmatrix} -730.08 \\ -486.72 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_n| = 877.45 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение этой точки можно определить, если известен вектор углового ускорения, например,

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.7 \end{pmatrix},$$

как векторное произведение

$$a_{\tau} := \varepsilon \times l \quad a_{\tau} = \begin{pmatrix} -25.4 \\ 38.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{\tau}| = 45.791 \text{ м/с}^2.$$

Если задана сила (в ньютонах) в виде

$$F := \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а точка её приложения задана вектором (в метрах)

$$l := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то момент этой силы относительно начала вектора  $l$

$$M := l \times F \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} \quad |M| = 13 \text{ Нм}.$$

### 3. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов

#### 3.1. Общие положения

Кинематический анализ механизмов состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев.

Основные задачи:

1) определение положений звеньев, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев;

2) определение скоростей и ускорений.

Для решения этих задач необходимо знание законов движения начальных звеньев и кинематическая схема механизма, т.е. структурная схема с указанием размеров звеньев.

В теории механизмов известно несколько способов кинематического исследования: аналитический, графический, экспериментальный, с использованием ЭВМ. Каждый из применяемых способов обладает своими особенностями: либо необходимостью громоздких математических вычислений, либо недостаточной точностью получаемых результатов, либо составлением программы для выполнения расчета на ЭВМ, либо наличием

специального оборудования для исследования выполненных механизмов в лабораторных условиях и т.п.

Для учебных целей наиболее простым и наглядным является *графический метод* кинематического исследования, основанный на составлении и графическом решении векторных уравнений, устанавливающих зависимость между заданными и искомыми параметрами механизма. При тщательном выполнении графических построений можно получить результат с достаточной степенью точности (до 5%).

При необходимости выполнения более точного кинематического исследования прибегают к *аналитическому методу*. Он заключается в составлении математической зависимости между исходными и искомыми параметрами механизма и позволяет получить результат практически с любой степенью точности.

Один из методов аналитического исследования механизмов разработан профессором В.А. Зиновьевым и основан на составлении векторных уравнений замкнутых контуров механизма. Последующее решение этих уравнений аналитическим путем позволяет получить математическое выражение искомым кинематических параметров исследуемых механизмов.

### 3.2. Геометрический анализ механизмов

Предметом геометрического анализа механизмов является первая задача кинематического анализа, т.е. определение положения звеньев, которая может быть решена графически и аналитически.

**Графическое решение** сводится к изображению плана механизма. Напомним, что кинематической схемой механизма называется схема, на которой с помощью условных обозначений изображаются звенья механизма и кинематические пары с указанием размеров, необходимых для кинематического анализа.

Изображение кинематической схемы механизма в выбранном масштабе, соответствующее определенному положению начального звена называется *планом механизма*. План механизма строится в определенном чертежном масштабе, для чего будем использовать понятие *масштабный коэффициент*.

*Масштабным коэффициентом* физической величины называют отношение численного значения физической величины в свойственных ей единицах к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту величину. Таким образом, масштабный коэффициент длины будет иметь размерность  $\frac{М}{мм}$ .

**Аналитическое решение** может быть получено несколькими способами. В данном пособии будем использовать уже упомянутый метод замкнутого векторного контура В.А. Зиновьева. В соответствии с этим методом положение каждого звена определяется связанным с ним вектором так, что последовательность этих векторов образует один или несколько замкнутых векторных контуров. Векторным уравнением замкнутости называется векторная сумма векторов одного замкнутого контура. В общем случае

записывают такие уравнения для всех независимых контуров. Далее, независимые уравнения замкнутости проектируют на оси координат. Получается нелинейная система алгебраических уравнений, из которой могут быть получены зависимые координаты, как функции от независимых, т. е. решение задачи нахождения положений звеньев.

Математический пакет Mathcad предоставляет возможность непосредственного решения векторных уравнений замкнутости.

Рассмотрим применение графического и аналитического методов определения положений звеньев на примере трех простейших плоских механизмов второго класса.

### 3.2.1. Кривошипно-ползунный механизм

Дано: структурная схема механизма (рис. 1);  $\varphi_1^\circ$  – угол, определяющий положение кривошипа;  $l_{AB}$  – длина кривошипа 1, м;  $l_{BC}$  – длина шатуна 2, м.

Необходимо по заданному положению звена 1 найти положения звеньев 2 и 3.

#### Графическое решение.

Определяем масштабный коэффициент длины  $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}$ , где  $AB$  – длина отрезка в миллиметрах, которым на чертеже изображается кривошип. В этом масштабе длина отрезка, которым изображается шатун  $BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}$ , мм.

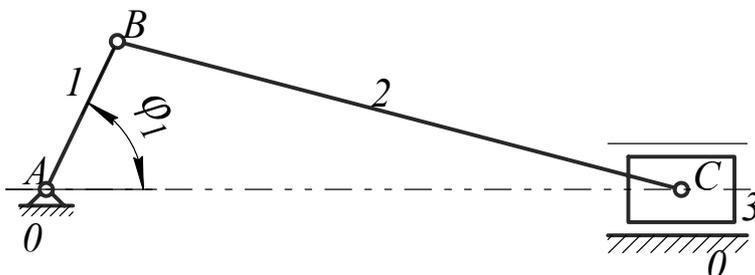


Рис. 1. Кривошипно-ползунный механизм

Для построения плана механизма используем метод засечек. Пусть, например,  $\varphi_1 = 150^\circ$ .

На свободном поле чертежа изображаем окружность радиуса  $AB$ , которая будет траекторией точки  $B$  (рис. 2, а). Затем рисуем кривошип  $AB$  под заданным углом  $\varphi_1 = 150^\circ$  (рис. 2, б). Из точки  $B$  радиусом  $BC$  делаем засечку на горизонтали, проходящей через точку  $A$  (рис. 2, в). Оформляем окончательно план механизма (рис. 2, г).

Итак, мы определили положения шатуна 2 и ползуна 3 по заданному положению кривошипа 1.

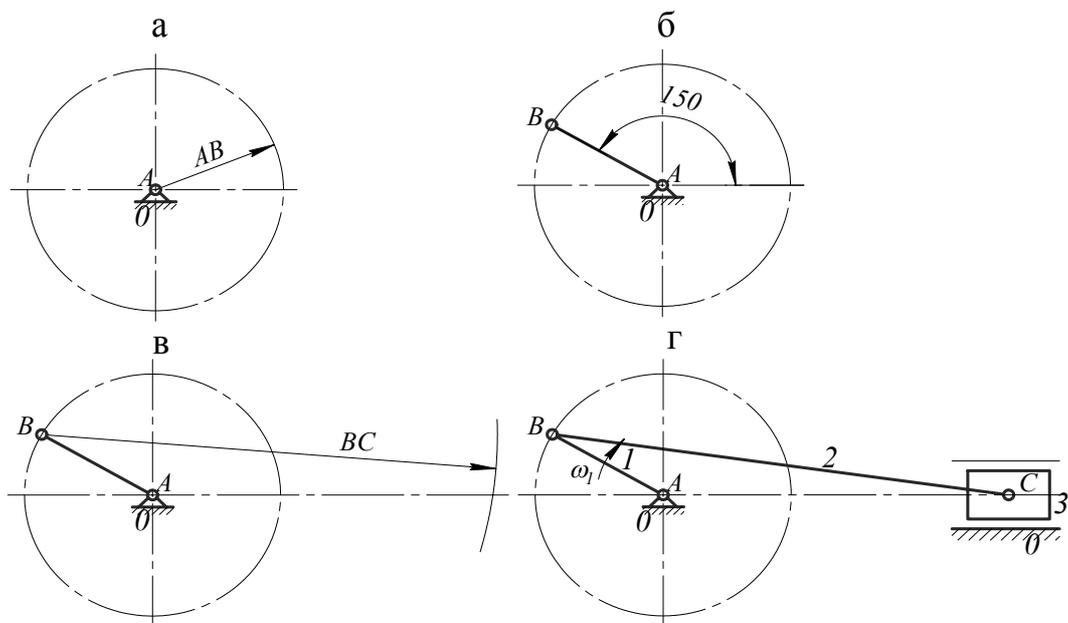


Рис. 2. Построение плана механизма: а) – построение траектории точки  $B$ ; б) – положение кривошипа  $AB$ ; в) – определение положения точки  $C$ ; г) – готовый план механизма.

### Аналитическое решение.

Для рассмотренного выше механизма, замкнутый контур выглядит, как показано на рис. 3. В дальнейшем, если это не оговорено специально, векторы будем обозначать жирными буквами, а их модули обычным шрифтом.

Кривошип и шатун заменены векторами  $l_1$  и  $l_2$ , а стойка  $AC$  – вектором  $l_0$ .

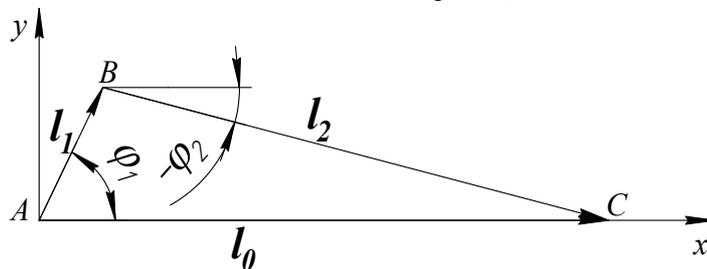


Рис. 3. Замкнутый векторный контур

Задача сводится к определению угла  $\varphi_2$  и модуля вектора  $l_0$  при заданных  $\varphi_1, l_1, l_2$ .

Векторное уравнение замкнутости контура  $l_1 + l_2 = l_0$ .

Спроектируем уравнение на ось  $Oy$ :  $l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = 0$ . Находим угол

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right).$$

Модуль вектора  $l_0$  получим, спроектировав уравнение на ось  $Ox$ :

$$l_0 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Например, для  $l_1 = 0,03$  м,  $l_2 = 0,09$  м и  $\varphi_1 = 150^\circ$  получим  $\varphi_2 = -9,594^\circ$  и  $l_0 = 0,063$  м.

Покажем теперь, как эта задача может быть решена в Mathcad. Решим с помощью вычислительного блока Given-Find векторное уравнение замкнутости контура.

$$\phi_1 := \frac{5\pi}{6} \quad \phi_2 := 1 \quad l_0 := 0.1 \quad \text{Given}$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ l_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_2, l_0) \quad \phi_2 = -9.59 \text{ deg} \quad l_0 = 0.063 \text{ .}$$

Непосредственно из решения векторного уравнения получены параметры, определяющие положения второго и третьего звеньев.

Искомые векторы

$$l_1 := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 := \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_0 := \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_1 = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0.089 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_0 = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ .}$$

### 3.2.2. Кривошипно-коромысловый механизм

Дано: структурная схема механизма (рис. 4);  $\varphi_1^\circ$  – угол, определяющий положение кривошипа;  $l_{AB}$  – длина кривошипа 1, м;  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$  – длины шатуна 2 и коромысла 3, м. Заданы также длины отрезков  $l_{BE}$  и  $l_{CE}$ , м, которые примем равными. Таким образом, треугольник  $BEC$  – равнобедренный.

Как и в предыдущем случае, необходимо по заданному положению звена 1 найти положения звеньев 2 и 3.

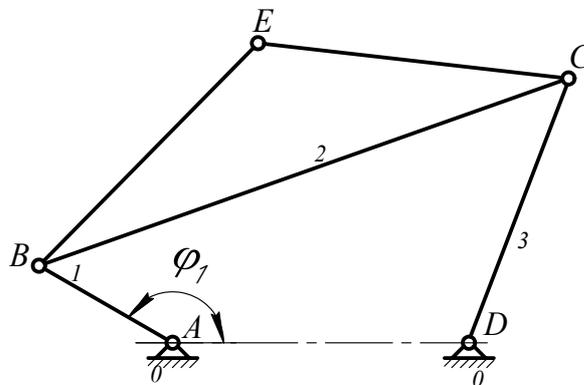


Рис. 4. Кривошипно-коромысловый механизм

### Графическое решение.

Определяемся с масштабным коэффициентом длины  $\mu_l$ . В этом масштабе длины отрезков, которыми изображаются звенья механизма

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}, BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}, CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l}, BE = \frac{l_{BE}}{\mu_l}, CE = \frac{l_{CE}}{\mu_l}, \text{ мм.}$$

Алгоритм построения плана механизма такой же, как и в предыдущем случае.

На свободном поле чертежа изображаем окружность радиуса  $AB$ , которая будет траекторией точки  $B$  (рис. 5, а).

Затем рисуем кривошип  $AB$  под заданным углом, например,  $\varphi_1 = 150^\circ$ .

Из точки  $A$  засечкой радиусом  $AD$  на горизонтали находим положение точки  $D$  (рис. 5, б). Из точки  $D$  радиусом  $DC$  проводим дугу окружности, часть которой будет траекторией точки  $C$ . Из точки  $B$  радиусом  $BC$  делаем засечку на этой дуге и находим положение точки  $C$  (рис. 5, в). Из точек  $B$  и  $C$  радиусами  $BE$  и  $CE$  соответственно находим положение точки  $E$  (рис. 5, г). Оформляем окончательно план механизма (рис. 5, д).

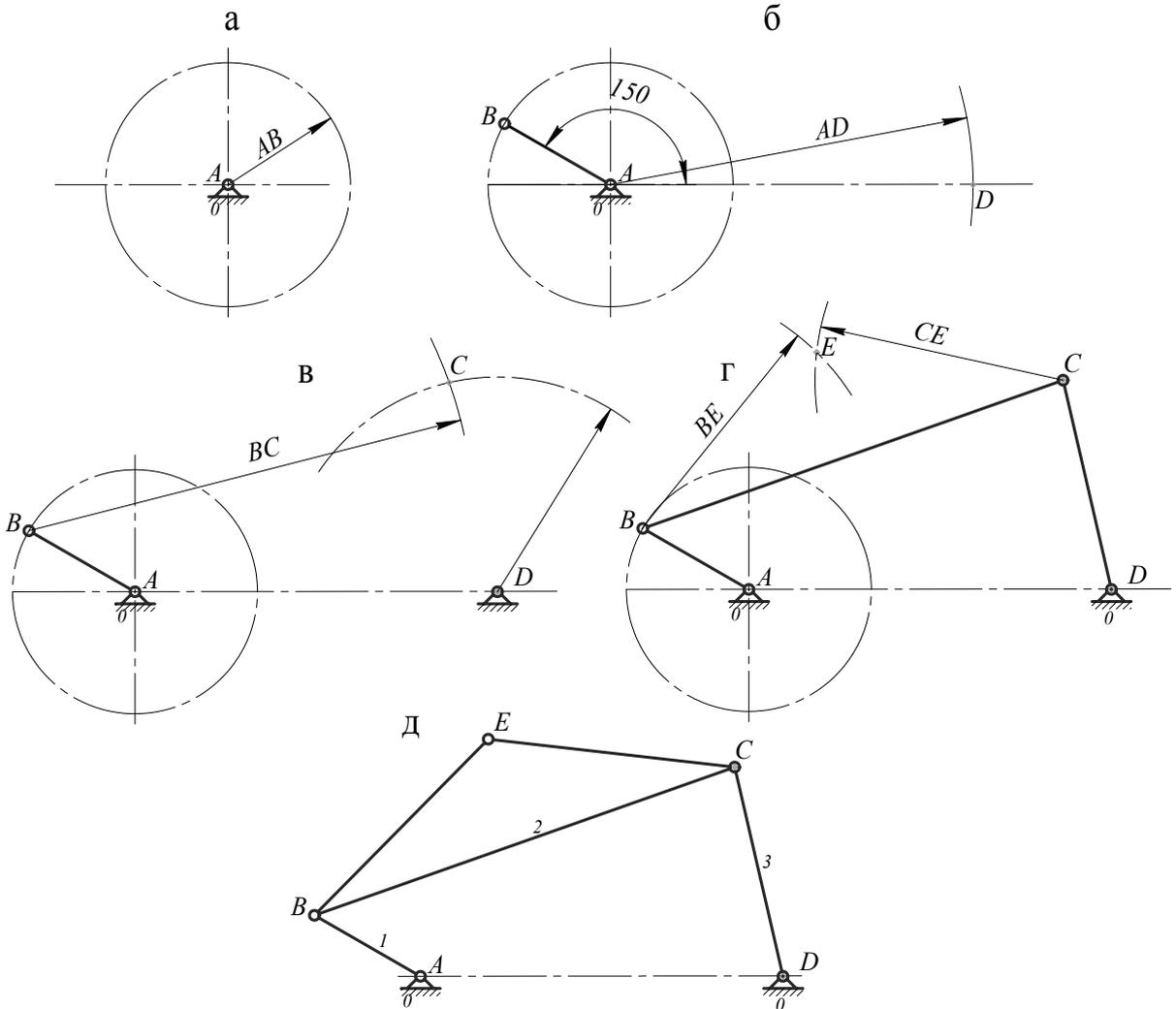


Рис. 5. Построение плана механизма: а) – построение траектории точки  $B$ ; б) – положение кривошипа  $AB$  и точки  $D$ ; в) – определение положения точки  $C$ ; г) – определение положения точки  $E$ ; д) – готовый план механизма

### Аналитическое решение.

Для рассматриваемого механизма, векторное представление выглядит, как показано на рис. 6. Векторное уравнение замкнутости контура  $l_1 + l_2 - l_3 = l_0$ .

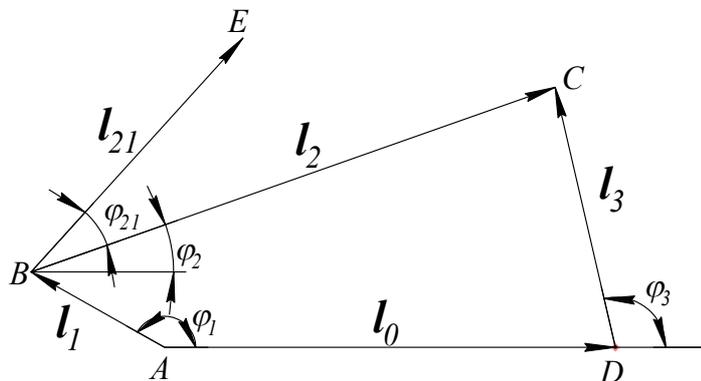


Рис. 6. Замкнутый векторный контур

Кривошип, элементы шатуна и коромысло заменены векторами  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_{21}$  и  $l_3$ , а стойка  $AD$  – вектором  $l_0$ .

Задача сводится к определению углов  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и вектора  $l_{21}$  при заданных  $\varphi_1, \varphi_{21}, l_1, l_2, l_{21}, l_3$  и  $l_0$ .

Записываем в Mathcad векторное уравнение замкнутости, в результате решения которого получаем векторы  $l_2$  и  $l_3$ .

Для  $l_1 = 0,045$  м,  $l_2 = 0,135$  м,  $l_{21} = 0,075$  м,  $l_3 = 0,07$  м,  $l_0 = 0,15$  м и  $\varphi_1 = 150^\circ$  получим

$$\varphi_1 := \frac{5\pi}{6} \quad \varphi_2 := 1 \quad \varphi_3 := 1 \quad \text{Given} \quad 0 < \varphi_3 < \pi$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\varphi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\varphi_2, \varphi_3) \quad \varphi_2 = 8.59 \text{ deg} \quad \varphi_3 = 142.436 \text{ deg} .$$

Искомые векторы

$$l_2 := \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0.133 \\ 0.02 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 := \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\varphi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.043 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Найдем угол

$$\varphi_{21} := \arccos\left(\frac{|l_2|}{2|l_{21}|}\right) \quad \varphi_{21} = 25.842 \text{ deg} .$$

Вектор

$$l_{21} := \begin{pmatrix} l_{21} \cdot \cos(\phi_2 + \phi_{21}) \\ l_{21} \cdot \sin(\phi_2 + \phi_{21}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{21} = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 0.042 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.3. Кривошипно-кулисный механизм

Дано: структурная схема механизма (рис. 7);  $\varphi_1^\circ$  – угол, определяющий положение кривошипа;  $l_{AB}$  – длина кривошипа 1, м;  $l_{AD}$  – расстояние между опорами  $A$  и  $D$ , м;  $l_{CD}$  – длина кулисы 3, м.

По заданному значению  $\varphi_1$  необходимо найти  $\varphi_3$ .

**Графическое решение.**

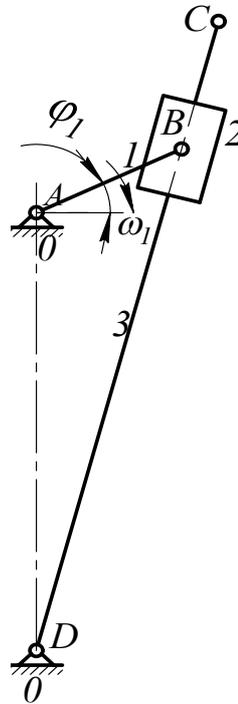


Рис. 7. Кривошипно-кулисный механизм

В принятом масштабе длины  $\mu_l$  отрезок, которым изображается неподвижное звено 0  $AD = \frac{l_{AD}}{\mu_l}$ , мм.

Последовательность построения плана механизма полностью иллюстрирует рис. 8.

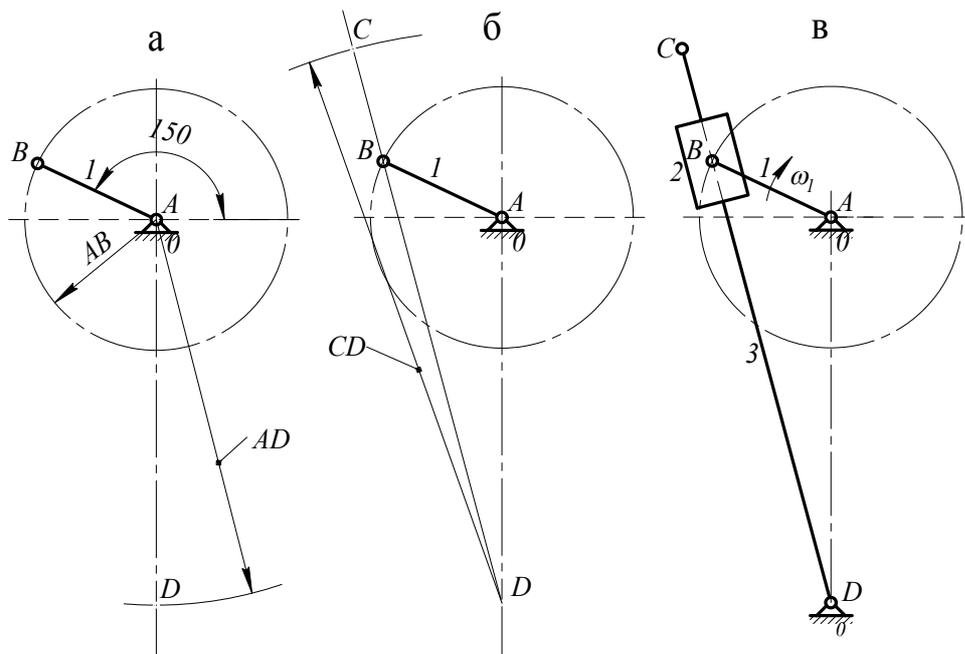


Рис. 8. Построение плана кривошипно-кулисного механизма: а) – построение траектории точки  $B$  и положения точек  $B$  и  $D$ ; б) – положение кулисы  $CD$  и точки  $C$ ; в) – готовый план механизма

#### Аналитическое решение.

Для рассматриваемого механизма, замкнутый контур выглядит, как показано на рис. 9.

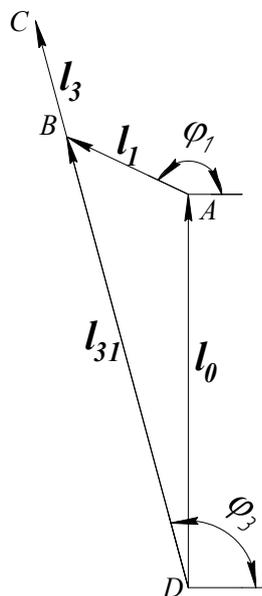


Рис. 9. Замкнутый векторный контур

Кривошип, вся кулиса и её часть ( $BD$ ) заменены векторами  $l_1$ ,  $l_3$  и  $l_{31}$ , а стойка  $AD$  – вектором  $l_0$ . Дано:  $\varphi_1$ ,  $l_1$ ,  $l_3$  и  $l_0$ .

Задача сводится к определению вектора  $l_{31}$ , который в этом случае равен сумме векторов  $l_0$  и  $l_1$  т.е.  $l_{31} = l_0 + l_1$ . Это уравнение замкнутости контура, из которого при  $l_1 = 0,03$  м,  $l_3 = 0,1$  м,  $l_0 = 0,07$  м и  $\varphi_1 = 150^\circ$  получим

$$l_1 := 0.03 \quad l_0 := 0.07 \quad l_3 := 0.1 \quad \varphi_1 := \frac{5\pi}{6}$$

$$l_1 := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{31} := l_0 + l_1 \quad l_{31} = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.085 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Угол  $\varphi_3$  получим, используя компоненты вектора  $l_{31}$ . Вектор  $l_3$  находим пользуясь теоремой подобия

$$\varphi_3 := \text{angle}(l_{31_0}, l_{31_1}) \quad \varphi_3 = 106.996 \text{ deg}$$

$$l_3 := \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\varphi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\varphi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.029 \\ 0.096 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.4. Частные задачи геометрического анализа механизмов

Отдельная задача геометрического анализа – построение планов механизма, соответствующих, так называемым, мертвым положениям механизма.

Мертвым называют положение механизма, в котором направление вектора скорости выходного звена неопределенно. Так, на рис. 10 изображены мертвые положения для кривошипно-ползунного механизма (рис. 10, а) и шарнирного четырехзвенника (рис. 10, б) при ведущих соответственно ползуне 1 и коромысле 1.

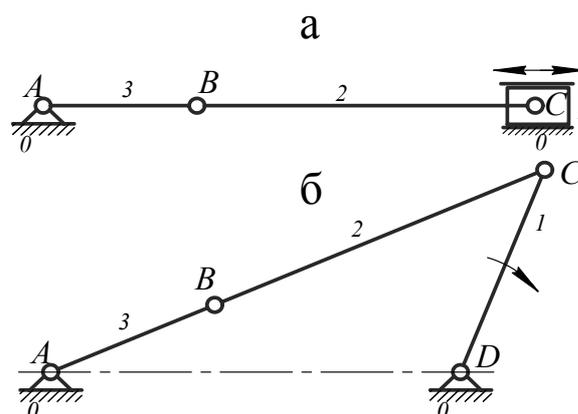


Рис. 10. Мертвые положения: а) кривошипно-ползунный механизм; б) шарнирный четырехзвенник

После прохождения этого положения равновероятны вращения кривошипов 3, как по ходу часовой стрелки, так и против её хода. Эта

неопределенность устраняется за счет собственной инерции кривошипа или, например, установки на оси кривошипа дополнительного махового колеса.

При выборе в качестве ведущего звена кривошипа 3 такой проблемы для выходных звеньев 1 не возникает, но положение, когда продольные оси кривошипа и шатуна лежат на одной прямой, также называют мертвым. Характерным в этом случае является равенство нулю скорости выходного звена. Иными словами, в этих положениях вектор скорости любой точки выходного звена изменяет своё направление. Очевидно, что для каждого механизма имеются два мертвых положения. Если кинематический анализ начинать с одного из этих положений, то наглядно прослеживается поведение выходного звена за один цикл движения входного звена.

Рассмотрим построение таких планов.

### Графическое решение.

Для наиболее общего случая кривошипно-ползунного механизма – дезаксиального (рис. 11, а), крайние положения точки  $C$  находятся следующим образом. Крайнее правое положение  $C_{m1}$  (рис. 11, б) определяется засечкой из точки  $A$  радиусом  $AB+BC$  на траектории точки  $C$ . Аналогично находится точка  $C_{m2}$  радиусом  $BC-AB$ . Планы механизма в мертвых положениях изображены на рис. 11, в.

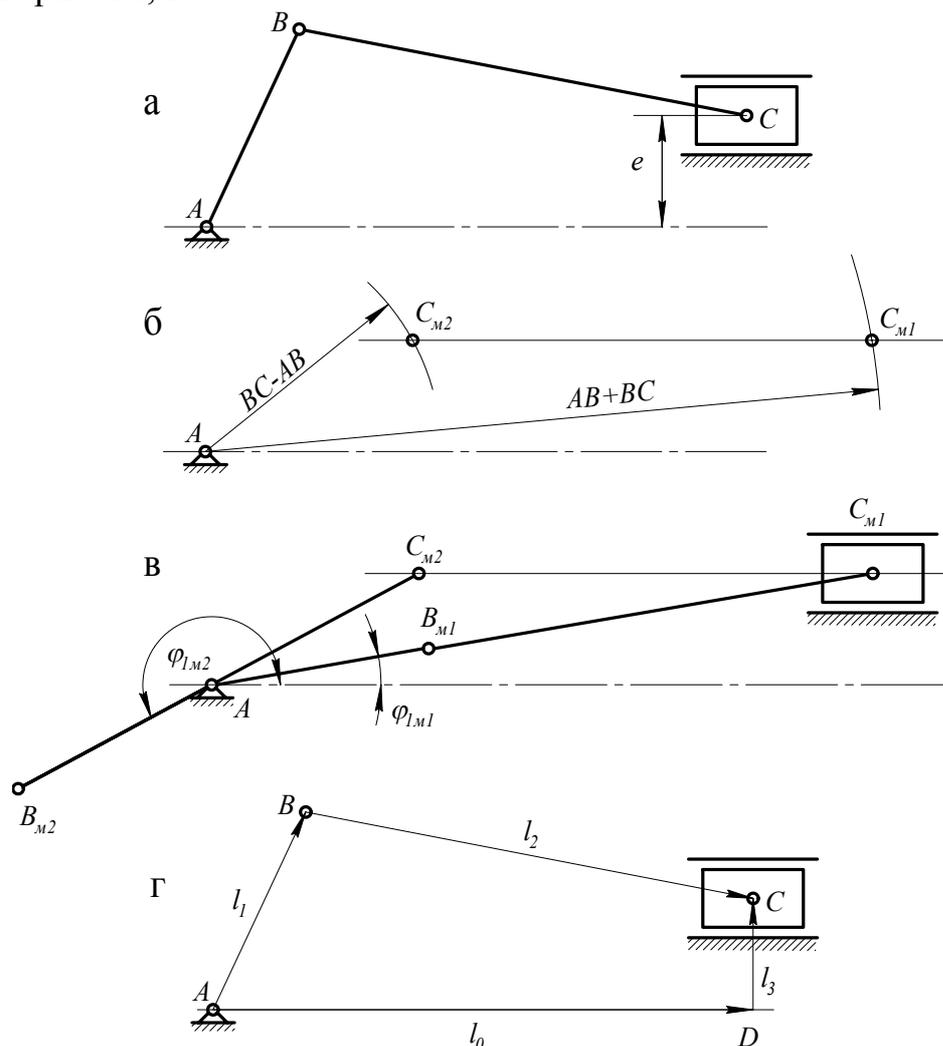


Рис. 11. Дезаксиальный кривошипно-ползунный механизм

Таким же образом находятся мертвые положения для шарнирного четырехзвенника (рис. 12, а – в).

Для кривошипно-кулисного механизма (рис. 13) мертвыми положениями будут положения механизма, соответствующие левому и правому крайним положениям кулисы. В этих положениях продольная ось кулисы перпендикулярна продольной оси кривошипа.

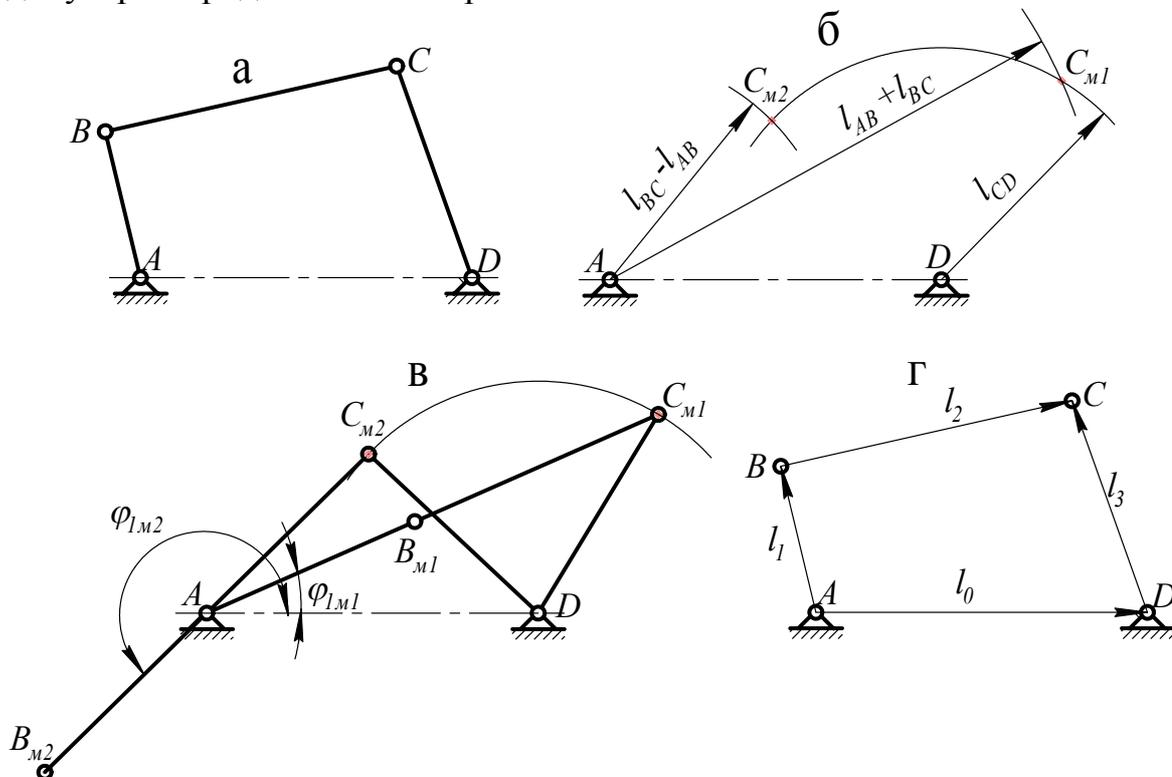


Рис. 12. Шарнирный четырехзвенник

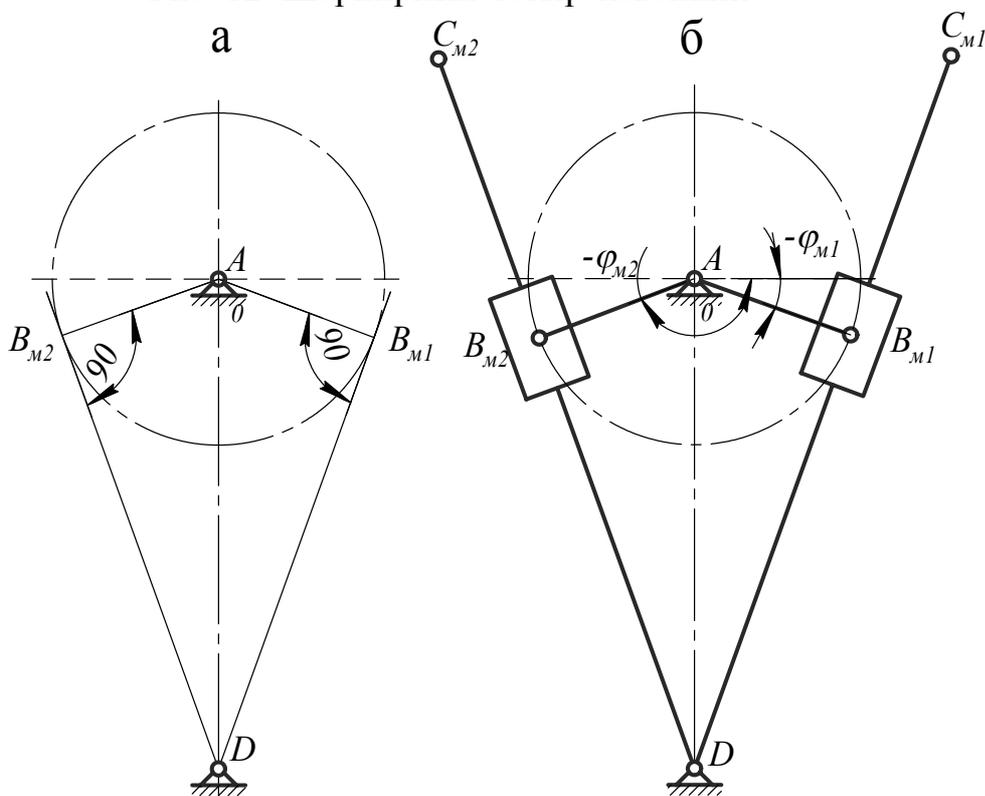


Рис. 13. Кривошипно-кулисный механизм

### Аналитическое решение.

Примем для дезаксиального кривошипно-ползунного механизма (рис. 11, г)  $l_{AB} = l_1 = 0,03$  м,  $l_{BC} = l_2 = 0,09$  м,  $l_{AD} = l_0$ ,  $l_{CD} = l_3 = 0,01$  м. Правое мертвое положение найдем, приняв равными углы  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{1m1}$ .

$$\phi_{1m1} := 1 \quad l_0 := 0.1 \quad \text{Given} \quad 0 < \phi_{1m1} < \pi$$

$$\begin{bmatrix} (l_1 + l_2) \cdot \cos(\phi_{1m1}) \\ (l_1 + l_2) \cdot \sin(\phi_{1m1}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi_{1m1} \\ l_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m1}, l_0)$$

$$\phi_{1m1} = 4.78 \text{ deg} \quad l_0 = 0.12 \quad .$$

Аналогично получим значение обобщенной координаты механизма для левого мертвого положения

$$\phi_{1m2} := 1 \quad l_0 := 0.1 \quad \text{Given} \quad \pi < \phi_{1m2} < 2\pi$$

$$\begin{bmatrix} (l_2 - l_1) \cdot \cos(\phi_{1m2} - \pi) \\ (l_2 - l_1) \cdot \sin(\phi_{1m2} - \pi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi_{1m2} \\ l_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m2}, l_0)$$

$$\phi_{1m2} = 189.594 \text{ deg} \quad l_0 = 0.059 \quad .$$

Для шарнирного четырехзвенника нахождение мертвых положений не составляет труда. Для  $l_1 = 0,045$  м,  $l_2 = 0,135$  м,  $l_3 = 0,07$  м,  $l_0 = 0,15$  м получим:

- правое положение

$$\phi_{1m1} := 1 \quad \phi_3 := 1 \quad \text{Given} \quad 0 < \phi_{1m1} < \pi$$

$$\begin{bmatrix} (l_1 + l_2) \cdot \cos(\phi_{1m1}) \\ (l_1 + l_2) \cdot \sin(\phi_{1m1}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi_{1m1} \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m1}, \phi_3)$$

$$\phi_{1m1} = 22.192 \text{ deg} \quad \phi_3 = 76.226 \text{ deg} \quad .$$

- левое положение

$$\phi_{1m2} := 1 \quad \phi_3 := 1 \quad \text{Given} \quad \pi < \phi_{1m2} < 2\pi$$

$$\begin{bmatrix} (l_2 - l_1) \cdot \cos(\phi_{1m2} - \pi) \\ (l_2 - l_1) \cdot \sin(\phi_{1m2} - \pi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1m2} \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m2}, \phi_3) \quad \phi_{1m2} = 197.9 \text{ deg} \quad \phi_3 = 156.8 \text{ deg} .$$

В кривошипно-кулисном механизме (векторная схема на рис. 9) в мертвых положениях кривошип перпендикулярен кулисе. С учетом этого, для  $l_1 = 0,03$  м,  $l_3 = 0,1$  м и  $l_0 = 0,07$  м найдем параметры, определяющие правое мертвое положение

$$\phi_{1m1} := 1 \quad l_{31} := 0.1 \quad \text{Given} \quad \frac{3\pi}{2} < \phi_{1m1} < 2\pi$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_{1m1}) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_{1m1}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos\left(\phi_{1m1} - \frac{3\pi}{2}\right) \\ l_{31} \cdot \sin\left(\phi_{1m1} - \frac{3\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1m1} \\ l_{31} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m1}, l_{31}) \quad \phi_{1m1} = 334.6 \text{ deg} \quad l_{31} = 0.063$$

$$\phi_3 := \phi_{1m1} - \frac{3\pi}{2} \quad \phi_3 = 64.623 \text{ deg} .$$

Аналогично определится левое мертвое положение.

$$\phi_{1m2} := 4 \quad l_{31} := 0.1 \quad \text{Given} \quad \pi < \phi_{1m1} < 2\pi$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_{1m2}) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_{1m2}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos\left(\phi_{1m2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ l_{31} \cdot \sin\left(\phi_{1m2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1m2} \\ l_{31} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m2}, l_{31}) \quad \phi_{1m2} = 205.4 \text{ deg} \quad l_{31} = 0.063$$

$$\phi_3 := \phi_{1m2} - \frac{\pi}{2} \quad \phi_3 = 115.377 \text{ deg} .$$

### 3.2.5. Пример геометрического анализа плоского рычажного шестизвенника

Дана кинематическая схема шестизвенника (рис. 14). Размеры звеньев:  $l_{AB} = 0,02$  м;  $l_{BC} = 0,05$  м;  $l_{CD} = 0,035$  м;  $l_{AD} = 0,05$  м;  $l_{CE} = 0,022$  м;  $l_{DE} = 0,022$  м;  $l_{EF} = 0,04$  м;  $e = 0,01$  м. Необходимо определить положения звеньев механизма, соответствующие шести равноотстоящим положениям кривошипа  $AB$ , начиная от правого мертвого положения.

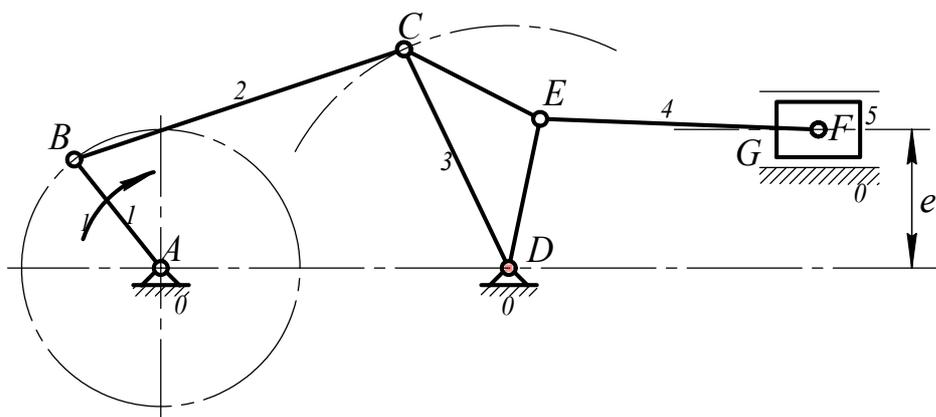


Рис. 14. Плоский рычажный шестизвенник

### Графическое решение.

Вначале необходимо определиться с масштабом планов механизма, для чего оценивают размеры участка на чертежном листе, который отводится для построения планов механизма. Затем оценивают возможные габариты рисунка и назначают приемлемый масштабный коэффициент. В любом случае, длина отрезка, которым изображается самое короткое звено, должна быть 20-40 мм.

Удобно пользоваться масштабным коэффициентом  $\mu_l = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ , который является аналогом чертежному масштабу 1:1. При выборе указанного масштабного коэффициента нет необходимости пользоваться калькулятором, поскольку любая длина, заданная в метрах, легко выражается в миллиметрах. В примере примем масштабный коэффициент  $\mu_l = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$  (рис. 15).

Определяемся с положением точки  $A$ , которую помещаем в шарнирно-неподвижную опору (рис. 15, а). Циркулем с раствором 20 мм (это соответствует реальной длине кривошипа 0,02 м) рисуем штрихпунктирной линией окружность – траекторию точки  $B$ . Изображаем оси симметрии окружности. Горизонтальную ось удлинняем вправо – на ней будет находиться вторая шарнирно-неподвижная опора и точка  $D$ , положение которой находим засечкой циркулем с раствором 50 мм. Из точки  $D$  рисуем дугу окружности радиуса 35 мм – траекторию точки  $C$ . Затем радиусом 70 мм, равным сумме длин кривошипа  $AB$  и шатуна  $BC$  на этой дуге засекаем положение точки  $C_1$ , соответствующее плану механизма в правом мертвом положении. Выше линии  $AD$  параллельно ей на расстоянии 10 мм проводим отрезок прямой – траекторию точки  $F$ .

Через точки  $A$  и  $C_1$  (рис. 15, б) проводим прямую, на которой будут находиться кривошип  $AB_1$  и шатун  $B_1C_1$  в правом мертвом положении механизма. Соединяем точки  $D$  и  $C_1$  – это положение коромысла  $C_1D$ . Из точек  $D$  и  $C_1$  циркулем с раствором 22 мм засекаем положение точки  $E_1$ . Из последней засекаем положение точки  $F_1$ . Завершаем построение этого плана механизма (рис. 15, в), помещая в точки соприкосновения звеньев условные обозначения кинематических пар (для шарниров – небольшие окружности).

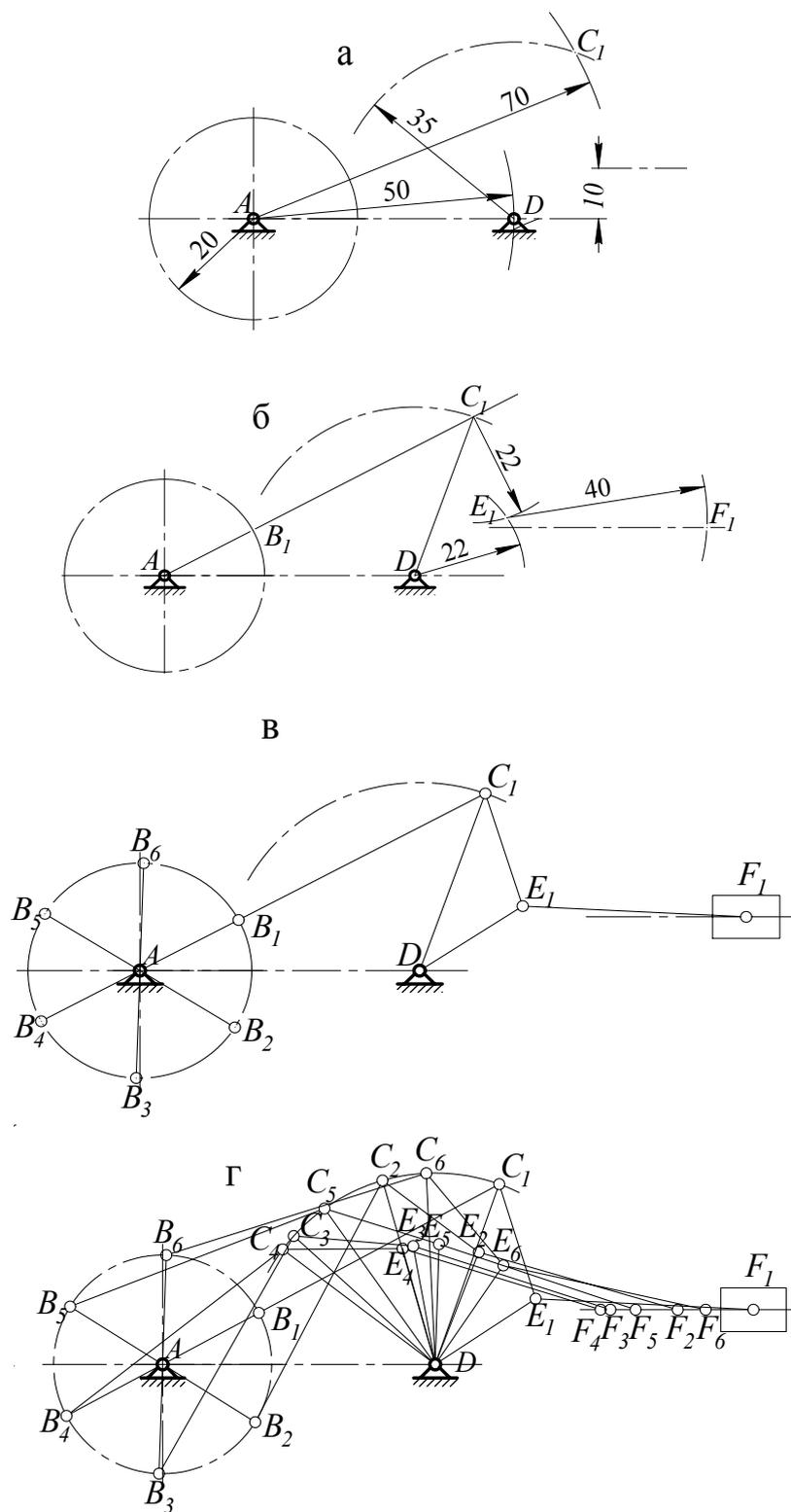


Рис. 15. Планы положений механизма: а) построение точек  $A$ ,  $D$  и  $C_1$ ; б) построение точек  $E_1$  и  $F_1$ ; в) обозначения кинематических пар; г) шесть планов механизма

Одновременно размечаем траекторию точки  $B$  в направлении вращения кривошипа. Для шести положений это легко сделать засекая последовательные положения точки  $B$  циркулем с раствором, равным радиусу траектории т.е. 20 мм.

Оставшиеся планы строятся аналогично. Из точки  $B_i$  радиусом 50 мм засекаем точку  $C_i$ . Из неё и точки  $D$  засекаем точку  $E_i$ , из которой засечкой получаем точку  $F_i$ . На рис. 15, г показано, как выглядят шесть требуемых планов механизма.

### Аналитическое решение.

Заменим звенья соответствующими векторами ( $AB - l_1$ ;  $BC - l_2$ ;  $CD - l_3$ ;  $AD - l_0$ ;  $DE - l_{31}$ ;  $EF - l_4$ ; отрезок  $DF$  представим суммой векторов  $l_5$  и  $l_6 = e$ ), которые образуют два замкнутых контура (рис. 16).

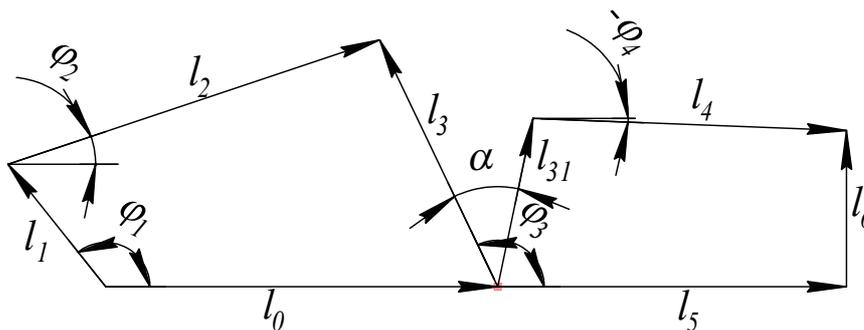


Рис. 16. Замкнутый векторный контур

Угол между векторами  $l_3$  и  $l_{31}$  обозначим  $\alpha$ . Его легко определить из  $\triangle CDE$

$$\alpha := \arccos\left(\frac{l_3}{2l_{31}}\right) \quad \alpha = 37.302 \text{ deg.}$$

Вначале определим значение обобщенной координаты механизма, соответствующее правому мертвому положению механизма. Для контура  $ABCD$  в этом положении имеем равенство углов, определяющих положения первого и второго звеньев. Из векторного уравнения замкнутости с помощью решающего блока Given-Find найдем значения углов  $\phi_{1m1}$  и  $\phi_{3m1}$  (последняя единица в индексе соответствует правому мертвому положению):

$$\begin{aligned} & \phi_{1m1} := 1 \quad \phi_{3m1} := 1 \quad \text{Given} \\ & \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_{1m1}) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_{1m1}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_{1m1}) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_{1m1}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_{3m1}) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_{3m1}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \phi_{1m1} \\ \phi_{3m1} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m1}, \phi_{3m1}) \quad \phi_{1m1} = 28.1 \text{ deg} \quad \phi_{3m1} = 70.38 \text{ deg.} \end{aligned}$$

Из уравнения замкнутости для второго контура найдем значения параметров, определяющих положения звеньев 4 и 5 в этом мертвом положении

$$\phi_{31m1} := \phi_{3m1} - \alpha$$

$$\phi_{4m1} := 1 \quad l_{5m1} := 0.05 \quad \text{Given}$$

$$\begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos(\phi_{31m1}) \\ l_{31} \cdot \sin(\phi_{31m1}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \cdot \cos(\phi_{4m1}) \\ l_4 \cdot \sin(\phi_{4m1}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{5m1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{4m1} \\ l_{5m1} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{4m1}, l_{5m1}) \quad \phi_{4m1} = -2.88 \text{ deg} \quad l_{5m1} = 0.058 \quad .$$

Зададим закон изменения обобщенной координаты механизма, соответствующий поставленной задаче:

$$\phi_1 := \phi_{1m1} - (n-1) \cdot \frac{\pi}{3} \quad .$$

Изменяя  $n$  от 1 до 6, получим картину изменения положений звеньев механизма за один оборот кривошипа. Например, для положения 3 имеем из первого контура:

$$\phi_1 = -91.902 \text{ deg}$$

$$\phi_2 := 1 \quad \phi_3 := 1 \quad \text{Given} \quad 0 < \phi_3 < \pi$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_2, \phi_3) \quad \phi_2 = 60.39 \text{ deg} \quad \phi_3 = 137.87 \text{ deg} ;$$

из второго контура

$$\phi_4 := 1 \quad l_5 := 0.05 \quad \text{Given}$$

$$\begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos(\phi_3 - \alpha) \\ l_{31} \cdot \sin(\phi_3 - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \cdot \cos(\phi_4) \\ l_4 \cdot \sin(\phi_4) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_4 \\ l_5 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_4, l_5) \quad \phi_4 = -16.9 \text{ deg} \quad l_5 = 0.03 \quad .$$

После этого запишем соответствующие векторы:

$$l_1 := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 := \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 := \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_0 := \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{31} := \begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos(\phi_3 - \alpha) \\ l_{31} \cdot \sin(\phi_3 - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_4 := \begin{pmatrix} l_4 \cdot \cos(\phi_4) \\ l_4 \cdot \sin(\phi_4) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_5 := \begin{pmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ l_6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Их значения для третьего положения:

$$l_1 = \begin{pmatrix} -0.001 \\ -0.02 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.043 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.023 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{31} = \begin{pmatrix} -0.004 \\ 0.022 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_4 = \begin{pmatrix} 0.038 \\ -0.012 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_5 = \begin{pmatrix} 0.034 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

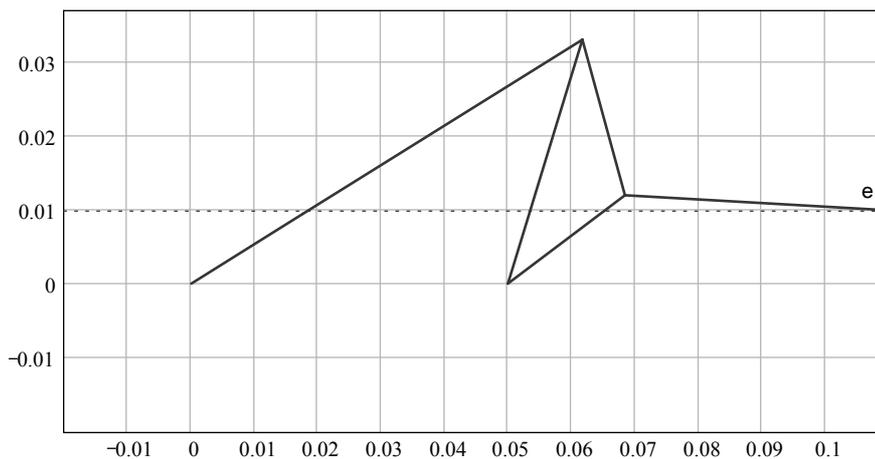
Примем  $n = 5$ . Соответствующее решение:

$$l_1 = \begin{pmatrix} -0.017 \\ 0.011 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0.047 \\ 0.018 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.029 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{31} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.022 \\ 0 \end{pmatrix}$$

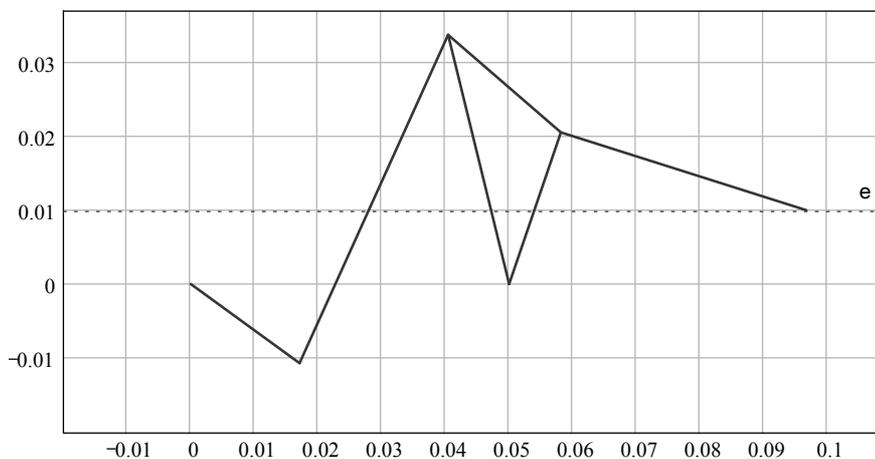
$$l_4 = \begin{pmatrix} 0.038 \\ -0.012 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_5 = \begin{pmatrix} 0.039 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Используем возможности Mathcad для визуализации аналитического решения. На рис. 16 изображены искомые шесть планов механизма.

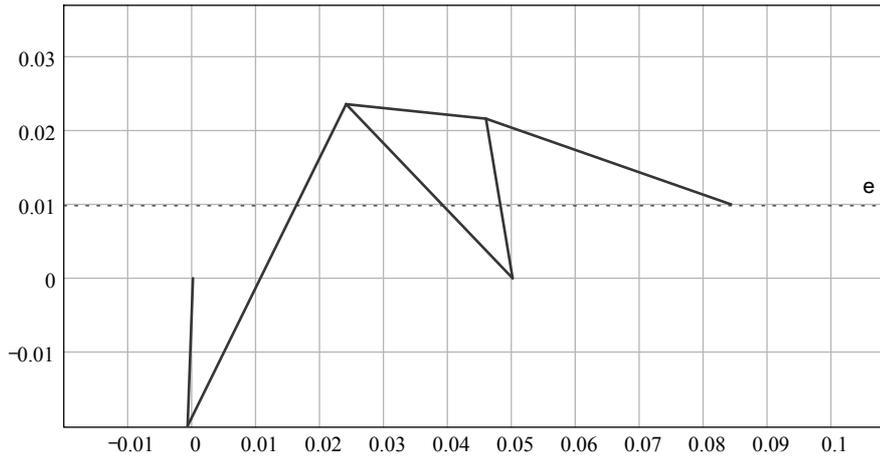
$n = 1$



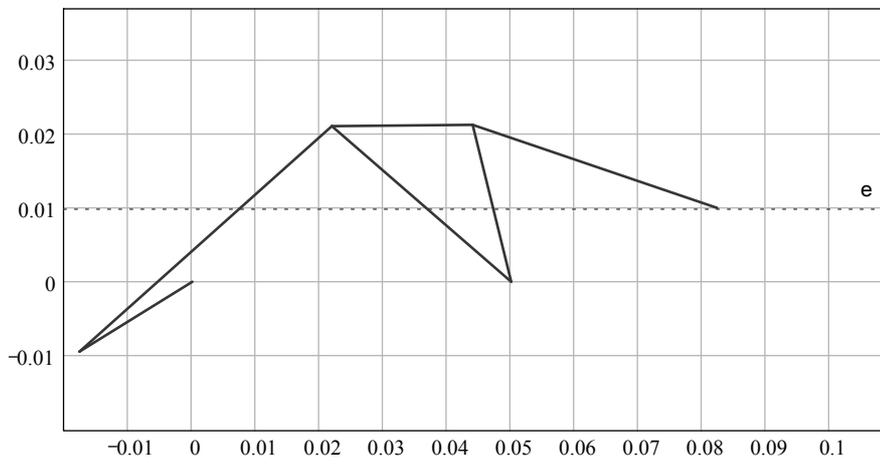
$n = 2$



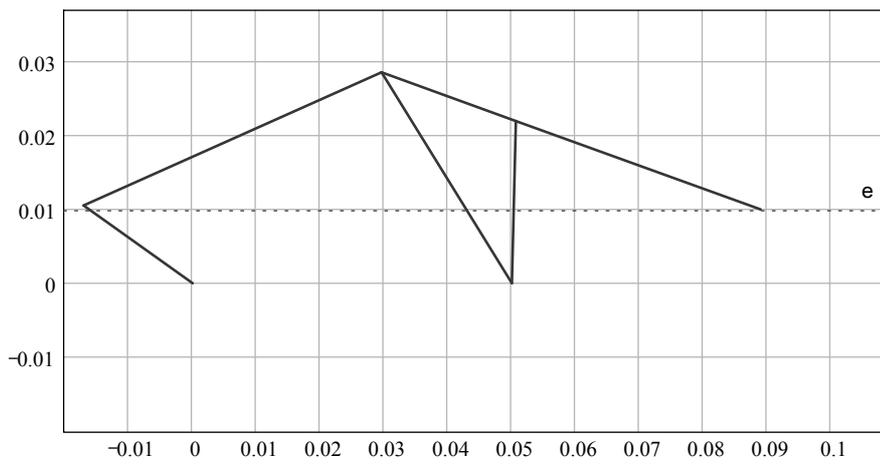
n = 3



n = 4



n = 5



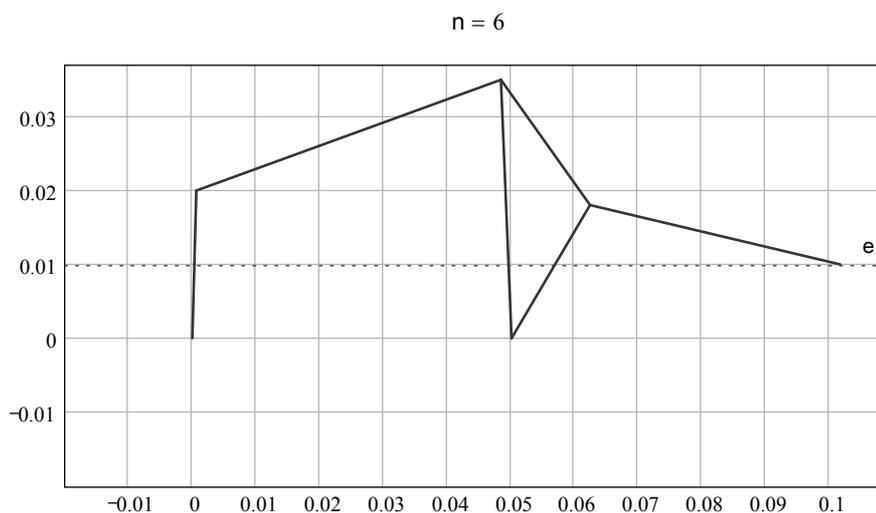


Рис. 16. Планы механизма для шести положений кривошипа

### 3.3. Определение скоростей и ускорений

Переходим ко второй задаче кинематического анализа, которая также может быть решена различными методами.

#### Графическое решение.

Будем искать с помощью метода планов скоростей и ускорений.

*Планом скоростей (ускорений)* называется чертеж, на котором в виде отрезков изображены векторы скоростей (ускорений) характерных точек звеньев механизма. Все векторы абсолютных скоростей (ускорений) начинаются в одной точке, называемой *полюсом*. Концы векторов абсолютных скоростей (ускорений) соединяют векторы относительных скоростей (ускорений).

При построении планов скоростей и ускорений применяют, так называемую, *теорему подобия*. Отрезки прямых линий, соединяющие точки одного и того же звена на плане механизма и отрезки прямых линий, соединяющие концы векторов скоростей (ускорений) этих точек на плане скоростей (ускорений), образуют подобные и сходственно расположенные фигуры.

Планы скоростей и ускорений строят в определенных масштабах, соответствующие масштабные коэффициенты имеют размерность:  $\mu_v - \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$  и

$$\mu_a - \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

#### Аналитическое решение.

Как и в предыдущей главе, будем находить, используя возможности Mathcad в операциях с векторными величинами.

Рассмотрим применение графического и аналитического методов определения скоростей и ускорений на примере тех же простейших плоских механизмов второго класса.

### 3.3.1. Кривошипно-ползунный механизм

Дано: кинематическая схема механизма (рис. 17); угловая скорость кривошипа  $\omega_1 = \text{const}, \text{c}^{-1}$ ; длины звеньев  $l_{AB}, l_{BC}, \text{м}$ .

Необходимо построить планы скоростей и ускорений механизма.

#### Графическое решение.

Вначале определяют линейную скорость точки  $B$  кривошипа  $v_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$ . Затем, определившись с масштабным коэффициентом скорости, из произвольной точки на плоскости чертежа (полюс плана скоростей  $p_v$ , в котором также находится точка  $a$ ) откладывают отрезок  $p_v b$  перпендикулярно кривошипу  $AB$  (шаг 1, рис. 17). Стрелкой отмечаем направление этого вектора скорости точки  $B$  (в сторону направления  $\omega_1$ ). Скорость точки  $C$  определяют по теореме о сложении скоростей по векторному уравнению

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}. \quad (1)$$

В соответствии с этим уравнением, через конец вектора  $\mathbf{v}_B$  проводят прямую, перпендикулярную шатуну  $BC$  (шаг 2, рис. 17), а через полюс проводят горизонталь до пересечения с предыдущей прямой (шаг 3, рис. 17). Завершают построение плана скоростей, убирая лишние отрезки прямых и расставляя стрелки в соответствии с векторным уравнением (1) (шаг 4, рис. 17).

Модули векторов скоростей  $\mathbf{v}_C$  и  $\mathbf{v}_{CB}$  получают, измерив отрезки  $p_v c$  и  $bc$  на плане скоростей и умножив их длины на масштабный коэффициент скорости. Угловую скорость шатуна находят, как  $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$ . Если мысленно

перенести вектор относительной скорости  $\mathbf{v}_{CB}$  параллельно самому себе в точку  $C$ , то можно видеть направление вращения шатуна относительно точки  $B$  т.е. направление  $\omega_2$ .

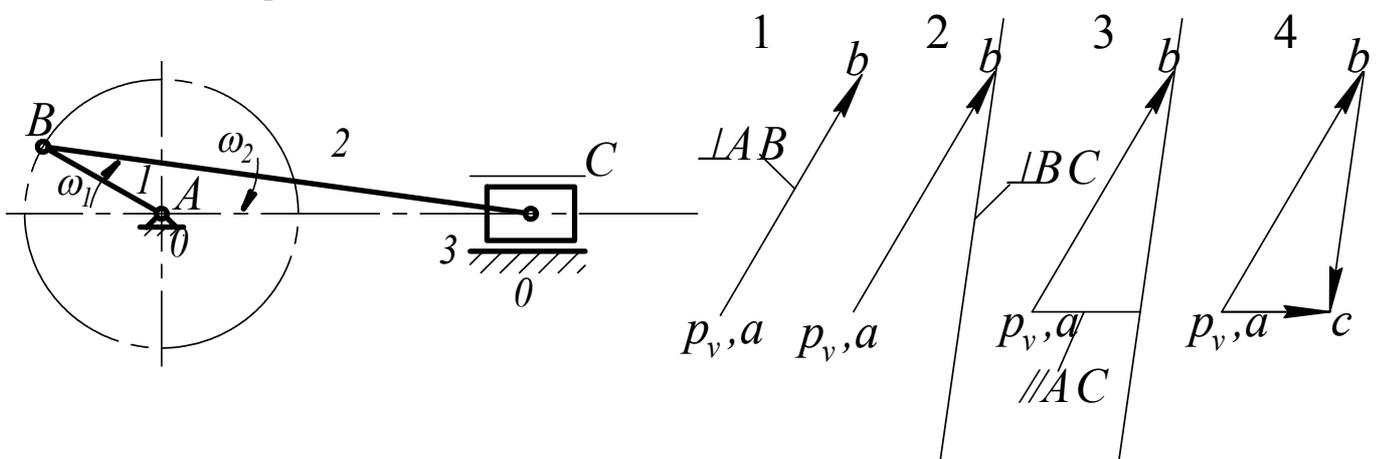


Рис. 17. Последовательность построения плана скоростей для кривошипно-ползунного механизма

Переходим к определению ускорений кривошипно-ползунного механизма. Полное ускорение точки  $a$ , движущейся по криволинейной траектории, складывается из двух составляющих: нормального  $a^n$  и касательного  $a^r$ . Полное ускорение  $a = a^n + a^r$ .

Нормальное ускорение направлено по нормали к кривой к центру кривизны, а его величина определяется по формуле

$$a^n = \frac{v^2}{r},$$

где  $v$  – линейная скорость точки;

$r$  – радиус кривизны траектории.

Величина касательного ускорения определяется по формуле

$$a^r = \frac{dv}{dt}.$$

Вначале определяют ускорение точки  $B$  кривошипа  $a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ , м/с<sup>2</sup>. Также определяются с масштабным коэффициентом ускорений  $\mu_a$  и, обозначив полюс плана ускорений  $p_a$ , откладывают вектор ускорения точки  $B$  параллельно кривошипу, как показано на рис. 18 (шаг 1). В полюсе находится также неподвижная точка  $a$ .

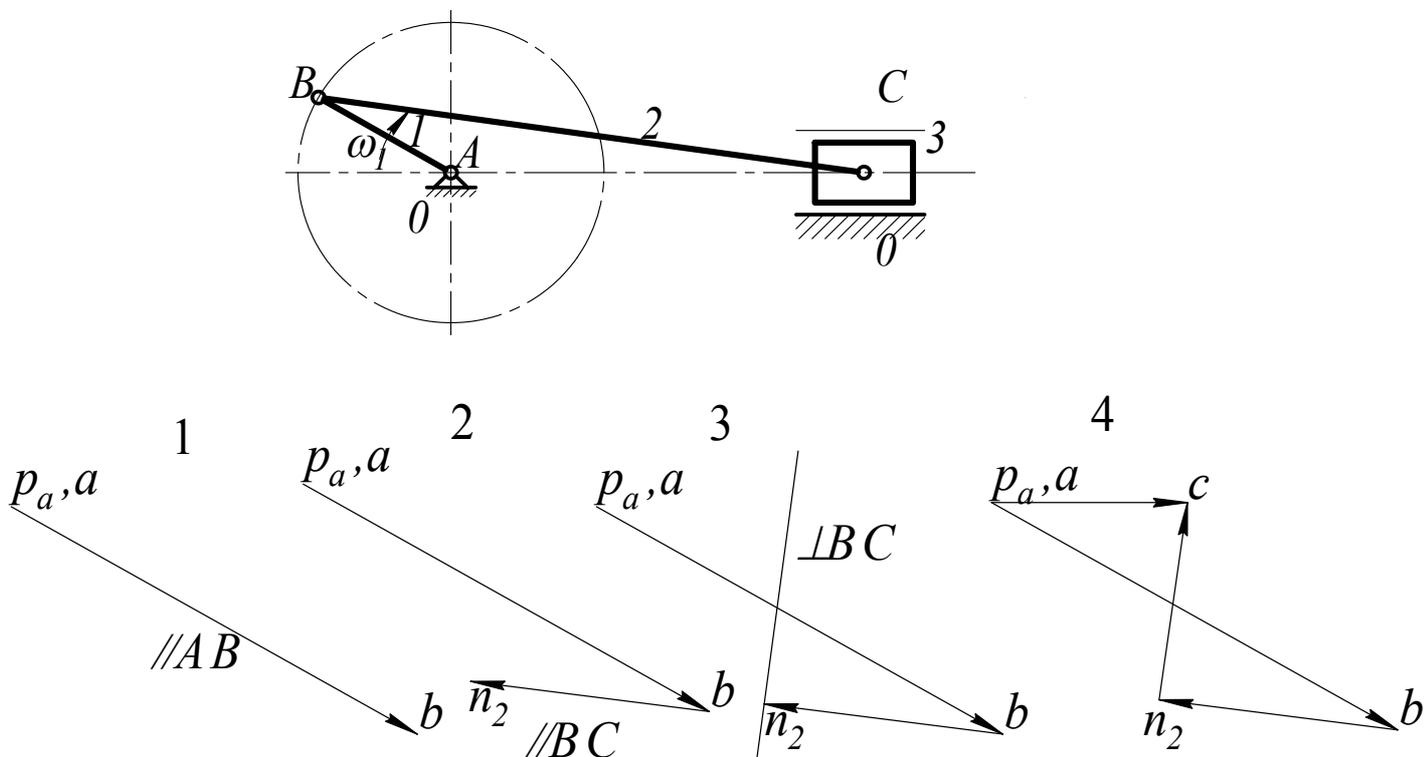


Рис. 18. Последовательность построения плана ускорений для кривошипно-ползунного механизма

В соответствии с теоремой о сложении ускорений для нахождения ускорения точки  $C$  воспользуемся уравнением (5)

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^\tau, \quad (5)$$

в котором два последних слагаемых правой части соответственно нормальная и тангенциальная составляющие относительного ускорения  $\mathbf{a}_{CB}$ . Из конца вектора ускорения точки  $B$  (шаг 2, рис. 18) откладываем вектор  $\mathbf{a}_{CB}^n$  параллельно  $BC$  в направлении от точки  $C$  к точке  $B$ . Конец этого вектора обозначаем стрелкой и буквой  $n_2$ . Через него проводим прямую перпендикулярно  $BC$  – это линия действия тангенциальной составляющей  $\mathbf{a}_{CB}^\tau$ . (шаг 3, рис. 18). Через полюс проводим горизонтальную прямую. Точка пересечения  $\mathbf{a}_{CB}^\tau$  и горизонтальной прямой есть точка  $C$  плана (шаг 4, рис. 18).

#### Аналитическое решение.

В пункте 2.2.1. были найдены векторы  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$  и  $\mathbf{l}_0$  (рис. 3), характеризующие геометрию этого механизма в зависимости от значения угла поворота кривошипа  $\varphi_1$ . Для  $l_1 = 0,03$  м,  $l_2 = 0,09$  м и  $\varphi_1 = 150^\circ$  были определены

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 0.089 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{l}_0 = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Примем частоту вращения кривошипа равной  $n_1 = 80$  об/мин. Угловая скорость кривошипа

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 80}{30} = 8,38 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость кривошипа также является вектором, поэтому её можно представить в Mathcad в виде

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательная аппликата этого вектора соответствует направлению вращения кривошипа против хода часовой стрелки. Линейную скорость точки  $B$  кривошипа найдем, как векторное произведение

$$\mathbf{v}_B := \omega_1 \times \mathbf{l}_1 \quad \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} 0.126 \\ 0.218 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{v}_B| = 0.251 \text{ м/с}.$$

Теперь с помощью векторного уравнения  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$  необходимо определить вектор скорости точки  $C$ . О векторе  $\mathbf{v}_{CB}$  известно, что он направлен перпендикулярно продольной оси шатуна  $BC$  т.е. перпендикулярен вектору  $\mathbf{l}_2$ . Представим его в виде

$$v_{CB} := v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Здесь  $v_{CB_0}$  абсцисса вектора  $v_{CB}$ , а отношение компонент вектора  $l_2$  (абсцисса к ординате), взятое со знаком минус определяет перпендикулярность вектора  $v_{CB}$  вектору  $l_2$ . Таким образом, неизвестной в этом векторе будет абсцисса  $v_{CB_0}$ . Вектор  $v_C$  направлен горизонтально, поэтому он может быть представлен в виде

$$v_C := v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Используя блок Given-Find, решаем векторное уравнение с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} & v_{C_0} := 0 \quad v_{CB_0} := 0 \quad \text{Given} \\ & v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_B + v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_{C_0} \\ v_{CB_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(v_{C_0}, v_{CB_0}) \\ & v_{C_0} = 0.089 \quad v_{CB_0} = -0.037 \end{aligned}$$

Формируем векторы

$$\begin{aligned} v_C &:= v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_C = \begin{pmatrix} 0.089 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_C| = 0.089 \text{ м/с} . \\ v_{CB} &:= v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{CB} = \begin{pmatrix} -0.037 \\ -0.218 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{CB}| = 0.221 \text{ м/с} . \end{aligned}$$

Найдем угловую скорость шатуна

$$\omega_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } v_{CB} = \omega_2 \times l_2 \quad \omega_2 := \text{Find}(\omega_2) \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.453 \end{pmatrix} \quad |\omega_2| = 2.453 \text{ с}^{-1} .$$

Задачу определения скоростей можно решить, записав несколько иначе векторное уравнение.

$$v_C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given} \quad v_C = v_B + \omega_2 \times l_2$$

$$\begin{pmatrix} v_C \\ \omega_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(v_C, \omega_2) \quad v_C = \begin{pmatrix} 0.089 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.453 \end{pmatrix}$$

Ускорение точки  $B$

$$a_B := \omega_1 \times v_B \quad a_B = \begin{pmatrix} 1.823 \\ -1.053 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_B| = 2.106 \text{ м/с}^2.$$

Нормальная составляющая относительного ускорения  $a_{CB}^n$  (к сожалению Mathcad не позволяет записывать верхние индексы)

$$a_{CBn} := \omega_2 \times v_{CB} \quad a_{CBn} = \begin{pmatrix} -0.534 \\ 0.09 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CBn}| = 0.541 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальную составляющую  $a_{CB}^\tau$  и вектор  $a_C$  найдем из векторного уравнения  $a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^\tau$ , используя все тот же блок Given-Find

$$a_C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_C = a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ -l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_C \\ a_{CB\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_C, a_{CB\tau_0})$$

$$a_C = \begin{pmatrix} 1.452 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau} := a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ -l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau} = \begin{pmatrix} 0.163 \\ 0.963 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полное относительное ускорение

$$a_{CB} := a_{CBn} + a_{CB\tau} \quad a_{CB} = \begin{pmatrix} -0.371 \\ 1.053 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Угловое ускорение второго звена

$$\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given} \quad a_{CB\tau} = \varepsilon_2 \times l_2 \quad \varepsilon_2 := \text{Find}(\varepsilon_2) \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10.846 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon_2| = 10.846 \text{ с}^{-2}.$$

Изменяя значение обобщенной координаты механизма, начиная от какого-либо начального  $\varphi_{1н}$ , например, с шагом  $\frac{\pi}{6}$

$$\varphi_1 := \varphi_{1н} - (n-1) \cdot \frac{\pi}{6}.$$

задавая  $n$  последовательные значения от 1 до 12, получаем картину скоростей и ускорений за один цикл (поворот кривошипа на  $360^\circ$ ).

### 3.3.2. Кривошипно-коромысловый механизм

Дано: кинематическая схема механизма (рис. 19);  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\text{с}^{-1}$ ; размеры звеньев  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ ,  $l_{AD}$ ,  $l_{BE}$ ,  $l_{CE}$ , м.

Необходимо построить планы скоростей и ускорений механизма.

#### Графическое решение

Как и в случае кривошипно-ползунного механизма вначале определяют линейную скорость точки  $B$  кривошипа  $\mathbf{v}_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$ , м/с. Также определяются с масштабным коэффициентом и расположением полюса плана скоростей  $p_v$ . В полюсе размещают точки  $a$  и  $d$ , скорость которых равна нулю. Затем откладывают вектор скорости точки  $B$  (шаг 1, рис. 19). В соответствии с векторным уравнением (1) через конец вектора  $\mathbf{v}_B$  проводят прямую, перпендикулярную отрезку  $BC$  на плане механизма (шаг 2, рис. 19). Из полюса проводят прямую, перпендикулярную звену  $CD$  до пересечения с предыдущей прямой (шаг 3, рис. 19). На четвертом шаге расставляют стрелки векторов и убирают ненужные отрезки. Для получения вектора скорости точки  $E$  необходимо воспользоваться двумя векторными уравнениями:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{EB} \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{EC}. \quad (7)$$

В соответствии с ними через конец вектора  $\mathbf{v}_B$  проводят прямую, перпендикулярную отрезку  $BE$ , а через конец вектора  $\mathbf{v}_C$  прямую, перпендикулярную отрезку  $CE$  (шаг 5, рис. 19). Точка пересечения этих прямых дает точку  $e$  на плане скоростей. Из полюса проводят вектор в эту точку (шаг 6, рис. 19). Нетрудно убедиться, что  $\triangle BEC$  на плане механизма и  $\triangle bec$  на плане скоростей подобны и сходственно расположены. Поэтому, положение точки  $e$  может быть найдено и без применения уравнений (6, 7). Для этого достаточно построить на отрезке  $bc$  плана скоростей треугольник подобный  $\triangle BEC$ . Точка  $e$  на плане скоростей относительно отрезка  $bc$  может располагаться двумя способами. Для нахождения сходственного расположения этой точки необходимо, задавшись направлением обхода замкнутого контура (в данном случае треугольника), заметить последовательность букв, например, по

ходу часовой стрелки, начиная с точки  $B - BEC$ . Такая же последовательность букв при обходе контура в том же направлении должна быть и на плане скоростей, поэтому точка  $e$  лежит справа от отрезка  $bc$  (шаг 5, рис. 19).

Модули угловых скоростей находят по формулам  $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$  и  $\omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{CD}}$ ,

а их направления определяют способом, изложенным в предыдущем пункте этой главы.

Для точки  $B$  кривошипа, движущейся по окружности с постоянной линейной скоростью, касательное ускорение равно нулю. Следовательно, ускорением точки  $B$  будет нормальное ускорение

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{AB}.$$

Приняв некоторую точку  $p_a$  за полюс плана ускорений (рис. 20, шаг 1), отложим вектор, изображающий нормальное ускорение точки  $B$ , в виде отрезка  $(p_a b)$ . Тогда масштабный коэффициент ускорений найдется из соотношения

$$\mu_a = \frac{a_B^n}{(p_a b)} \text{ и имеет размерность } \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Можно также задаться значением  $\mu_a$  и определить отрезок  $(p_a b)$  из

$$\text{условия } (p_a b) = \frac{a_B^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

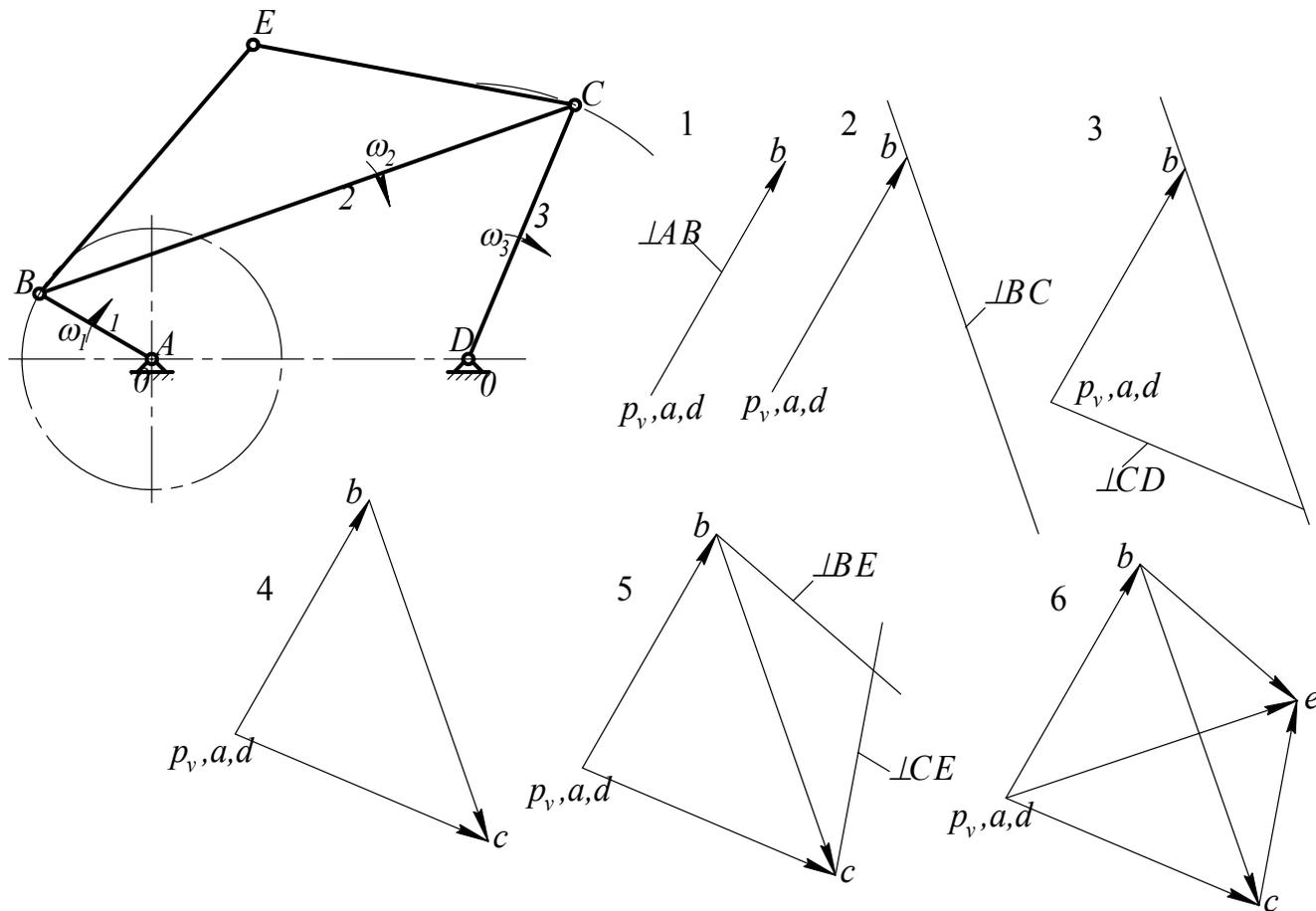


Рис. 19. Последовательность построения плана скоростей для кривошипно-коромыслового механизма

Далее переходим к присоединенной к ведущему механизму структурной группе 2-3. У этой группы известны ускорения точек  $B$  и  $D$ , соответствующих внешним кинематическим парам группы. Необходимо найти ускорение точки  $C$ , т.е. внутренней кинематической пары.

Запишем векторные уравнения

$$\mathbf{a}_{CB} = \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^{\tau} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^{\tau}. \quad (8)$$

Модули векторов нормальных составляющих найдем по формулам

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BC} \quad \text{и} \quad a_{CD}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CD}.$$

Приравняв правые части уравнений (8), получим векторное уравнение с двумя неизвестными (модули тангенциальных составляющих), которое легко решается графически. Из конца вектора ускорения точки  $B$  (рис. 20, шаг 2) откладываем вектор  $\mathbf{a}_{CB}^n$  параллельно  $BC$  в направлении от точки  $C$  к точке  $B$ . Конец этого вектора обозначаем стрелкой и буквой  $n_2$ . Через него проводим прямую перпендикулярно  $BC$  – это линия действия тангенциальной составляющей  $\mathbf{a}_{CB}^{\tau}$  (рис. 20, шаг 3). На этом заканчиваются построения правой части первого уравнения (8).

Переходим ко второму уравнению. Вектор  $\mathbf{a}_D$  равен нулю так, как точка  $D$  неподвижна. Из полюса сразу откладываем вектор  $\mathbf{a}_{CD}^n$  параллельно  $CD$  в направлении от точки  $C$  к точке  $D$  (рис. 20, шаг 4). Обозначим его конец стрелкой и буквой  $n_3$  и проведем через него прямую перпендикулярно  $CD$  – это линия действия тангенциальной составляющей  $\mathbf{a}_{CD}^{\tau}$  (рис. 20, шаг 5). На этом заканчиваются построения правой части второго уравнения (8).

Точка пересечения линий направления действия тангенциальных составляющих – точка  $c$  плана ускорений. Из полюса проводим прямую  $p_v c$ , которая и будет вектором ускорения точки  $C$ . Стрелки векторов тангенциальных составляющих направлены к точке  $C$  (рис. 20, шаг 6).

Модуль ускорения точки  $C$

$$a_C = (p_a c) \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

Угловые ускорения звеньев 2 и 3 найдем из выражений

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{l_{BC}}, \text{ с}^{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^{\tau}}{l_{CD}}, \text{ с}^{-2}.$$

В этих формулах  $\mathbf{a}_{CB}^{\tau} = (n_2 c) \mu_a$  и  $\mathbf{a}_{CD}^{\tau} = (n_3 c) \mu_a$ .

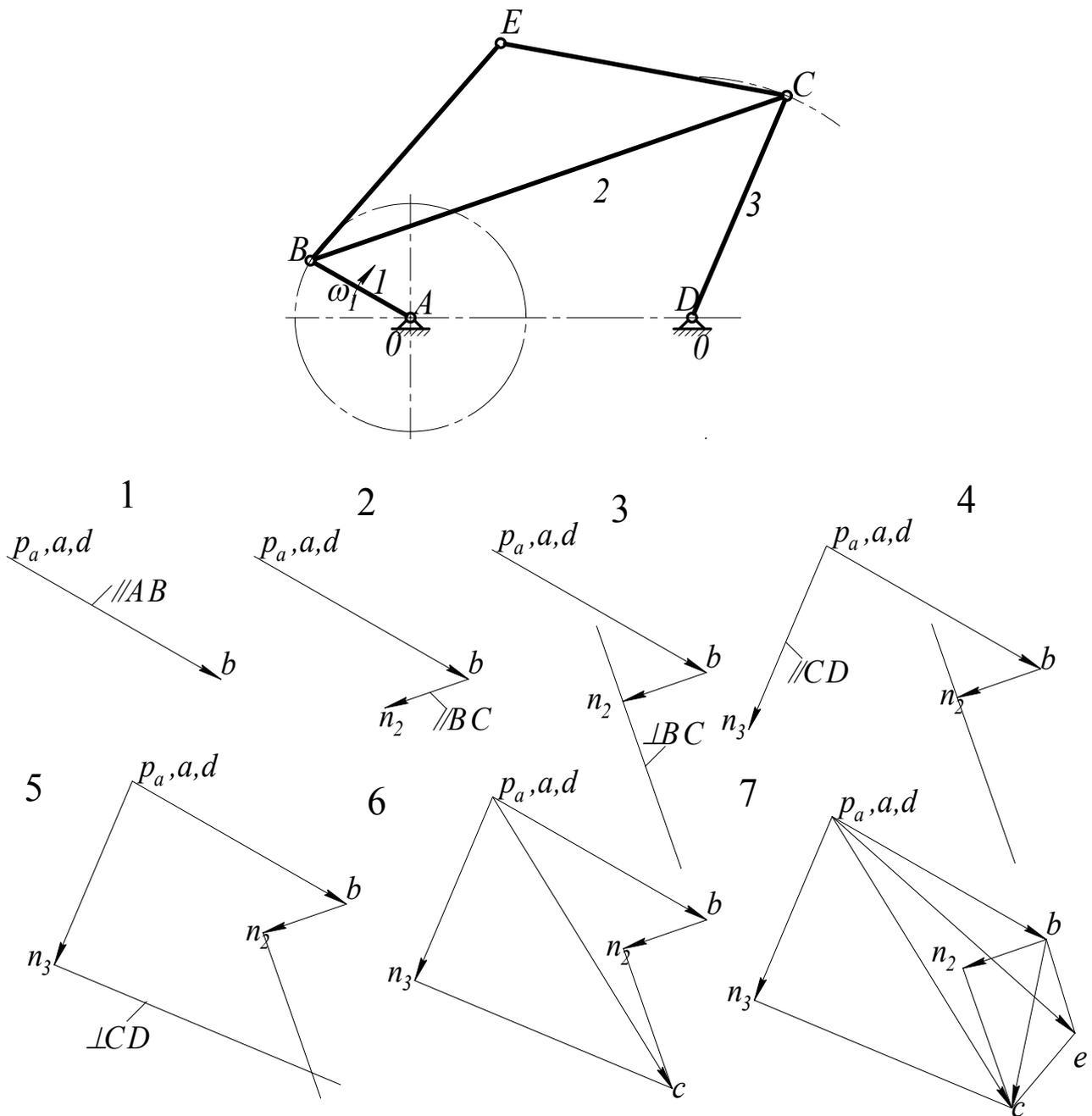


Рис. 20. Последовательность построения плана ускорений для кривошипно-коромыслового механизма

Направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  определяем, мысленно перенося вектор  $a_{CB}^r$  параллельно самому себе в точку  $C$  и замечая, что относительно точки  $B$  он стремится повернуть звено 2 по ходу часовой стрелки. Это и есть искомое направление. Аналогично, мысленно переносим вектор  $a_{CD}^r$  в точку  $C$  и замечаем, что угловое ускорение  $\varepsilon_3$  также направлено по ходу часовой стрелки.

Переходим к определению ускорения точки  $E$ , для чего воспользуемся теоремой подобия. В полученную точку  $e$  проводим прямую из полюса – это и есть вектор  $a_E$  (рис. 20, шаг 7).

### Аналитическое решение.

В главе 2.2.2. были найдены векторы  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_0$  (рис. 6), характеризующие геометрию этого механизма в зависимости от значения угла поворота кривошипа  $\varphi_1$ . Для  $l_1=0,045$  м,  $l_2=0,135$  м,  $l_{21}=0,075$  м,  $l_3=0,07$  м,  $l_0=0,15$  м и  $\varphi_1=150^\circ$  были определены

$$l_1 = \begin{pmatrix} -0.039 \\ 0.023 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0.133 \\ 0.02 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{21} = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 0.042 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.043 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_0 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Примем угловую скорость кривошипа равной  $\omega_1=30\text{ с}^{-1}$ . Векторы угловой скорости и скорости точки  $B$

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \quad v_B := \omega_1 \times l_1 \quad v_B = \begin{pmatrix} 0.675 \\ 1.169 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_B| = 1.35 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости точки  $C$  найдем с учетом его перпендикулярности вектору  $l_3$

$$v_{C_0} := 1 \quad v_{CB_0} := 1 \quad \text{Given}$$
$$v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} = v_B + v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_C \\ v_{CB_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(v_C, v_{CB_0})$$
$$v_{C_0} = 0.712 \quad v_{CB_0} = 0.037 .$$

Соответствующие векторы

$$v_C = \begin{pmatrix} 0.712 \\ 0.926 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{CB} = \begin{pmatrix} 0.037 \\ -0.244 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_C| = 1.168 \text{ м/с} \quad |v_{CB}| = 0.246 \text{ м/с.}$$

Угловые скорости шатуна и коромысла

$$\omega_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given}$$
$$\omega_1 \times l_1 + \omega_2 \times l_2 = \omega_3 \times l_3 \quad \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\omega_2, \omega_3)$$
$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.825 \end{pmatrix} \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16.68 \end{pmatrix} \quad |\omega_2| = 1.825 \text{ с}^{-1} \quad |\omega_3| = 16.68 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость точки  $E$

$$v_E := v_B + \omega_2 \times l_{21} \quad v_E = \begin{pmatrix} 0.752 \\ 1.056 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_E| = 1.297 \text{ м/с.}$$

Относительная скорость

$$v_{EB} := v_E - v_B \quad v_{EB} = \begin{pmatrix} 0.077 \\ -0.113 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{EB}| = 0.137 \text{ м/с.}$$

Ускорение точки  $B$

$$a_B := \omega_1 \times v_B \quad a_B = \begin{pmatrix} 35.074 \\ -20.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_B| = 40.5 \text{ м/с}^2.$$

Так же, как и в графическом варианте, нахождение ускорения точки  $C$  требует совместного решения двух векторных уравнений. Найдем вначале нормальные составляющие ускорений  $a_{CB}^n$  и  $a_{CD}^n$

$$a_{CBn} := \omega_2 \times v_{CB} \quad a_{CBn} = \begin{pmatrix} -0.445 \\ -0.067 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CBn}| = 0.45 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CDn} := \omega_3 \times v_C \quad a_{CDn} = \begin{pmatrix} 15.438 \\ -11.873 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CDn}| = 19.476 \text{ м/с}^2.$$

Для нахождения тангенциальных составляющих  $a_{CB}^t$  и  $a_{CD}^t$  найдем их абсциссы из векторного уравнения  $a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t = a_D + a_{CD}^n + a_{CD}^t$ , используя все тот же блок Given-Find ( $a_D = 0$ )

$$a_{CB\tau_0} := 1 \quad a_{CD\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} = a_{CDn} + a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ l_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_{CB\tau_0}, a_{CD\tau_0}) \quad \begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.219 \\ 14.973 \end{pmatrix}.$$

Векторы

$$a_{CB\tau} := a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau} = \begin{pmatrix} -4.219 \\ 27.912 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CB\tau}| = 28.229 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CD\tau} := a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CD\tau} = \begin{pmatrix} 14.973 \\ 19.468 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CD\tau}| = 24.56 \text{ м/с}^2$$

Ускорение точки  $C$

$$a_C := a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau} \quad a_C = \begin{pmatrix} 30.411 \\ 7.595 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_C| = 31.345 \text{ м/с}^2$$

Угловые ускорения шатуна и коромысла

$$\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Given } a_{CB\tau} = \varepsilon_2 \times l_2 \quad \varepsilon_2 := \text{Find}(\varepsilon_2) \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 209.106 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Given } a_{CD\tau} = \varepsilon_3 \times l_3 \quad \varepsilon_3 := \text{Find}(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -350.859 \end{pmatrix}$$

Ускорение точки  $E$

$$a_E := a_B + \omega_2 \times v_{EB} + \varepsilon_2 \times l_{21} \quad a_E = \begin{pmatrix} 25.999 \\ -7.457 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_E| = 27.048 \text{ м/с}^2$$

### 3.3.3. Кривошипно-кулисный механизм

Дано: кинематическая схема механизма (рис. 21);  $\omega_1 = \text{const}, \text{с}^{-1}$ ; размеры звеньев  $l_{AB}, l_{AC}, l_{CD}$ , м.

Необходимо построить планы скоростей и ускорений механизма.

**Графическое решение.**

В точке  $B$  данного механизма различают три точки, а именно:  $B_1$  – принадлежит кривошипу  $AB$ ,  $B_2$  – кулисному камню 2,  $B_3$  – принадлежит кулисе  $CD$ . Точки  $B_1$  и  $B_2$  совпадают, поэтому в дальнейшем будем использовать только индекс 1.

Определяем линейную скорость точки  $B_1$  кривошипа  $v_{B_1} = \omega_1 \cdot l_{AB}$ , м/с. Определяем масштабный коэффициент  $\mu_v$  и, обозначив полюс плана скоростей  $p_v, a, c$ , откладывают вектор скорости точки  $B_1$  (рис. 21, шаг 1) перпендикулярно кривошипу  $AB$ . Затем, в соответствии с векторным

уравнением (9) через конец вектора  $\mathbf{v}_{B_1}$  проводят прямую, параллельно кулисе  $CD$  (рис. 21, шаг 2).

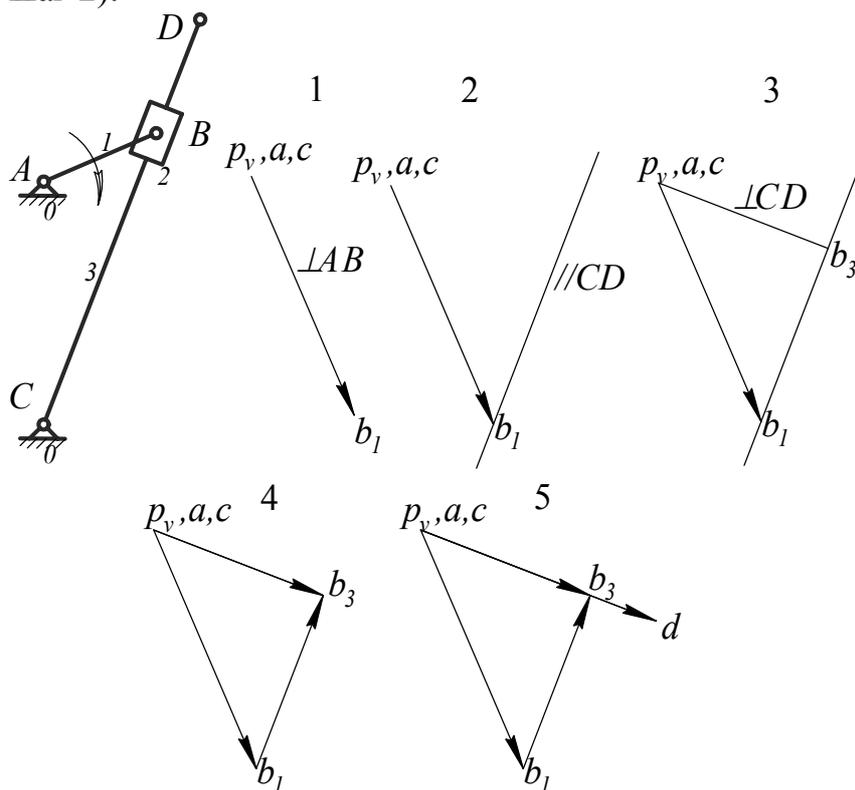


Рис. 21. Последовательность построения плана скоростей для кулисного механизма

$$\mathbf{v}_{B_3} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_3B_1} \quad (9)$$

Из полюса проводят прямую, перпендикулярную кулисе  $CD$  до пересечения с предыдущей прямой (рис. 21, шаг 3). На четвертом шаге расставляют стрелки векторов и убирают ненужные отрезки. Вектор скорости точки  $D$  находим с помощью теоремы подобия из пропорции  $\frac{CD}{CB_3} = \frac{V_D}{V_{B_3}}$

(рис. 21, шаг 5). Модуль угловой скорости находим по формуле  $\omega_3 = \frac{v_D}{l_{CD}}$ .

Определяют модуль ускорения точки  $B_1$ , принадлежащей кривошипу  $AB$ ,  $a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ ,  $\text{м/с}^2$ . Выбираем масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a$  и, обозначив полюс плана ускорений  $p_{a,a}$ , откладываем вектор ускорения точки  $B$  параллельно кривошипу (рис. 22, шаг 1).

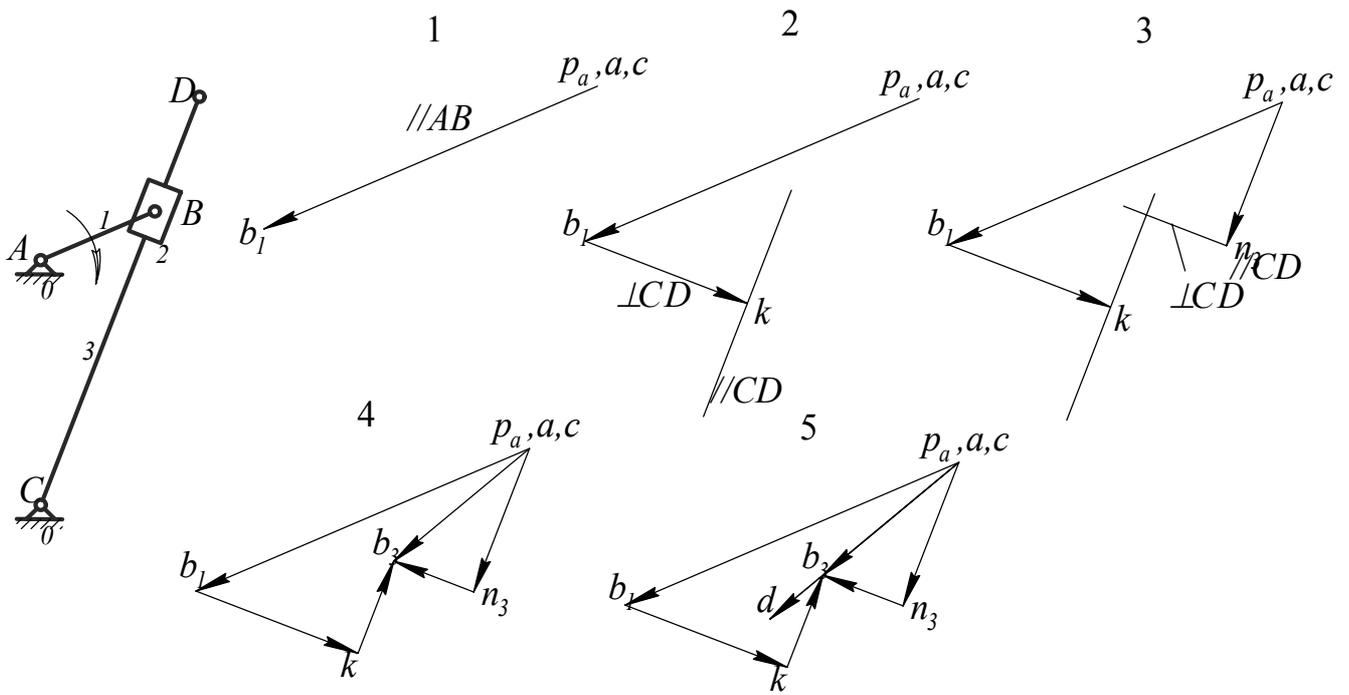


Рис. 22. Последовательность построения плана ускорений для кулисного механизма

Для нахождения ускорения точки  $B_3$ , принадлежащей кулисе, запишем два векторных уравнения

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_{B_1} + \mathbf{a}_{B_3B_1}^k + \mathbf{a}_{B_3B_1}^r \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B_3C}^n + \mathbf{a}_{B_3C}^r. \quad (10)$$

В первом уравнении (10)  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^k$  – кориолисово ускорение, модуль которого находят по формуле  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^k = \omega_3 \left| V_{A_3A_1} \right|$ , м/с<sup>2</sup>.  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^r$  – относительное (релятивное) ускорение.

В соответствии с правой частью первого векторного уравнения (10) из конца вектора  $\mathbf{a}_{B_1}$  откладываем вектор  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^k$ . Он перпендикулярен кулисе  $CD$ , а для определения его направления необходимо вектор  $V_{A_3A_1}$  на плане скоростей мысленно повернуть на  $90^\circ$  в сторону вращения  $\omega_3$  (рис. 22, шаг 2). Конец этого вектора обозначаем буквой  $k$ . Через точку  $k$  проводим прямую параллельно  $CD$  – это линия действия  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^r$ . На этом заканчиваются построения правой части первого уравнения (10).

Переходим к построению правой части второго уравнения (10).

Из полюса откладываем вектор  $\mathbf{a}_{B_3C}^n$  параллельно  $BC$  в направлении от точки  $B$  к точке  $C$  (рис. 22, шаг 3). Обозначим его конец буквой  $n_3$  и проведем через него прямую перпендикулярно  $CD$  – это линия действия тангенциальной составляющей  $\mathbf{a}_{CD}^r$  (рис. 22, шаг 3). На этом заканчиваются построения правой части второго уравнения (10). Точка пересечения линий действия  $\mathbf{a}_{B_3B_1}^r$  и  $\mathbf{a}_{CD}^r$  – точка  $b_3$  плана ускорений.

Модуль вектора  $a_{B_3C}^n$  находим по формуле  $a_{B_3C}^n = \omega_3^2 \cdot l_{B_3C}$ , м/с<sup>2</sup>.

Из полюса проводим прямую  $p_a b_3$ , которая и будет вектором ускорения точки  $B_3$ . Стрелки векторов тангенциальных составляющих направлены к точке  $C$  (рис. 22, шаг 4).

Вектор ускорения точки  $D$  находим с помощью теоремы подобия из пропорции  $\frac{CD}{CB_3} = \frac{a_D}{a_{B_3}}$  (рис. 22, шаг 5).

### Аналитическое решение.

В главе 2.2.3. звенья этого механизма были заменены векторами  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $l_3$  и  $l_{31}$ , (рис. 9), и получены их значения в зависимости от значения угла поворота кривошипа  $\varphi_1$ . Для  $l_1 = 0,03$  м,  $l_3 = 0,1$  м,  $l_0 = 0,07$  м и  $\varphi_1 = 150^\circ$  были определены

$$l_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.07 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_1 = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{31} = \begin{pmatrix} -0.026 \\ 0.085 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.029 \\ 0.096 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Примем угловую скорость кривошипа равной  $\omega_1 = 20 \text{ с}^{-1}$ . Векторы угловой скорости и скорости точки  $B_1$

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \quad v_{B1} := \omega_1 \times l_1 \quad v_{B1} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.52 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{B1}| = 0.6 \text{ м/с}$$

Угловую скорость кулисы и вектор относительной скорости  $v_{B_3B_1}$  найдем из уравнения (9)

$$\omega_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{B3B1_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$\omega_3 \times l_{31} = v_{B1} + v_{B3B1_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \omega_3 \\ v_{B3B1_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(\omega_3, v_{B3B1_0})$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.94 \end{pmatrix} \quad v_{B3B1} := v_{B3B1_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{B3B1} = \begin{pmatrix} 0.12 \\ -0.391 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скорость точки  $B_3$  кулисы

$$v_{B3} := v_{B1} + v_{B3B1} \quad v_{B3} = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.128 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{B3}| = 0.439 \text{ м/с}$$

Скорость точки  $D$  найдем, воспользовавшись теоремой подобия

$$v_D := \frac{|l_3|}{|l_{31}|} \cdot v_{B3} \quad v_D = \begin{pmatrix} 0.472 \\ 0.144 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_D| = 0.494 \text{ м/с}$$

Ускорение точки  $B_1$

$$a_{B1} := \omega_1 \times v_{B1} \quad a_{B1} = \begin{pmatrix} 10.392 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{B1}| = 12 \text{ м/с}^2$$

Вектор кориолисова ускорения

$$a_{B3B1k} := 2\omega_3 \times v_{B3B1} \quad a_{B3B1k} = \begin{pmatrix} -3.864 \\ -1.181 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нормальное ускорение

$$a_{B3Cn} := \omega_3 \times v_{B3} \quad a_{B3Cn} = \begin{pmatrix} 0.633 \\ -2.072 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для определения ускорения точки  $B_3$  предварительно решим уравнения (10), из которых найдем векторы ускорений: относительного  $a_{B_3B_1}^r$  и тангенциального  $a_{B_3D}^{\tau}$ .

$$a_{B3B1r_0} := 1 \quad a_{B3C\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_{B1} + a_{B3B1k} + a_{B3B1r_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} = a_{B3Cn} + a_{B3C\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ l_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{B3B1r_0} \\ a_{B3C\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_{B3B1r_0}, a_{B3C\tau_0})$$

$$a_{B3B1r} := a_{B3B1r_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{B3B1r} = \begin{pmatrix} -1.932 \\ 6.321 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{B3C\tau} := a_{B3C\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{B3C\tau} = \begin{pmatrix} 3.963 \\ 1.211 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ускорение точки  $B_3$

$$a_{B3} := a_{B1} + a_{B3B1k} + a_{B3B1r} \quad a_{B3} = \begin{pmatrix} 4.596 \\ -0.86 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, что то же самое

$$a_{B3} := a_{B3Cn} + a_{B3C\tau} \quad a_{B3} = \begin{pmatrix} 4.596 \\ -0.86 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модуль ускорения этой точки

$$|a_{B3}| = 4.676 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки  $D$  по теореме подобия

$$a_D := \frac{|l_3|}{|l_{31}|} \cdot a_{B3} \quad a_D = \begin{pmatrix} 5.171 \\ -0.968 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_D| = 5.261 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение кулисы

$$\varepsilon_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } a_{B3C\tau} = \varepsilon_3 \times l_3 \quad \varepsilon_3 := \text{Find}(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -41.441 \end{pmatrix}$$

$$|\varepsilon_3| = 41.441 \text{ с}^{-2}.$$

### 3.3.4. Пример определения скоростей и ускорений плоского рычажного шестизвенника

Данный пример продолжает рассмотренный ранее пример определения положений звеньев рычажного шестизвенника (п. 2.2.5). Построение планов скоростей и ускорений для этого шестизвенника рассмотрим во втором положении, когда значение обобщенной координаты  $\varphi_1 = -31^\circ 54'$  (рис. 23).

Значение угловой скорости кривошипа 1 примем  $\omega_1 = 20 \text{ с}^{-1}$ . Размеры звеньев приняты следующими:  $l_{AB} = 0,02 \text{ м}$ ;  $l_{BC} = 0,05 \text{ м}$ ;  $l_{CD} = 0,035 \text{ м}$ ;  $l_{AD} = 0,05 \text{ м}$ ;  $l_{CE} = 0,022 \text{ м}$ ;  $l_{DE} = 0,022 \text{ м}$ ;  $l_{EF} = 0,04 \text{ м}$ ;  $e = 0,01 \text{ м}$ .

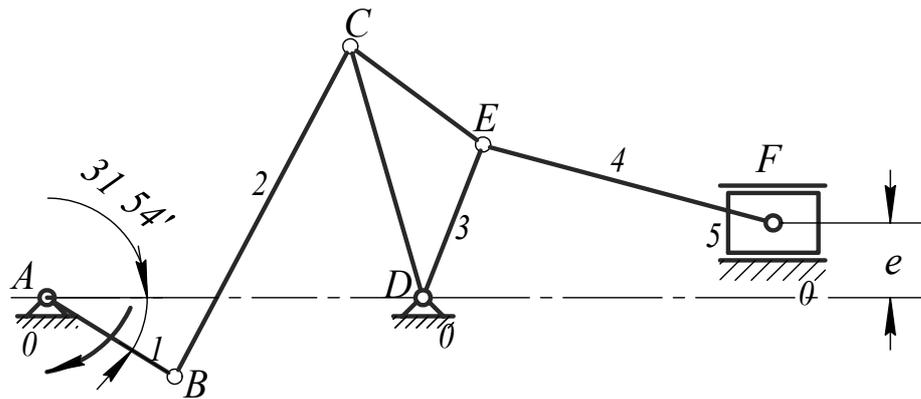


Рис. 23. План шестизвенника для кинематического анализа

### Графическое решение.

Скорость точки  $B$

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 20 \cdot 0,02 = 0,4 \text{ м/с.}$$

Примем масштабный коэффициент скорости равным  $\mu_v = 0,01 \text{ м/мм}$ .

В этом масштабе вектор скорости точки  $B$  на плане скоростей изобразится отрезком длиной 40 мм. Откладываем его из произвольной точки  $p_v$  (полюс плана скоростей) чертежа перпендикулярно звену 1 в направлении  $\omega_1$  (рис 24, шаг 1). В полюсе находятся также точки  $a$  и  $d$ , которые принадлежат стойке 0.

В соответствии с уравнением  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$  через конец вектора  $\mathbf{v}_B$  проводят прямую перпендикулярную шатуну  $BC$ , а через полюс проводят прямую перпендикулярную стороне  $CD$  коромысла до пересечения с предыдущей прямой (рис. 24, шаг 2). Точка пересечения – точка  $c$  плана. На шаге 3 через эту точку проводят прямую перпендикулярную стороне  $CE$ , а через полюс проводят прямую перпендикулярную стороне  $DE$  до пересечения с предыдущей прямой (рис. 24, шаг 3). Точка пересечения – точка  $e$ . Последнюю точку  $f$  получают на основе уравнения  $\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{FE}$ , проводя через точку  $e$  перпендикуляр шатуну  $EF$  до пересечения с горизонталью, начинающейся в полюсе плана (рис. 24, шаг 4). Заканчивают оформление плана скоростей (рис. 24, шаг 5).

Модули векторов абсолютных скоростей  $\mathbf{v}_C$ ,  $\mathbf{v}_E$  и  $\mathbf{v}_F$  получают, измерив отрезки  $p_v c$ ,  $p_v e$  и  $p_v f$  на плане и умножив их длины на масштабный коэффициент скорости. Например, длина  $p_v f = 37,49 \text{ мм}$ . Тогда  $v_F = p_v f \cdot \mu_v = 37,49 \cdot 0,01 = 0,375 \text{ м/с}$ .

Модули векторов относительных скоростей  $\mathbf{v}_{CB}$  и  $\mathbf{v}_{FE}$  получают аналогично, измерив отрезки  $bc$  и  $ef$  и умножив их длины на масштабный коэффициент скорости. Например, длина  $ef = 13,66 \text{ мм}$ . Тогда  $v_{FE} = 13,66 \cdot 0,01 = 0,137 \text{ м/с}$ .

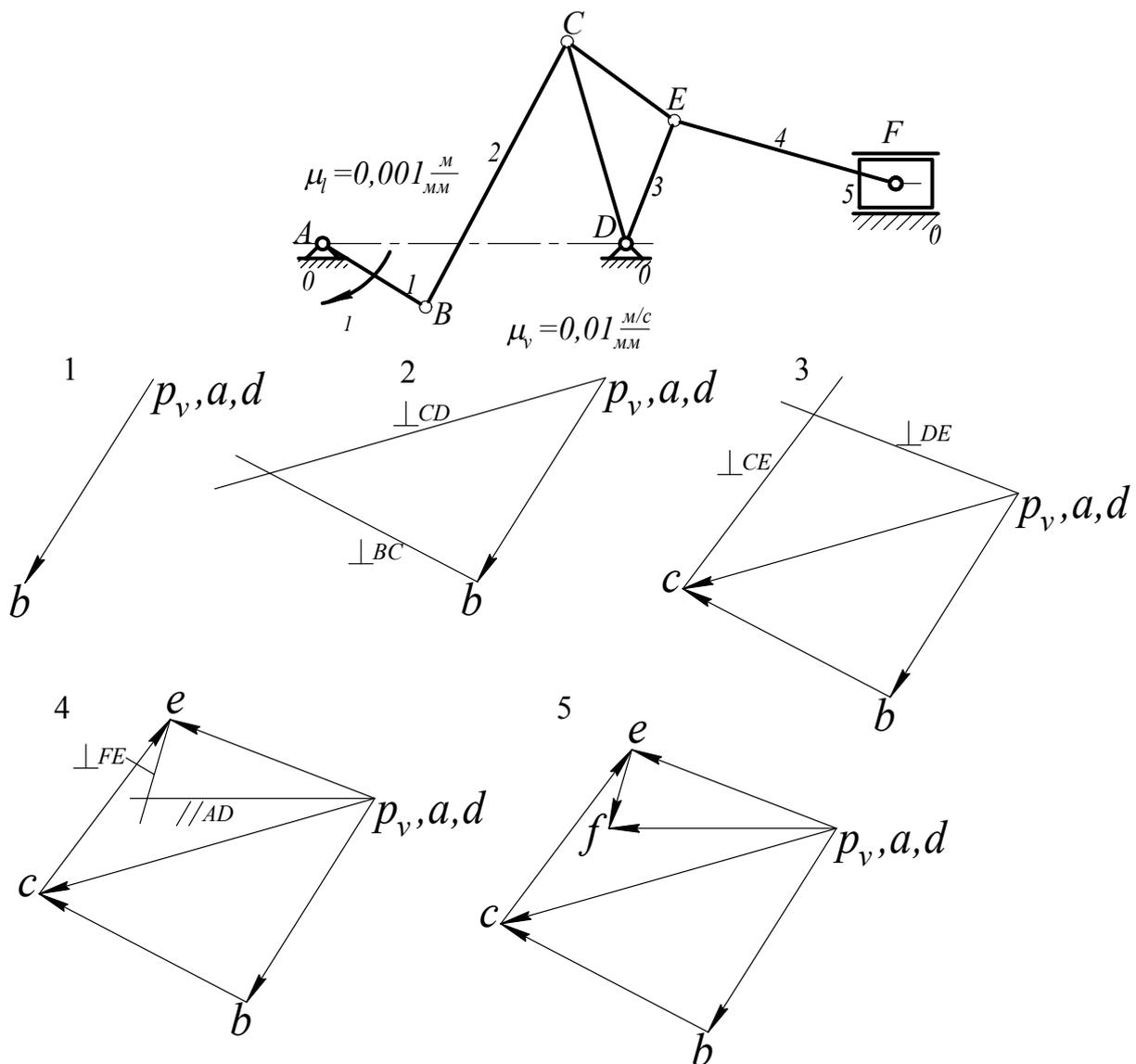


Рис. 24. Построение плана скоростей

Модули угловых скоростей звеньев находят, как

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}, \quad \omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{CD}} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \frac{v_{FE}}{l_{EF}}.$$

Например, угловая скорость шатуна 4

$$\omega_4 = \frac{0,137}{0,04} = 3,42 \text{ с}^{-2}.$$

Если на рис. 24 мысленно перенести вектор относительной скорости  $\mathbf{v}_{CB}$  параллельно самому себе в точку  $C$ , то можно видеть направление вращения шатуна 2 относительно точки  $B$  т.е.  $\omega_2$  направлена против хода часовой стрелки. Точно так же, поместив в точку  $C$  начало вектора  $\mathbf{v}_C$ , можно убедиться, что угловая скорость  $\omega_3$  также направлена против хода часовой стрелки. А вот угловая скорость  $\omega_4$  направлена по ходу часовой стрелки так, как вектор  $\mathbf{v}_{FE}$ , мысленно перенесенный в точку  $F$ , вращает звено 4 относительно точки  $E$  именно в этом направлении.

В заключение оформляют таблицу скоростей (табл. 1).

Таблица 1

Результаты обработки плана скоростей

Положе- ние кривоши- па	$v_B$ , м/с	$v_{CB}$ , м/с	$v_C$ , м/с	$v_E$ , м/с	$v_{FE}$ , м/с	$v_F$ , м/с	$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_2$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_3$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_4$ , с <sup>-1</sup>
2	0,4	0,387	0,576	0,362	0,137	0,375	-20	7,74	16,5	-3,42

Знак минус перед значением угловой скорости указывает, что она направлена по ходу часовой стрелки.

Построив план скоростей, переходят к плану ускорений. Ускорение точки  $B$

$$a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 20^2 \cdot 0,02 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Если изобразить этот вектор отрезком длиной 40 мм, то масштабный коэффициент ускорения

$$\mu_a = \frac{8}{40} = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Из произвольной точки свободного участка чертежа (шаг 1, рис. 25) откладывают вектор  $a_B$  нормально траектории точки  $B$  т.е. параллельно кривошипу  $AB$  к центру его вращения точке  $A$ .

Дальнейшие действия реализуют следующий алгоритм: определение ускорения точки  $C$  производится на основе двух векторных уравнений

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^r \text{ и}$$

$$a_C = a_D + a_{CD}^n + a_{CD}^r.$$

Ускорение точки  $E$  находят с помощью теоремы подобия, а ускорение точки  $F$  с помощью уравнения

$$a_F = a_E + a_{FE}^n + a_{FE}^r.$$

Итак, определяют нормальную составляющую относительного ускорения

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BC} = 7,74^2 \cdot 0,05 = 2,99 \text{ м/с}^2.$$

Длина отрезка, которым она будет изображаться на плане ускорений

$$bn_2 = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{2,99}{0,2} = 14,95 \text{ мм.}$$

Откладывают этот вектор из конца вектора  $a_B$  в направлении от точки  $C$  к точке  $B$  параллельно  $BC$  (шаг 2, рис. 25). Обозначаем конец вектора нормальной составляющей буквой  $n_2$ . Через точку  $n_2$  проводим линию действия вектора тангенциальной составляющей  $a_{CB}^r$  перпендикулярно  $BC$ . Определяют нормальную составляющую относительного ускорения

$$a_{CD}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CD} = 16,5^2 \cdot 0,035 = 9,53 \text{ м/с}^2.$$

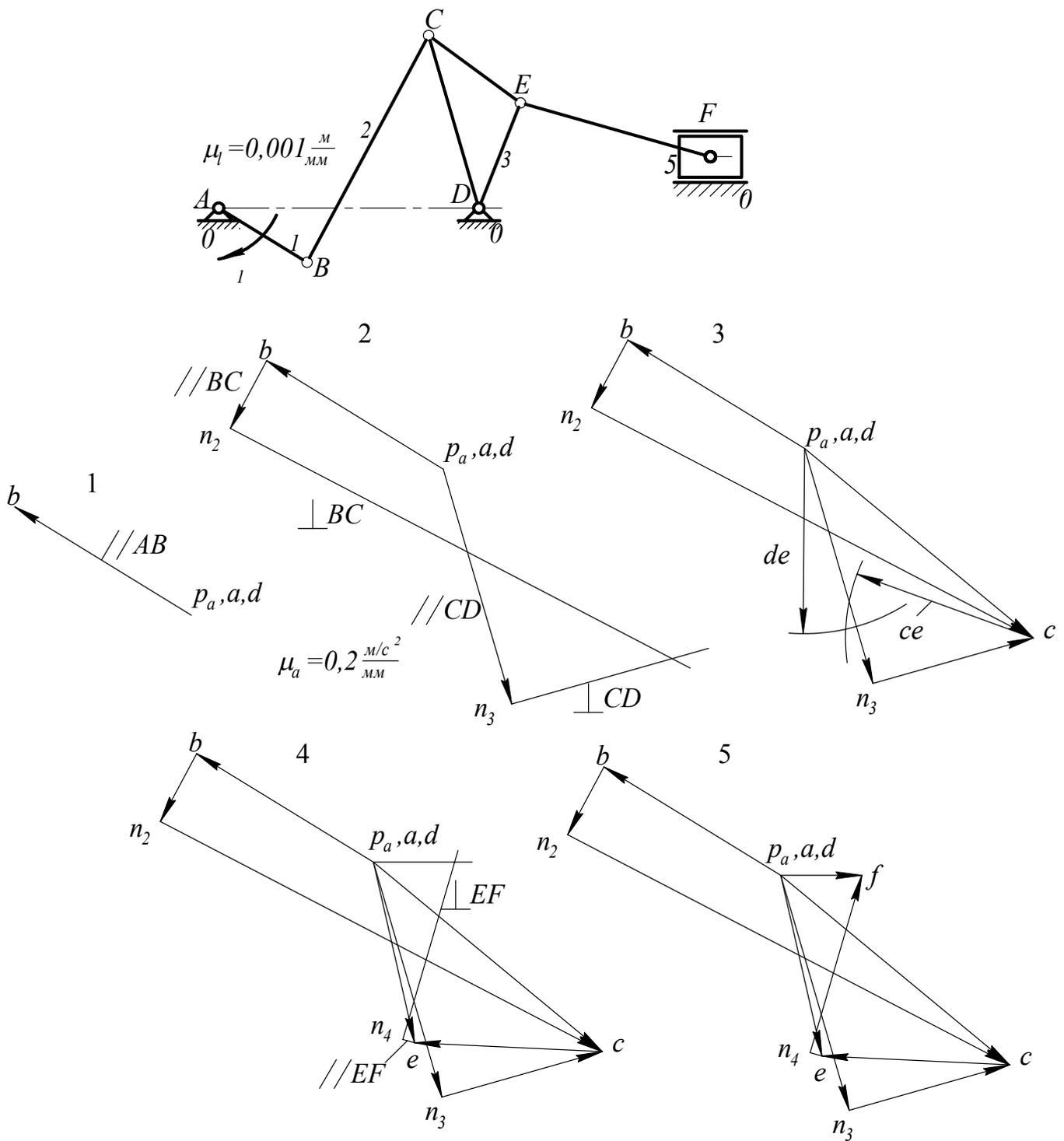


Рис. 25. Построение плана ускорений

Длина отрезка, которым она будет изображаться на плане ускорений

$$p_a c = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a} = \frac{9,53}{0,2} = 47,65 \text{ мм.}$$

Откладывают этот вектор из полюса (там находится и точка  $d$ ) в направлении от точки  $C$  к точке  $D$  параллельно  $CD$  (шаг 2, рис. 25). Обозначаем конец вектора нормальной составляющей буквой  $n_3$ . Через точку  $n_3$  проводим

линию действия вектора тангенциальной составляющей  $a_{CD}^{\tau}$  перпендикулярно  $BC$ . Две последние линии пересекаясь определяют точку  $c$  плана. В эту точку из полюса проводим вектор  $a_c$ . (шаг 3, рис. 25)

Точку  $e$  найдем, используя теорему подобия. Необходимо построить на отрезке  $dc$  плана ускорений треугольник подобный  $\Delta DCE$  на плане механизма. С этой целью найдем длину отрезков  $de$  и  $ce$

$$de = dc \frac{l_{DE}}{l_{CD}} = 57,43 \frac{0,022}{0,035} = 36,10 \text{ мм.}$$

В последней формуле  $dc = 57,43$  мм – длина соответствующего отрезка на плане ускорений. В данном примере  $\Delta DCE$  – равнобедренный, поэтому  $ce = 36,10$  мм.

Точка  $e$  должна располагаться так по отношению к отрезку  $dc$ , чтобы образующийся треугольник  $\Delta dce$  был сходственным с  $\Delta DCE$  (шаг 3, рис. 25)

Переходим к группе, состоящей из звеньев 4 и 5. Нормальная составляющая относительного ускорения

$$a_{FE}^n = \omega_4^2 \cdot l_{EF} = 3,42^2 \cdot 0,04 = 0,468 \text{ м/с}^2.$$

Длина отрезка, которым она будет изображаться на плане ускорений

$$en_4 = \frac{a_{FE}^n}{\mu_a} = \frac{0,468}{0,2} = 2,34 \text{ мм.}$$

Откладываем этот небольшой вектор из точки  $e$  параллельно  $EF$ , в направлении от точки  $F$  к точке  $E$ . Его конец обозначаем  $n_4$ . Через  $n_4$  перпендикулярно  $EF$  проводим линию действия тангенциальной составляющей  $a_{FE}^{\tau}$  до пересечения с горизонталью, проведенной через полюс плана (шаг 4, рис. 25). Получаем точку  $f$ . На этом построение плана ускорений заканчивается (шаг 5, рис. 25).

Остается определить модули и направления векторов угловых ускорений звеньев 2, 3 и 4. Для этого находят модули тангенциальных составляющих относительных ускорений  $a_{CB}^{\tau}$ ,  $a_{CD}^{\tau}$  и  $a_{FE}^{\tau}$ . Например, длина отрезка  $n_4f$  на плане составляет 35,98 мм. Следовательно,

$$a_{FE}^{\tau} = n_4f \cdot \mu_a = 35,98 \cdot 0,2 = 7,20 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{FE}^{\tau}}{l_{EF}} = \frac{7,20}{0,04} = 180 \text{ с}^{-2}.$$

В заключение оформляют таблицу ускорений (табл. 2).

Таблица 2

Результаты обработки плана ускорений

Положение кривошипа	$a_B$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{CB}^n$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{CB}^{\tau}$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{CD}^n$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{CD}^{\tau}$ , м/с <sup>2</sup>	$a_C$ , м/с <sup>2</sup>	$a_E$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{FE}^n$ , м/с <sup>2</sup>	$a_{FE}^{\tau}$ , м/с <sup>2</sup>	$a_F$ , м/с <sup>2</sup>	$\varepsilon_2$ , с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_3$ , с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_4$ , с <sup>-2</sup>
2	8,0	2,99	19,2	9,53	6,41	11,5	7,22	0,468	7,20	3,12	-384	-183	180

Знак минус перед значением углового ускорения указывает, что оно направлено по ходу часовой стрелки.

**Аналитическое решение.**

Определение скоростей и ускорений аналитическим методом производим для тех же исходных данных и того же положения 2, как и в графическом варианте.

Вектор угловой скорости кривошипа  $AB$ , направленный по ходу часовой стрелки и величиной  $\omega_1 = 20 \text{ c}^{-1}$  в Mathcad:

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Геометрический анализ механизма рассмотрен в п. 2.2.5 и соответствующий план механизма выглядит, как показано на рис. 26.

$n = 2$

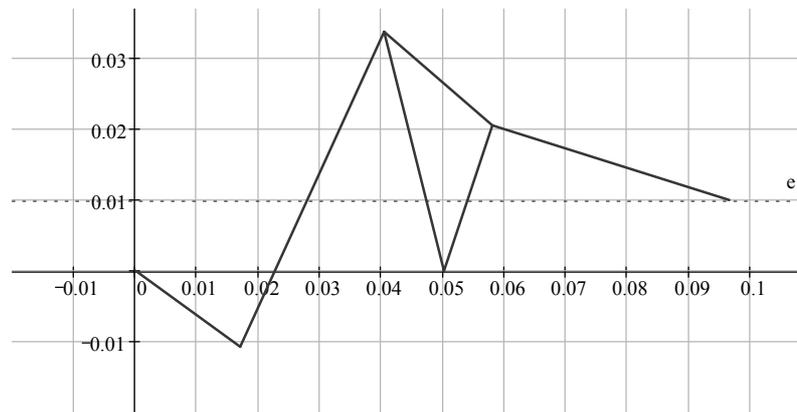


Рис. 26. План рычажного шестизвенника в положении 2

Начинают с шарнирного четырехзвенника  $ABCD$  кривошипно-коромыслового механизма, последовательность определения скоростей для которого рассмотрена в п. 2.3.2. Поэтому приводим эту часть без комментариев.

$$v_B := \omega_1 \times l_1 \quad v_B = \begin{pmatrix} -0.211 \\ -0.34 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_B| = 0.4 \text{ м/с}$$

$$v_{C_0} := 1 \quad v_{CB_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} = v_B + v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_C \\ v_{CB_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(v_C, v_{CB_0})$$

$$v_{C_0} = -0.553 \quad v_{CB_0} = -0.342$$

$$\begin{aligned}
v_C &:= v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} & v_{CB} &:= v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_C &= \begin{pmatrix} -0.553 \\ -0.159 \\ 0 \end{pmatrix} & v_{CB} &= \begin{pmatrix} -0.342 \\ 0.181 \\ 0 \end{pmatrix} & |v_C| &= 0.576 \text{ м/с} & |v_{CB}| &= 0.387 \text{ м/с} . \\
\omega_2 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \omega_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{Given} \\
\omega_1 \times l_1 + \omega_2 \times l_2 &= \omega_3 \times l_3 & \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(\omega_2, \omega_3) \\
\omega_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.734 \end{pmatrix} & \omega_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.448 \end{pmatrix} & |\omega_2| &= 7.734 \text{ с}^{-1} & |\omega_3| &= 16.448 \text{ с}^{-1}.
\end{aligned}$$

Переходим к следующей структурной группе, состоящей из шатуна 4 и ползуна 5. Найдем скорость точки  $E$

$$v_E := \omega_3 \times l_{3_1} \quad v_E = \begin{pmatrix} -0.337 \\ 0.131 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_E| = 0.362 \text{ м/с} .$$

Далее выполняем анализ подобно п. 2.3.1. при определении вектора скорости точки  $C$ , принадлежащей ползуну, кривошипно-ползунного механизма.

$$\begin{aligned}
v_F &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & v_{FE_0} &:= 1 & \text{Given} \\
v_F &= v_E + v_{FE_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_F \\ v_{FE_0} \end{pmatrix} &:= \text{Find}(v_F, v_{FE_0}) \\
v_F &= \begin{pmatrix} -0.373 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & v_{FE_0} &= -0.036 & |v_F| &= 0.373 \text{ м/с} .
\end{aligned}$$

$$v_{FE} := v_{FE_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ -l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{FE} = \begin{pmatrix} -0.036 \\ -0.131 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{FE}| = 0.136 \text{ м/с}$$

$$\omega_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } v_{FE} = \omega_4 \times l_4 \quad \omega_4 := \text{Find}(\omega_4) \quad \omega_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.402 \end{pmatrix}.$$

Зададим закон изменения обобщенной координаты механизма, в виде

$$\phi_1 := \phi_{1m1} - (n-1) \cdot \frac{\pi}{3}$$

Изменяя  $n$ , например, от 1 до 6, получим картину изменения скоростей за один оборот кривошипа. Результаты можно свести в табл. 3.

Таблица 3

Картина изменения скоростей

Положения кривошипа	$v_B$ , м/с	$v_{CB}$ , м/с	$v_C$ , м/с	$v_E$ , м/с	$v_{FE}$ , м/с	$v_F$ , м/с	$\omega_2$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_3$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_4$ , с <sup>-1</sup>
1	0,4	0,4	0	0	0	0	8	0	0
2	0,4	0,387	0,576	0,362	0,136	0,373	7,73	16,5	-3,40
3	0,4	0,313	0,191	0,12	0,023	0,111	-6,26	5,444	0,574
4	0,4	0,376	0,068	0,043	0,012	0,038	-7,53	-1,94	-0,302
5	0,4	0,159	0,33	0,207	0,007	0,209	-3,179	-9,42	0,174
6	0,4	0,033	0,39	0,245	0,142	0,231	0,66	-11,2	3,56

Знак минус говорит о направлении угловой скорости против хода часовой стрелки.

Переходим к определению ускорений.

Ускорение точки  $B$

$$a_B := \omega_1 \times v_B \quad a_B = \begin{pmatrix} -0.266 \\ -7.996 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_B| = 8 \text{ м/с}^2.$$

Далее действуем аналогично п. 2.3.2., как для определения ускорений кривошипно-коромыслового механизма.

$$a_{CBn} := \omega_2 \times v_{CB} \quad a_{CBn} = \begin{pmatrix} -2.823 \\ -1.507 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CBn}| = 3.2 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CDn} := \omega_3 \times v_C \quad a_{CDn} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CDn}| = 1.267 \times 10^{-15} \text{ м/с}^2$$

$$a_{CB\tau_0} := 1 \quad a_{CD\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} = a_{CDn} + a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_{CB\tau_0}, a_{CD\tau_0}) \quad \begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.904 \\ 6.101 \end{pmatrix}$$

$$a_{CB\tau} := a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau} = \begin{pmatrix} -5.8 \\ 10.863 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CB\tau}| = 12.315 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CD\tau} := a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CD\tau} = \begin{pmatrix} -15.68 \\ 5.588 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CD\tau}| = 16.646 \text{ м/с}^2$$

$$a_C := a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau} \quad a_C = \begin{pmatrix} 8.715 \\ -7.348 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_C| = 11.399 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given} \quad a_{CB\tau} = \varepsilon_2 \times l_2 \quad \varepsilon_2 := \text{Find}(\varepsilon_2) \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -382.367 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given} \quad a_{CD\tau} = \varepsilon_3 \times l_3 \quad \varepsilon_3 := \text{Find}(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -181.37 \end{pmatrix}$$

Переходим к определению ускорений следующей группы Ассура (шатун 4 – ползун 5), для чего вначале найдем ускорение точки  $E$

$$a_E := \omega_3 \times v_E + \varepsilon_3 \times l_{31} \quad a_E = \begin{pmatrix} 1.559 \\ -6.994 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_E| = 7.165 \text{ м/с}^2.$$

Порядок последующих действий для группы шатун-ползун изложен в п. 2.3.1. при определении вектора ускорения точки  $C$ , принадлежащей ползуну, кривошипно-ползунного механизма.

$$a_{FE_n} := \omega_4 \times v_{FE} \quad a_{FE_n} = \begin{pmatrix} -0.447 \\ 0.122 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{FE_n}| = 0.463 \text{ м/с}^2.$$

$$a_F := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{FE\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_F = a_E + a_{FE_n} + a_{FE\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ -l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_F \\ a_{FE\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_F, a_{FE\tau_0})$$

$$a_F = \begin{pmatrix} 2.982 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{FE\tau} := a_{FE\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ -l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{FE\tau} = \begin{pmatrix} 1.87 \\ 6.872 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{FE} := a_{FE_n} + a_{FE\tau} \quad a_{FE} = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 6.994 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } a_{FE\tau} = \varepsilon_4 \times l_4 \quad \varepsilon_4 := \text{Find}(\varepsilon_4) \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 178.049 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon_4| = 178.049 \text{ с}^{-2}.$$

Результаты определения ускорений сводим в табл. 4.

Таблица 4

Картина изменения ускорений

Положе- ния кривоши- па	$a_B,$ м/с <sup>2</sup>	$a_{CB}^n,$ м/с <sup>2</sup>	$a_{CB}^\tau,$ м/с <sup>2</sup>	$a_C,$ м/с <sup>2</sup>	$a_E,$ м/с <sup>2</sup>	$a_{FE}^n,$ м/с <sup>2</sup>	$a_{FE}^\tau,$ м/с <sup>2</sup>	$a_F,$ м/с <sup>2</sup>	$\varepsilon_2,$ с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_3,$ с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_4,$ с <sup>-2</sup>
1	8	3,2	12,31	16,6	10,5	0	8,78	6,15	246,3	475,6	-219,4
2	8	2,99	19,12	11,4	7,16	0,463	7,12	2,98	-382,4	-181,4	178,0
3	8	1,96	5,92	5,58	3,51	0,013	0,006	3,49	-118,4	-156,6	0,144
4	8	2,83	2,58	5,22	3,28	0,004	0,846	2,94	51,6	-149,0	-21,1
5	8	0,50	4,29	4,80	3,02	0,001	2,12	2,87	85,8	-104,5	53,0
6	8	0,022	3,75	4,64	2,92	0,507	1,605	2,56	75,0	46,1	40,1

Направление углового ускорения против хода часовой стрелки отмечаем знаком минус.

## 4. Динамическое исследование плоских рычажных механизмов

### 4.1. Общие положения

Силовой анализ механизмов основывается на решении прямой, или первой, задачи динамики – по заданному движению определить действующие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе должны быть заданы. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, обычно также считаются заданными, и, следовательно, подлежат определению только реакции в кинематических парах. Это – первая задача силового анализа. Второй задачей силового анализа является определение величин внешних сил, приложенных к начальным звеньям, при которых выполняются принятые законы их движения.

При решении обеих задач используется принцип Даламбера, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции. Уравнения равновесия в этом случае называют уравнениями кинестатики, чтобы отличить их от обычных уравнений статики, т.е. уравнений равновесия без учета сил инерции.

Силовой расчет механизмов выполняют в предположении, что трение в кинематических парах отсутствует и все силы, действующие на звенья механизма, расположены в одной плоскости. При отсутствии сил трения сила взаимодействия между двумя звеньями всегда направлена по нормали к поверхности их касания. В поступательной паре все элементарные силы взаимодействия и их равнодействующая будут расположены перпендикулярно направляющей поступательной пары.

В общем случае учитывают силы тяжести звеньев

$$G_i = m_i g,$$

где  $m_i$  – масса звена  $i$ ;

$g$  – ускорение силы тяжести, значение которого можно принимать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

Прежде чем решать задачу об определении реакций в кинематических парах, надо выяснить, для каких кинематических цепей соблюдается условие равенства уравнений кинестатики и числа неизвестных составляющих реакций в кинематических парах (условие кинестатической определимости).

Число неизвестных, подлежащих определению для каждой кинематической пары совпадает с числом связей, так как каждая связь в виде невозможности движения по какому-либо направлению дает соответствующую реакцию. Невозможность движения вдоль оси дает реакцию в виде силы, а невозможность вращения вокруг оси – в виде пары сил.

На основе этих рассуждений можно сделать вывод, что условие кинестатической определимости плоской кинематической цепи имеет вид

$$3n = 2p_5 + p_4.$$

Это условие совпадает с условием равенства нулю числа степеней свободы, т.е. кинестатически определяемыми кинематическими цепями являются структурные группы Ассура.

При силовом расчете механизм расчленяется на отдельные структурные группы; при этом необходимо придерживаться порядка расчета, который будет обратным порядку кинематического исследования, т.е. силовой расчет начинается с группы, присоединенной последней в процессе образования механизма и заканчивается расчетом ведущего звена механизма.

Обычно звенья плоских механизмов имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения. Тогда главный вектор сил инерции звена  $i$  (кратко – сила инерции)  $F_{ui}$  и главный момент сил инерции звена  $i$  (кратко – момент сил инерции)  $M_{ui}$  определяются по формулам:

$$F_{ui} = -m_i a_{si} \quad \text{и} \quad M_{ui} = -I_{Si} \varepsilon_i,$$

где  $m_i$  – масса звена  $i$ ;

$a_{si}$  – вектор ускорения центра масс звена  $i$ ;

$I_{Si}$  – момент инерции звена  $i$  относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения;

$\varepsilon_i$  – угловое ускорение звена  $i$ .

Точками приложения сил инерции и сил тяжести звеньев являются их центры масс (для рычажных звеньев, если не оговорено другое, – их середины, а для звеньев, имеющих треугольную форму – точка пересечения медиан треугольника).

Рассмотрим задачу определения реакций в кинематических парах для трех механизмов второго класса, в составе которых группы первого, второго и третьего видов. Многие плоские механизмы в качестве выходного звена имеют ползун, поэтому начнем рассмотрение с группы второго вида.

## 4.2. Определение реакций в кинематических парах и уравнивающих нагрузок

### 4.2.1. Силовой анализ кривошипно-ползунного механизма

В этом механизме имеем одну группу второго класса второго вида (ВВП), в которую входят два звена: шатун 2 и ползун 3 (рис. 27, а). Положим, что исходными данными для силового анализа являются: массы звеньев  $m_2$  и  $m_3$  в кг; внешняя сила полезного сопротивления  $P$  в  $H$ ; момент инерции второго звена относительно оси, проходящей через центр масс  $I_{S2}$  в  $кгм^2$ . Центр масс шатуна делит длину  $BC$  в отношении 1:2.

Кинематический анализ предполагается выполненным, а следовательно, известны векторы ускорений центров масс звеньев  $a_{s2}$  и  $a_C$  (обычно центр масс ползуна  $s_3$  совпадает с точкой  $C$ ) и углового ускорения  $\varepsilon_2$ .

### Графическое решение.

Графическое определение реакций в кинематических парах плоских механизмов путем построения планов сил применяется не только вследствие наглядности, но и потому, что внешние силы, действующие на звенья механизма, обычно известны лишь очень приближенно и точность простейших графических построений часто оказывается вполне достаточной. Иногда графические построения используют для контроля правильности аналитического решения.

Силовой анализ группы второго класса сводится к определению реакций в трех кинематических парах группы: двух внешних  $B$ ,  $D$  и одной внутренней  $C$  (рис. 27, а). Реакции в этих кинематических парах будем обозначать  $R_{12}$  (усилие, действующее на второе звено со стороны первого),  $R_{23}$  или  $R_{32}$  (усилие в паре  $C$  второго звена на третье либо наоборот;  $R_{23} = -R_{32}$ ) и  $R_{03}$  – усилие стойки 0 на звено 3.

В определенном масштабе вычерчивают группу Ассур и прикладывают внешние нагрузки: силу полезного сопротивления  $P$  и силы тяжести звеньев  $G_2$  и  $G_3$  (рис. 27, б). Затем прикладывают силы и моменты сил инерции (рис. 27, в). Силу инерции шатуна  $F_{u2}$  направляют противоположно вектору ускорения центра масс второго звена  $a_{s2}$ . Точку  $s_2$  на плане ускорений (рис. 27, е) находят по теореме подобия, для чего отрезок  $bc$  на плане делят в заданном отношении 1:2, и проводят в полученную точку из полюса вектор  $a_{s2}$ . На следующем шаге (рис. 27, г) прикладывают неизвестные реакции, подлежащие определению. Реакцию во вращательной паре  $B$  раскладывают на две составляющие: нормальную  $R_{12}^n$  и тангенциальную  $R_{12}^r$ . Реакцию стойки на ползун направляют перпендикулярно траектории. Направление этих реакций на данном этапе произвольно. Затем указывают плечи сил, действующих на звено 2, которые понадобятся для определения  $R_{12}^r$  (рис. 27, д). Подготовка к силовому анализу группы 2-3 закончена.

Начинают с определения тангенциальной составляющей  $R_{12}^r$ .

С этой целью для второго звена составляют уравнение равновесия моментов сил относительно общей точки  $C$  звеньев

$$\sum M(C) = 0; R_{12}^r \cdot l_{BC} - M_{u2} - F_{u2} h_{u2} + G_2 h_{G2} = 0. \quad (12)$$

Плечи силы инерции  $h_{u2}$  и силы тяжести  $h_{G2}$  определяют непосредственным измерением на чертеже, умножая затем полученные значения в миллиметрах на масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ .

Из уравнения (12) находят  $R_{12}^r$ . В случае получения отрицательного числа необходимо предварительно выбранное направление вектора  $R_{12}^r$  на чертеже заменить на противоположное.

После этого записывают векторное уравнение равновесия сил для всей группы

$$R_{12}^n + R_{12}^\tau + F_{u2} + G_2 + F_{u3} + G_3 + P_3 + R_{03} = 0.$$

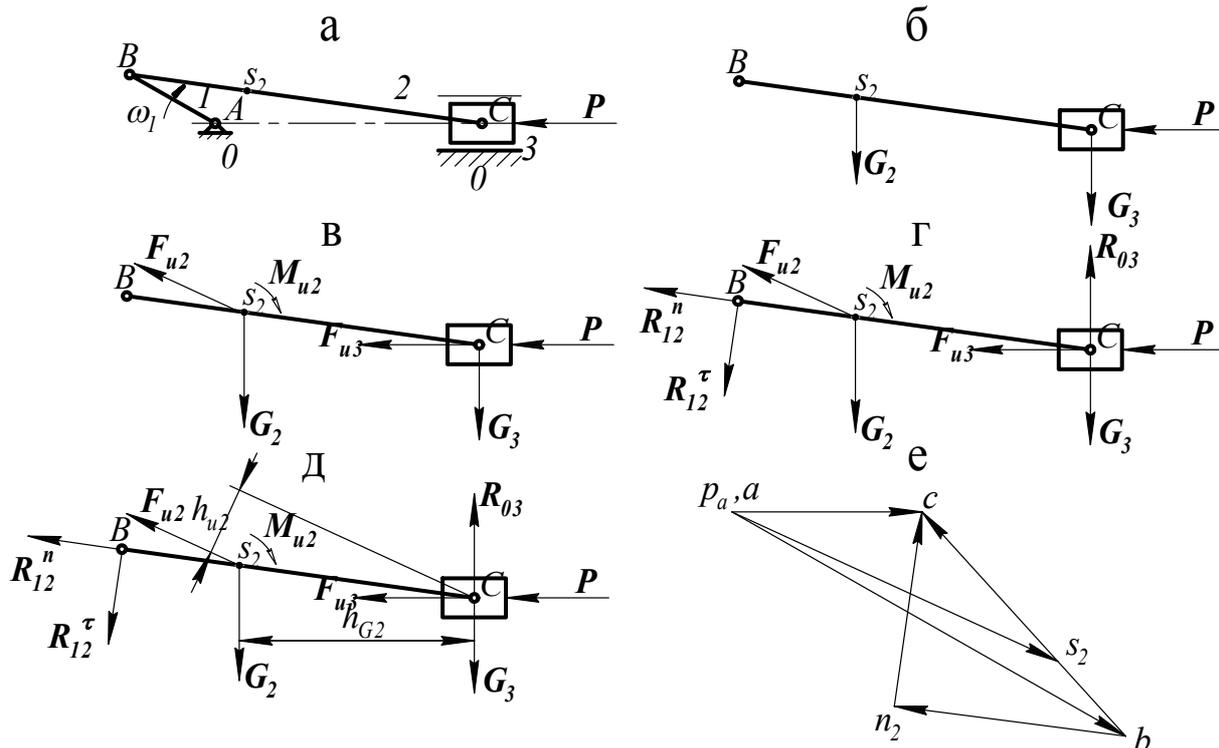


Рис. 27. Подготовка к силовому анализу группы второго класса второго вида

Замкнутый векторный контур, полученный в результате графического решения этого уравнения, называют *планом сил*.

Последовательность его построения такова. После выбора масштабного коэффициента сил  $\mu_F$  откладывают из произвольной точки на чертеже первый известный вектор  $R_{12}^\tau$  (рис. 28, а). Затем последовательно откладывают векторы в порядке, в котором они записаны в уравнении (рис. 28, б, в). Последним откладывают вектор  $P_3$ . Затем, через начало вектора  $R_{12}^\tau$  проводят прямую параллельную звену ВС (линия действия реакции  $R_{12}^n$ ), а через конец вектора  $P_3$  – вертикальную прямую (линия действия реакции  $R_{03}$ ) до их пересечения (рис. 28, г). Силовой многоугольник замкнулся; стрелки векторов должны быть в одном направлении обхода этого замкнутого контура (рис. 28, д). Неизвестный вектор  $R_{12}$  получают, как сумму соответствующих составляющих (рис. 28, е). Измерив длины полученных векторов и умножив их на масштабный коэффициент, получают модули неизвестных реакций.

После определения реакций во внешних кинематических парах группы переходят к определению реакции во внутренней кинематической паре. Для этого записывают векторное уравнение равновесия для какого-либо из звеньев группы и решают его. Предпочтение отдают звену, на которое действует меньше сил.

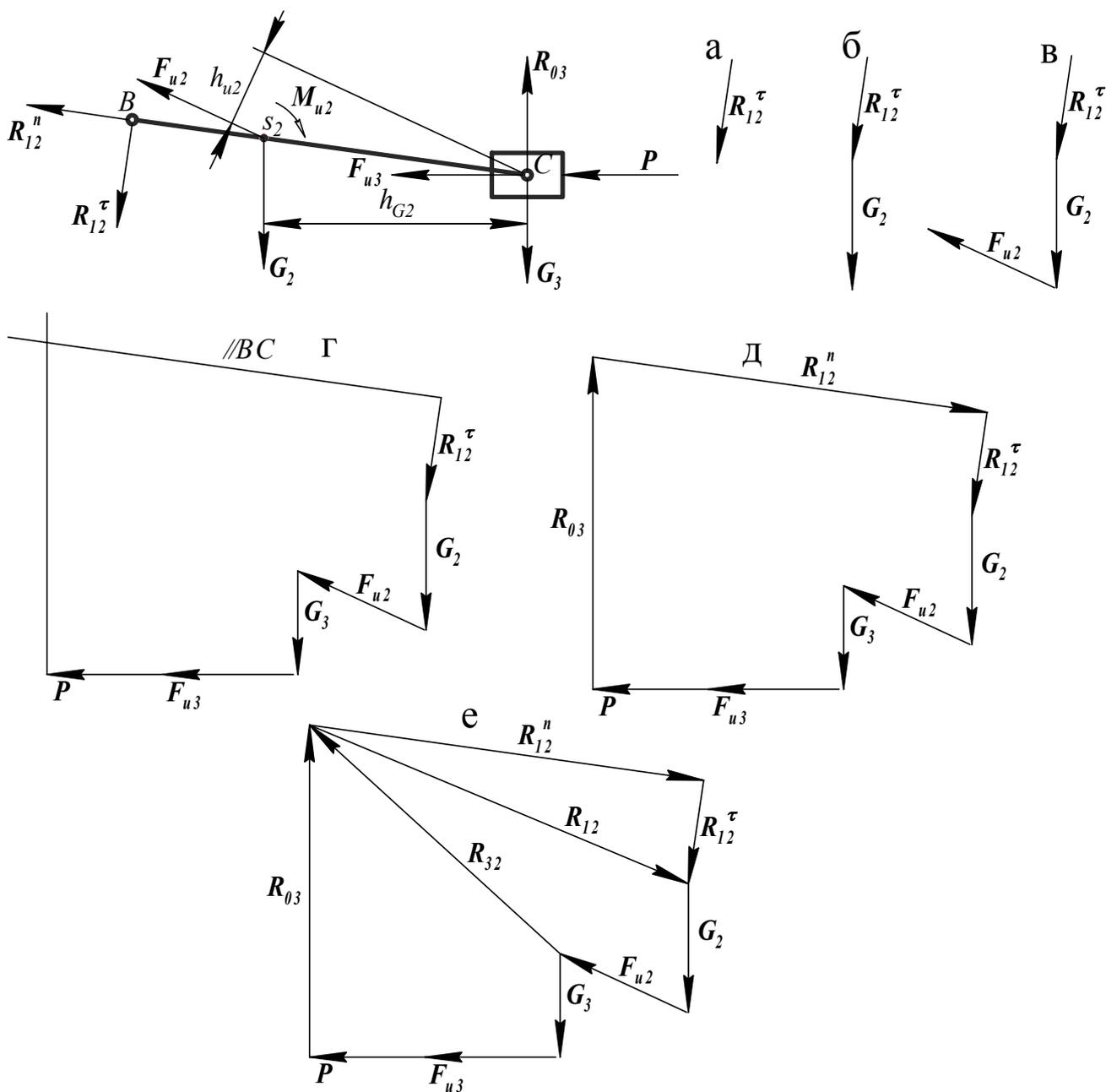


Рис. 28. Построение плана сил для группы второго класса второго вида

Например, для второго звена

$$\mathbf{R}_{12} + \mathbf{F}_{u2} + \mathbf{G}_2 + \mathbf{R}_{32} = 0.$$

Соблюдение приведенной последовательности записи векторов в уравнениях позволяет определить реакцию  $\mathbf{R}_{32}$  на плане сил для всей группы, не строя отдельного плана сил для одного звена (рис. 28, е).

Если ось вращения шарнира  $C$  проходит через центр масс ползуна (рис. 29, а), то линия действия реакции  $\mathbf{R}_{03}$  лежит на вертикали, проходящей через точку  $C$ . В противном случае (рис. 29, б) линия действия этой реакции также будет вертикальна (если пренебрегают силами трения), но точка приложения её смещается и необходимо находить величину этого смещения  $X$ .

Для его определения записывают уравнение равновесия моментов сил, действующих на ползун, относительно точки  $C$  (рис. 29, в)

$$R_{03} \cdot x - F_{u3} \cdot h - P \cdot h = 0.$$

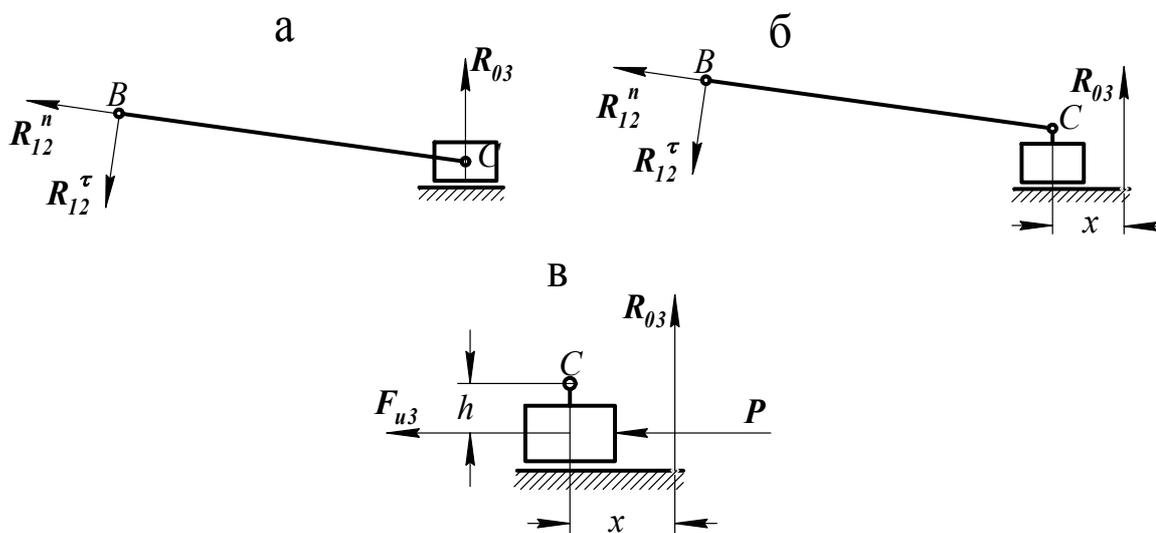


Рис. 29. Определение точки приложения реакции  $R_{03}$

Закончив силовой анализ группы, переходят к рассмотрению равновесия кривошипа (рис. 30). Его изображают также в определенном масштабе и прикладывают реакцию  $R_{21}$ , которая равна по модулю, но противоположно направлена реакции  $R_{12}$ . Как правило, массой начального звена пренебрегают, поэтому реакция стойки на кривошип должна образовывать с реакцией  $R_{21}$  пару сил (рис. 30, а).

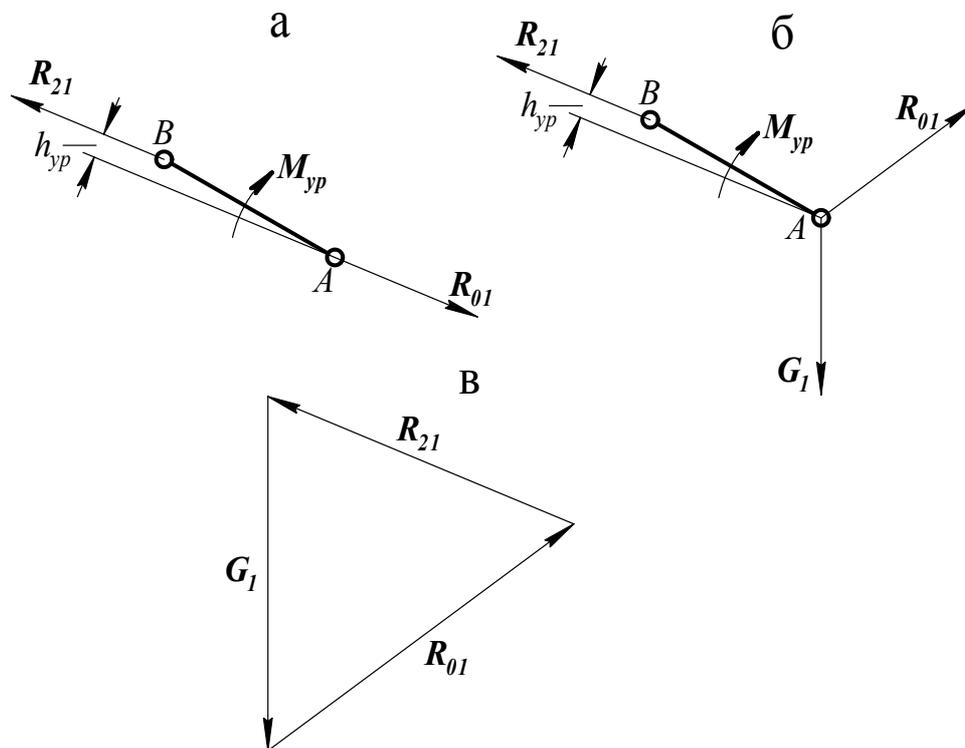


Рис. 30. Силовой анализ начального звена

Следовательно,

$$\mathbf{R}_{01} = -\mathbf{R}_{21}.$$

С другой стороны, для равновесия кривошипа необходимо, чтобы момент этой пары сил был уравновешен внешним моментом

$$M_{yp} = R_{21} h_{yp}.$$

Из первого равенства определяют  $\mathbf{R}_{01}$ , из второго  $M_{yp}$  – уравновешивающий момент т.е. вращающий момент, действующий на начальное звено, при котором выполняется закон его движения. Как правило, это момент, развиваемый двигателем. Зная величину момента и угловую скорость начального звена можно определить мгновенную мощность двигателя

$$P = M_{yp} \omega_1.$$

Если задана масса кривошипа (рис. 30, б), то записывают векторное уравнение его равновесия  $\mathbf{R}_{21} + \mathbf{G}_1 + \mathbf{R}_{01} = 0$  и строят план сил, из которого находят реакцию  $\mathbf{R}_{01}$  (рис. 30, в).

### Аналитическое решение.

Аналитический вариант силового анализа этого механизма продолжает ранее выполненный кинематический анализ (см. п. 2.3.1). Дополнительные данные для силового анализа: инерционные характеристики звеньев  $m_2 = 2$  кг;  $m_3 = 5$  кг;  $I_{s2} = 0,4$  кгм<sup>2</sup>. Сила полезного сопротивления (рис. 27, а)  $P = 50$  Н.

Вектор силы полезного сопротивления представляем в виде

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{P}| = 50 \text{ Н.}$$

Векторы сил тяжести звеньев, принимая ускорение силы тяжести равным  $10 \text{ м/с}^2$ ,

$$\mathbf{g} := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_2 := m_2 \cdot \mathbf{g} \quad \mathbf{G}_3 := m_3 \cdot \mathbf{g} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы ускорений центров масс шатуна и ползуна

$$\mathbf{a}_{s2} := \mathbf{a}_B + \frac{\mathbf{a}_{CB}}{3} \quad \mathbf{a}_{s3} := \mathbf{a}_C \quad \mathbf{a}_{s2} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ -0.702 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_{s3} = \begin{pmatrix} 1.452 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Силы инерции звеньев

$$\mathbf{F}_{u2} := -\mathbf{a}_{s2} m_2 \quad \mathbf{F}_{u3} := -\mathbf{a}_{s3} m_3 \quad \mathbf{F}_{u2} = \begin{pmatrix} -3.399 \\ 1.404 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_{u3} = \begin{pmatrix} -7.261 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{F}_{u2}| = 3.68 \text{ Н} \quad |\mathbf{F}_{u3}| = 7.26 \text{ Н.}$$

Момент сил инерции шатуна

$$M_{u2} := -\varepsilon_2 \cdot l_{s2} \quad M_{u2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.339 \end{pmatrix} \quad |M_{u2}| = 4.34 \text{ Нм.}$$

Как и при графическом решении, начинаем с определения тангенциальной составляющей реакции  $R_{12}^r$  из векторного уравнения равновесия моментов сил относительно точки  $C$ .

$$R_{12\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$M_{u2} - \frac{2l_2}{3} \times (F_{u2} + G_2) - l_2 \times \left[ R_{12\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad R_{12\tau_0} := \text{Find}(R_{12\tau_0})$$

$$R_{12\tau} := R_{12\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12\tau} = \begin{pmatrix} -5.934 \\ -35.106 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12\tau}| = 35.6 \text{ Н.}$$

Из векторного уравнения равновесия структурной группы находим нормальную составляющую  $R_{12}^n$  и реакцию  $R_{03}$ .

$$R_{12n_0} := 1 \quad R_{03_1} := 1 \quad \text{Given}$$

$$R_{12n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_1} \\ l_{2_0} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{12\tau} + G_2 + F_{u2} + G_3 + F_{u3} + P + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{03_1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{12n_0} \\ R_{03_1} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{12n_0}, R_{03_1}) \quad R_{12n_0} = 67 \quad R_{03_1} = 115$$

$$R_{12n} := R_{12n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_1} \\ l_{2_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12n} = \begin{pmatrix} 66.595 \\ -11.257 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12n}| = 67.54 \text{ Н}$$

$$R_{03} := \begin{pmatrix} 0 \\ R_{03_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ 114.959 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}| = 114.959 \text{ Н.}$$

Полная реакция  $R_{12}$

$$R_{12} := R_{12n} + R_{12\tau} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} 60.661 \\ -46.363 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}| = 76.35 \text{ Н.}$$

Реакция в кинематической паре  $C$

$$R_{32} := -(R_{12} + G_2 + F_{u2}) \quad R_{32} = \begin{pmatrix} -57.261 \\ 64.959 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{32}| = 86.59 \text{ Н.}$$

Реакции в кинематических парах кривошипа  $A$  и  $B$

$$R_{21} := -R_{12} \quad R_{21} = \begin{pmatrix} -60.661 \\ 46.363 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{01} := -R_{21} \quad R_{01} = \begin{pmatrix} 60.661 \\ -46.363 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим уравновешивающий момент на кривошипе  $AB$

$$M_{yp} := -l_1 \times R_{21} \quad M_{yp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.295 \end{pmatrix} \quad |M_{yp}| = 0.295 \text{ Нм.}$$

Проверить правильность выполнения силового анализа можно воспользовавшись основной теоремой динамики, из которой следует, что сумма мощностей внешних сил, приложенных к системе, равна нулю.

Чтобы использовать это утверждение, найдем вектор скорости центра масс звена 2

$$v_{s2} := v_B + \frac{v_{CB}}{3} \quad v_{s2} = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.145 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s2}| = 0.184 \text{ м/с.}$$

Сумма мощностей внешних сил (мощность силы – скалярное произведение векторов силы и скорости точки её приложения)

$$M_{u2} \cdot \omega_2 + G_2 \cdot v_{s2} + F_{u2} \cdot v_{s2} + F_{u3} \cdot v_C + P \cdot v_C + M_{yp} \cdot \omega_1 = 0$$

Убеждаемся, что силовой анализ выполнен верно.

#### 4.2.2. Силовой анализ кривошипно-коромыслового механизма

В этом механизме имеем одну группу второго класса первого вида (ВВВ), в которую входят два звена: шатун 2 и коромысло 3 (рис. 31, а). Предположим также, что заданы: массы звеньев  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  в кг; внешняя сила полезного сопротивления  $P$  в Н; моменты инерции второго и третьего звеньев относительно осей, проходящих через центры масс  $I_{s2}$  и  $I_{s3}$  в кгм<sup>2</sup>. Центр масс  $s_2$  шатуна, имеющего форму треугольника, лежит на пересечении медиан, а центр масс коромысла  $CD$  делит его в отношении 1:1.

Кинематический анализ предполагается выполненным, а следовательно, известны векторы ускорений центров масс звеньев  $a_{s2}$  и  $a_{s3}$  и угловых ускорений  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ .

##### Графическое решение.

Структурную группу изображают в определенном масштабе (рис. 31, б) и производят подготовку к силовому анализу: прикладывают все нагрузки,

действующие на звенья, включая и реакции во внешних кинематических парах, подлежащие определению.

На рис. 31, в изображен уже построенный ранее план ускорений, но с показанными векторами ускорений центров масс звеньев  $\mathbf{a}_{S_2}$  и  $\mathbf{a}_{S_3}$ .

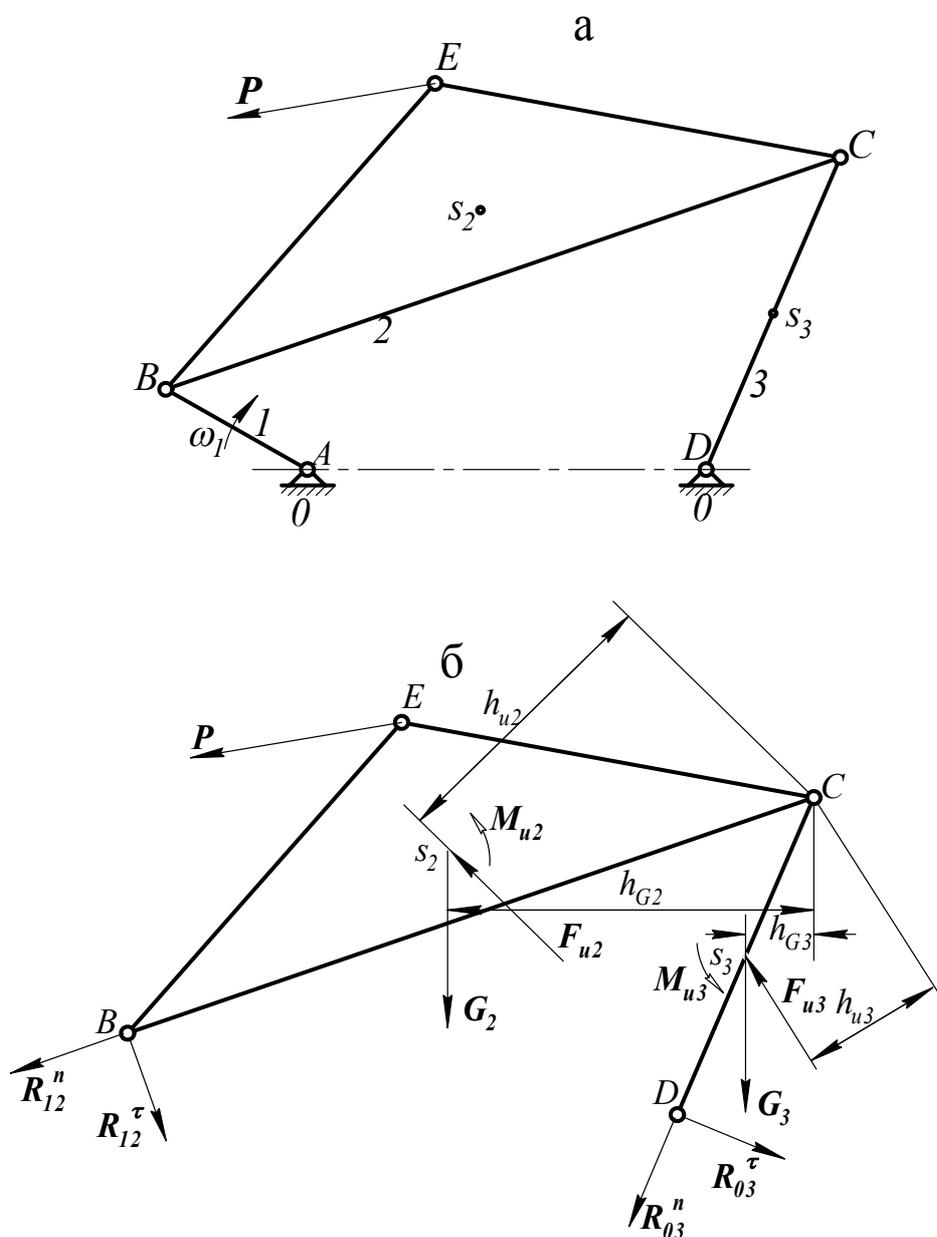
Как и в предыдущем пункте, начинают с определения тангенциальных составляющих  $R_{12}^\tau$  и  $R_{03}^\tau$ .

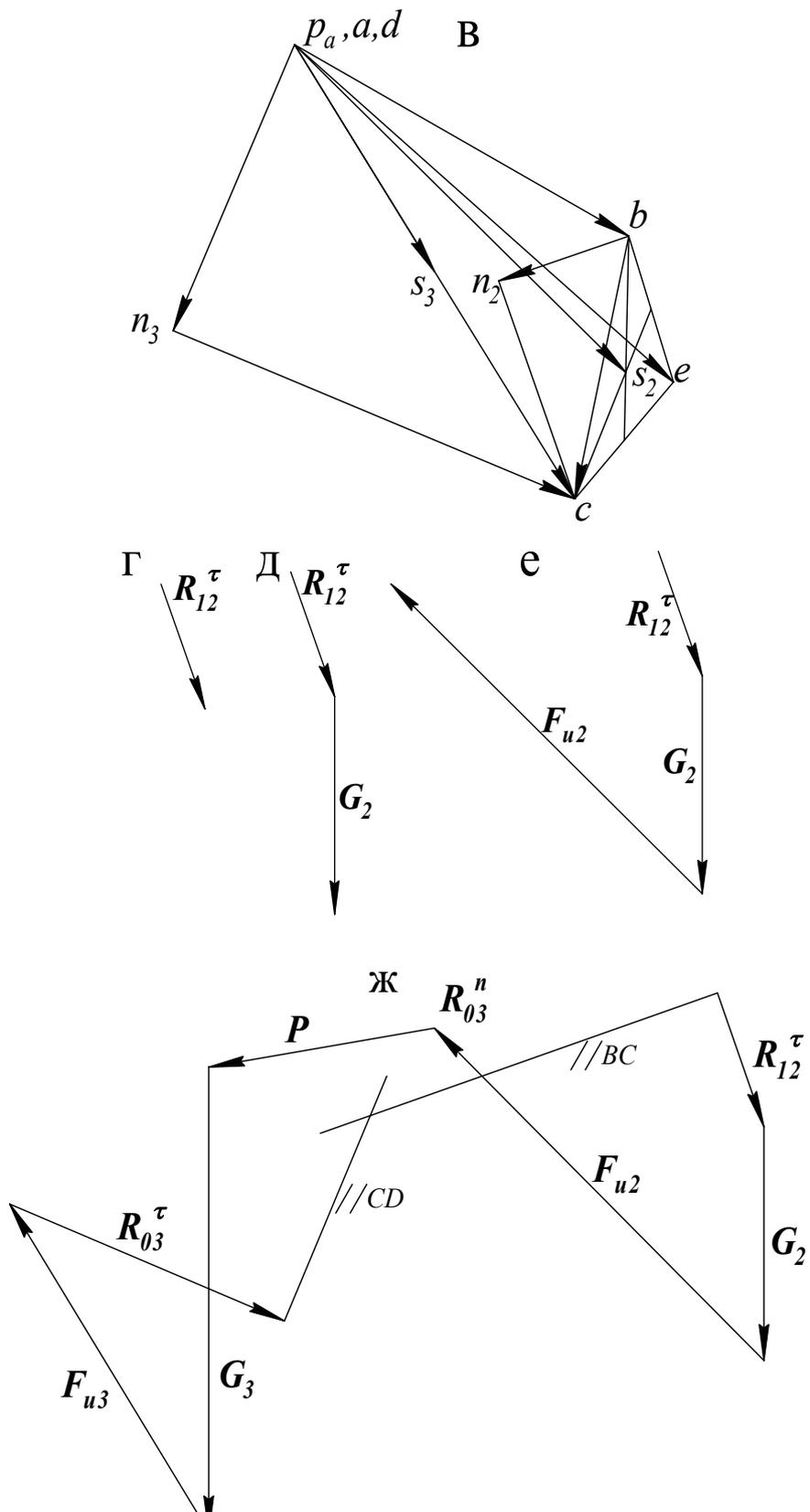
Для этого составляют уравнения моментов сил относительно общей точки  $C$  звеньев для каждого из них

$$2 \text{ звено: } \sum M(C) = 0; R_{12}^\tau \cdot l_{BC} + M_{u2} - F_{u2} h_{u2} + G_2 h_{G2} = 0;$$

$$3 \text{ звено: } \sum M(C) = 0; R_{03}^\tau \cdot l_{CD} + M_{u3} - F_{u3} h_{u3} + G_3 h_{G3} = 0.$$

Плечи сил определяют непосредственно из чертежа.





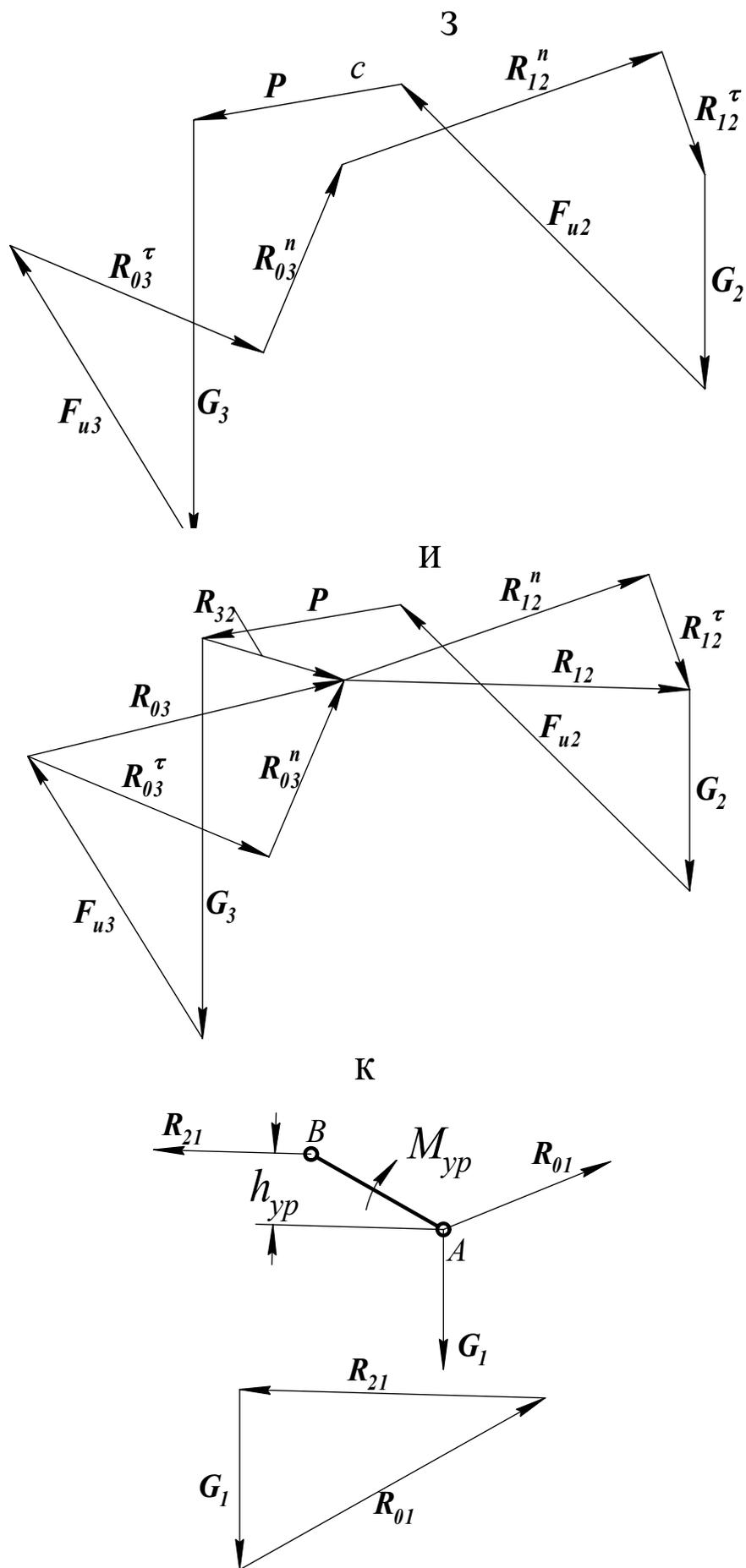


Рис. 31. Силовой анализ кривошипно-коромыслового механизма

Из последних уравнений находят  $R_{12}^{\tau}$  и  $R_{03}^{\tau}$ , по знакам которых определяют их правильное направление.

Для определения нормальных составляющих реакций  $R_{12}^n$  и  $R_{03}^n$  составляют и графически решают векторное уравнение равновесия всей группы

$$R_{12}^{n\tau} + R_{12} + G_2 + F_{u2} + P + G_3 + F_{u3}^{\tau} + R_{03}^n + R_{03} = 0.$$

Задавшись величиной масштабного коэффициента, откладывают первый известный вектор  $R_{12}^{\tau}$  (рис. 31, г). Затем, соблюдая последовательность слагаемых в векторном уравнении, откладывают  $G_2$  (рис. 31, д),  $F_{u2}$  (рис. 31, е) и т.д., заканчивая вектором  $R_{03}^{\tau}$ . Через конец последнего проводят линию действия вектора  $R_{03}^n$  параллельно звену  $CD$ . Через начало первого вектора  $R_{12}^{\tau}$  проводят прямую параллельно звену  $BC$  до пересечения с предыдущей линией (рис. 31, з). Замыкают векторный многоугольник, соблюдая направление обхода его контура (рис. 31, и). Полные реакции  $R_{12}$  и  $R_{03}$  находят как суммы соответствующих тангенциальных и нормальных составляющих (рис. 31, и)

$$R_{12} = R_{12}^{n\tau} + R_{12};$$

$$R_{03} = R_{03}^n + R_{03}^{\tau}.$$

Реакцию во внутренней кинематической паре группы находят из векторного уравнения равновесия сил, действующих, например, на звено 2:

$$R_{12} + G_2 + F_{u2} + P + R_{32} = 0.$$

С этой целью соединяют конец вектора  $P$  с началом вектора  $R_{12}$  (рис. 31, и).

Измерив длину векторов  $R_{12}$ ,  $R_{32}$  и  $R_{03}$  и, умножив полученные значения на масштабный коэффициент сил, получают действительные значения реакций в ньютонах.

Масса начального звена задана, поэтому реакция стойки на кривошип  $R_{01}$  должна определяться из уравнения равновесия сил (рис. 31, к)

$$R_{21} + G_1 + R_{01} = 0.$$

С другой стороны для равновесия кривошипа необходимо, чтобы момент этой пары сил был уравновешен внешним моментом

$$M_{yp} = R_{21} h_{yp}.$$

Из первого равенства определяем  $R_{01}$ , из второго  $M_{yp}$  – уравновешивающий момент. Плечо  $h_{yp}$  определяют непосредственным измерением на чертеже.

На этом силовой анализ кривошипно-коромыслового механизма в заданном положении заканчивается.

### Аналитическое решение.

Оно продолжает ранее выполненный кинематический анализ (см. п. 2.3.2). Дополнительные данные для силового анализа: инерционные характеристики звеньев  $m_1 = 2$  кг;  $m_2 = 4$  кг;  $m_3 = 3$  кг;  $I_{s2} = 0,007$  кгм<sup>2</sup>;  $I_{s3} = 0,003$  кгм<sup>2</sup>. Вектор силы полезного сопротивления примем в виде

$$P := \begin{pmatrix} -86.603 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |P| = 100 \text{ Н.}$$

Векторы сил тяжести звеньев, принимая ускорение силы тяжести равным  $10 \text{ м/с}^2$ ,

$$g := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_1 := m_1 \cdot g \quad G_2 := m_2 \cdot g \quad G_3 := m_3 \cdot g \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определим векторы ускорений центров масс шатуна и коромысла

$$a_{s2} := \frac{a_B + a_C + a_E}{3} \quad a_{s2} = \begin{pmatrix} 30.495 \\ -6.704 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{s3} := \frac{a_C}{2} \quad a_{s3} = \begin{pmatrix} 15.205 \\ 3.798 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Силы инерции звеньев

$$F_{u2} := -a_{s2} \cdot m_2 \quad F_{u2} = \begin{pmatrix} -121.979 \\ 26.816 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u2}| = 124.9 \text{ Н}$$
$$F_{u3} := -a_{s3} \cdot m_3 \quad F_{u3} = \begin{pmatrix} -45.616 \\ -11.393 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u3}| = 47.02 \text{ Н.}$$

Моменты сил инерции шатуна и коромысла

$$F_{u2} := -a_{s2} \cdot m_2 \quad F_{u2} = \begin{pmatrix} -121.979 \\ 26.816 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u2}| = 124.9 \text{ Н}$$
$$F_{u3} := -a_{s3} \cdot m_3 \quad F_{u3} = \begin{pmatrix} -45.616 \\ -11.393 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u3}| = 47.02 \text{ Н.}$$

Для звеньев 2 и 3 предварительно определяют радиус-векторы центров масс относительно точки C

$$l_{s2C} := \frac{l_{21} - 2l_2}{3} \quad l_{s2C} = \begin{pmatrix} -0.068 \\ 0.001 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{s3C} := -\frac{l_3}{2} \quad l_{s3C} = \begin{pmatrix} 0.028 \\ -0.021 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для силы P находят радиус-вектор точки её приложения относительно точки C

$$l_{EC} := l_{21} - l_2 \quad l_{EC} = \begin{pmatrix} -0.072 \\ 0.022 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из векторного уравнения равновесия моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки C находят тангенциальную составляющую  $R_{12}^{\tau}$

$$R_{12}\tau_0 := 1 \text{ Given}$$

$$M_{u2} + l_{S2C} \times (F_{u2} + G_2) + l_{EC} \times P - l_2 \times \left[ R_{12}\tau_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ -l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$R_{12}\tau_0 := \text{Find}(R_{12}\tau_0)$$

$$R_{12}\tau := R_{12}\tau_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ -l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12}\tau = \begin{pmatrix} 2.36 \\ -15.63 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}\tau| = 15.81 \text{ Н.}$$

Аналогичным образом находят тангенциальную составляющую  $R_{03}^{\tau}$

$$R_{03}\tau_0 := 1 \text{ Given}$$

$$M_{u3} + l_{S3C} \times (F_{u3} + G_3) - l_3 \times \left[ R_{03}\tau_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ -l_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$R_{03}\tau_0 := \text{Find}(R_{03}\tau_0)$$

$$R_{03}\tau := R_{03}\tau_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ -l_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03}\tau = \begin{pmatrix} 9.31 \\ 12.11 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}\tau| = 15.3 \text{ Н.}$$

Соответствующие нормальные составляющие находят, решая векторное уравнение равновесия сил, действующих на всю группу

$$R_{12}n_0 := 1 \quad R_{03}n_0 := 1 \quad \text{Given}$$

$$R_{12}n_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{20} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{12}\tau + G_2 + F_{u2} + P + G_3 + F_{u3} + R_{03}\tau + R_{03}n_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{12}n_0 \\ R_{03}n_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{12}n_0, R_{03}n_0)$$

$$R_{12n} := R_{12n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{l_{2_1}}{l_{2_0}} \\ \frac{l_{2_0}}{l_{2_0}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12n} = \begin{pmatrix} 211.49 \\ 31.97 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12n}| = 213.9 \text{ Н}$$

$$R_{03n} := R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{l_{3_1}}{l_{3_0}} \\ \frac{l_{3_0}}{l_{3_0}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03n} = \begin{pmatrix} 31.03 \\ -23.87 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03n}| = 39.15 \text{ Н.}$$

Теперь можно найти полные реакции во внешних кинематических парах группы

$$R_{12} := R_{12n} + R_{12\tau} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} 213.86 \\ 16.34 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}| = 214.48 \text{ Н}$$

$$R_{03} := R_{03n} + R_{03\tau} \quad R_{03} = \begin{pmatrix} 40.34 \\ -11.76 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}| = 42.02 \text{ Н.}$$

Реакцию в кинематической паре  $C$  определим из уравнения равновесия сил, действующих на звено 3 (с равным успехом её можно найти из аналогичного уравнения для второго звена)

$$R_{23} := -(R_{03} + G_3 + F_{u3}) \quad R_{23} = \begin{pmatrix} 5.27 \\ 53.15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{23}| = 53.41 \text{ Н.}$$

Переходим к кривошипу  $AB$ . Так как задана его масса, то при определении реакции в кинематической паре  $A$  необходимо учитывать силу тяжести  $G_1$ . Из векторного уравнения равновесия сил, действующих на кривошип находим

$$R_{01} := -(R_{21} + G_1) \quad R_{01} = \begin{pmatrix} 213.86 \\ 66.34 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{01}| = 223.91 \text{ Н.}$$

Уравновешивающий момент

$$M_{yp} := -l_1 \times R_{21} \quad M_{yp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.448 \end{pmatrix} \quad |M_{yp}| = 5.45 \text{ Нм}$$

Проверим правильность выполнения силового анализа, для чего найдем сумму мощностей внешних сил, приложенных к механизму, которая должна быть равной нулю.

Найдем векторы скоростей центров масс звеньев 2 и 3

$$v_{s2} := \frac{v_B + v_C + v_E}{3} \quad v_{s2} = \begin{pmatrix} 0.713 \\ 1.05 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s2}| = 1.269 \text{ м/с}$$

$$v_{s3} := \frac{v_C}{2} \quad v_{s3} = \begin{pmatrix} 0.356 \\ 0.463 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s3}| = 0.584 \text{ м/с} .$$

Искомая сумма мощностей внешних сил

$$M_{u2} \cdot \omega_2 + (G_2 + F_{u2}) \cdot v_{s2} + M_{u3} \cdot \omega_3 + (G_3 + F_{u3}) \cdot v_{s3} + P \cdot v_E + M_{yp} \cdot \omega_1 = -0 .$$

Полученный результат говорит о правильности выполненного силового анализа.

#### 4.2.3. Силовой анализ кривошипно-кулисного механизма

В этом механизме имеем одну группу второго класса третьего вида (ВПВ), в которую входят два звена: камень 2 и кулиса 3 (рис. 32, а). Заданы: масса третьего звена  $m_3$  в кг; внешняя сила полезного сопротивления  $P$  в Н; момент инерции третьего звена относительно оси, проходящей через центр масс  $I_{s3}$  в кгм<sup>2</sup>. Центр масс  $s_3$ , лежит на середине кулисы  $CD$ .

Массой кулисного камня обычно пренебрегают. В противном случае момент инерции кулисы становится переменной величиной и это необходимо учитывать.

Кинематический анализ предполагается выполненным, а следовательно, известны векторы ускорения центра масс  $a_{s3}$  и углового ускорения  $\epsilon_3$ .

##### Графическое решение.

Структурную группу изображают в определенном масштабе (рис. 32, б) и производят подготовку к силовому анализу: прикладывают все нагрузки, действующие на звенья, включая и реакции во внешних кинематических парах, подлежащие определению.

При отсутствии трения и при совпадении центра масс кулисного камня с осью вращения кинематической пары кривошип-камень, линии действия реакций  $R_{12}$  и  $R_{32}$  совпадают и проходят через точку  $B$ . Эти два вектора перпендикулярны кулисе, равны по модулю и противоположно направлены, что следует из равновесия камня.

На рис. 32, в изображен уже построенный ранее план ускорений, но с показанным вектором ускорения центра масс кулисы  $a_{s3}$ .

Начинают с определения тангенциальной составляющей  $R_{03}^r$ .

Для этого составляют уравнение моментов сил относительно точки  $B$

$$\sum M(B) = 0; \quad -R_{03}^r \cdot l_{CD} - M_{u3} + F_{u3} \cdot h_u + G_3 \cdot h_G + P \cdot h_P = 0 .$$

Плечи сил определяют непосредственно из чертежа.

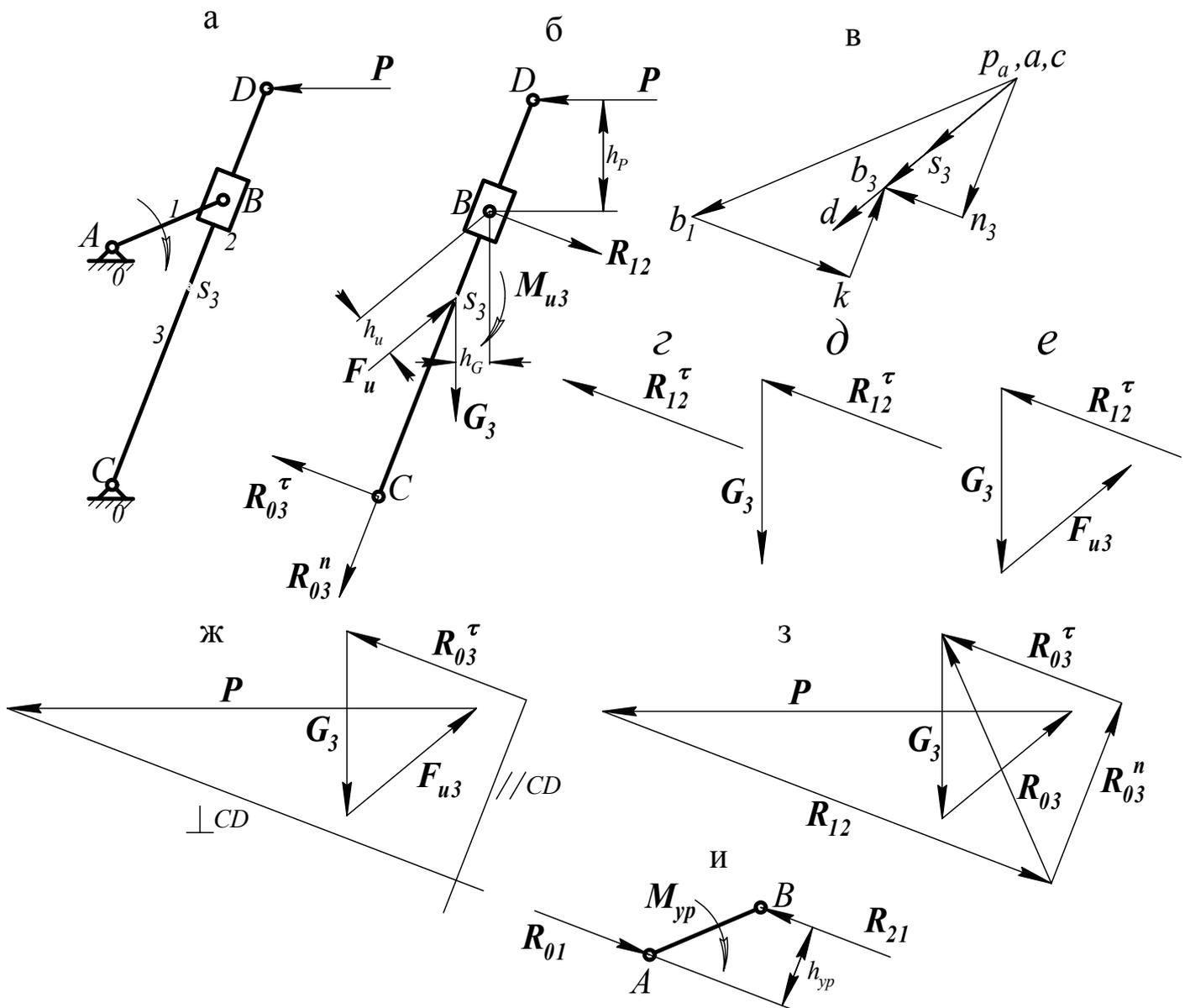


Рис. 32. Силовой анализ кривошипно-кулисного механизма

Из последнего уравнения находят реакцию  $R_{03}^{\tau}$ , направление которой изменяют на противоположное, если её значение получено со знаком минус.

Записывают векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу, графически решая которое, определяют  $R_{03}^n$  и  $R_{12}$

$$R_{03}^n + R_{03}^{\tau} + G_3 + F_{u3} + P + R_{12} = 0.$$

Начинают построение плана сил с первого известного вектора в левой части уравнения т.е. с  $R_{03}^{\tau}$ , который откладывают в определенном масштабе сил (рис. 32, г). Затем последовательно откладывают векторы  $G_3$ ,  $F_{u3}$ ,  $P$  (рис. 32, д, е, ж). Через начало вектора  $R_{03}^{\tau}$  проводят прямую параллельно кулисе, а через конец вектора  $P$  прямую перпендикулярно кулисе до их пересечения (рис. 32, ж). Окончательный вид плана сил – на рис. 32, з, на котором изображена полная реакция  $R_{03}$ , как сумма  $R_{03}^{\tau}$  и  $R_{03}^n$ .

Как уже отмечалось реакция во внутренней кинематической паре группы

$$\mathbf{R}_{32} = -\mathbf{R}_{12}.$$

Последним рассматривают кривошип. Из условия его равновесия определяют реакцию стойки на начальное звено  $\mathbf{R}_{01}$ , величину и направление уравнивающего момента  $M_{yp}$  (рис. 32, и). Алгоритм действий при этом аналогичен изложенному в п. 2.2.1.

### Аналитическое решение.

И для этого механизма оно продолжает ранее выполненный кинематический анализ (см. п. 2.3.3). Дополнительные данные для силового анализа: инерционные характеристики кулисы  $m_3 = 5$  кг;  $I_{s3} = 0,01$  кгм<sup>2</sup>. Вектор  $\mathbf{P}$  силы полезного сопротивления примем в виде

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{P}| = 100 \text{ Н}.$$

Вектор силы тяжести кулисы, считая ускорение силы тяжести равным  $10 \text{ м/с}^2$ ,

$$\mathbf{g} := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_3 := m_3 \cdot \mathbf{g} \quad \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{G}_3| = 50 \text{ Н}.$$

Вектор ускорения центра масс кулисы

$$\mathbf{a}_{s3} = \begin{pmatrix} 2.586 \\ -0.484 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a}_{s3}| = 2.63 \text{ м/с}^2.$$

Сила инерции кулисы

$$\mathbf{F}_{u3} := -\mathbf{a}_{s3} \cdot m_3 \quad \mathbf{F}_{u3} = \begin{pmatrix} -12.928 \\ 2.419 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{F}_{u3}| = 13.152 \text{ Н}.$$

Момент сил инерции кулисы

$$\mathbf{M}_{u3} := -\varepsilon_3 \cdot I_{s3} \quad \mathbf{M}_{u3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.414 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{M}_{u3}| = 0.414 \text{ Нм}.$$

Начинают с определения тангенциальной составляющей реакции  $\mathbf{R}_{03}$ , которую находят из уравнения равновесия моментов сил, действующих на кулису, относительно точки  $B$

$$R_{03}\tau_0 := 1 \text{ Given}$$

$$M_{u3} + \left(\frac{l_3}{2} - l_{31}\right) \times (F_{u3} + G_3) + (l_3 - l_{31}) \times P - l_{31} \times \left[ R_{03}\tau_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ l_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$R_{03\tau_0} := \text{Find}(R_{03\tau_0})$$

$$R_{03\tau} := R_{03\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03\tau} = \begin{pmatrix} -4.91 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03\tau}| = 5.1 \text{ Н.}$$

Нормальную составляющую  $R_{03}^n$  и реакцию  $R_{12}$  находят из векторного уравнения равновесия сил, действующих на всю группу

$$R_{12_0} := 1 \quad R_{03n_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$R_{12_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} + G_3 + F_{u3} + P + R_{03\tau} + R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_1} \\ l_{3_0} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{12_0} \\ R_{03n_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{12_0}, R_{03n_0})$$

$$R_{12} := R_{12_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} 121.49 \\ 37.13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}| = 127.04 \text{ Н}$$

$$R_{03n} := R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_1} \\ l_{3_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03n} = \begin{pmatrix} -3.65 \\ 11.95 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03n}| = 12.49 \text{ Н.}$$

Теперь можно найти полную реакцию в кинематической паре  $C$

$$R_{03} := R_{03\tau} + R_{03n} \quad R_{03} = \begin{pmatrix} -8.56 \\ 10.45 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}| = 13.51 \text{ Н.}$$

Реакция во внутренней кинематической паре группы

$$R_{32} := -R_{12} \quad R_{32} = \begin{pmatrix} -121.488 \\ -37.134 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{32}| = 127.04 \text{ Н.}$$

Реакция кулисного камня на кривошип

$$R_{21} := -R_{12} \quad R_{21} = \begin{pmatrix} -121.49 \\ -37.13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{21}| = 127.04 \text{ Н.}$$

В случае пренебрежения массой кривошипа реакцию на него стойки находят, как

$$R_{01} := -R_{21} \quad R_{01} = \begin{pmatrix} 121.49 \\ 37.13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{01}| = 127.04 \text{ Н.}$$

Уравновешивающий момент

$$M_{yp} := -l_1 \times R_{21} \quad M_{yp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.787 \end{pmatrix} \quad |M_{yp}| = 2.79 \text{ Нм.}$$

Проверяют правильность силового анализа. Вектор скорости центра масс кулисы

$$v_{s3} := \frac{v_D}{2} \quad v_{s3} = \begin{pmatrix} 0.236 \\ 0.072 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s3}| = 0.247 \text{ м/с.}$$

Находят сумму мощностей внешних сил

$$M_{u3} \cdot \omega_3 + (G_3 + F_{u3}) \cdot v_{s3} + P \cdot v_D + M_{yp} \cdot \omega_1 = 0.$$

Расчет произведен правильно.

#### 4.2.4. Пример силового анализа плоского рычажного шестизвенника

Кинематический анализ этого механизма рассмотрен в п. 2.2.4. Примем в качестве дополнительных для силового анализа исходных данных массы звеньев  $m_1 = 2$  кг,  $m_3 = 6$  кг,  $m_4 = 4$  кг и  $m_5 = 8$  кг; моменты инерции звеньев  $I_{s3} = 0,01$  кгм<sup>2</sup>,  $I_{s4} = 0,006$  кгм<sup>2</sup>; силу полезного сопротивления  $P = 300$  Н.

К заданным ранее размерам звеньев добавляется информация о положении центров масс звеньев: центр масс звена 3 лежит на пересечении медиан  $\Delta DCE$ ; центр масс  $s_4$  находится на расстоянии  $\frac{1}{3} l_{EF}$  от точки  $E$ ; точки  $s_1$  и  $s_5$  совпадают соответственно с точками  $A$  и  $F$ .

##### Графическое решение.

Схема механизма для силового анализа, соответствующая положению 2 кривошипа, представлена на рис. 33, а. Там же изображен план ускорений, на котором показаны векторы центров масс звеньев (рис. 33, б). Точка  $s_3$  получена на основании теоремы подобия, как пересечение медиан  $\Delta dce$  на плане. Точка  $s_4$  определена на отрезке  $ef$  плана исходя из пропорциональности соответствующих длин.

Ускорения точек  $s_4$  и  $s_5$

$$a_{s4} = p_a s_4 \cdot \mu_a = 20,35 \cdot 0,25 = 5,09 \text{ м/с}^2; \quad a_{s5} = p_a s_5 \cdot \mu_a = 11,93 \cdot 0,25 = 2,98 \text{ м/с}^2.$$

В этих формулах  $p_a s_4 = 20,35$  мм и  $p_a s_5 = 11,93$  мм – отрезки, изображающие соответствующие векторы на плане ускорений.

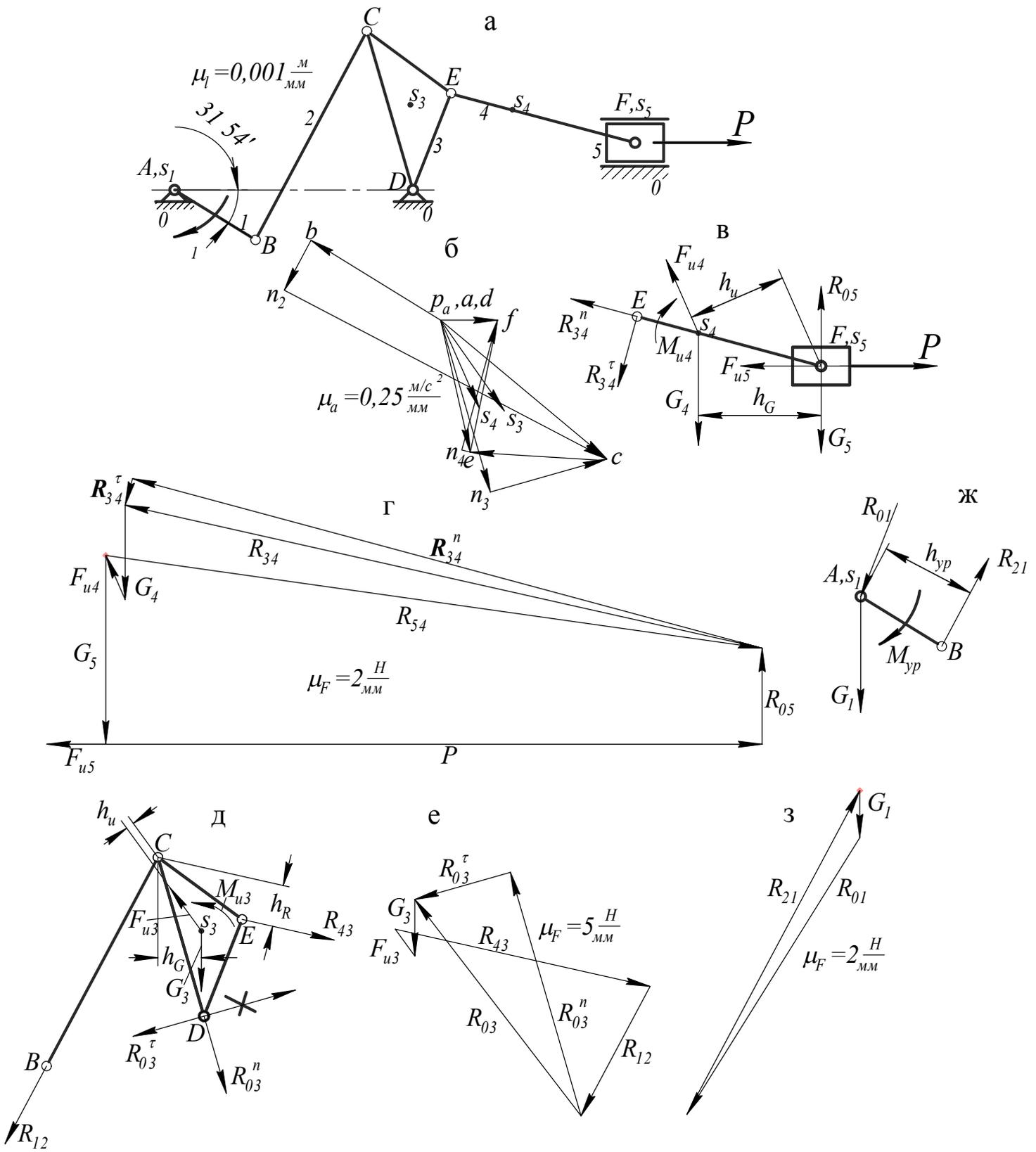


Рис. 33. Рычажный шестизвенник

Инерционные нагрузки на звено 4:

$$F_{u4} = a_{s4} \cdot m_4 = 5,09 \cdot 4 = 20,4 \text{ Н};$$

$$M_{u4} = \varepsilon_4 \cdot I_{S4} = 178 \cdot 0,006 = 1,07 \text{ Нм.}$$

Сила инерции ползуна 5:

$$F_{u5} = a_{s5} \cdot m_5 = 2,98 \cdot 8 = 23,8 \text{ Н.}$$

Начинают силовой анализ с последней присоединенной структурной группы. В этом механизме это группа, состоящая из звеньев 4 и 5. Изображают план группы в определенном масштабе и прикладывают последовательно все нагрузки, действующие на звенья: внешние силы  $P$ ,  $G_4$ ,  $G_5$  и инерционные нагрузки  $F_{u4}$ ,  $F_{u5}$ ,  $M_{u4}$ . Затем прикладывают реакции во внешних кинематических парах группы, которые подлежат определению,  $R_{34}^n$ ,  $R_{34}^r$  и  $R_{05}$  (рис. 33, в).

Уравнение равновесия моментов сил, действующих на звено 4 относительно точки  $F$

$$\Sigma M_F = R_{34}^r \cdot l_{EF} - M_{u4} + G_4 \cdot h_G - F_{u4} \cdot h_u = 0.$$

Плечи сил  $h_G$  и  $h_u$  находят, измерив соответствующие отрезки на плане группы. В нашем примере  $h_G = 25,73 \cdot 0,001 = 0,0257 \text{ м}$  и  $h_u = 20,79 \cdot 0,001 = 0,0208 \text{ м}$ .

Из уравнения находят

$$R_{34}^r = \frac{M_{u4} - G_4 \cdot h_G + F_{u4} \cdot h_u}{l_{EF}} = \frac{1,07 - 40 \cdot 0,0257 + 20,4 \cdot 0,0208}{0,04} = 11,7 \text{ Н.}$$

Уравнение равновесия группы в векторной форме

$$R_{34}^n + R_{34}^r + G_4 + F_{u4} + G_5 + F_{u5} + P + R_{05} = 0.$$

Принимаем масштабный коэффициент  $\mu_F = 2 \text{ Н/мм}$ . В этом масштабе длина отрезка, которым будет изображаться вектор  $R_{34}^r$ , на плане сил –  $11,7/2=5,85 \text{ мм}$ . Из произвольно выбранной точки откладывают этот отрезок соответственно направлению вектора  $R_{34}^r$  (рис. 33, г). Из его конца вертикально вниз откладывают отрезок, изображающий вектор  $G_4$ , длиной  $40/2=20 \text{ мм}$ . Далее, соблюдая последовательность слагаемых в уравнении, откладывают все векторы, последним из которых будет  $P$ . Через конец  $P$  проводят вертикальную прямую, а через начало  $R_{34}^r$  прямую, параллельную отрезку  $EF$  на плане группы до их пересечения. Силовой многоугольник замкнулся. Обозначаем получившиеся два отрезка  $R_{05}^n$  и  $R_{34}^n$  и стрелками показываем концы этих векторов. Показываем реакцию  $R_{34}$ , как сумму соответствующих составляющих. Последней изображают реакцию  $R_{34}$ , которая является суммой векторов  $G_5$ ,  $F_{u5}$ ,  $P$  и  $R_{05}^n$ .

Измеряя соответствующие отрезки на плане сил, находят модули искомых реакций (табл. 5).

Результаты силового анализа структурной группы 4-5

Реакция	$R_{34}$	$R_{54}$	$R_{05}$
Длина вектора на плане сил, мм	137,0	138	20,4
Модуль вектора, Н	274	278	40,7

Переходят к следующей структурной группе 2-3, для которой реакция в шарнире  $E$  будет своеобразной внешней нагрузкой. Изображают группу 2-3 в определенном масштабе и производят подготовку к силовому анализу (рис. 33, д). Реакция  $R_{43}$  направлена противоположно реакции  $R_{34}$ . Так как на звено 2 не действуют внешние нагрузки, линия действия реакции  $R_{12}$  совпадает с продольной осью шатуна  $BC$ . Плечи сил определяют измерением  $h_G = 9,10 \cdot 0,001 = 0,0091$  м,  $h_u = 1,71 \cdot 0,001 = 0,00171$  м и  $h_R = 8,91 \cdot 0,001 = 0,00891$  м.

Ускорение точки  $s_3$

$$a_{s3} = p_a s_3 \cdot \mu_a = 23,4 \cdot 0,25 = 5,85 \text{ м/с}^2.$$

В этой формуле  $p_a s_3 = 23,4$  мм – отрезок, изображающий соответствующий вектор на плане ускорений.

Инерционные нагрузки на звено 3:

$$F_{u3} = a_{s3} \cdot m_3 = 5,85 \cdot 6 = 35,1 \text{ Н};$$

$$M_{u3} = \varepsilon_3 \cdot I_{s3} = 181,4 \cdot 0,01 = 1,81 \text{ Нм}.$$

Уравнение равновесия моментов сил, действующих на звено 3 относительно точки  $C$

$$\Sigma M_C = R_{03}^r \cdot l_{CD} + M_{u3} - G_3 \cdot h_G - F_{u3} \cdot h_u + R_{43} \cdot h_R = 0.$$

Из уравнения

$$R_{03}^r = \frac{-M_{u3} + G_3 \cdot h_G + F_{u3} \cdot h_u - R_{43} \cdot h_R}{l_{CD}} =$$

$$= \frac{-1,81 + 60 \cdot 0,0091 + 35,1 \cdot 0,00171 - 274 \cdot 0,00891}{0,035} = -104,2 \text{ Н}.$$

Полученный результат говорит о том, что первоначально выбранное направление реакции  $R_{03}^r$  (на рис. 33, д зачеркнуто крестиком) – неправильно. Необходимо изменить направление на противоположное.

Уравнение равновесия группы в векторной форме

$$R_{03}^r + R_{03}^n + G_3 + F_{u3} + R_{43} + R_{12} = 0.$$

Принимаем масштабный коэффициент  $\mu_F = 5$  Н/мм. В этом масштабе длина отрезка, которым будет изображаться вектор  $R_{03}^r$ , на плане сил –  $104,2/5 = 20,84$  мм. Из произвольно выбранной точки откладывают этот отрезок (рис. 33, е). Из его конца откладывают вертикально вниз  $G_3$ , длина которого  $60/5 = 12$  мм. Затем  $F_{u3}$ , длина которого  $35,1/5 = 7,02$  мм. Последний известный

вектор  $R_{43}$  длиной  $274/5=54,8$  мм. Через конец  $R_{43}$  проводят линию действия  $R_{12}$ , а через начало  $R_{03}^r$  – линию действия  $R_{03}^n$  до их пересечения. Завершают построение плана сил постановкой стрелок последних двух векторов и отрисовкой полного вектора  $R_{03}$ . Реакция в кинематической паре С, например  $R_{32}$ , равна по модулю и противоположно направлена вектору  $R_{12}$ .

Измеряя соответствующие отрезки на плане сил, находят модули реакций (табл. 6).

Таблица 6

Результаты силового анализа структурной группы 2-3

Реакция	$R_{12}$	$R_{32}$	$R_{03}$
Длина вектора на плане сил, мм	31,02	31,02	57,59
Модуль вектора, Н	155,1	155,1	287,9

В заключение рассматривают равновесие кривошипа (рис. 33, ж). Решая графически (рис. 33, з) векторное уравнение равновесия кривошипа

$$R_{12} + G_1 + R_{01} = 0,$$

находят реакцию

$$R_{01} = 68,9 \cdot 2 = 137,8 \text{ Н.}$$

Затем находят величину уравновешивающего момента

$$M_{yp} = R_{21} \cdot h_{yp} = 155,1 \cdot 0,02 = 3,1 \text{ Нм.}$$

Составляем сводную таблицу 7 результатов силового анализа

Таблица 7

Результаты силового анализа шарнирного шестизвенника

Положение кривошипа	$R_{01}$ , Н	$R_{12}$ , Н	$R_{23}$ , Н	$R_{03}$ , Н	$R_{34}$ , Н	$R_{45}$ , Н	$R_{05}$ , Н	$M_{yp}$ , Нм
2	138	155	155	288	274	275	41,0	3,10

### Аналитическое решение.

Вектор ускорения силы тяжести принимаем в виде

$$g := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом этого векторы сил тяжести звеньев механизма выглядят следующим образом.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор силы полезного сопротивления

$$P := \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить точку, делящую сторону  $CE$  базисного звена  $CED$  пополам  $K$ , то вектор её ускорения запишется так

$$a_K := \frac{a_C + a_E}{2} \quad a_K = \begin{pmatrix} 5.137 \\ -7.171 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_K| = 8.821 \text{ м/с}^2.$$

С помощью этого вектора получим вектор ускорения центра масс третьего звена, которое является треугольником

$$a_{S3} := \begin{pmatrix} \frac{2a_{K0}}{3} \\ \frac{2a_{K1}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{S3} = \begin{pmatrix} 3.425 \\ -4.78 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{S3}| = 5.881 \text{ м/с}^2.$$

Вектор ускорения центра масс четвертого звена

$$a_{S4} := a_E + \frac{a_{FE}}{3} \quad a_{S4} = \begin{pmatrix} 2.033 \\ -4.662 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{S4}| = 5.086 \text{ м/с}^2.$$

Центр масс ползуна 5 совпадает с точкой  $F$ , поэтому

$$a_{S5} := a_F \quad a_{S5} = \begin{pmatrix} 2.982 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{S5}| = 2.982 \text{ м/с}^2.$$

Векторы сил инерции звеньев

$$F_{U3} := -a_{S3} \cdot m_3 \quad F_{U3} = \begin{pmatrix} -20.548 \\ 28.683 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{U3}| = 35.283 \text{ Н}$$

$$F_{U4} := -a_{S4} \cdot m_4 \quad F_{U4} = \begin{pmatrix} -8.133 \\ 18.65 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{U4}| = 20.346 \text{ Н}$$

$$F_{U5} := -a_{S5} \cdot m_5 \quad F_{U5} = \begin{pmatrix} -23.855 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{U5}| = 23.855 \text{ Н}.$$

Моменты сил инерции звеньев

$$M_{U3} := -\varepsilon_3 \cdot I_{S3} \quad M_{U3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.814 \end{pmatrix} \quad |M_{U3}| = 1.814 \text{ Нм}$$

$$M_{u4} := -\varepsilon_4 \cdot l_{s4} \quad M_{u4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.068 \end{pmatrix} \quad |M_{u4}| = 1.068 \text{ Нм} .$$

Из уравнения равновесия моментов сил, действующих на четвертое звено, относительно точки  $F$ , найдем абсциссу вектора тангенциальной составляющей  $R_{34}^r$

$$R_{34\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$M_{u4} - \frac{2l_4}{3} \times (F_{u4} + G_4) - l_4 \times \left[ R_{34\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ -l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$R_{34\tau_0} := \text{Find}(R_{34\tau_0}) .$$

Вектор тангенциальной составляющей

$$R_{34\tau} := R_{34\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_0} \\ -l_{4_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{34\tau} = \begin{pmatrix} -3.032 \\ -11.145 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{34\tau}| = 11.55 \text{ Н} .$$

Из векторного уравнения равновесия группы 4-5 найдем абсциссу нормальной составляющей вектора  $R_{34}^n$  и ординату вектора  $R_{05}$ , которая определяет весь этот вектор

$$R_{34n_0} := 1 \quad R_{05_1} := 1 \quad \text{Given}$$

$$R_{34n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_1} \\ l_{4_0} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{34\tau} + G_4 + F_{u4} + G_5 + F_{u5} + P + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{05_1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{34n_0} \\ R_{05_1} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{34n_0}, R_{05_1}) \quad R_{34n_0} = -265 \quad R_{05_1} = 40 .$$

Вектор

$$R_{05} := \begin{pmatrix} 0 \\ R_{05_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{05} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40.404 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{05}| = 40.404 \text{ Н} .$$

Вектор

$$R_{34n} := R_{34n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{4_1} \\ l_{4_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{34n} = \begin{pmatrix} -264.98 \\ 72.091 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{34n}| = 274.612 \text{ Н .}$$

Реакция в кинематической паре  $E$  звена 3 на звено 4

$$R_{34} := R_{34n} + R_{34\tau} \quad R_{34} = \begin{pmatrix} -268.012 \\ 60.946 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{34}| = 274.855 \text{ Н .}$$

Реакция во внутренней кинематической паре группы 4-5 звена 5 на звено 4

$$R_{54} := -(R_{34} + G_4 + F_{u4}) \quad R_{54} = \begin{pmatrix} 276.145 \\ -39.596 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{54}| = 278.97 \text{ Н .}$$

Переходим к рассмотрению группы 2-3. Из уравнения равновесия моментов сил, действующих на звено 3 относительно точки  $C$ , найдем абсциссу тангенциальной составляющей реакции  $R_{03}^{\tau}$ .

$$R_{03\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$M_{u3} + \frac{2}{3} \left( \frac{l_{31}}{2} - l_3 \right) \times (F_{u3} + G_3) + (l_{31} - l_3) \times R_{43} - l_3 \times \left[ R_{03\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$R_{03\tau_0} := \text{Find}(R_{03\tau_0})$$

$$R_{03\tau} := R_{03\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03\tau} = \begin{pmatrix} -100.345 \\ -28.825 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03\tau}| = 104.4 \text{ Н .}$$

Из векторного уравнения равновесия группы 2-3 найдем абсциссу нормальной составляющей вектора  $R_{03}^n$  и абсциссу вектора  $R_{12}$

$$R_{03n_0} := 1 \quad R_{12_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_1} \\ l_{3_0} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{03\tau} + G_3 + F_{u3} + R_{43} + R_{12_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_1} \\ l_{2_0} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{03n_0} \\ R_{12_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{03n_0}, R_{12_0}) \quad R_{03n_0} = -74 \quad R_{12_0} = -73 .$$

Находим векторы

$$R_{03n} := R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_1} \\ l_{3_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03n} = \begin{pmatrix} -74.349 \\ 258.82 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03n}| = 269.3 \text{ Н}$$

$$R_{12} := R_{12_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_1} \\ l_{2_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} -72.77 \\ -137.731 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}| = 155.8 \text{ Н} .$$

Реакция в шарнире  $D$

$$R_{03} := R_{03n} + R_{03\tau} \quad R_{03} = \begin{pmatrix} -174.695 \\ 229.995 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}| = 288.8 \text{ Н} .$$

Реакция во внутренней кинематической паре группы 2-3 звена 3 на звено 2

$$R_{32} := -R_{12} \quad R_{32} = \begin{pmatrix} 72.77 \\ 137.731 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{32}| = 155.8 \text{ Н} .$$

Реакция в шарнире  $B$  звена 2 на звено 1

$$R_{21} := -R_{12} \quad R_{21} = \begin{pmatrix} 72.77 \\ 137.731 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{32}| = 155.8 \text{ Н} .$$

Из условия равновесия кривошипа  $AB$  находим реакцию стойки 0 на звено 1

$$R_{01} := -(R_{21} + G_1) \quad R_{01} = \begin{pmatrix} -72.77 \\ -117.731 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{01}| = 138.4 \text{ Н} .$$

Уравновешивающий момент на кривошипе

$$M_{yp} := -l_1 \times R_{21} \quad M_{yp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.108 \end{pmatrix} \quad |M_{yp}| = 3.1 \text{ Нм} .$$

Для проверки правильности вычислений найдем сумму мощностей внешних сил, действующих на звенья механизма, которая должна быть равна нулю. Равенство нулю этой суммы говорит о правильности выполненного анализа.

Предварительно определим векторы скоростей центров масс звеньев.

Вектор скорости точки  $K$ , делящей сторону  $CE$  базисного звена  $CED$  пополам

$$v_K := \frac{v_C + v_E}{2} \quad v_K = \begin{pmatrix} -0.445 \\ -0.014 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_K| = 0.445 \text{ м/с}^2.$$

Скорость центров масс звеньев 3 и 4

$$v_{s3} := \begin{pmatrix} \frac{2v_{K0}}{3} \\ \frac{2v_{K1}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{s3} = \begin{pmatrix} -0.297 \\ -0.009 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s3}| = 0.297 \text{ м/с}.$$

$$v_{s4} := v_E + \frac{v_{FE}}{3} \quad v_{s4} = \begin{pmatrix} -0.349 \\ 0.088 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s4}| = 0.36 \text{ м/с}.$$

Центр масс ползуна 5 совпадает с точкой  $F$

$$v_{s5} := v_F \quad v_{s5} = \begin{pmatrix} -0.373 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{s5}| = 0.373 \text{ м/с}^2.$$

Сумма мощностей внешних сил, действующих на звенья механизма  $M_{u3} \cdot \omega_3 + (G_3 + F_{u3}) \cdot v_{s3} + M_{u4} \cdot \omega_4 + (G_4 + F_{u4}) \cdot v_{s4} + (P + F_{u5}) \cdot v_{s5} + M_{yp} \cdot \omega_1 = -0$ .

Убеждаемся, что анализ выполнен без ошибок.

Результаты силового анализа сводим в табл. 8.

Таблица 8

Картина изменения реакций в кинематических парах и уравновешивающего момента

Положения кривошипа	$R_{01}$ , Н	$R_{12}$ , Н	$R_{23}$ , Н	$R_{03}$ , Н	$R_{34}$ , Н	$R_{45}$ , Н	$R_{05}$ , Н	$M_{yp}$ , Нм
1	521	530	530	435	384	350	50,2	0
2	138	156	156	289	275	279	40,4	3,10
3	61,6	78,2	78,2	317	280	280	12,1	0,70
4	63,1	73,2	73,2	297	286	285	11,5	0,20
5	121	127	127	242	286	285	13,9	2,0
6	225	231	231	233	341	324	31,0	4,40

Если сравнить результаты силового анализа во втором положении, полученные графически (табл. 7) и аналитически (табл. 8), можно сделать вывод о достаточно высокой точности графического метода, которая стала возможной при использовании современных компьютерных графических программ. В настоящем пособии для этого использовали программу «Компас

V10» российской компании «АСКОН». Незначительная разница в результатах объясняется определенной точностью вычисления расчетных длин векторов при графическом решении. Например, какой-либо вектор имеет точную длину 40,3568127 мм. Как правило, его записывают с точностью до сотых долей миллиметра т.е. 40,36 мм. И откладывают вектор этой длины, что и приводит к небольшой погрешности результата. Но, если задавать длины откладываемых векторов точно, то результат графического метода был бы аналогичным результату, полученному аналитически. Поэтому основное преимущество изложенного выше аналитического метода – возможность быстрого получения результатов для любого произвольного значения обобщенной координаты, а следовательно, возможность исследования поведения кинематических и динамических параметров механизма за один цикл установившегося движения.

## 5. Исследование кинематики и динамики механизма привода качающегося конвейера

В этой главе исследуем кинематику и динамику плоского шарнирного шестизвенника рассмотренным выше аналитическим методом.

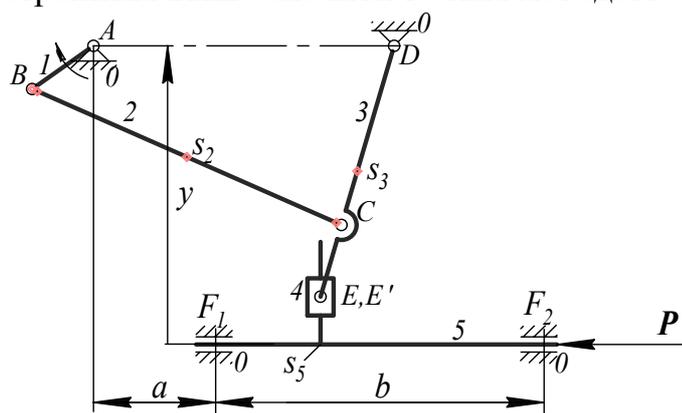


Рис. 34. Схема механизма привода качающегося конвейера

Для анализа примем рычажный механизм привода качающегося конвейера (рис. 34), включающий две структурные группы второго класса видов ВВВ (группа 2-3) и ВПВ (группа 4-5). Первая состоит из шатуна 2 и коромысла 3, а вторая включает кулису 5 и камень 4. В составе механизма имеется семь кинематических пар пятого класса, две из которых поступательные ( $E'$  и  $F$ ). Кинематическая пара  $E$  образована звеньями 3 и 4, а  $E'$  – звеньями 4 и 5. Пара  $F$ , образованная кулисой 5 и стойкой 0, конструктивно выполнена в виде двух опор  $F_1$  и  $F_2$ .

Выходным звеном является кулиса, движущаяся возвратно-поступательно и связанная с желобом, по которому перемещается сыпучий груз.

Значение угловой скорости кривошипа 1 примем  $\omega_1 = 7 \text{ с}^{-1}$ . Размеры звеньев приняты следующими:  $l_{AB} = 0,1 \text{ м}$ ;  $l_{BC} = 0,45 \text{ м}$ ;  $l_{CD} = 0,25 \text{ м}$ ;  $l_{AD} = 0,4 \text{ м}$ ;  $l_{DE} = 0,35 \text{ м}$ ; другие размеры:  $a = 0,15 \text{ м}$ ;  $b = 0,45 \text{ м}$ ;  $y = 0,4 \text{ м}$ . Инерционные

характеристики звеньев: массы звеньев  $m_2 = 10$  кг,  $m_3 = 8$  кг и  $m_5 = 12$  кг; моменты инерции звеньев  $I_{S2} = 0,6$  кгм<sup>2</sup>,  $I_{S3} = 0,1$  кгм<sup>2</sup>. Центры масс звеньев 2 и 3 лежат на их серединах. Сила сопротивления при движении желоба и связанной с ним кулисы 5 слева направо  $P=1500$  Н, а справа налево  $P=4000$  Н.

Производим замену звеньев механизма соответствующими векторами (рис. 35).

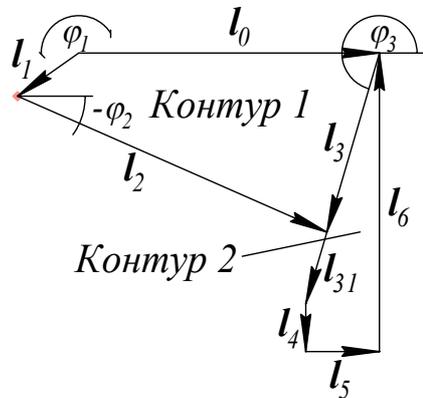


Рис. 35. Векторное представление исследуемого механизма

Начинаем с записи в Mathcad исходных данных. Для упрощения обозначим  $l_1 = l_{AB}$ ,  $l_2 = l_{BC}$ ,  $l_3 = l_{CD}$ ,  $l_{31} = l_{DE}$ ,  $l_0 = l_{AD}$ ,  $l_6 = y$ . Все линейные размеры в метрах. Длины векторов  $l_4$  и  $l_5$  – величины переменные.

Итак,

$$l_0 := 0.4 \quad l_1 := 0.1 \quad l_2 := 0.45 \quad l_3 := 0.25 \quad l_{31} := 0.35 \quad l_6 := 0.4$$

Определяем значения углов  $\phi_{1m}$  и  $\phi_{3m}$ , соответствующих правому крайнему положению коромысла 3. Их находят из векторного уравнения замкнутости для контура 1.

$$\phi_{1m} := 1 \quad \phi_{3m} := 4 \quad \text{Given}$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_{1m}) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_{1m}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_{1m}) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_{1m}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_{3m}) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_{3m}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1m} \\ \phi_{3m} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_{1m}, \phi_{3m}) \quad \phi_{1m} = -24.62 \text{ deg} \quad \phi_{3m} = 293.578 \text{ deg}$$

Принимаем в качестве начального значения обобщенной координаты  $\phi_1 = \phi_{1m}$ . Теперь запишем выражение, с помощью которого будем задавать последовательные значения угла  $\phi_1$  при повороте кривошипа на  $360^\circ$ , изменяя его, например, через  $60^\circ$

$$\phi_1 := \phi_{1m} - (n - 1) \cdot \frac{\pi}{3},$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

Выполним кинематический и силовой анализ механизма для  $n = 3$  т.е. для положения кривошипа, когда его угол поворота

$$\phi_1 = -144.62 \text{ deg}$$

Найдем углы, определяющие положения шатуна и коромысла.

$$\phi_2 := 4 \quad \phi_3 := 4 \quad \text{Given} \quad \pi < \phi_2 < 2\pi \quad \pi < \phi_3 < 2\pi$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_2, \phi_3) \quad \phi_2 = 336.131 \text{ deg} \quad \phi_3 = 253.735 \text{ deg}$$

Из векторного уравнения замкнутости для второго контура определим  $l_4$  и  $l_5$

$$l_4 := 1 \quad l_5 := 1 \quad \text{Given}$$

$$\begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos(\phi_3) \\ l_{31} \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} l_4 \\ l_5 \end{pmatrix} := \text{Find}(l_4, l_5) \quad l_4 = -0.064 \quad l_5 = 0.098$$

Величина  $l_5$  характеризует положение кулисы 5 относительно опоры  $D$ .

Изменяя угол  $\varphi_1$  (задавая  $n$  значения от 1 до 6) получаем картину изменения положения звеньев за один оборот кривошипа.

Результаты геометрического анализа механизма для шести положений кривошипа представлены в табл. 9.

Таблица 9

Результаты геометрического анализа механизма

Положения кривошипа.	$\varphi_1$ °	$\varphi_2$ °	$\varphi_3$ °	$l_5$ , м
1	-24,26	335,4	293,6	-0,14
2	-84,62	340,8	277,9	-0,048
3	-144,6	336,1	253,7	0,098
4	-204,6	324,8	240,5	0,172
5	-264,6	313,2	246,1	0,142
6	-324,6	316,9	272,3	-0,014

Представим все линейные размеры механизма в виде векторов

$$l_1 := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi_1) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 := \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3 := \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{31} := \begin{pmatrix} l_{31} \cdot \cos(\phi_3) \\ l_{31} \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_5 := \begin{pmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_6 \end{pmatrix}$$

Найдем вектор скорости точки  $B$  кривошипа, для чего его угловую скорость зададим в виде вектора.

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad v_B := \omega_1 \times l_1 \quad v_B = \begin{pmatrix} -0.405 \\ 0.571 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_B| = 0.7 \text{ м/с.}$$

Выполняем действия по определению скорости точки  $C$ .

$$v_{C_0} := 1 \quad v_{CB_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} = v_B + v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_C \\ v_{CB_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(v_C, v_{CB_0})$$

$$v_{C_0} = -0.583 \quad v_{CB_0} = -0.177$$

$$v_C := v_{C_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ -l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{CB} := v_{CB_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ -l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{CB} = \begin{pmatrix} -0.177 \\ -0.401 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_C = \begin{pmatrix} -0.583 \\ 0.17 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{CB}| = 0.438 \text{ м/с} \quad |v_C| = 0.607 \text{ м/с}$$

Угловые скорости шатуна 2 и коромысла 3

$$\omega_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given}$$

$$\omega_1 \times l_1 + \omega_2 \times l_2 = \omega_3 \times l_3 \quad \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(\omega_2, \omega_3)$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.974 \end{pmatrix} \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.428 \end{pmatrix} \quad |\omega_2| = 0.974 \text{ с}^{-1} \quad |\omega_3| = 2.43 \text{ с}^{-1}$$

Скорости точек  $E_3$  и  $E_5$

$$v_{E3} := \frac{|l_{31}|}{|l_3|} \cdot v_C \quad v_{E3} = \begin{pmatrix} -0.816 \\ 0.238 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{E3}| = 0.85 \text{ м/с}$$

$$v_{E5} := \begin{pmatrix} v_{E3_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{E5} = \begin{pmatrix} -0.816 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_{E5}| = 0.816 \text{ м/с}$$

Таблица 10

Результаты кинематического анализа механизма  
(скорости)

Положения кривошипа	$v_B$ , м/с	$v_{CB}$ , м/с	$v_C$ , м/с	$v_{E_3}$ , м/с	$v_{E_5}$ , м/с	$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_2$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_3$ , с <sup>-1</sup>
1	0,7	0,7	0	0	0	7	1,56	0
2	0,7	0,034	0,715	1,001	0,992	7	0,077	2,86
3	0,7	0,438	0,607	0,85	0,816	7	0,974	2,43
4	0,7	0,701	0,129	0,18	0,157	7	1,56	0,516
5	0,7	0,372	0,466	0,652	0,596	7	0,826	1,86
6	0,7	0,835	0,977	1,37	1,37	7	1,86	3,91

Ускорение точки  $B$

$$a_B := \omega_1 \times v_B \quad a_B = \begin{pmatrix} -3.995 \\ -2.837 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_B| = 4.9 \text{ м/с}^2$$

Ускорение точки  $C$

$$a_{CBn} := \omega_2 \times v_{CB} \quad a_{CBn} = \begin{pmatrix} -0.39 \\ 0.173 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CBn}| = 0.427 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CDn} := \omega_3 \times v_C \quad a_{CDn} = \begin{pmatrix} 0.413 \\ 1.414 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CDn}| = 1.47 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CB\tau_0} := 1 \quad a_{CD\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$a_B + a_{CBn} + a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{20} \\ -l_{21} \\ 0 \end{pmatrix} = a_{CDn} + a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{30} \\ -l_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_{CB\tau_0}, a_{CD\tau_0}) \quad \begin{pmatrix} a_{CB\tau_0} \\ a_{CD\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.99 \\ 2.202 \end{pmatrix}$$

$$a_{CB\tau} := a_{CB\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{2_0} \\ l_{2_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CB\tau} = \begin{pmatrix} -0.99 \\ -2.238 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CB\tau}| = 2.447 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CD\tau} := a_{CD\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{3_0} \\ l_{3_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{CD\tau} = \begin{pmatrix} 2.202 \\ -0.642 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{CD\tau}| = 2.294 \text{ м/с}^2$$

$$a_C := a_B + a_{CB\tau} + a_{CD\tau} \quad a_C = \begin{pmatrix} 2.615 \\ 0.772 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_C| = 2.73 \text{ м/с}^2$$

Ускорения точек  $E_3$  и  $E_5$

$$a_{E3} := \frac{|l_{31}|}{|l_3|} \cdot a_C \quad a_{E3} = \begin{pmatrix} 3.66 \\ 1.081 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{E3}| = 3.817 \text{ м/с}^2$$

$$a_{E5} := \begin{pmatrix} a_{E3_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{E5} = \begin{pmatrix} 3.66 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_{E5}| = 3.66 \text{ м/с}^2$$

Угловые ускорения звеньев 2 и 3

$$\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } a_{CB\tau} = \varepsilon_2 \times l_2 \quad \varepsilon_2 := \text{Find}(\varepsilon_2) \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.438 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon_2| = 5.44 \text{ с}^{-2}$$

$$\varepsilon_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Given } a_{CD\tau} = \varepsilon_3 \times l_3 \quad \varepsilon_3 := \text{Find}(\varepsilon_3) \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.175 \end{pmatrix} \quad |\varepsilon_3| = 9.18 \text{ с}^{-2}$$

Векторы ускорений центров масс звеньев

$$a_{s2} := \frac{a_B + a_C}{2} \quad a_{s3} := \frac{a_{E3}}{2} \quad a_{s5} := a_{E5}$$

$$a_{s2} = \begin{pmatrix} 3.305 \\ 1.805 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{s3} = \begin{pmatrix} 1.83 \\ 0.54 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{s5} = \begin{pmatrix} 3.66 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Результаты кинематического анализа механизма  
(ускорения)

Положения кривошипа	$a_B, \text{ м/с}^2$	$a_C, \text{ м/с}^2$	$a_{E_3}, \text{ м/с}^2$	$a_{E_5}, \text{ м/с}^2$	$a_{S_2}, \text{ м/с}^2$	$a_{S_3}, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon_2, \text{ с}^{-1}$	$\varepsilon_3, \text{ с}^{-2}$
1	4,9	8,98	12,6	11,5	6,39	6,29	14,9	35,9
2	4,9	2,40	3,35	2,12	3,51	1,68	7,12	4,99
3	4,9	2,73	3,82	3,66	3,76	1,91	5,44	9,18
4	4,9	3,75	5,25	4,62	4,32	2,63	1,02	15,0
5	4,9	4,32	6,05	5,91	3,73	3,03	12,1	16,9
6	4,9	3,83	5,36	0,176	2,00	2,68	17,1	1,11

Введем инерционные характеристики звеньев (массы в кг и моменты инерции в  $\text{кгм}^2$ ).

$$m_2 := 10 \quad m_3 := 8 \quad m_5 := 15 \quad I_{S_2} := 0.6 \quad I_{S_3} := 0.1$$

Силы тяжести звеньев, принимая ускорение свободного падения равным  $10 \text{ м/с}^2$ ,

$$g := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_2 := m_2 \cdot g \quad G_3 := m_3 \cdot g \quad G_5 := m_5 \cdot g$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -150 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сила полезного сопротивления в зависимости от направления движения кулисы 5

$$P := \begin{cases} -1500 & \text{if } v_{E5_0} > 0 \\ 4000 & \text{if } v_{E5_0} < 0 \\ 0 & \text{if } |v_{E5_0}| < 0.001 \end{cases} \quad P := \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Силы инерции звеньев

$$F_{u2} := -a_{S_2} \cdot m_2 \quad F_{u2} = \begin{pmatrix} -33.049 \\ -18.045 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u2}| = 37.7 \text{ Н}$$

$$F_{u3} := -a_{S_3} \cdot m_3 \quad F_{u3} = \begin{pmatrix} -14.642 \\ -4.323 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u3}| = 15.3 \text{ Н}$$

$$F_{u5} := -a_{S_5} \cdot m_5 \quad F_{u5} = \begin{pmatrix} -54.907 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |F_{u5}| = 54.9 \text{ Н}$$

Моменты сил инерции звеньев

$$M_{u2} := -\varepsilon_2 \cdot I_{s2} \quad M_{u2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.263 \end{pmatrix} \quad |M_{u2}| = 3.26 \text{ Нм}$$

$$M_{u3} := -\varepsilon_3 \cdot I_{s3} \quad M_{u3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.918 \end{pmatrix} \quad |M_{u3}| = 0.918 \text{ Нм}$$

Из условия равновесия группы 4-5

$$R_{05} := -G_5 \quad R_{05} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{34} := -(F_{u5} + P)$$

$$R_{34} = \begin{pmatrix} -3945 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{34}| = 3945 \text{ Н}$$

Реакция кулисы на камень

$$R_{54} := -R_{34} \quad R_{54} = \begin{pmatrix} 3945 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{54}| = 3945 \text{ Н}$$

Найдем реакции в опорах  $F_1$  и  $F_2$ . Из условия равновесия кулисы (рис. 36) найдем

$$R_{051} := R_{05} \cdot \frac{a + b - l_{00} - l_{310}}{b} \quad R_{052} := R_{05} - R_{051}$$

$$R_{051} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{052} = \begin{pmatrix} 0 \\ 130 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{051}| = 20 \text{ Н} \quad |R_{052}| = 130 \text{ Н}$$

Переходим к группе 2-3. Для рассмотрения равновесия звена 3 найдем плечи сил, действующих на это звено относительно точки  $C$ .

$$l_{s3C} := \frac{l_{31}}{2} - l_3 \quad l_{s3C} = \begin{pmatrix} 0.021 \\ 0.072 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_{EC} := l_{31} - l_3 \quad l_{EC} = \begin{pmatrix} -0.028 \\ -0.096 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тангенциальную составляющую  $R_{03}^r$  найдем из уравнения равновесия моментов сил относительно точки  $C$  с учетом того, что

$$R_{43} := -R_{34}$$

$$M_{03\tau} := -(l_{EC} \times R_{43} + M_{u3} + l_{s3C} \times F_{u3} + l_{s3C} \times G_3) \quad M_{03\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -377.1 \end{pmatrix}$$

$$R_{03\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$M_{03\tau} = -l_3 \times \begin{pmatrix} R_{03\tau_0} \\ -\frac{l_3}{l_1} \cdot R_{03\tau_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03\tau_0} := \text{Find}(R_{03\tau_0}) \quad R_{03\tau_0} = 1448 \text{ Н}$$

$$R_{03\tau} := R_{03\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_3 \\ -\frac{l_3}{l_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03\tau} = \begin{pmatrix} 1448 \\ -422 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03\tau}| = 1508 \text{ Н}$$

Аналогично для звена 2

$$M_{12\tau} := -[M_{u2} + (-0.5l_2) \times F_{u2} + (-0.5l_2) \times G_2]$$

$$M_{12\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30.6 \end{pmatrix}$$

$$R_{12\tau_0} := 1 \quad \text{Given}$$

$$M_{12\tau} = -l_2 \times \begin{pmatrix} R_{12\tau_0} \\ -\frac{l_2}{l_1} \cdot R_{12\tau_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12\tau_0} := \text{Find}(R_{12\tau_0}) \quad R_{12\tau_0} = 27.48 \text{ Н}$$

$$R_{12\tau} := R_{12\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_2 \\ -\frac{l_2}{l_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12\tau} = \begin{pmatrix} 27.481 \\ 62.103 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12\tau}| = 67.9 \text{ Н}$$

Из векторного уравнения равновесия группы 2-3 находим нормальные составляющие искомых реакций

$$R_{03n_0} := 10 \quad R_{12n_0} := 10 \quad \text{Given}$$

$$R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_3 \\ -\frac{l_3}{l_1} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{03\tau} + G_3 + F_{u3} + R_{43} + G_2 + F_{u2} + R_{12\tau} + R_{12n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_2 \\ -\frac{l_2}{l_1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{03n_0} \\ R_{12n_0} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{03n_0}, R_{12n_0}) \quad R_{03n_0} = -469 \quad R_{12n_0} = -4904 \text{ Н}$$

$$R_{03n} := R_{03n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{31} \\ l_{30} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{03n} = \begin{pmatrix} -469 \\ -1607 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03n}| = 1674 \text{ Н}$$

$$R_{12n} := R_{12n_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{20} \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_{12n} = \begin{pmatrix} -4904 \\ 2170 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12n}| = 5363 \text{ Н}$$

Полные реакции во внешних кинематических парах группы 2-3

$$R_{03} := R_{03n} + R_{03\tau} \quad R_{03} = \begin{pmatrix} 979 \\ -2030 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{03}| = 2253 \text{ Н}$$

$$R_{12} := R_{12n} + R_{12\tau} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} -4876 \\ 2232 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{12}| = 5363 \text{ Н}$$

Реакция в кинематической паре C

$$R_{32} := -(R_{12} + G_2 + F_{u2}) \quad R_{32} = \begin{pmatrix} 4909 \\ -2114 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{32}| = 5345 \text{ Н}$$

Рассматривая равновесие кривошипа получаем значения остальных реакций и величину уравновешивающего момента

$$R_{21} := -R_{12} \quad R_{01} := -R_{21} \quad R_{01} = \begin{pmatrix} -4876 \\ 2232 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |R_{01}| = 5363 \text{ Н}$$

$$M_{yp} := -l_1 \times R_{21} \quad M_{yp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -464.332 \end{pmatrix} \quad |M_{yp}| = 464 \text{ Нм}$$

Сумма мощностей всех внешних нагрузок, действующих на механизм

$$M_{u2} \cdot \omega_2 + (G_2 + F_{u2}) \cdot v_{s2} + M_{u3} \cdot \omega_3 + (G_3 + F_{u3}) \cdot v_{s3} + (F_{u5} + P) \cdot v_{s5} + M_{yp} \cdot \omega_1 = -0,$$

что говорит о правильности выполненного расчета.

Таблица 12

Результаты силового анализа механизма

Положения кривошипа	$R_{01},$ Н	$R_{12},$ Н	$R_{32},$ Н	$R_{03},$ Н	$R_{43},$ Н	$R_{54},$ Н	$R_{05},$ Н	$R_{05}^1,$ Н	$R_{05}^2,$ Н	$M_{yp},$ Нм
1	462	462	364	142	173	173	150	20	130	4,86
2	6307	6307	6253	2687	4032	4032	150	51	99	570
3	5363	5363	5345	2253	3945	3945	150	99	51	464
4	4830	4830	4815	2670	3930	3930	150	124	26	93
5	219	2190	2230	1740	1590	1590	150	114	36	136
6	2970	2970	3055	2335	1505	1505	150	62	88	291

В заключение приведем графический вариант решения этой задачи. На рис. 36 представлены планы механизма для шести положений кривошипа, планы скоростей и ускорений механизма в положении 3 и силовой анализ механизма в этом же положении.

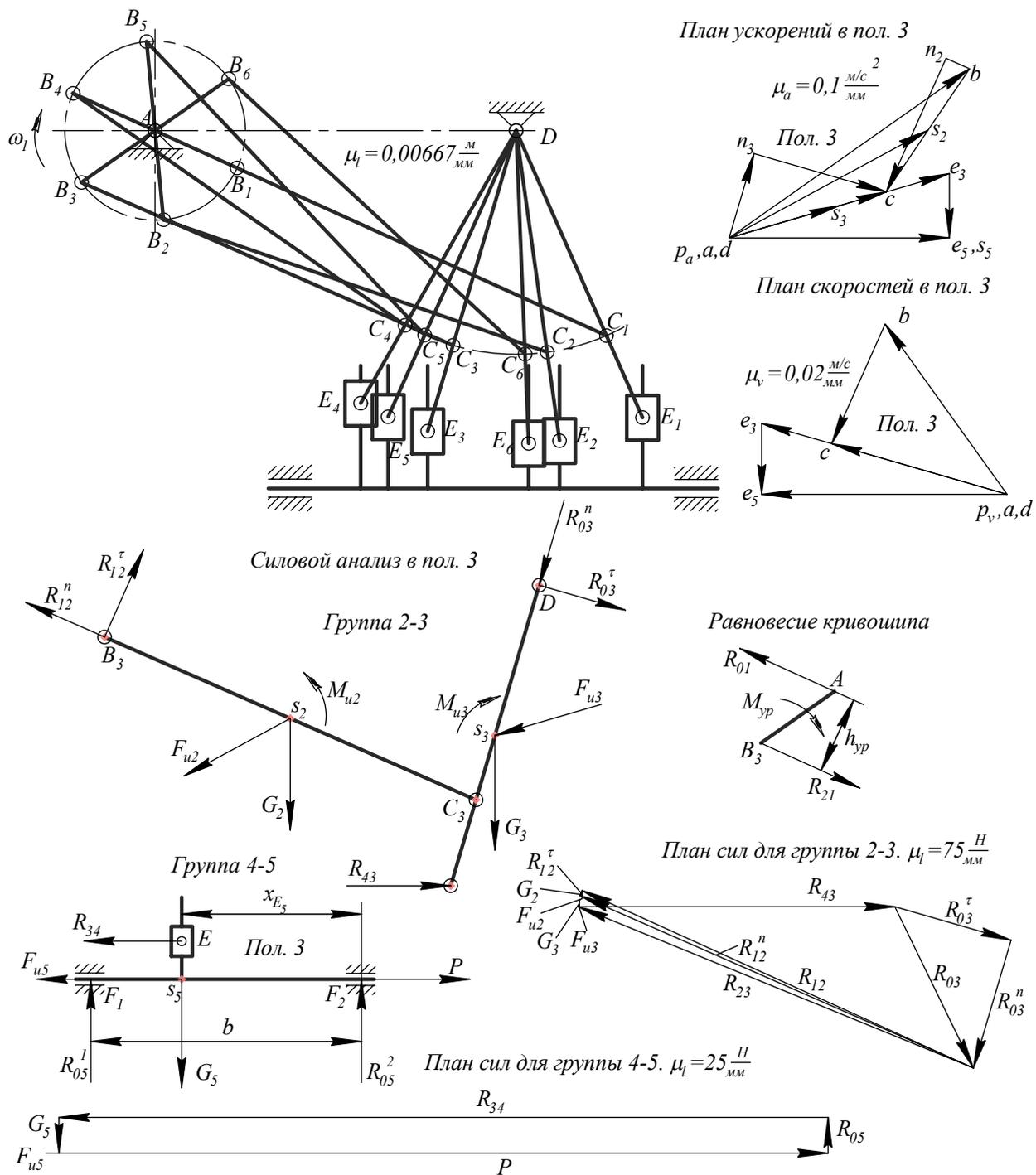


Рис. 36. Графический вариант анализа механизма привода качающегося конвейера в положении 3

### Список литературы

1. Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М. Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы Mathcad. Теория механизмов и машин. – Санкт-Петербург. – 2008. – № 1.
2. Мацюк І.М., Шляхов Е.М. Аналітичний метод дослідження важільних механізмів за допомогою програми Mathcad. Науковий вісник НГУ.– Дніпропетровськ. – 2008. – №2.
3. Мацюк І.М., Шляхов Е.М. Динамічний аналіз плоских шарнірних механізмів за допомогою програми Mathcad. Науковий вісник НГУ.– Дніпропетровськ. – 2008. – №3.
4. Мацюк І.М., Шляхов Е.М. Використання програмного продукту Mathcad для розв'язання задач теорії механізмів і машин. Збірник наукових праць НГУ. – Дніпропетровськ. – 2008. – №31.
5. Мацюк І.М., Шляхов Е.М. Використання програми Mathcad при дослідженні кінематики та динаміки механізмів. Подъемно-транспортная техника. – 2008. – №4.
6. Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М. Аналіз плоского важільного механізму. Методичні вказівки до виконання домашнього завдання для студентів немеханічних спеціальностей. Дніпропетровськ, РВК НГУ України, 2007.
7. Бертяев В.Д. теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. . – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
8. Дьяконов В.П. Mathcad 2000. – СПб.: Питер Бук, 2000. – 586 с.
9. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 538 с.
10. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. Учебник для вузов. М., «Высш.школа», 1978. – 269 с